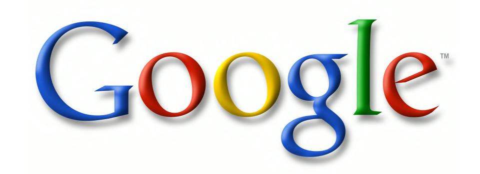
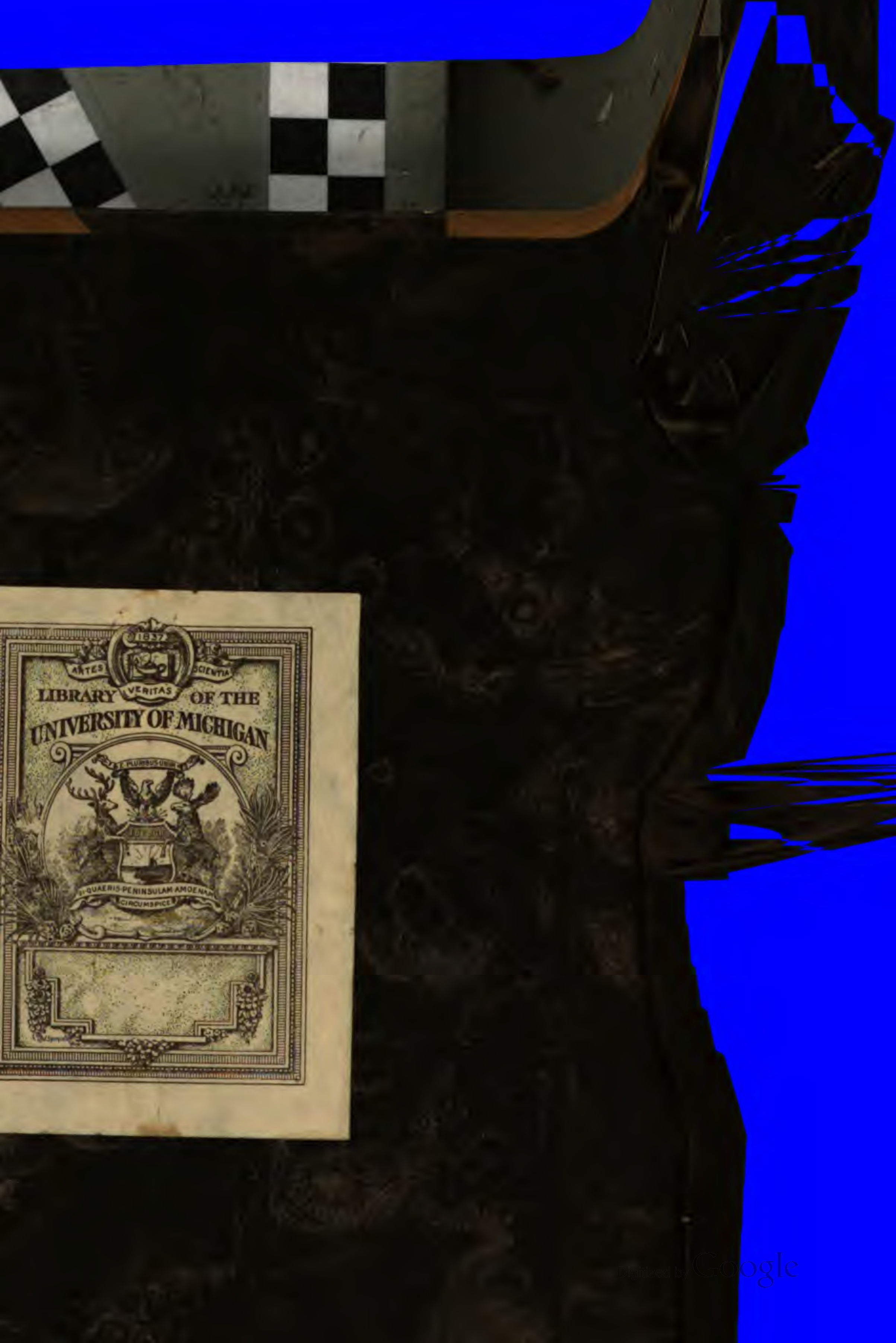




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



# HANDBUCH DER PHYSIK

## ZWEITE AUFLAGE

UNTER MITWIRKUNG VON

Prof. Dr. R. ABEGG-Breslau, Prof. Dr. F. AUERBACH-Jena, Dr. A. BEMPORAD-Catania, Prof. Dr. F. BRAUN-Strassburg, Prof. Dr. E. BRODHUN-Charlottenburg, Prof. Dr. M. CANTOR-Würzburg, Prof. Dr. S. CZAPSKI†-Jena, Prof. Dr. TH. DES COUDRES-Leipzig, Prof. Dr. P. DRUDE†-Berlin, Prof. Dr. P. DUDEN-Höchst a. Main, Dr. O. EPPENSTEIN-Jena, Prof. Dr. K. EXNER-Innsbruck, Prof. Dr. W. FEUSSNER-Marburg, Dr. H. GERDIEN-Göttingen, Prof. Dr. L. GRAETZ-München, Prof. Dr. G. JÄGER-Wien, Prof Dr. H. KAYSER-Bonn, Prof. Dr. R. LUTHER-Leipzig, Prof. Dr. F. F. MARTENS-Berlin, Prof. Dr. A. OBERBECK†-Tübingen, Prof. Dr. F. POCKELS-Heidelberg, Dr. K. PULFRICH-Jena, Dr. L. RELLSTAB-Hannover, Dr. M. v. ROHR-Jena, Dr. O. SACKUR-Breslau, R. SCHÜTTAUF-Jena, Prof. Dr. J. STARK-Hannover, Dr. H. v. STEINWEHR-Charlottenburg, Prof. Dr. R. STRAUBEL-Jena, Prof. Dr. K. WAITZ-Tübingen

HERAUSGEGEBEN

VON

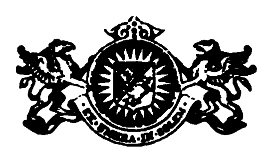
DR. A. WINKELMANN
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA

---

FÜNFTER BAND

## ELEKTRIZITÄT UND MAGNETISMUS II

MIT 409 ABBILDUNGEN



LEIPZIG
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH
1908

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

# Artikelverzeichnis nebst Inhaltsangabe.

## Magnetismus.

Von F. Auerbach.

# Elektrizität.

# Magnetismus

Von F. AUERBACH

**Übersicht über das Gebiet.** Die Kenntnis der magnetischen Eigenschaft geht zwar ebenso wie die der elektrischen bis in das frühe Altertum zurück: einige der wichtigsten Grundtatsachen wurden aber erst in der Neuzeit entdeckt, und erst im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts hat das Gebiet seine jetzige, früher nicht geahnte Ausdehnung angenommen. Während ferner die magnetischen Erscheinungen früher ein in sich abgeschlossenes Ganzes bildeten, haben sie nunmehr einen vielfältigen und zum Teil sehr innigen Zusammenhang mit allen anderen Gebieten der Physik gewonnen, ganz besonders mit den elektrischen Erscheinungen. Es handelt sich hier einerseits um jene Wechselwirkungen zwischen elektrischen und magnetischen Kräften, welche die „elektromagnetischen" und die „magnetelektrischen" Erscheinungen hervorrufen, andererseits (und im Zusammenhange hiermit) darum, daß man häufig mit gutem Erfolge Magnete als elektrische Stromgebilde oder umgekehrt Ströme als magnetische Gebilde auffassen kann. Auch mit den Lichterscheinungen besteht ein derartiger doppelter Zusammenhang: tatsächliche Wechselwirkungen einerseits und der Aufbau der Lichttheorie auf elektromagnetischer Grundlage andererseits. Von großem Interesse sind schließlich auch die Beziehungen des Magnetismus zur Mechanik und zur Lehre von der Wärme.

Unter diesen Umständen ist es begreiflicherweise unmöglich, das Gebiet scharf abzugrenzen, und die Frage, wo gewisse Erscheinungen oder Theorien einzuordnen seien, wird oft nur nach äußeren Rücksichten entschieden werden können und dürfen. Auch für die Gliederung des Gebietes selbst gibt es keine zwingende Richtschnur, und es ist kaum vermeidlich, Einzelheiten vorwegzunehmen oder an späterer Stelle nachzutragen.

Im folgenden ist das ganze Gebiet in neun Artikel eingeteilt, nämlich

I. Magnetismus im allgemeinen (Herstellung, Eigenschaften und Wirkungen dauernder, unveränderlicher Magnete).

II. Magnetische Messungen (ebenfalls insoweit unveränderliche Magnete in Betracht kommen).

III. Magnetische Induktion (Erregung und Veränderung des Magnetismus, Remanenz, Hysteresis, Schirmwirkung usw.).

IV. Magnetische Eigenschaften der verschiedenen Stoffe (Ferro-, Para-, Dia-, Kristallmagnetismus).

V.—VII. Beziehungen zur Mechanik, zur Wärme, und zum Licht.

VIII. Beziehungen zur Elektrizität, d. h. Elektromagnetismus.

IX. Erdmagnetismus (insoweit eine Übersicht über dieses Gebiet für die Physik selbst, unabhängig von der Geophysik, von Bedeutung ist)[1].

[1] Auf die Vorgeschichte des Magnetismus kann hier nicht eingegangen werden. Nach schwachen Ansätzen, welche die Griechen und die Araber machten, sind GEORG HARTMANN (1544) und ROBERT NORMAN (1580) als Vorläufer, WILLIAM GILBERT (1600) aber und ATHANASIUS KIRCHER (1634) als Begründer der Lehre anzusehen. Ausführliche Angaben findet man in: J. ROSENBERGER, Geschichte der Physik (Braunschweig 1882) und M. LAMONT, Handbuch des Magnetismus (Leipzig 1867, namentlich S. 423—450).

# I. Magnetismus im allgemeinen.

Von F. AUERBACH.

## A) Material, Form und Herstellung der Magnete und Elektromagnete.

Die erste Frage, die sich uns darbietet, ist die nach dem Material, aus dem man Magnete herstellt, nach den Formen, die man diesem Material zu geben hat, und nach dem Verfahren, wie man sie in den magnetischen Zustand bringt. Wir wollen deshalb mit diesen Fragen beginnen, müssen dabei aber einige Hauptbegriffe der ganzen Lehre, über die ev. weiter unten nachzulesen ist, naturgemäß schon voraussetzen.

**Material.** In früherer Zeit bediente man sich zu magnetischen Untersuchungen vorwiegend natürlicher Magnete, also der bereits im magnetischen Zustande sich vorfindenden Minerale, namentlich des Magneteisensteins ($FeO + Fe_2 O_3$) und wohl auch des Magnetkieses ($6 FeS + Fe_2 S_3$); letzterer ist aber wesentlich schwächer magnetisch als ersterer. Seit man indes Magnete künstlich bequem herzustellen weiß, zieht man diese selbstverständlich vor, da das Material weitaus zugänglicher, homogen und isotrop, der Bearbeitung leichter fähig und deshalb zur Herstellung der verschiedenartigsten Formen geeigneter ist. Dieses Material ist, da Kobalt und Nickel nicht in Betracht kommen, ausschließlich Eisen und Stahl. Und zwar kommt es darauf an, ob es sich um die Herstellung temporärer Magnete handelt, d. h. solcher, die man nur vorübergehend magnetisieren und nach dem Gebrauche wieder entmagnetisieren will, oder um die Herstellung permanenter Magnete, die dauernd magnetisch bleiben sollen. In jenem Falle benutzt man weiches Eisen, am liebsten schwedisches Schmiedeeisen, oder weichen Gußstahl; in diesem Falle hingegen harten Stahl[1], am häufigsten Wolframstahl. Je weicher das Material, desto leichter verliert es den Magnetismus wieder, je härter, desto dauernder behält es ihn bei; man hat dabei die ganze Reihe der Zwischenstufen zur Verfügung, je nach den Zwecken, die man verfolgt.

Bei den Elektromagneten kommt noch das Material des erregenden Stromleiters (Kupferdraht) und das Isolationsmaterial in Betracht.

**Form.** Sehr mannigfach sind die Formen, die man den Magneten geben kann. Die Wahl richtet sich nach den Zwecken, denen sie dienen sollen. Insbesondere ist von entscheidender Bedeutung: a) ob der Magnet schwach oder mäßig oder kräftig oder ganz besonders kräftig wirken soll; b) ob er mehr in die Nähe oder Ferne wirken, d. h. ob er auf Tragkraft oder Anziehung oder Induktion beansprucht werden soll; c) ob es auf rasche Wirkung ankommt; d) ob er wenig Platz und ev. auch bestimmt geformten Raum einnehmen soll; e) ob er geringes Gewicht haben und überhaupt bequem transportabel sein soll usw.

Die wichtigeren Magnetformen sind die folgenden:

[1] SERVINGTON SAVARY (Phil. Trans. **36**. 295. 1729) scheint zuerst die Verwendung von gehärtetem Stahl zu Magneten angegeben zu haben.



1. Magnetstäbe, geradlinig, Länge meist 5 bis 50 cm, Querschnitt entweder rechteckig (Breite meist $^1/_2$ bis 3 cm, Dicke meist 1 bis 10 mm) oder kreisförmig ($^1/_2$ bis 5 cm Durchmesser). Für besondere Zwecke werden statt der Stäbe auch Röhren benutzt.

2. Magnetnadeln, von Stäben entweder nur durch die geringere Größe und namentlich die geringere Dicke unterschieden, oder insofern auch durch die Form, als sie nach beiden Seiten hin zugespitzt sind, und zwar entweder gleich von der Mitte an oder erst in der Nähe der Enden; eine Form, die besonders dann von Vorteil ist, wenn die Nadel als Zeiger dienen soll. Solche Nadeln werden drehbar gemacht, indem sie auf eine Spitze gesetzt oder an einen Faden gehängt oder (für Drehung in vertikaler Ebene) mit einer Achse versehen und mit dieser auf ein Lager gelegt werden.

3. Hufeisenmagnete (im weiteren Wortsinne); nämlich: U-Form (**U**), Hufeisenform (im engeren Sinne, **O**), Lyraform; ferner **⊔**-Form (aus einem Stück oder aus drei Stücken zusammengesetzt); endlich, mit beiderseits nochmaliger Umbiegung, die **⊏⊐**-Form, ev. mit axialer Aushöhlung der oberen Schenkel. Besonders die beiden letztgenannten Formen spielen in der Wissenschaft wie in der Technik eine hervorragende Rolle.

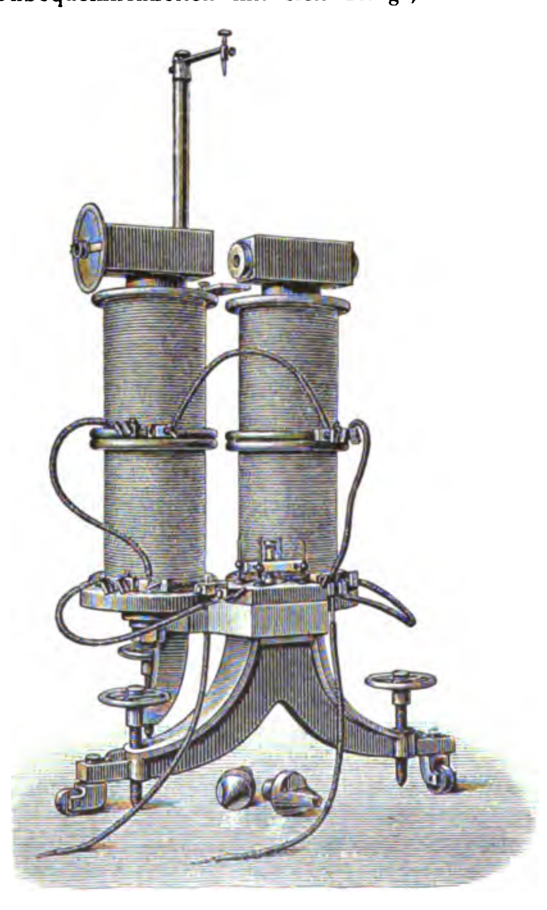
4. Zahlreiche andere Formen: Kugel und Ellipsoid (für theoretische Untersuchungen wichtig), Scheibe, Glockenmagnet (für Galvanometer, vgl. Art. Strommessung), Ring oder Toroid, geschlitzter Ring oder geschlitztes Toroid (von dem gleich noch die Rede sein wird) usw.

5. Systeme mehrerer Magnete: Stäbe, parallel miteinander zusammengekittet oder auch mit kleinen Abständen voneinander und irgendwie zusammengehalten, sog. Magazine. Die Kraft wird dadurch natürlich erhöht, jedoch wegen der Schirmwirkung nicht in entsprechendem Verhältnis, so daß das Material nicht gut ausgenutzt wird. Um dem wenigstens teilweise zu steuern, trennt man die einzelnen Stäbe durch nicht magnetische Schichten; die Leistung ist zwar dann immer noch kleiner als die aller einzelnen Lamellen (jede für sich) zusammengenommen, aber beträchtlich größer als die Leistung eines einzigen Magneten von gleicher Eisenmasse, weil, wiederum im Zusammenhange mit der gegenseitigen Schwächung in der Querrichtung der Molekularmagnete, mehr freier Magnetismus zur Geltung gelangt. Auch bei Hufeisenmagneten kann man derartige Vereinigungen vornehmen. Natürlich kann man zur Trennung auch Luftschichten benutzen, wenn man die Stäbe an einem Ende (oder beim Hufeisen an der Wurzel) irgendwie miteinander fest verbindet. Ein anderes Mittel besteht darin, daß man die mittelste Lamelle am weitesten, die beiden ihr benachbarten weniger usw. hervorragen und die äußersten am weitesten zurückstehen läßt. Ferner gehören hierher die von KNIGHT, COULOMB, SCORESBY und JAMIN konstruierten Blätter- und Lamellenmagnete (die letzterer als Normalmagnete bezeichnet), bei denen eine mehr oder weniger große Zahl breiter, dünner Lamellen zusammengelegt sind (gewöhnlich so, daß die etwas längeren mittleren Lamellen über die äußeren hervorragen) und dadurch die Wirkung erzielt ist, daß die Kraft nicht, wie bei einer einzelnen, nur an den Enden beträchtlich ist, sondern ohne erhebliche Schwächung bis in die Mitte sich fortsetzt; die gesamte Kraft ist dann verhältnismäßig groß; auch lassen solche dünne Lamellen den Magnetisierungsprozeß leichter ins Innere eindringen. In der Technik pflegt man die zu magnetisierenden Eisenkörper schon zur Vermeidung der sonst in ihrem Innern auftretenden Wirbelströme aus zahlreichen Lamellen zusammenzusetzen. Endlich sind noch die Kombinationen zu erwähnen, bei denen zwei Magnete kreuzweise verbunden werden (TOEPLER[1]) oder gar mehrere solche in Form einer Rosette zusammengefügt werden (Kompaß).

---

[1] A. TOEPLER, Berl. Sitz.-Ber. 1883. S. 925.

**Astatische Magnete.** Man versteht darunter solche, welche, obwohl um eine Achse drehbar, doch dem Einfluß des Erdmagnetismus nicht unterworfen sind, also keine oder wenigstens nur eine sehr geringe Richtkraft besitzen. Man kann diesen Effekt auf verschiedene Weisen erzielen, die einfachste und älteste Methode besteht darin, daß man die Achse, um welche die Nadel sich drehen kann, in die Richtung des magnetischen Meridians bringt; in der Ebene, in der die Nadel sich bewegen kann, gibt es dann keine ausgezeichnete Richtung mehr, sie ist astatisch. Indessen sieht man ein, daß diese Einrichtung praktische Unbequemlichkeiten mit sich bringt, da die Drehungsebene eine schiefe Lage erhält. Man zieht es daher vor, die Wirkung des Erdmagnetismus zu kompensieren, und zwar entweder, indem man einen Magneten in geeigneter Stellung und Entfernung fest aufstellt[1] oder indem man eine zweite Nadel mit der ersten um dieselbe Achse drehbar derart anbringt, daß sie stets entgegengesetzt gerichtet ist; man spricht dann von einem astatischen Nadelpaar[2]. Damit das Paar völlig astatisch sei, müssen beide Nadeln natürlich genau gleich stark magnetisch sein. Bis zu dem für die meisten Zwecke erforderlichen Grade ist das leicht zu erreichen; für ganz feine Untersuchungen kann sich aber doch die kleine noch verbliebene Differenz störend geltend machen. Für solche Fälle ist zuerst von STEFAN[3], dann von H. DU BOIS[4] die Benutzung der Schirmwirkung des Eisens (s. w. u.), z. B. die geeignete Überstülpung eines weichen Eisenringes vorgeschlagen und ausgeführt worden („Differential-Astasierung“). Durch derartige Einrichtungen wird die Brauchbarkeit der Magnete zwar modifiziert, und man muß andere als die gewöhnlichen Anordnungen treffen, dafür wird aber die Empfindlichkeit offenbar eine sehr viel größere. Die wichtigste Anwendung ist die auf Galvanometer (s. Art. Strommessung. Bd. IV, S. 272).



Figur 1.

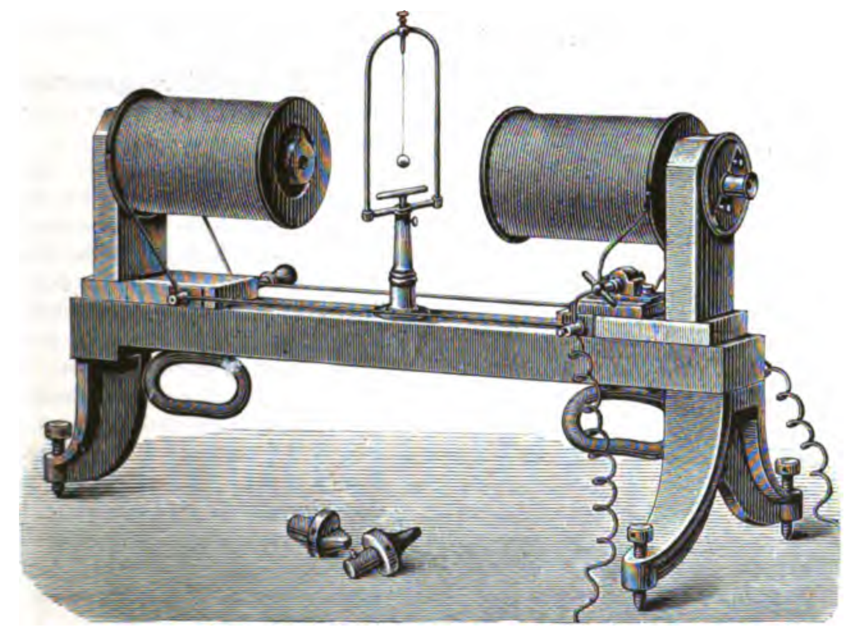
**Elektromagnete.** Die Formen sind hier im Prinzip dieselben wie bei den Stahlmagneten, nur kommt noch die Mannigfaltigkeit der Bewickelung mit Stromleitern (entweder direkt oder auf übergeschobenen Gestellen resp. Hülsen) hinzu. Bei geradlinigen Stäben wird, je nach den Zwecken, die ganze Länge oder nur

---

[1] Diese Astasierung rührt von BIOT u. SAVART her, Ann. chim. phys. **15**. 1820; BIOT, Lehrb. d. Exp. Phys. **3**. S. 136. — [2] AMPÈRE, Ann. chim. phys. **18**. 1821. — [3] J. STEFAN, Wied. Ann. **17**. 935. 1882. — [4] H. DU BOIS, Wied. Ann. **65**. 24. 1898.

der mittlere Teil, oder nur das eine oder andere Ende umwickelt, ev. auch verschiedene Stellen verschieden reichlich. Insbesondere kann man bei Hufeisenmagneten entweder alles oder nur die Schenkel oder nur das Joch, d. h. das mittlere Verbindungsstück bewickeln; auch einseitig bewickelte Hufeisen hat man angewandt (aimant boiteux von Du Moncel). Sodann sind die Elektromagneten mit Eisenhülle zu erwähnen (Romershausen, Guillemin, Fabre), bestehend aus geradem Stab, zylindrischer Spule um ihn herum und einem Eisenzylinder um die Säule herum: da Stab und Zylinder am einen Ende miteinander verbunden sind, stellen sie gewissermaßen zwei konaxiale Schenkel dar.

Die zur Zeit am meisten benutzten Elektromagnete sind in den Figuren 1 bis 4 abgebildet. Figur 1 stellt einen ⊔-förmigen Magneten mit stehenden



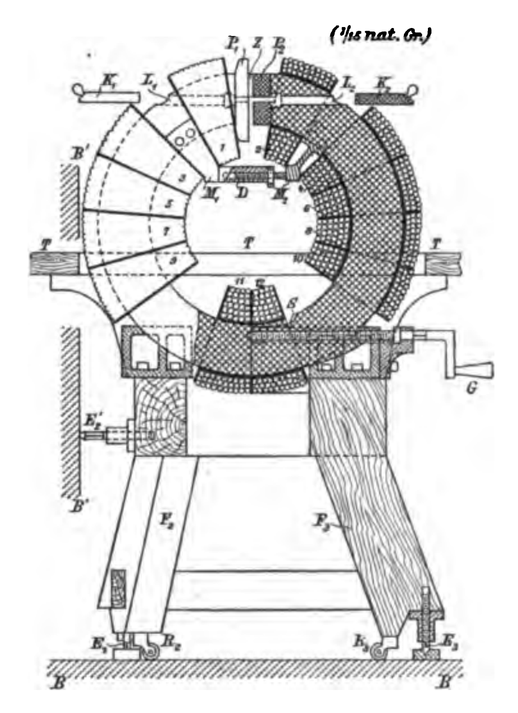
Figur 2.

Schenkeln dar, Figur 2 ist ein Typus des ⊏⊐-förmigen Magneten, wie er zuerst von Ruhmkorff[1] angegeben und von Faraday benutzt wurde, und wie er seitdem zu den meisten Untersuchungen über magnetische Felder, Diamagnetismus, Drehung der Polarisationsebene des Lichtes usw. angewandt wird; Figur 3 und 4 endlich sind Formen, die neuerdings von H. du Bois[2] zum Zwecke der Erzielung recht starker Felder angegeben worden sind, und zwar ist Figur 3 der Ring-Elektromagnet (in $^1/_{15}$ der natürlichen Größe), Figur 4 der leichtere und weniger kostspielige, aber auch nicht ganz so leistungsfähige Halbring-Elektromagnet (in $^1/_{10}$ der natürlichen Größe). Bei dem Ringe lassen sich die linke und die rechte Hälfte und damit auch die Pole $P$ mittels des Schlittens $S$ und der Kurbel $G$ in verschiedene Abstände voneinander bringen; bei dem Halbringe ist ebenfalls eine Auseinanderschiebung längs der Achse $A_1 A_2$ möglich, außerdem können aber die beiden Hälften mittelst der Schrauben $K_1 K_2$ auch gegeneinander verdreht werden. Beide Modelle gestatten ferner (durch Herausziehen von Kernen

[1] Ruhmkorff, C. R. **23**. S. 417 u. 538. 1846. — Ann. chim. phys. (3) **18**. S. 318. 1846. — [2] H. du Bois, Wied. Ann. **51**. S. 537. 1894. — Drudes Ann. **61**. S. 199. 1900. — Der Ringmagnet wird von Siemens & Halske, der Halbringmagnet (in 2 Größen) von Hartmann & Braun in Frankfurt gebaut.

bei $L_1 L_2$ bzw. $C_1 C_2$) Durchsicht von Pol zu Pol. Auf die weiteren Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Endlich sei noch ein für Demonstrationszwecke geeigneter „Universalelektromagnet“ erwähnt, den OBERBECK[1] angegeben hat. In einen rechteckigen Rahmen, dessen senkrechte Stäbe aus Messing, dessen wagerechte aus weichem Eisen bestehen, können zwei getrennte zylindrische Elektromagnete in der mannigfachsten Weise (beide oben oder unten oder einer oben, einer unten usw.) und in beliebigem Abstande eingesetzt werden; es lassen sich dann zahlreiche Versuche bequem anstellen.

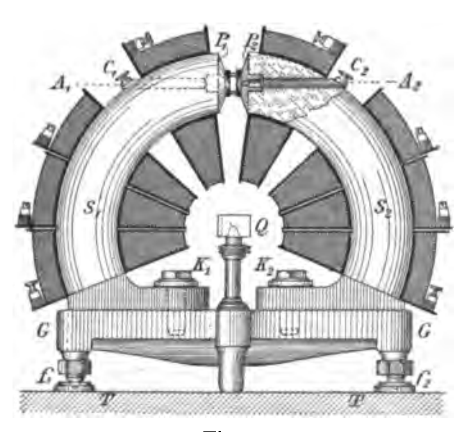


Figur 3.

**Magnetisierungsmethoden.** Es sei hier nur eine kurze Übersicht gegeben[2].

1. Induktion (im engeren Wortsinne). Man bringt den betreffenden Eisenkörper in ein magnetisches Feld, d. h. in die Nähe magnetischer Körper; Spezialfall: man legt ihn in die Richtung des magnetischen Meridians der Erde. Die meisten Eisenkörper nehmen auf diese Weise sogar, ohne daß man dies beabsichtigt, etwas Magnetismus an, besonders während ihrer Herstellung und Bearbeitung. Bei den Dynamomaschinen werden diese Spuren von Magnetismus sogar, wie man weiß, mit Erfolg als Ausgangspunkt ihrer Wirkung benutzt.

2. Streichen. Der einfachste Strich besteht darin, daß man den Stab wiederholt in derselben Richtung über einem Magnetpol fortzieht oder umgekehrt mit einem Magnetpol darüber streicht. Auch kann man die linke Hälfte in der bezeichneten Weise mit einem Pol, die rechte mit einem entgegengesetzten behandeln. Endlich kann man auch zwei entgegengesetzte Pole in der Mitte aufsetzen und gleichzeitig nach beiden Enden hin bewegen, dies wiederholen usw. Der Doppelstrich besteht darin, daß man zwei entgegengesetzte Pole in einigem Abstande voneinander in gleicher Richtung von der Mitte nach einem Ende bewegt, dann zurück über den ganzen Magneten usw., um schließlich in der Mitte aufzuhören.



Figur 4.

Entsprechende Methoden mit leicht ersichtlichen Modifikationen gelten für Hufeisen- und andere Magnete.

[1] OBERBECK, Z. phys. chem. Unt. 11. 162. 1898. — [2] Ausführliche Angaben findet man u. a. bei S. P. THOMPSON, D. Elektromagnet, Halle 1894.



3. Anlegen an einen Magneten, sei es einen permanenten Stahlmagneten, sei es an einen Elektromagneten, jedenfalls aber so, daß das zu magnetisierende Stück den Anker des Magneten (s. u.) bildet. Je nach der Form des zu magnetisierenden Stückes wird man dabei anders geformte Magnete wählen, immer nämlich so, daß das Ganze einen recht einfachen und vollkommenen magnetischen Kreis bildet. Beim Anlegen muß man ferner darauf achten, wo man die Pole erhalten will. Zur Erzielung einer kräftigen Magnetisierung reicht eine Minute meist aus, gut ist es, während dieser Zeit das Stück zu klopfen oder hin- und herzuschieben. Besonders starke Magnete erhält man durch mechanische Härtung (mittels der hydraulischen Presse). Soll der Magnetismus recht dauerhaft sein, so bringt man das Stück nach dem ersten Anlegen für eine halbe Stunde in den Dampf siedenden Wassers, magnetisiert dann wieder usf.

4. Elektrische Erregung. Man umgibt den Körper in geeigneter Weise (vgl. Art. Elektromagnetismus) mit Windungen eines Stromleiters und schickt einen Strom durch diese in geeigneter Richtung hindurch. Die schon besprochenen Elektromagnete stellen auf solche Weise hergestellte temporäre Magnete dar; die Windungen bleiben dauernd auf ihnen befestigt. Stahlkörper, die für Dauermagnete bestimmt sind und entsprechend stärkere Ströme beanspruchen, werden nach der Prozedur herausgenommen.

Die elektrische Methode ist zum Studium der Gesetze des Magnetismus weitaus am geeignetsten, weil sie am meisten und in der kontrollierbarsten Weise variiert werden kann.

Eine zuweilen mit gutem Erfolg anwendbare Modifikation des elektrischen Verfahrens ist das Halten der Nadel oder dergleichen an eine Stelle, durch die hindurch eine elektrische Entladung erfolgt, z. B. die einer Elektrisiermaschine.

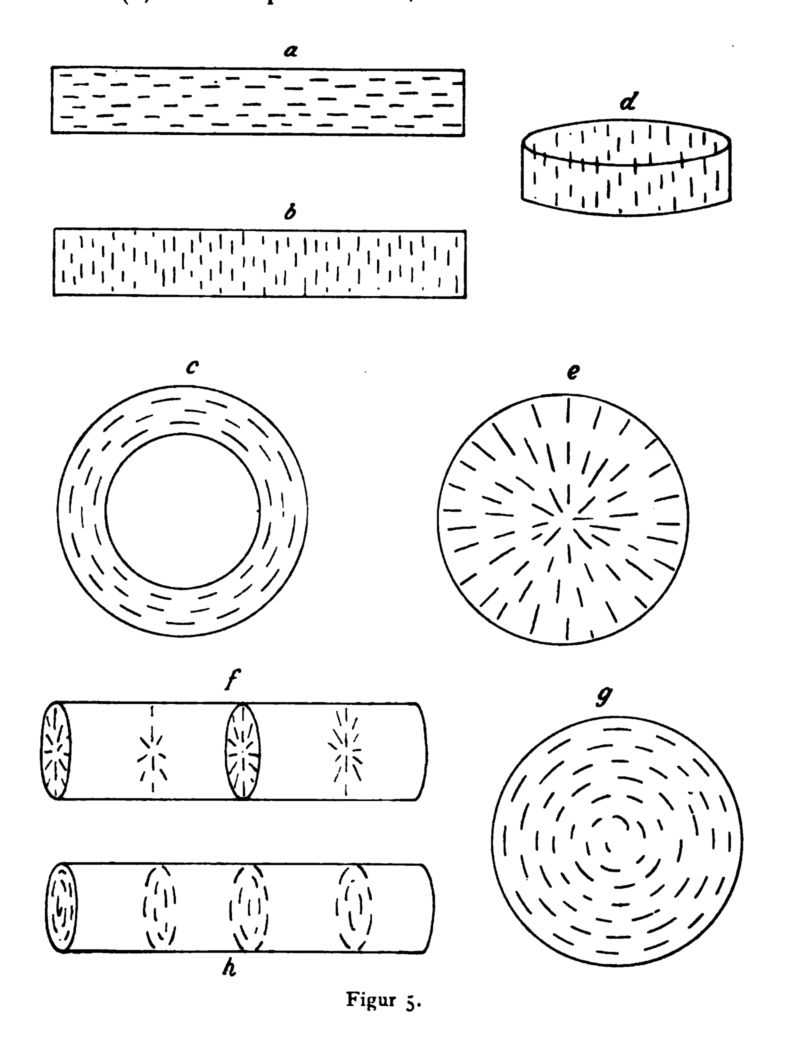
**Verschiedene Arten der erzeugten Magnetisierung.** Je nach den Einzelheiten des magnetisierenden Verfahrens kann der betreffende Körper in sehr verschiedener Weise magnetisch werden. Insbesondere ist zu unterscheiden zwischen longitudinaler, transversaler, radialer und zirkularer Magnetisierung.

Die gewöhnliche Magnetisierung, d. h. diejenige, bei welcher die Achse der Magnetisierung mit der vorherrschenden Dimension des Körpers zusammentrifft, kann man Longitudinal- oder Längsmagnetisierung (Figur 5a) nennen, die Pole liegen an den Endflächen oder nicht eben weit von ihnen entfernt und werden durch zwei Querschnitte des Körpers dargestellt. Ein besonderer Fall der Längsmagnetisierung tritt bei Körpern ein, welche einen sogenannten mehrfach zusammenhängenden Raum erfüllen, z. B. beim Ringe. Ein solcher Ring hat, wenn er überall längs seiner Achse und zwar gleichförmig magnetisiert ist (c), gar keine Pole, er ist apolar und hat daher auch kein äußeres Feld; man nennt ihn neuerdings häufig „magnetisches Toroid". Schneidet man aus ihm ein durch zwei Querschnitte begrenztes Stück von geringer Höhe heraus, so erhält man in dem Rest das „geschlitzte Toroid", das sich von dem geschlossenen nur dadurch unterscheidet, daß die Kraftlinien ein kurzes Stück durch Luft hindurchgehen; nur in diesem Raume, zwischen den beiden zu entgegengesetzten Polen gewordenen Schnittflächen, herrscht ein Feld, hier aber ein besonders kräftiges — vgl. das oben über den du Boisschen Magneten Gesagte.

Natürlich kann ein Ring auch anders magnetisiert werden, etwa so, daß er an zwei entgegengesetzten Punkten entgegengesetzte Pole hat; er kann dann als aus zwei halbkreisförmigen Magneten bestehend aufgefaßt werden, welche sich mit den gleichnamigen Polen berühren; derartige Pole nennt man Folgepunkte oder Folgepole; ein Beispiel bietet der Grammesche Ring der ältesten Dynamomaschinen dar. Folgepole treten auch bei geraden Stäben nicht selten auf, z. B. ein Südpol in der Mitte (Folgepol) und zwei Nordpole an beiden Enden; man braucht nur von der Mitte nach den Enden zu streichen oder den Stromdraht in der Mitte des Stabes umzubiegen, so daß die Windungen auf beiden

Hälften entgegengesetzt verlaufen. Zerbricht man einen Magnetstab — nicht gerade in der Mitte — und legt ihn wieder fest zusammen, so erhält man an dieser und an der symmetrischen Stelle je einen Folgepol[1].

Eine andere Form der Magnetisierung ist die Quermagnetisierung: die Achse derselben steht auf der Längsrichtung bzw. auf der oder den ausgebildeten Dimensionen des betreffenden Körpers senkrecht; ein Stab (b) oder eine magnetische Scheibe (d) sind Beispiele hierfür; natürlich kann die Achse der Mag-




Figur 5.

netisierung im Prinzip auch eine schiefe Lage haben. Sehr interessant sind in dieser Hinsicht Versuche von DONLE[2], welcher zeigte, daß trotz aller Vorsichtsmaßregeln und verschiedenster Verfahrungsweisen ganz dünne Scheiben niemals Quermagnetismus aufweisen. Bei 10 mm Dicke ist es noch der Fall; bei 5 mm ist die Achse der Magnetisierung schon geneigt, bei 3 mm bildet sie nur noch einen kleinen Winkel mit der Fläche der Scheibe.

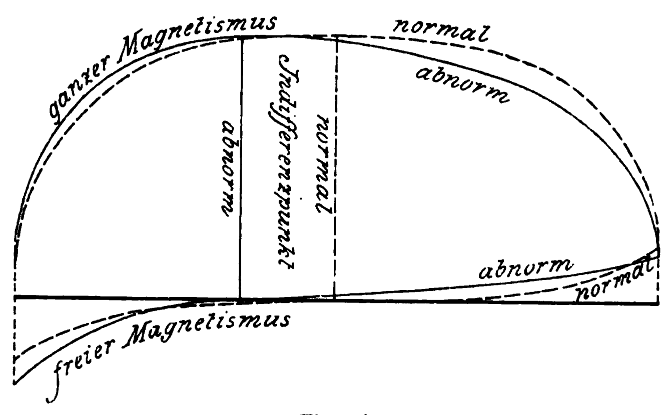
Eine Scheibe (e), ein Zylinder (f) oder eine Kugel, kann ferner radial magnetisiert sein, derart, daß (im Zustande der Sättigung) die Molekularmagnete

[1] LLOYD, Electrician, **34**. 104. 1894. — [2] W. DONLE, Wied. Ann. **41**. 288. 1890. Vgl. auch FARADAY, Exp. Unt. **2**. 131.

in den Radien liegen und der Mittelpunkt resp. die Achse den einen, der Rand, resp. der Mantel, resp. die Oberfläche, den anderen Pol darstellt. Eine Scheibe (g), resp. ein Zylinder (h), kann andererseits auch zirkular magnetisiert sein, derart, daß die Scheibe aus lauter apolaren Ringen und der Zylinder seinerseits wiederum aus lauter solchen Scheiben zusammengesetzt ist; der letztere Fall tritt z. B. ein, wenn ein Strom durch einen Eisenzylinder der Länge nach hindurchgeht (s. Art. Elektromagnetismus).

Übrigens haben diese Definitionen einen eindeutigen Sinn offenbar nur in Beziehung zu den Dimensionen des Körpers, und sie können ineinander übergehen; läßt man z. B. die Scheibe (d) höher und höher werden, so geht ihr Quer- in Längsmagnetismus über, bei allmählicher Ausfüllung des Ringloches (c) geht der Längs- in Zirkularmagnetismus (g) über usw.

Ferner kann bei jeder dieser Arten, namentlich bei der gewöhnlichen Längsmagnetisierung, die Verteilung über die Länge sehr verschieden ausfallen. Bei der elektrischen Methode wird dies z. B. offenbar von der Verteilung der Windungen abhängen. Beim Anlegen oder Streichen muß man ferner, besonders bei langen Stäben, eine gewisse Symmetrie des Verfahrens beobachten, um auch Symmetrie des Magnetismus zu erhalten. Man erhält sonst einen stärkeren zugewandten als abgewandten Pol, wie Figur 6 (für deren Verständnis im übrigen auf später zu verweisen ist) andeutet: die unterbrochenen Linien stellen den symmetrischen, die vollen den abnormen Zustand dar.




Figur 6.

In dem Buche von Lamont (s. o.) und anderen Spezialwerken findet man über diese und zahlreiche andere Fragen ausführliche Auskunft.

**Pole. Anker. Aufbewahrung der Magnete.** Ein paar Worte sind noch über die Pole der Magnete zu sagen. Es sind das diejenigen Stellen, an denen die magnetische Wirkung zutage tritt oder doch am kräftigsten zutage tritt. Auch diesen Polen kann man, je nach der Bestimmung des Magneten, verschiedene Form und Lage geben, und das wird schließlich auch auf die Form, die man für den ganzen Magneten zu wählen hat, eine Rückwirkung ausüben. Beim Stabmagneten z. B. liegen die Pole nahe den Enden, also weit auseinander; man wird diese Form wählen, wenn man beim Arbeiten mit dem einen Pol durch den andern möglichst wenig gestört sein will. Umgekehrt liegen beim Hufeisenmagneten und noch mehr beim geschlitzten Ringmagneten die Pole nahe beieinander und sind einander zugewendet: hier hat man demgemäß ein kräftiges Feld zur Verfügung. Dabei kann man durch Wahl der Polform noch weiter erreichen, daß das Feld klein oder ausgedehnt, gleich- oder ungleichförmig werde usw. Insbesondere sind drei typische Formen hervorzuheben (Figur 7): kegelförmig zugespitzte Pole (*a*), ebene, parallele Polflächen (*b*) und breite, ev. konkave Polschuhe (*c*).

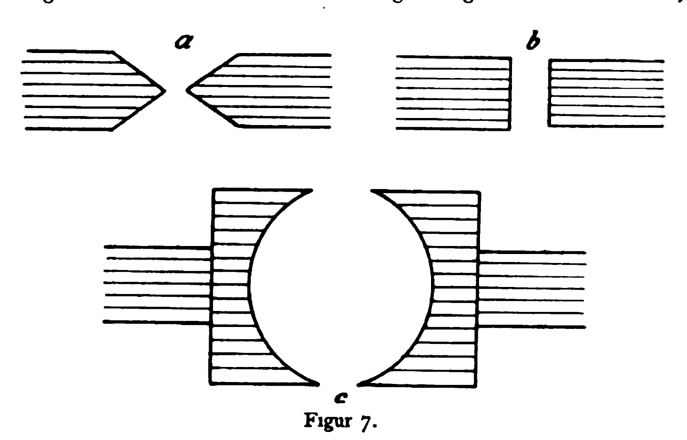
Bei der Aufbewahrung von Stahlmagneten andererseits ist es von Wichtigkeit, das Heraustreten der Wirkung zu verhindern, indem man die Pole durch ein Eisenstück, den sogenannten Anker, miteinander verbindet und auf diese Weise einen apolaren Ringmagneten (s. o.) herstellt. Bei der Hufeisen- und der ge-

schlitzten Ringform ergibt sich die Ankerform ohne weiteres, bei Stabmagneten ist es am einfachsten, zwei solche in entgegengesetzten Richtungen nebeneinander zu legen und an den Enden durch je ein Ankerstück zu schließen. In jedem Falle darf der Anker beim Gebrauche des Magneten nicht gewaltsam abgerissen, sondern er muß tangential abgeschoben werden.

Schließlich ist es natürlich von Vorteil, Magnete, die aufgehoben werden sollen, in diejenige Lage zu bringen, in der ihr Magnetismus von dem der Erde und etwa vorhandener benachbarter Magnete genährt wird: sowie heftigere Erschütterungen nach Möglichkeit zu vermeiden.

Schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts hat LAMONT[1] die Beständigkeit feiner Magnete, die wiederholt in warmes und kaltes Wasser getaucht waren, untersucht, aber trotz alledem Jahr für Jahr Verluste von durchschnittlich 1%, im ganzen in 12 Jahren von über 12% festgestellt.

In neuester Zeit sind mehrere systematische Untersuchungen über die Haltbarkeit von Stahlmagneten durchgeführt worden; unter ihnen sind die von STROUHAL und BARUS[2] und die von KLEMENČIČ[3] hervorzuheben. STROUHAL und BARUS gelangen zu dem Verfahren: die Magnete glashart zu machen, etwa 20 bis 30 Stunden in Dampf von 100° zu erhitzen, sie dann möglichst stark zu magnetisieren, schließlich nochmals mindestens fünf Stunden lang zu erwärmen und sie alsdann, ehe man sie in Gebrauch nimmt, mehrere Wochen liegen zu lassen.



Figur 7.

KLEMENČIČ untersuchte zunächst das Verhalten von 43 Magneten aus verschiedenen Stahlsorten, namentlich aus steirischem Wolframstahl, der für magnetische Zwecke sehr empfehlenswert ist. Die Magnetstäbe halten ihr Moment um so besser, je größer das Dimensionsverhältnis ist. Bei gleichem Dimensionsverhältnis sind die Verluste in den ersten drei Wochen bei dicken, später — bis zu 17 Monaten — bei dünnen Stäben größer; es kommen also offenbar zwei Ursachen in Betracht, deren eine wohl Temperaturschwankungen sind, so daß es gut ist, solche nach Möglichkeit zu vermeiden. Bei einer weiteren Untersuchung wurde die Aufbewahrung der Magnete in gepolsterten Eisenbüchsen geprüft und als ausgezeichnet befunden; anfangs macht sich zwar ein kleiner Einfluß bemerklich, dann aber tritt gute Konstanz, auch beim Transport sowie bei Erschütterungen ein. Eventuell kann man mehrere gepolsterte Eisenbüchsen ineinander schachteln[4].

Faßt man alles zusammen, so kann man sagen, daß die Winke der genannten Autoren uns in den Stand setzen, Magnete zu erhalten, die ihr Moment jahrelang um höchstens ein oder einige Tausendstel ändern. Solche Magnete kann man als **Normalmagnete** bezeichnen.

---

[1] LAMONT, Handb. d. Magnetismus. S. 410. — [2] V. STROUHAL und C. BARUS, Elektrotechn. Z. **12**. 558. 1891. — [3] I. KLEMENČIČ, Wien. Sitz.-Ber. **108**. 491 u. 989. 1899; **109**. 242. 1900. — Drude Ann. **6**. 174. 1901. — [4] Vgl. auch das Verfahren von HOOKHAM, J. Inst. Electr. Eng. **18**. 688. 1889.

## B) Grundtatsachen.

Gewisse Körper zeigen entweder, wie der Magneteisenstein, im natürlichen Zustande oder, wie der Stahl, nach einer bestimmten künstlichen Behandlung (s. o.), die Eigenschaft, Eisenteilchen, die nicht zu schwer sind, anzuziehen und festzuhalten. Die Anziehung haben also diese Körper, die man (vermutlich wegen des zuerst in der Nähe von Magnesia aufgefundenen Minerals) Magnete nennt, mit den elektrischen gemein, freilich mit der Beschränkung, daß nicht alle, oder mindestens zahlreiche, sondern nur einige wenige Stoffe in irgendwie höherem Grade magnetisch sein oder werden können, und daß ebenso nicht beliebige, sondern nur eiserne und einige andere Stoffteilchen angezogen werden; dagegen unterscheiden sich die Magnete von den elektrischen Körpern dadurch, daß sie die angezogenen Teilchen nicht wieder abstoßen, sondern, wie gesagt, festhalten. Wie man sieht, besteht zwischen der elektrischen und der magnetischen Grundtatsache eine gewisse Analogie, aber auch ein gewisser Gegensatz, ein Verhalten, welches sich auch bei den weiteren Erscheinungen vielfach wiederholt, und auf das jedesmal hinzuweisen bei seiner theoretischen Wichtigkeit von besonderem Interesse ist.

**Pole.** Die magnetische Eigenschaft tritt nicht an allen Punkten der Oberfläche eines Magneten gleich stark hervor, es gibt vielmehr Stellen, wo sie sich am stärksten äußert, wo also am meisten Eisenteilchen haften, und andererseits Stellen, wo sie sich wenig oder gar nicht äußert, die also von Eisenteilchen fast oder gänzlich frei bleiben. Jene Stellen größter Wirkung heißen — vorbehaltlich späterer, besserer und präziserer Fassung dieses Begriffes — Pole, diese Stellen schwächster Wirkung Indifferenzzonen oder in Fällen, wo diese Bezeichnung passend erscheint, Äquator. Bei der Elektrizität spielen die Pole, wo sie überhaupt auftreten, nicht entfernt die wichtige Rolle wie hier. In der großen Mehrzahl der Fälle besitzt ein Magnet zwei Pole, deren Verbindungslinie dann Achse heißt, und eine Indifferenzzone; bei symmetrisch gestalteten Körpern liegt die Indifferenzzone meist in dem mittleren Gürtel, die Pole an entsprechenden Stellen zu beiden Seiten, und insbesondere bei stabförmigen Magneten, bei denen die Erscheinungen überhaupt am längsten und eingehendsten studiert worden sind, liegen die Pole an den beiden Enden oder wenigstens nicht weit von ihnen. Hier haften, wenn man den Stab in Eisenfeilicht taucht und wieder herauszieht, die größten Mengen, nach der Mitte hin immer geringere und in der Mitte so gut wie gar keine. Übrigens darf die Symmetrie eines Magneten, auch wenn sie im geometrischen Sinne vorhanden ist, nicht auch im magnetischen ohne weiteres angenommen werden (s. Art. Magn. Messungen).

**Art der Wirkung zwischen zwei Magneten; entgegengesetzte Natur der beiden Pole.** Bei Wahl eines geeigneten Magneten erhält man bei dem beschriebenen Versuch eine ganz symmetrische Anordnung des Feilichts. Man könnte hieraus schließen, daß die beiden Stabhälften ihrem magnetischen Zustande nach durchaus identisch seien, und daß insbesondere von den beiden Polen dasselbe gelte. Daß dies trotzdem in einer gewissen Hinsicht nicht der Fall ist, zeigt sich, wenn man den magnetischen Stab auf einen andern Magnetstab wirken läßt, welch letzteren man zu diesem Zwecke beweglich anbringt, indem man ihn entweder auf Quecksilber oder (mit Hilfe eines Schiffchens, in das man ihn legt) auf Wasser schwimmen läßt oder aber an einem oder zwei Fäden aufhängt. Nähert man alsdann den einen Pol des ersten Magneten einmal dem einen, das andere Mal dem anderen Pole des freien Magneten, so beobachtet man nur in dem einen Falle eine Anziehung, in dem anderen aber eine ebenso große Abstoßung, und dasselbe, nur mit vertauschten Rollen der beiden freien Pole, findet statt, wenn man den zweiten Pol des ersten Magneten

nacheinander den beiden Polen des freien Magneten nähert. Es muß also zwischen den beiden Polen eines Magneten ein gewisser Gegensatz bestehen. Ein anderer Versuch, der dies bestätigt, besteht darin, daß man dicht über einen horizontal hingelegten Magnetstab, der aus gewissen Gründen sehr kräftig sein muß, einen in horizontaler Ebene freien, also schwimmenden, schwebenden oder hängenden Magnetstab bringt; der letztere stellt sich dann nicht nur dem ersteren parallel, wie es nach obigem zu erwarten ist, sondern auch stets so, daß ein bestimmtes seiner beiden Enden über ein bestimmtes Ende des anderen zu liegen kommt, d. h. die beiden Magnete bringen nicht nur ihre Richtungen, sondern auch einen bestimmten Richtungssinn in Übereinstimmung. Allerdings bleibt der bewegliche Magnet, unter Umständen auch in der falschsinnig-parallelen Lage, im Gleichgewicht, zumal wenn etwas Reibung vorhanden ist, er schlägt aber bei dem leisesten Anstoß in die entgegengesetzte Lage um; jenes Gleichgewicht ist also labil, dieses stabil.

**Richtkraft.** Eine derartige Einseitigkeit offenbart sich auch schon unter Benutzung eines einzigen Magneten, wenn man diesen so aufsetzt oder aufhängt, daß er in horizontaler Ebene drehbar ist; man sieht dann, daß er sich stets in eine bestimmte Richtung, die nahe mit der Süd-Nordrichtung zusammenfällt, einstellt, und zwar stets mit einem bestimmten Ende nach Norden. Dieser Fall hat eine solche Ähnlichkeit mit dem vorigen, daß man unwillkürlich zu der Annahme gelangt, den Körper, welcher sich hier unter dem freien Magnet befindet, nämlich die Erde selbst, als einen Magneten zu betrachten, dessen Pole nahe ihren geographischen Polen liegen. Die Richtung, in welche sich der Magnet einstellt, nennt man den magnetischen Meridian (näheres hierüber im Art. Erdmagnetismus).

**Anziehung und Abstoßung.** Wiederholt man jetzt die Versuche, betreffend die Anziehung und Abstoßung zwischen den Polen zweier Magnete, so findet man, daß diejenigen Pole, welche bei Aufhängung der Stäbe nach Norden zeigen würden, sich abstoßen, ebenso diejenigen, welche nach Süden zeigen würden, daß dagegen der nach Norden zeigende Pol den nach Süden zeigenden und umgekehrt anzieht. Man erhält also das Gesetz: Gleichartige Pole stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an. Hierin liegt gleichzeitig, daß die Kraft zwischen zwei Polen in die Richtung ihrer Verbindungslinie fällt, was eigentlich selbstverständlich ist, da die Pole als Punkte oder jedenfalls als Größen ohne ausgezeichnete Richtung keine Seitlichkeit der Erscheinung involvieren können.

**Nordpol und Südpol.** Es liegt nahe, die beiden in dieser Weise entgegengesetzte Pole als Nordpol und Südpol des Magneten zu bezeichnen. Dabei kann man entweder den dem geographischen Nordpol nahe gelegenen magnetischen Pol der Erde als Nordpol der Erde bezeichnen, den anderen als Südpol, muß dann aber den nach Norden zeigenden, also vom Nordpol der Erde angezogenen Pol in dem Magneten als seinen Südpol betrachten und umgekehrt; oder man nennt den nach Norden zeigenden Pol eines Magneten eben deshalb Nordpol, den anderen Südpol, muß dann aber annehmen, daß der dem geographischen Nordpol der Erde nahe gelegene Pol derselben ein Südpol und umgekehrt sei. Die letztere Bezeichnungsweise ist offenbar die praktischere, sie hat sich daher auch fast allgemein eingebürgert. Den Nordpol kann man auch als positiven, den Südpol als negativen bezeichnen[1].

Jedem Nordpol ist auch stets ein Südpol zugehörig, ein Magnet setzt sich immer aus einem Nordpol und einem Südpol zusammen (allgemeiner gesprochen, aus einer gleichen Anzahl von Nord- und Südpolen, wobei in gewissen Fällen mehrere Pole einem einzigen äquivalent oder umgekehrt zu rechnen sind). Ein

[1] Die Gegensätzlichkeit der beiden Pole scheint zuerst von HARTMANN in Nürnberg um 1540 klar erkannt worden zu sein, dann folgten PORTA, 1580, und W. GILBERT, 1600, (s. o.)



ähnlicher Dualismus besteht auch bei den elektrischen Körpern, jedoch in anderem Sinne, nämlich nicht notwendig innerhalb des einzelnen Körpers, wie denn z. B. von zwei aneinander geriebenen Körpern der eine vollständig positiv, der andere negativ elektrisch wird; es gibt also positiv elektrische Körper und negativ elektrische Körper, nicht aber gibt es positive Magnete oder negative Magnete, sondern jeder Körper ist, wenn überhaupt magnetisch, mit Polen beider Art ausgestattet.

## C) Gesetz der Wirkung zwischen Polen.

**Abhängigkeit von der Entfernung.** Obgleich einzelne Magnetpole in Wirklichkeit nicht existieren, ist es doch einleuchtend, daß die Wirkung zwischen zwei solchen einzelnen Polen einfacher sein würde, als die zwischen zwei ganzen Magneten, daß sie überhaupt die einfachste Wirkung sein würde, welche im Gebiete des Magnetismus vorgestellt werden kann, und daß sie daher das Grundgesetz, das *Elementargesetz* des Magnetismus liefern würde. Um dieses zu finden, muß man also Versuchsbedingungen ausfindig machen, unter denen die Wechselwirkung zwischen zwei Polen alle übrigen im System stattfindenden Wirkungen so bedeutend übertrifft, daß man die letzteren, soweit man sie nicht mehr oder minder genau zu berücksichtigen vermag, vernachlässigen kann. So ging Coulomb[1] von der nahe liegenden und leicht festzustellenden Tatsache aus, daß die Wechselwirkung zwischen zwei Polen rasch abnimmt, wenn der Abstand zunimmt, und er verwendete demgemäß zwei Magnete von solcher Länge, daß, wenn zwei ihrer Pole einander nahe gebracht wurden, die anderen als nahezu unendlich weit entfernt betrachtet werden konnten. Bei der einen seiner Versuchsreihen benutzte er die Drehwage, mit der er das elektrische Grundgesetz auffand (s. Art. Elektrometer, Bd. 4, S. 60), und zwar ging er in derselben Weise wie dort zu Werke (vgl. Art. Elektrostatik, Bd. 4, S. 4), d. h. er suchte verschiedene Stellungen auf, in welchen die magnetische Wechselwirkung durch die eben stattfindende Torsion des Aufhängefadens des drehbaren Magneten gerade äquilibriert wurde. Er fand für die drei folgenden Entfernungen die darunter gesetzten Torsionskräfte, denen also, da Gleichgewicht stattfand, die magnetischen Kräfte gleichzusetzen sind:

| Entfernung $d$ | 12 | 17 | 24 |
|---|---|---|---|
| Kraft $K$ . . . . | 3312 | 1692 | 864 |
| $\frac{1}{1000} K d^2$ . . . . | 477 | 488 | 498 |

Die Zahlen der letzten Reihe sind so ziemlich konstant, ihre geringen Differenzen rühren, wie man leicht einsehen kann, von störenden Einflüssen, namentlich der beiden entfernten Pole der Magnete her. Bei einer anderen Versuchsreihe wurden die horizontalen Schwingungen einer kleinen Magnetnadel untersucht, von welcher ein Pol sich dem Pole eines vertikal gestellten kräftigen Magnetstabes gegenüber befand, während der andere Pol des letzteren infolge der Länge des Stabes sich in beträchtlicher Höhe darüber befand. Auch hier ergab sich die obige Beziehung. Man erhält also den Satz:

*Die Wechselwirkung zwischen zwei Magnetpolen steht im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat ihres Abstandes.* Später ist dieses Gesetz noch auf manche andere Weise und in strengerem Maße verifiziert worden, namentlich, indem die Wirkung zwischen zwei Polpaaren, also dünnen Magnetstäben experimentell ermittelt und hieraus rückwärts die Wirkung zwischen zwei einzelnen Polen berechnet wurde (s. u.); die umfassendste Bestätigung aber liegt

[1] C. A. Coulomb, Mém. Ac. Roy. de Paris 1785, S. 606. Als Vorläufer von C. A. Coulomb hinsichtlich der Entdeckung des Entfernungsgesetzes sind T. Mayer, Gött. Anz. 1760 und J. H. Lambert, Hist. de l'Ac. de Berlin 1765, S. 22, zu nennen.

in der Tatsache, daß die gesamte, auf dieser Grundlage aufgebaute Theorie des Magnetismus zu Ergebnissen geführt hat, welche mit der Erfahrung in Übereinstimmung stehen. Nach dem gefundenen Grundgesetze gehört der Magnetismus ebenso wie die Gravitation, der Schall, das Licht und die Elektrizität zu den Erscheinungen, deren Ausbreitung in den Raum man als eine Verteilung über immer größere Flächen (daher die quadratische Abnahme) ansehen kann.

**Abhängigkeit von den Polstärken.** Da es Magnete von sehr verschiedener Stärke des Magnetismus gibt, muß man auch den Polen verschiedene Stärke beilegen, und es ist offenbar, daß hiervon die Stärke der Wirkung ebenfalls abhängen wird. In der Tat, läßt man verschieden starke Pole $A$ und $B$ der Reihe nach auf einen in der Einheit des Abstandes befindlichen dritten $P$ wirken, so erhält man verschieden starke Wirkungen. Eine Beziehung zwischen der Größe der Wirkung und der Polstärke kann man hieraus freilich nicht ableiten, da man wohl die beiden Wirkungen, nicht aber die beiden Polstärken, für welche man ein Maß sich erst noch zu verschaffen haben wird, durch vergleichbare Zahlen auszudrücken imstande ist. Läßt man nun aber die beiden Pole $A$ und $B$ auf einen anderen, ebenso wie $P$ zu ihnen gelegenen Pol $Q$ wirken, so findet man, daß das Verhältnis der beiden Wirkungen diesmal dasselbe ist, wie vorher. Das Verhältnis der Wirkungen zweier Pole $A$ und $B$ ist also für alle dritte Pole das gleiche, $a:b$. Nimmt man statt des Poles $B$ einen anderen $C$, so erhält man für die Pole $A$ und $C$ ein anderes Wirkungsverhältnis, welches, auf denselben Zähler $a$ reduziert, $a:c$ genannt werden mag, für $B$ und $C$ wieder ein drittes, aber das letztgenannte Wirkungsverhältnis ist gleich dem Verhältnis der beiden ersten Wirkungsverhältnisse, es ist $b:c$. Hieraus ist zu schließen, daß die Zahlen $abc$ die Polstärken der drei Pole $ABC$ beliebigen anderen Polen gegenüber (wenn nur die Entfernung dieselbe ist) charakterisieren, daß man geradezu diese Zahlen als Polstärken, zunächst mit relativer Bedeutung, bezeichnen und mit ihnen die Wirkungen der Pole proportional setzen kann. Man erhält dann den Satz: Die Kraft zwischen zwei Magnetpolen ist dem Produkt ihrer Polstärken direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional. In Formel, wenn $m_1$ und $m_2$ die Polstärken, $r$ die Entfernung und $K$ die Kraft ist:

$$K \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

**Einheit der Polstärke.** Um von dieser Proportionalität zu einer Gleichung zu gelangen, kann man auf zwei verschiedene Weisen verfahren. Bei der einen geht man von der Ähnlichkeit aus, die unsere Formel mit dem Grundgesetz der Gravitation hat; $K$ ist eine Kraft wie dort, $r$ eine Entfernung wie dort; es liegt also nahe, sich auch die $m$ wie dort als Massen vorzustellen — nur nicht als gravitierende Massen (denn das Gewicht eines Eisenstabes ändert sich durch seine Magnetisierung nicht), sondern als „magnetische Massen". Man muß dann in der Formel jedem der beiden $m$ die Dimension einer Masse beilegen und, damit die Formel dimensional richtig werde, einen Faktor einführen, der hier dieselbe Rolle spielen wird wie dort die Gravitationskonstante; man wird ihn den „magnetischen Wechselwirkungsfaktor" nennen können. Bezeichnet man ihn mit $\gamma_m$, so lautet das Grundgesetz:

$$K = \gamma_m \frac{m_1 m_2}{r^2} . \tag{1}$$

Dieses „natürliche" Maßsystem wird, seiner Allgemeinheit und Natürlichkeit wegen, von den hervorragendsten Autoren (HELMHOLTZ, KIRCHHOFF, HERTZ, COHN u. a.) benutzt; der Faktor $\gamma_m$ wird dabei zum Teil in anderer Form, nämlich als $1/4\pi\mu$ geschrieben, wo $\mu$ eine später einzuführende Größe ist.

Oder aber, man verzichtet darauf, sich von den Größen $m$ das Bild von Massen zu machen, kann sich alsdann die Einführung eines besonderen Faktors ersparen und erhält als Grundgesetz:

$$K = \frac{m_1 m_2}{r^2} , \tag{2}$$

worin dann, wie leicht ersichtlich, jedes der $m$ die Dimension

$$m = [L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}] \tag{2a}$$

hat, also eine Dimensionsformel ohne anschauliche Interpretierbarkeit. Trotzdem hat sich dieses Maßsystem eingebürgert, wie das entsprechende in der Elektrostatik (Bd. 4, S. 5). Es heißt das magnetische Maßsystem; in ihm ist die Einheit der magnetischen Polstärke oder des Magnetismus diejenige, welche auf eine gleiche, in der Entfernung 1 cm befindliche, die Kraft 1 Dyne ausübt. Die Wahl von cm und Dynen entspricht dem *CGS*-System; es sei bemerkt, daß man in der älteren Literatur, nach dem Vorgange von GAUSS, vielfach Angaben findet, die sich auf mm als Längeneinheit und mgr als Masseneinheit beziehen, und die man durch Division mit 1000 auf die jetzigen umrechnet.

Schließlich erhebt sich noch die Frage der Vorzeichen. Bei der Gravitation gibt es nur positive Massen und nur Anziehung; diese letztere erhält also, wenn kein besonderes Minuszeichen in die Formel eingeführt wird, den Sinn einer positiven Kraft. Hier dagegen gibt es entgegengesetzt wirksame Magnetismen, die man also doch als positiv und negativ einführen muß, und es gibt Anziehung und Abstoßung; und zwar liefern gleiche Vorzeichen Abstoßung, entgegengesetzte Anziehung. Wird also kein besonderes Vorzeichen in die Formel eingeführt, so stellt sich hier Abstoßung als positive, Anziehung als negative Kraft dar. Es hat das den zunächst nur formalen Vorteil, daß Vergrößerung der Entfernung positiv, Verkleinerung negativ gerechnet wird; ein Vorteil, der indessen sachliche Bedeutung gewinnt, sobald die Energie der Wirkungen ins Auge gefaßt wird. Jedenfalls ist dieser Gegensatz der Vorzeichenwahl bei vergleichenden Betrachtungen über Gravitation und Magnetismus wohl zu berücksichtigen.

**Magnetisches Potential.** Wie die Gravitations- und die elektrostatischen Kräfte, so haben, wie die Gleichung (2) zeigt, auch die magnetischen ein Potential, d. h. es gibt eine Funktion der Koordinaten, deren Gefälle in irgend einer Richtung (negativ genommener partieller Differentialqotient) gleich der in diese Richtung fallenden Kraftkomponente ist. Ihr Maximalgefälle wird diese Funktion in der Richung $r$ haben, dieses wird die ganze Kraft sein. Bezeichnet man das Potential mit $V$, die Komponenten der Kraft nach den Koordinatenrichtungen $x$, $y$, $z$ aber mit $X$, $Y$, $Z$, so hat man demnach die Formeln

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = X , \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = Y , \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = Z , \quad -\frac{\partial V}{\partial r} = K \tag{3}$$

$$V = \frac{m_1 m_2}{r} , \quad X = \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} , \quad Y = \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} , \quad Z = \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} . \tag{4}$$

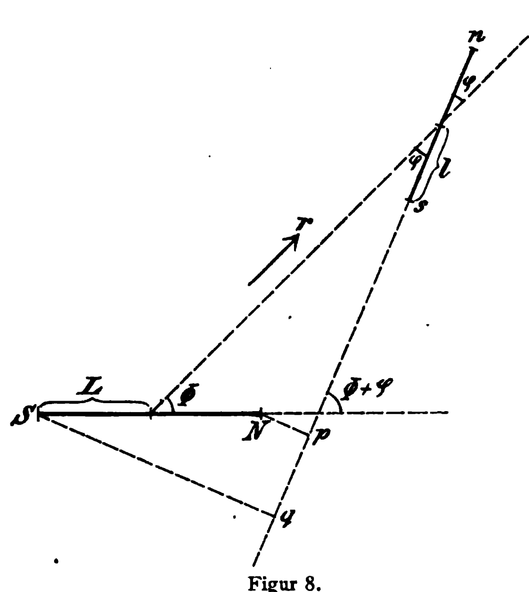
An diese Formeln wird später anzuknüpfen sein.

## D) Wirkung zwischen Polpaaren.

**Polpaare, einfache oder ideale Magnete.** Ein wirklicher Magnet besteht, wie die räumliche Ausdehnung des anhängenden Eisenpulvers zeigt, aus zahllosen magnetisch wirksamen Paaren. Da aber, je gestreckter seine Gestalt ist, in desto höherem Grade die Wirkung der beiden Paare, die alsdann seinen Enden naherücken, die Wirkung der übrigen Paare übertrifft, so wird man einen einfacheren

Grenzfall eines Magneten erhalten, wenn man ihn sich überhaupt nur als Kombination zweier entgegengesetzter, um eine gewisse Strecke entfernter, an Stärke gleicher Pole, als ein Polpaar, denkt. Einen solchen Magneten kann man auch als idealen oder als einfachen Magneten (in naheliegender Analogie mit dem einfachen Pendel im Gegensatz zum physischen) bezeichnen. Die Bedeutung eines solchen liegt aber nicht bloß darin, daß er den einfachsten Grenzfall darstellt, sondern wesentlich darin, daß, wie sich zeigen wird, jeder wirkliche Magnet in bezug auf seine Wirkung nach außen mit einem derartigen idealen Magneten bis zu einem gewissen Grade identifiziert werden kann.

Die Wirkung zwischen zwei idealen Magneten kann man natürlich auf ganz dieselbe Weise wie die zwischen zwei Polen angenähert beobachten — die Annäherung wird hier aus naheliegenden Gründen sogar eine bessere sein — man kann sie aber auch aus der Wirkung zwischen Polen berechnen Das wollen wir tun und dabei vom Erdmagnetismus zunächst ganz absehen. Die Wirkung zwischen zwei Polpaaren $NS$ und $ns$ mit den Polstärken $\pm M$ und $\pm m$ setzt sich aus den vier Wirkungen zwischen je zwei Polen zusammen, und für jede dieser vier Wirkungen kommt eine andere der vier Entfernungen $Nn$, $Ns$, $Sn$, $Ss$ in Betracht. Der allgemeinste Fall wäre der, in welchem beide Polpaare ganz frei im Raume sich befinden, sie würden dann beide eine Bewegung annehmen, und zwar eine fortschreitende und eine drehende, bis sie sich im Gleichgewicht befänden, was im allgemeinen erst bei der Berührung oder bei unendlicher Entfernung eintreten würde. Dieser Fall hat kein Interesse, weil er sich im Raume nicht verwirklichen läßt und auch in der Ebene nur unvollkommen, und weil es sich ferner im wesentlichen nur um die gegenseitige Einwirkung, also auch die gegenseitige relative Lage der Polpaare zueinander handelt, so daß man das eine von den beiden, es sei das Polpaar $NS$, fest aufgestellt denken kann. Der Anschaulichkeit halber möge das feste Polpaar als Magnet, das freie als Magnetnadel (oder kurz Nadel) bezeichnet werden. Aber auch die Wirkung eines solchen festen Polpaares auf ein beliebiges, im Raume bewegliches ist viel zu verwickelt, um zu greifbaren und nützlichen Formeln zu führen. Man wird also gut tun, eine weitere Vereinfachung dadurch herbeizuführen, daß man sich die Nadel $ns$ nur in der Ebene beweglich denkt. und zwar in der Ebene, welche den Magneten $NS$ enthält; diese Ebene wird sehr häufig die horizontale, in anderen Fällen die vertikale sein. Die Wirkung des festen auf das freie Polpaar wird aber auch unter diesen vereinfachten Annahmen noch eine doppelte sein, nämlich eine Kraft und ein Kräftepaar oder Drehungsmoment; jene wird die Nadel zu verschieben, diese sie um ihren Mittelpunkt zu drehen suchen. Beide Wirkungen sind möglich, wenn die Nadel schwimmend oder an einem Faden hängend angebracht ist. Die Untersuchung zeigt jedoch, daß die verschiebende Kraft mit zunehmender Entfernung zwischen festem und freiem Polpaar rascher abnimmt als das Drehungsmoment, und in dem zu zweit gedachten Falle ist



Figur 8.

überdies zu bedenken, daß die Nadel nur verschoben werden kann, indem der Aufhängefaden schief gestellt und damit sie selbst, der Schwerkraft entgegen, gehoben wird, ein Umstand, der insofern sehr wesentlich ist, als die Schwerkraft unter den meisten Umständen groß ist gegen die magnetische — ganz abgesehen davon, daß infolge der gedachten Hebung die Erscheinung aufhört, sich in der Ebene abzuspielen. Aus alledem folgt, daß die wichtigste zu untersuchende Größe das Drehungsmoment sein wird.

**Drehungsmoment.** Die Aufgabe ist natürlich eine rein analystische, und die Rechnung kann hier übergangen werden; sie hat im wesentlichen den Zweck, die vier Entfernungen zwischen den Polen zurückzuführen auf diejenigen Größen, welche die Lage der Polpaare in einfacherer Weise definieren, nämlich die Entfernung zwischen ihren Mittelpunkten, die Abstände der beiden Pole innerhalb eines jeden und die Richtungswinkel der beiden Polpaare. $r$ (Figur 8) sei die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der beiden Polpaare, vom festen $NS$ nach dem drehbaren $ns$ hin gerechnet; $(Nn)$, $(Ns)$, $(Sn)$, $(Ss)$ (in der Figur nicht ausgezogen) die Entfernungen zwischen den einzelnen Polen selbst, $L$ und $l$ die Entfernungen der Pole von den Mittelpunkten, also mit anderen Worten $2L$, $2l$, die Polabstände in den beiden Polpaaren, d. h. die Längen der Magnete, $\Phi$ und $\varphi$ die beiden Winkel, welche die Pollinien $SN$ und $sn$ mit der Linie $r$ einschließen (wie man sieht, ist dann $\varphi + \Phi = \delta$ der Winkel zwischen den beiden Polpaaren), endlich $Np$ und $Sq$ die von $N$ und $S$ auf die Verlängerung des freien Polpaares gefällten Senkrechten. Es setzt sich dann nach Gleichung (2) das Drehungsmoment des festen auf das freie Polpaar aus vier Gliedern zusammen, deren jedes aus der durch Gleichung (2) bestimmten Kraft erhalten wird, indem mit dem Hebelarm $l$ und, behufs Bildung der drehenden Kraftkomponente, mit dem sin des betreffenden Winkels multipliziert wird; es wird also, wenn Verkleinerung von $\varphi$ positiv, Vergrößerung negativ gerechnet wird:

$$D = Mml\left[\frac{1}{(Nn)^2}\frac{Np}{Nn} + \frac{1}{(Ns)^2}\frac{Np}{Ns} - \frac{1}{(Sn)^2}\frac{Sq}{Sn} - \frac{1}{(Ss)^2}\frac{Sq}{Ss}\right]$$

oder, wenn die Linien $Np$ und $Sq$ berechnet werden

$$D = Mmrl\sin\varphi\left(\frac{1}{(Nn)^3} + \frac{1}{(Ns)^3} - \frac{1}{(Sn)^3} - \frac{1}{(Ss)^3}\right)$$
$$- MmLl\sin(\varphi+\Phi)\left(\frac{1}{(Nn^3)} + \frac{1}{(Ns)^3} + \frac{1}{(Sn)^3} + \frac{1}{(Ss)^3}\right) \quad ,$$

und hierin sind die vier Nennergrößen in den Klammern bestimmt durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{matrix}(Nn)^2 = \\ (Ns)^2 = \\ (Sn)^2 = \\ (Ss)^2 =\end{matrix}\right\} r^2 \left\{\begin{matrix} - \\ - \\ + \\ + \end{matrix}\right\} 2r\left(L\cos\Phi\left\{\begin{matrix} - \\ + \\ + \\ - \end{matrix}\right\} l\cos\varphi\right) + L^2 + l^2 \left\{\begin{matrix} - \\ + \\ + \\ - \end{matrix}\right\} 2Ll\cos(\varphi+\Phi) \quad .$$

Der Ausdruck für das Drehungsmoment ist, wie man sieht, im Allgemeinen noch sehr verwickelt, ohne daß sich indessen in Strenge weitere Vereinfachungen durchführen lassen.

**Spezialisierung für größere Entfernungen.** Es bleibt daher nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß die Entfernung $r$ der beiden Mittelpunkte beträchtlich größer sei als die Längen $2L$ und $2l$, demgemäß nach umgekehrten Potenzen von $r$ zu entwickeln und diese Entwickelung bei dem ersten, zweiten usw. Gliede abzubrechen, wodurch man eine erste, zweite usw. Annäherung erhält. Die erste Annäherung und damit die Grundlegung des Problems hat GAUSS[1] gegeben.

[1] C. F. GAUSS, Resultate aus d. Beob. d. magn. Vereins. 1837. S. 22 und 1840. S. 26.

LAMONT[1] hat eine weitere Annäherung andeutungsweise gegeben und für zwei besondere Fälle (s. u.) ausgeführt. Bis zu den Gliedern vierter Ordnung ist CHWOLSON[2] vorgeschritten, für einen besonderen Fall hat er sogar eine Formel entwickelt, welche beliebig viele Glieder hinzuschreiben gestattet, welche aber zeigt, daß das Glied sechster Ordnung außerordentlich klein ist[3].

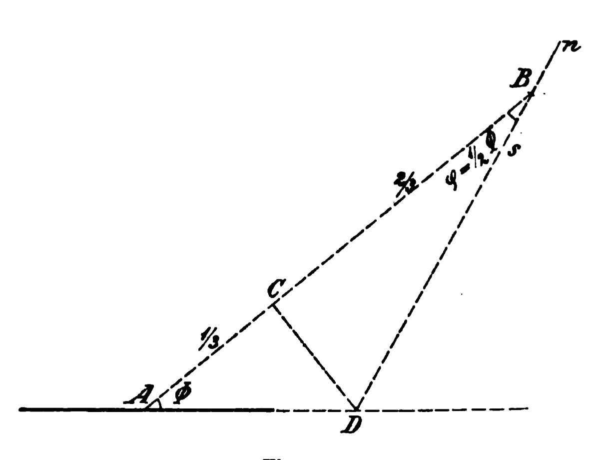
Die erste Annäherung wird einer der drei folgenden, miteinander identischen Ausdrücke

$$D = \frac{2ML \cdot 2ml}{r^3}(2\cos\Phi\sin\varphi - \sin\Phi\cos\varphi) \tag{5a}$$

$$D = \frac{2ML \cdot 2ml}{r^3}[3\cos\Phi\sin\varphi - \sin(\varphi + \Phi)] \tag{5b}$$

$$D = \frac{2ML \cdot 2ml}{r^3}(3\cos\Phi\sin\varphi - \sin\delta) \quad . \tag{5c}$$

Das Drehungsmoment zwischen zwei, gegen ihre Längen sehr weit von einander entfernten Polpaaren ist also ihren Polstärken und ihren Längen direkt, der dritten Potenz ihrer Entfernung umgekehrt proportional und außerdem von ihren Richtungsverhältnissen abhängig. Wie man sieht, ist hier an die Stelle des umgekehrten Quadrates der Entfernung der umgekehrte Kubus getreten, was insofern leicht verständlich ist, als die Wirkung, die ein Paar gleicher und entgegengesetzter Pole in großer Entfernung ausübt, nichts anderes als das Differential der Wirkung eines einzelnen Poles, das Differential von $r^{-2}$ aber im wesentlichen $r^{-3}$ ist.



Figur 9.

**Gleichgewichtseinstellung.** Das freie Polpaar, also die Nadel, wird sich so einstellen, daß das obige Drehungsmoment gleich null wird; der erste Ausdruck von $D$ ergibt hierfür die einfache Relation

$$\operatorname{tg}\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\Phi \quad , \tag{6}$$

d. h. die Nadel stellt sich so ein, daß die Tangente des Winkels, den sie selbst mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte bildet, halb so groß ist wie die entsprechende Größe für den Magneten. Hierauf gründet sich die einfache, von GAUSS angegebene und leicht zu verifizierende Regel zur Konstruktion der Nadelrichtung: Man verbindet (Figur 9) die Mittelpunkte des Magneten $A$ und der Nadel $B$ (welch letzteren man als festen Punkt der Nadel kennt) miteinander, schneidet hiervon, vom Magneten aus, ein Drittel $AC$ ab und errichtet in diesem Punkte eine Senkrechte; diese Senkrechte trifft die Verlängerung des Magneten in einem bestimmten Punkte $D$; verbindet man diesen Schnittpunkt mit dem Mittelpunkt der Nadel, so erhält man ihre Richtung $sn$. Die einzige Größe, von

[1] J. LAMONT, Hdb. d. Magnetismus. Leipzig 1867. S. 274. — [2] O. CHWOLSON, Mém. Ac. St. Petersburg 31. Nr. 10. 1883. — [3] Vgl. ferner noch K. WEIHRAUCH, N. Mém. Soc. Nat. de Moscou 14. Heft 4. 1883.

welcher in diesem Falle die Einstellung der Nadel abhängt, ist die Lage und Richtung des festen Magneten; seine Polstärke, seine Länge, Polstärke und Länge der Nadel selbst sind ohne Einfluß.

**Verschiebende Kraft.** In ähnlicher Weise findet sich die Kraft, welche die Nadel, wenn ihr Mittelpunkt frei angenommen wird, zu verschieben sucht, und zwar in einer bestimmten Richtung. Man kann dabei eine Zerlegung vornehmen in zwei Komponenten, deren eine die Richtung der Entfernung der Mittelpunkte, $r$, hat, deren andere darauf senkrecht steht. Diese Komponenten haben die Werte

$$(7\text{a})\qquad (\parallel r): X = 3\,\frac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}(\sin\Phi\sin\varphi - 2\cos\Phi\cos\varphi)\quad,$$

$$(7\text{b})\qquad (\perp r): Y = 3\,\frac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}\sin(\varphi+\Phi)\quad.$$

Man kann endlich auch noch die Kraft in der Richtung der Nadel, die sogenannte Direktionskraft, besser Direktionsmoment, selbst ausrechnen und findet

$$(7\text{c})\qquad (\parallel l): U = 3\,\frac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}[2\cos\varphi\cos(\varphi+\Phi) - \sin^2\varphi\cos\Phi]\quad.$$

Wie man sieht, sind alle diese Kräfte umgekehrt proportional mit der vierten Potenz der Entfernung (was wiederum leicht verständlich ist, da hier beide Polpaare nur mit der differentiellen Wirkung in die Erscheinung eingehen); diese Kräfte sind also bei größerer Entfernung klein gegen das Drehungsmoment, womit das oben Bemerkte seine Bestätigung findet. In speziellen Fällen kann dies natürlich Ausnahmen erfahren, es kann sogar das Drehungsmoment bei gewissen Lagen (nämlich solchen, die oben als Gleichgewichtslagen einer nur drehbaren Nadel betrachtet wurde) null werden, und dann kommen, wenn der Mittelpunkt der Nadel frei ist, nur die Verschiebungskräfte zur Geltung.

**Spezielle Fälle.** Die einfachsten speziellen Fälle hinsichtlich der beiden Polpaare zueinander erhält man, wenn man annimmt, die Nadelmitte liege entweder in der Verlängerung des Magneten oder in der auf seiner Mitte errichteten Senkrechten; man kann diese Lagen als Längs- oder Querlage des Magneten bezeichnen, jener entspricht der Wert $\Phi = 0$, dieser der Wert $\Phi = \frac{\pi}{2}$, es wird also nach (4a) und (6a und b)

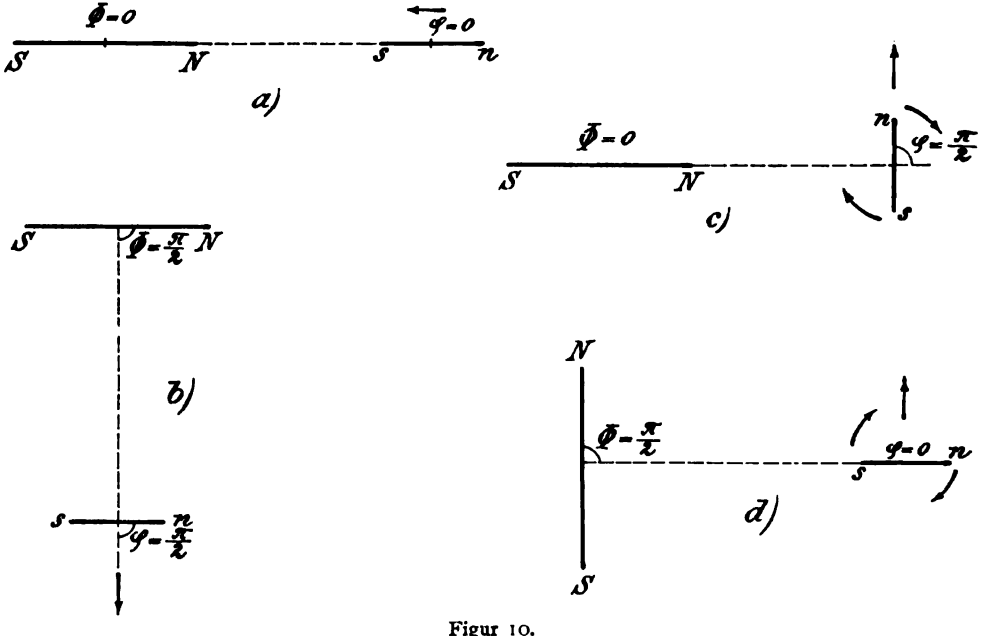
$$(8)\quad\begin{cases} D_l = 2\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^3}\sin\varphi\,, & D_q = -\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^3}\cos\varphi\quad; \\ X_l = -6\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}\cos\varphi\,, & X_q = 3\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}\sin\varphi\quad; \\ Y_l = 3\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}\sin\varphi\,, & Y_q = 3\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}\cos\varphi\quad; \\ U_l = 3\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}(3\cos^2\varphi - 1)\,, & U_q = -3\,\dfrac{(2\,ML)(2\,ml)}{r^4}\sin 2\varphi\quad. \end{cases}$$

Gibt man nun auch noch dem Winkel $\varphi$ die besonderen Werte 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man die folgenden vier Fälle, die man als Längs-längs-, Quer-quer-, Längs-quer- und Quer-längslage bezeichnen kann; es entsprechen ihnen die danebengesetzten Werte von $D$, $X$, $Y$, unter Fortlassung des Faktors $(2\,ML)(2\,ml)$ ($U$ bietet hier, da es bald mit $X$, bald mit $Y$ identisch wird, kein besonderes Interesse dar):

(9)

| | Winkel | | Kräfte | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\Phi = 0$ , | $\varphi = 0$ | $D = 0$ , | $X = -\frac{6}{r^4}$ , | $Y = 0$ |
| 2. | $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ | $D = 0$ , | $X = +\frac{3}{r^4}$ , | $Y = 0$ |
| 3. | $\Phi = 0$ , | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ | $D = \frac{2}{r^3}$ , | $X = 0$ , | $Y = \frac{3}{r^4}$ |
| 4. | $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , | $\varphi = 0$ | $D = \frac{1}{r^3}$ , | $X = 0$ , | $Y = \frac{3}{r^4}$ |

Diese vier Fälle sind durch die Figur 10 a—d veranschaulicht. Die Pfeile geben die Richtung der Drehung und (wenn der Mittelpunkt frei ist) der Ver-




Figur 10.

schiebung an; in den Fällen a und b fehlen die Drehpfeile, weil hier Dreh-Gleichgewicht besteht. Befindet sich die Nadel in der der hier angenommenen gerade entgegengesetzten Lage (d. h. werden ihre Pole vertauscht gedacht), so ändert sich in den beiden letzten Fällen die Richtung der Drehung und Verschiebung, in den beiden ersten ändert sich die Richtung der Verschiebung, aber außerdem der Charakter des Gleichgewichts in bezug auf Drehung; in den Figuren 10a und b ist es stabil, in den umgekehrten Fällen würde es labil sein.

Die Formeln liefern noch folgende Sätze: 1. Wenn in zwei verschiedenen Fällen das eine Mal der Nadelmittelpunkt in der Verlängerung des Magneten, das andere Mal der Magnetmittelpunkt in der Verlängerung der Nadel liegt, beide Male aber die Richtung der beiden Polpaare aufeinander senkrecht steht, so übt der Magnet im ersten Falle das doppelte Drehungsmoment auf die Nadel aus wie im zweiten, dagegen in beiden Fällen dieselbe verschiebende Kraft. 2. Liegt eine Nadel das eine Mal in der Verlängerung eines Magneten, das andere Mal parallel und symmetrisch zu ihm, so übt der Magnet im ersten Falle

die doppelte Kraft aus wie im zweiten, ein Drehungsmoment aber in beiden Fällen überhaupt nicht.

**Spezialisierung für eine kleine Nadel.** Der nächst allgemeinere Fall ist der, daß zwar die Nadel, also das freie Polpaar, als sehr klein gegen die Entfernung $r$ angenommen wird, nicht aber der feste Magnet. Dann werden die Formeln schon ganz wesentlich verwickelter. Hier genüge es, die Formel für die Richtung der Nadel anzugeben, also die Verallgemeinerung der Formel (6). Um sie in übersichtlicher Form darzustellen, muß man, wie bei der dortigen Gaussschen Konstruktion, den Schnittpunkt der Verlängerungen von Magnet und Nadel finden, sein Abstand von der Mitte des Magneten ergibt sich zu

$$a = L\frac{r_S^3 + r_N^3}{r_S^3 - r_N^3} \quad ,$$

wo $r_S$ und $r_N$ die Abstände der beiden Magnetpole von der Mitte der Nadel sind; und mit Benutzung der so gefundenen Größe $a$ wird

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin\Phi}{r - a\cos\Phi} \quad .$$

**Entwickelung nach Potenzen.** Um zu weiteren Annäherungen zu gelangen, muß man die allgemeinen Ausdrücke nach Potenzen von $\frac{1}{r^2}$ entwickeln und erhält auf diese Weise [vgl. Gleichung (5a)]:

$$D = \frac{(2\,ML)(2\,m\,l)}{r^3}(2\cos\Phi\sin\varphi - \sin\Phi\cos\varphi)\left(1 + \frac{u_2}{r^2} + \frac{u_4}{r^4} + \ldots\right) \quad ,$$

wo die Koeffizienten $u_2$, $u_4$ usw. Funktionen von $L$, $l$, $\Phi$ und $\varphi$ sind, und zwar enthalten sie von $L$ und $l$ immer nur geradzahlige Potenzen, weil nur dann $D$ selbst mit Hinzuziehung des Faktors $L\,l$ vor der Klammer ungeradzahlig in $L$ und $l$ wird, wie es sein muß, damit, wenn die Richtung eines der beiden Polpaare umgekehrt wird, auch der Wert von $D$ sich umkehre.

**Spezialisierung für die beiden Hauptlagen des festen Polpaares.** Die Ausführung dieser Reihenentwickelung führt zu verhältnismäßig einfachen Formeln, wenn wiederum, wie oben, die Nadelmitte entweder in der Verlängerung des Magneten oder in der auf seinem Mittelpunkte errichteten Senkrechten liegt (Längs- resp. Querlage des Magneten). Man erhält dann nach Lamont, wenn man noch das dritte Glied der Reihe, also die Verhältnisse $L^4 : r^4$ und $l^4 : r^4$ berücksichtigt und erst die Verhältnisse $L^6 : r^6$ und $l^6 : r^6$ vernachlässigt, folgende Werte des Drehungsmomentes $D_l$ und $D_q$ (erster und zweiter Fall):

a) für eine sehr kleine Nadel:

$$\text{(11)} \qquad \left\{\begin{aligned} D_l &= 2\frac{(2\,ML)(2\,m\,l)}{r^3}\sin\varphi\left(1 + 2\frac{L^2}{r^2} + 3\frac{L^4}{r^4}\right) \\ D_q &= -\frac{(2\,ML)(2\,m\,l)}{r^3}\cos\varphi\left(1 - \frac{3}{2}\frac{L^2}{r^2} + \frac{15}{8}\frac{L^4}{r^4}\right) \quad , \end{aligned}\right.$$

b) für eine beliebige Nadel:

$$\text{(12)} \qquad \left\{\begin{aligned} D_l = 2\frac{(2\,ML)(2\,m\,l)}{r^3}\sin\varphi & \left[1 + \frac{2\,L^2 - 3\,l^2(1 - 5\cos^2\varphi)}{r^2}\right. \\ & \left. + 3\,\frac{L^4 - 5\,L^2\,l^2(1 - 5\cos^2\varphi) + \frac{15}{8}l^4(1 - 14\cos^2\varphi + 21\cos^4\varphi)}{r^4}\right] \quad , \end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad \begin{cases} D_q = -\dfrac{(2ML)(2ml)}{r^3}\cos\varphi\Big[1-\dfrac{3}{2}\,\dfrac{L^2-l^2(4-15\sin^2\varphi)}{r^2} \\ \quad +\dfrac{15}{8}\,\dfrac{L^4-2L^2l^2(6-23\sin^2\varphi)+8l^4(1-42\sin^2\varphi-21\sin^4\varphi)}{r^4}\Big]\,. \end{cases}$$

Die Ableitung von Chwolson führt zu derselben Formel (12); in (13) dagegen ist der Faktor von $8\,l^4$ zu ersetzen durch $1-(21/2)\sin^2\varphi+(105/8)\sin^4\varphi$ (Chwolson seinerseits gibt die Lamontsche Formel anders an, als sie im Hdb. d. Magn. S. 282 steht).

Ersteres Drehungsmoment wird null in der Längs-längs-Stellung, letzteres in der Quer-quer-Stellung, am größten dagegen werden sie in der Längs-quer- resp. Quer-längs-Stellung, und zwar wird dann

$$(14\,a)\quad D_{lq} = 2\,\frac{(2ML)(2ml)}{r^3}\left(1+\frac{2L^2-3l^2}{r^2}+3\,\frac{L^4-5L^2l^2+\frac{15}{8}l^4}{r^4}\right)\,,$$

$$(14\,b)\quad D_{ql} = -\frac{(2ML)(2ml)}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\,\frac{L^2-4l^2}{r^2}+\frac{15}{8}\,\frac{L^4-12L^2l^2+8l^4}{r^4}\right)\,.$$

Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen (12) und (13); die spezielleren, den Gleichungen (11) entsprechenden unterscheiden sich von den letzteren nur durch das Fehlen des sin und cos.

Zur Veranschaulichung der Größe und des Einflusses der Korrektionsglieder, welche kurz mit $p_1\,p_2\ldots$ resp. $q_1\,q_2\ldots$ bezeichnet werden mögen, sei folgendes angeführt:

1. Für kleine Nadeln [$l=0$, also die obigen Formeln (11)] und $L=\frac{1}{8}r$ wird

$$p_1 = 0{,}03125\,,\quad p_2 = 0{,}00073$$
$$q_1 = -0{,}02344\,,\quad q_2 = 0{,}00046\,.$$

Für eine Genauigkeit bis zu $\frac{1}{10000}$ des Wertes genügt hiernach die Berücksichtigung der beiden ersten Korrektionsglieder, für eine Genauigkeit von einigen Tausendsteln sogar die des ersten, und wenn es auf einige Prozent des Wertes nicht ankommt, kann man mit dem Hauptgliede allein rechnen.

2. Wenn die Magnete nahezu senkrecht oder parallel gegeneinander sind, kann man in den Korrektionsgliedern die cos und sin gleich null resp. eins setzen, es handelt sich dann im wesentlichen um das Verhältnis von $l:L$, und es gibt Werte desselben, für welche gewisse Korrektionsglieder verschwinden, z. B. bei Querstellung für $l:L=\sqrt{\frac{2}{3}}$ resp. $\frac{1}{2}$ das erste Glied in $D_l$ resp. $D_q$, für $l:L=\frac{1}{2{,}15}$ bzw. $\frac{1}{3{,}36}$ das zweite Glied in denselben Ausdrücken.

**Drei und mehr Magnete.** In gewissen Fällen kann die Wechselwirkung zwischen drei Magneten, von denen einer fest ist, von Wichtigkeit werden. Diese Frage ist daher von Lloyd[1] und später strenger und eingehender von Weihrauch[2] untersucht worden, und zwar von letzterem mit Zugrundelegung der Forderung, daß für jeden der freien Magnete die Summe der Drehungsmomente und — in gewissen Spezialfällen — auch die Summe der Direktionsmomente verschwinden solle. Die Ergebnisse sind zu umfangreich, um hier Platz finden zu können. In noch höherem Maße gilt das natürlich von Systemen, die aus vielen Magneten bestehen. Es gibt aber hier gewisse und zwar gerade besonders interessante Fälle, die relativ einfach werden; dahin gehören namentlich regelmäßige Anordnungen von Nadeln, z. B. in regulären Polygonen oder so, daß alle Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen usw. (vgl. auch w. u.).

[1] H. Lloyd, Trans. R. Irish. Ac. **19**. S. 159 u. 249. 1843. — [2] K. Weihrauch, N. Mém. Soc. Natur. de Moscou **14**. Heft 4. 1883.

**Mitwirkung des Erdmagnetismus.** Der Fall, daß eine drehbare Nadel ausschließlich der Wirkung eines (oder mehrerer) in größerer oder geringerer Nähe fest aufgestellten Magneten unterliegt, kann, da außerdem die Erde stets als Magnet wirkt, in der Praxis nur durch gewisse künstliche Einrichtungen (s. w. u.) realisiert werden. Es erhebt sich daher die Frage, wie sich ein drehbarer einfacher Magnet einstellt, wenn auf ihn einerseits die Erde, andererseits ein einfacher Magnet wirkt. Bei der Behandlung dieser Aufgabe kann man an die vorige unmittelbar anknüpfen, man braucht nämlich nur das Drehungsmoment des Erdmagnetismus hinzuzufügen; oder, in Anwendung auf das Gleichgewicht der Nadel, man braucht nur das Drehungsmoment des Magneten demjenigen des Erdmagnetismus gleichzusetzen; löst man diese Gleichung nach dem Ablenkungswinkel der Nadel auf, so erhält man die Gleichgewichtslage. Zuerst ist das in Rede stehende Problem von HANSTEEN[1], am vollständigsten von GAUSS[2] behandelt worden.

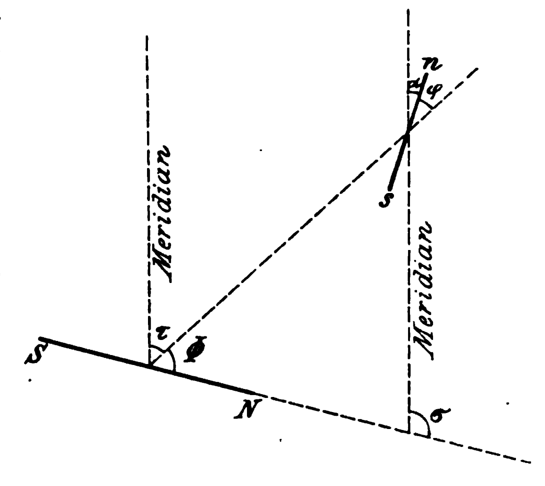
Es sei $\mathfrak{H}$ die horizontale Komponente des Erdmagnetismus, dann ist in der Lage, in welcher die Nadel mit dem magnetischen Meridian den Winkel $\alpha$ einschließt, das Drehungsmoment des Erdmagnetismus $\mathfrak{H}(2ml)\sin\alpha$. Wirkt ausschließlich der Erdmagnetismus, so findet Gleichgewicht statt für $\alpha = 0$, d. h. die Nadel stellt sich in den Meridian ein. Wirkt hingegen außerdem ein Magnet, so tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$\mathfrak{H}(2ml)\sin\alpha = D \tag{15}$$

ist. Diese Gleichung nimmt in erster Annäherung die Form

$$\mathfrak{H}\sin\alpha = \frac{2ML}{r^3}(2\cos\Phi\sin\varphi - \sin\Phi\cos\varphi) \tag{16}$$

an. Hierin sind aber noch zwei unbekannte Winkel vorhanden, $\alpha$ und $\varphi$, die Winkel, welche die Nadel mit dem Meridian und mit der Abstandslinie der Mittelpunkte von Magnet und Nadel bildet, während doch einer dieser Winkel (gleichviel welcher) genügt, ihre Lage zu charakterisieren. Man muß also eine von beiden Unbekannten eliminieren, indem man sie auf die andere und bekannte Größen zurückführt. Dabei hat man noch die freie Wahl zwischen verschiedenen gegebenen Winkeln, nämlich dem Winkel $\Phi$ zwischen Magnet und Verbindungslinie der Mittelpunkte, dem Winkel $\sigma$ zwischen Magnet und Meridian, und dem Winkel $\tau$ zwischen Verbindungslinie der Mittelpunkte und Meridian: zwischen ihnen besteht die Beziehung, daß einer von ihnen (welcher, hängt von den Umständen ab) die Summe der beiden anderen ist (in der Figur 11 ist $\sigma = \Phi + \tau$). Man pflegt mittels dieser Gleichung $\Phi$ zu eliminieren, mittels der ebenfalls aus der Zeichnung einleuchtenden Beziehung $\tau = \alpha + \varphi$ den Winkel $\varphi$ und erhält dann, wenn man die obige Gleichung nach $\alpha$ auflöst:



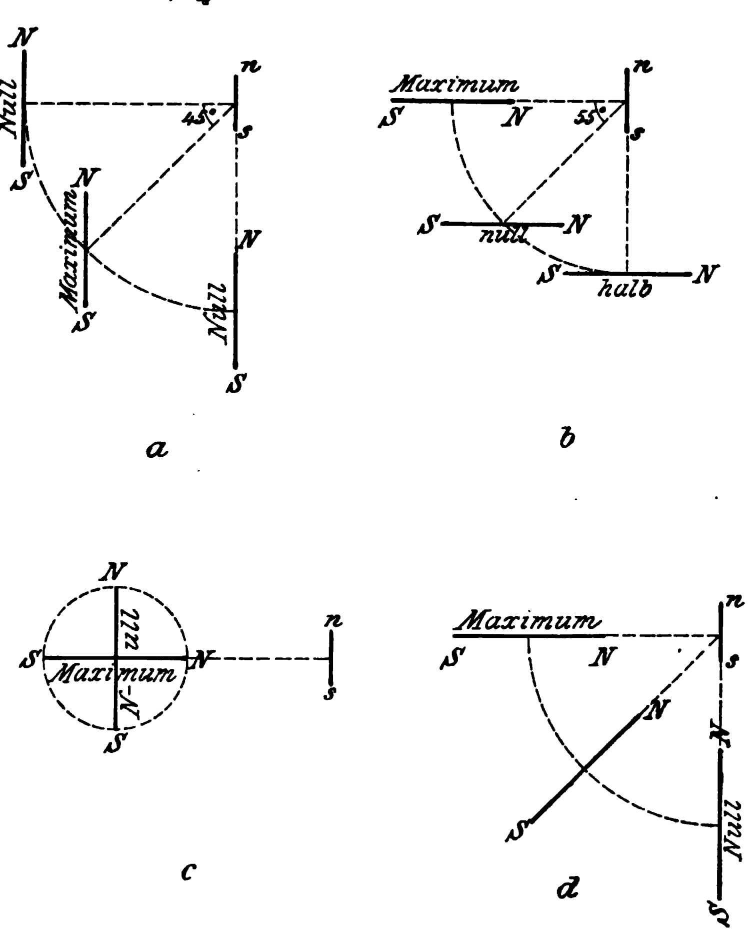
Figur 11.

[1] Ch. HANSTEEN, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde. Christ. 1819. —
[2] C. F. GAUSS, Intensitas vis magneticae etc. Gött. 1833. Pogg. Ann. **28**. S. 241 u. 591 u. a. a. O.

(17) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cos(\sigma-\tau)\sin\tau - \sin(\sigma-\tau)\cos\tau}{\mathfrak{H}\cdot\frac{r^3}{2ML} - 2\cos(\sigma-\tau)\sin\tau + \sin(\sigma-\tau)\cos\tau}$$

oder, da hierin das zweite Glied des Nenners gegen das erste gewöhnlich zu vernachlässigen ist,

(18) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ML}{r^3\mathfrak{H}}\left[2\cos(\sigma-\tau)\sin\tau - \sin(\sigma-\tau)\cos\tau\right] .$$




Figur 12.

**Spezielle Fälle.** Man erhält solche, indem man für eine der beiden Größen $\sigma$ und $\tau$ besondere Werte wählt. Wählt man $\sigma = 0$, also den ablenkenden Magneten parallel mit dem Meridian, so wird

(19a) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ML}{r^3\mathfrak{H}}\cdot\frac{3}{2}\sin 2\tau \quad ,$$

d. h.: wenn man einen Magneten um eine im Meridian hängende Magnetnadel im Kreise herumführt, derart, daß auch der Magnet stets dem Meridian parallel bleibt, so übt er gar keine drehende Wirkung auf die Nadel aus, wenn er sich (die Meridianrichtung auf dem Papier von unten nach oben gedacht) gerade links oder rechts oder oben oder unten befindet, dagegen eine maximale Wirkung,

wenn er sich in einer der Diagonalen befindet (Figur 12a). Setzt man andererseits $\sigma = \frac{\pi}{2}$, so ist der ablenkende Magnet senkrecht gegen den Meridian, also auf dem Papier horizontal gelegen, und es wird

$$\text{(19b)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2ML}{r^3 \mathfrak{H}}(2\sin^2\tau - \cos^2\tau) \quad ,$$

also die Ablenkung, wenn der Magnet im Kreise um die Nadel herumwandert, vom Zeichen abgesehen, am größten, wenn er links oder rechts liegt, halb so groß, wenn er oben oder unten liegt, und am kleinsten, nämlich null, wenn der Magnet etwa $55^0$ nach oben oder unten liegt, ein Wert, den man auch daraus hätte berechnen können, daß, da hier die Nadel im Meridian bleibt, $\tau$ gemäß Gleichung (6) die Bedingung erfüllen muß, einen halb so großen tg zu haben, wie sein Komplementwinkel $\frac{\pi}{2} - \tau$ (s. Figur 12b).[1]

In ähnlicher Weise kann man nun in Gleichung (18) auch für $\tau$ die speziellen Werte 0 und $\frac{\pi}{2}$ wählen und zusehen, wie sich dann $\operatorname{tg}\alpha$ gestaltet für verschiedene Werte von $\sigma$, d. h. wie die ablenkende Wirkung des Magneten sich ändert, wenn man ihn links von der Nadel aufstellt und dann um seinen Mittelpunkt herumdreht, und entsprechend für Aufstellung rechts oder vorn oder hinten. Man findet dann bis auf das Zeichen:

$$\text{(19c)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = 2\frac{(2ML)}{r^3 \mathfrak{H}}\sin\sigma$$

für Links- oder Rechtslage (Figur 12c) und

$$\text{(19d)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2ML}{r^3 \mathfrak{H}}\sin\sigma$$

für die Aufstellung vorn oder hinten. Beim Drehen des Magneten in einer dieser Stellungen ändert sich also seine Wirkung wie der Sinus seines Richtungswinkels, sie ist null, wenn er senkrecht liegt, am größten, wenn er wagerecht liegt. Außerdem ist die Wirkung bei Aufstellung links oder rechts von der Nadel für jede Richtung doppelt so groß wie bei der parallelen Richtung in der Aufstellung vorn oder hinten.

Endlich ist es noch zuweilen von Wichtigkeit, zu wissen, wie $\alpha$ variiert, wenn der Magnet so im Kreise um die Nadel herumgeführt wird, daß er immer auf sie hinweist. Man muß dann $\Phi$ in der Formel behalten und gleich null setzen, erhält also angenähert $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2ML}{r^3 \mathfrak{H}}\sin\tau$, d. h. das Gesetz zwischen $\alpha$ und $\tau$ ist in diesem Falle das gleiche wie in (19d) dasjenige zwischen $\alpha$ und $\sigma$ (Figur 12d).

**Hauptlagen.** In den angestellten Betrachtungen sind die vier schon früher hervorgehobenen Hauptlagen, denen irgend eine Kombination der Werte 0 und $\frac{\pi}{2}$ für $\sigma$ und $\tau$ entspricht, bereits enthalten. Interesse bieten im wesentlichen nur zwei von ihnen dar, weil in den beiden Fällen, in denen $\sigma = 0$ und $\tau = 0$ oder $\tau = \frac{\pi}{2}$ ist, nach der ersten der Formeln (19) $\alpha = 0$ wird, d. h. deshalb, weil hier der Magnet den Erdmagnetismus, dem er parallel ist, einfach unterstützt. Die beiden anderen Lagen nennt man nach GAUSS vorzugsweise die beiden

[1] Eine Vorrichtung, um den Magneten mit sich selbst parallel herumzuführen, hat SALCHER (Z. f. phys. Unterr. 3. S. 195. 1890) bekannt gemacht.

Hauptlagen, und man findet die für sie geltenden Beziehungen, entweder indem man in Gleichung (19b) $\tau = \frac{\pi}{2}$ und $\tau = 0$ setzt, oder indem man in Gleichung (19c) und (19d) $\sigma = \frac{\pi}{2}$ setzt. In jedem Falle erhält man das Resultat: Die ablenkende Wirkung ist in der ersten Hauptlage annähernd doppelt so groß wie in der zweiten.

**GAUSSscher Nachweis des Grundgesetzes.** An die obigen Betrachtungen und Formeln ist noch eine wichtige Bemerkung zu knüpfen. Ganz ähnliche Formeln wie die erhaltenen würden sich nämlich auch ergeben, wenn die spezielle, den Entwickelungen zugrunde gelegte Annahme, wonach die Wirkung zwischen zwei Polen umgekehrt proportional ist dem Quadrate ihrer Entfernung, ersetzt worden wäre durch die allgemeinere, daß sie umgekehrt proportional sei irgend einer, der $n$ten Potenz ihrer Entfernung. Nur in zwei Hinsichten würden sich dann die Formeln von den obigen unterscheiden. In der Gleichung (18) würde einmal im Nenner $r^{n+1}$ stehen, und zweitens würde das erste Glied in der Klammer nicht den Faktor 2, sondern den Faktor $n$ haben. Dasselbe würde von den speziellen Formeln (19b) und (19c) gelten, und der Satz, betreffend das Wirkungsverhältnis in den beiden Hauptlagen, würde dann lauten: Die ablenkende Wirkung in der ersten Hauptlage ist $n$mal so groß wie in der zweiten. Zeigt man also experimentell, daß sie doppelt so groß ist, so ist damit das Grundgesetz erwiesen. Dies hat zuerst HANSTEEN[1] und dann unter einfacheren Annahmen und in exakterer Weise GAUSS[2] getan. Er fand für die in der ersten Spalte der folgenden Tabelle bezeichneten Abstände $r$ die in der zweiten und vierten Spalte angegebenen Ablenkungswinkel für die erste und zweite Hauptlage, Winkel, die einerseits so klein sind, daß man sie mit ihren Tangenten identifizieren kann, und von denen andererseits die in der gleichen Horizontalreihe stehenden näherungsweise wie 2 : 1 sich verhalten. Eine genaue Übereinstimmung ist aber nicht zu erwarten, da die Formel (18) nur eine erste Annäherung an die wahre Formel (17) ist.

| Abstand $r$ | beobachtet | Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung | beobachtet | Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung |
|---|---|---|---|---|
| 1,3 m | 2° 13′ 51,2″ | + 0,8″ | 1° 10′ 19,3″ | + 6,0″ |
| 1,4 „ | 1° 47′ 28,6″ | + 4,5″ | 55′ 58,9″ | + 0,2″ |
| 1,5 „ | 1° 27′ 19,1″ | − 9,6″ | 45′ 14,3″ | − 6,6″ |
| 1,6 „ | 1° 12′ 7,6″ | − 3,3″ | 37′ 12,2″ | − 3,2″ |
| 1,7 „ | 1° 0′ 9,9″ | − 5,0″ | 30′ 57,9″ | − 1,2″ |
| 1,8 „ | 50′ 52,5″ | + 4,2″ | 25′ 59,5″ | − 3,4″ |
| 1,9 „ | 43′ 21,8″ | + 7,8″ | 22′ 9,2″ | + 2,6″ |
| 2,0 „ | 37′ 16,2″ | + 10,6″ | 19′ 1,6″ | + 5,9″ |
| 2,1 „ | 32′ 4,6″ | + 0,9″ | 16′ 24,7″ | + 4,9″ |
| 2,5 „ | 18′ 51,9″ | − 10,2″ | 9′ 36,1″ | − 2,5″ |
| 3,0 „ | 11′ 0,7″ | − 1,1″ | 5′ 33,7″ | − 0,2″ |
| 3,5 „ | 6′ 56,9″ | − 0,2″ | 3′ 28,9″ | − 1,0″ |
| 4,0 „ | 4′ 35,9″ | − 3,7″ | 2′ 22,2″ | + 1,7″ |

Die zweite Annäherung würde noch ein Glied mit $1/r^5$ enthalten, GAUSS hat demgemäß versucht, die Beobachtungszahlen durch zwei entsprechende Ausdrücke darzustellen, auf diese Weise

[1] Ch. HANSTEEN, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde. 1819. S. 119. —
[2] C. F. GAUSS, Int. vis magn. etc. — Pogg. Ann. **28**. S. 241 u. 591. — Werke **5**. S. 81.

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 0{,}086870\,r^{-3} - 0{,}002185\,r^{-5} \quad ,$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = 0{,}043435\,r^{-3} + 0{,}002449\,r^{-5}$$

erhalten, und die in der Tabelle aufgeführten Differenzen zeigen, daß die Fehler den Betrag von 10″, also von 1 Proz. des Wertes nicht übersteigen, meist aber unter $^1/_2$ Proz. des Wertes bleiben.

**Magnetisches Moment.** In den Formeln für die Kräfte (11—14) kommen die Längen der beiden Polpaare in zwei verschiedenen Weisen vor, nämlich einmal multipliziert mit der Polstärke des betreffenden Paares und dann in der Klammer ohne diesen Faktor. Im Falle erster Annäherung, d. h. für Entfernungen, welche im Vergleich zur Länge beider Polpaare sehr groß sind, fallen aber die Klammern überhaupt fort, und demgemäß enthalten die Formeln (5, 7, 8), sowie (15, 16, 18, 19) die Größen $L$ und $l$ ausschließlich in den Verbindungen $2\,Ml$ und $2\,ml$. Dieses Produkt aus Polstärke und Abstand der beiden Pole bezeichnet man als das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ des Polpaares resp. des Magneten

$$\mathfrak{M} = 2\,m\,l \quad . \tag{20}$$

Man erhält daher den Satz: Die Wirkung eines Magneten in große Entfernung und ebenso die Wirkung, welche ein Magnet aus großer Entfernung erfährt, hängt ausschließlich von seinem magnetischen Moment ab; sie bleibt ungeändert, wenn seine Länge im umgekehrten Verhältnis seiner Polstärke verändert wird. Dieser Satz ist offenbar nichts anderes als das Analogon zum Hebelsatz in der Mechanik, der Körper, welcher dort aus unendlicher Ferne einwirkt, ist die Erde. Hier kann es irgend ein Magnet sein, wenn er nur entfernt genug ist, und die Erfahrung hat gezeigt, daß diese Bedingung für den Magneten, den die Erde darstellt, erfüllt ist. Übrigens ist es einleuchtend, daß das magnetische Moment sich zur Polstärke in begrifflicher Hinsicht ebenso verhält wie das Drehungsmoment zur einfachen Kraft. Jedoch ist dabei noch auf einen Umstand hinzuweisen. Wenn nämlich die Entfernung so groß wird, daß das magnetische Moment die ausschließlich maßgebende Größe ist, so ist damit noch nicht gesagt, daß dann auch von den stattfindenden Wirkungen nur das Drehungsmoment übrig bleibt; denn da die Größen $L^2$ und $l^2$ mit der Potenz $r^{-5}$, die Verschiebungsgrößen $X$, $Y$, $U$ (Gleichung 6) aber nur mit $r^{-4}$ behaftet sind, so sind letztere immer noch groß gegen die die ersteren enthaltenden Glieder. Mit anderen Worten: Das magnetische Moment wird die einzig bestimmende Größe schon dann, wenn 1 gegen $r^2$ vernachlässigt werden darf; das Drehungsmoment hingegen wird erst dann die einzige übrig bleibende Kraft, sobald 1 gegen $r$ vernachlässigt werden darf.

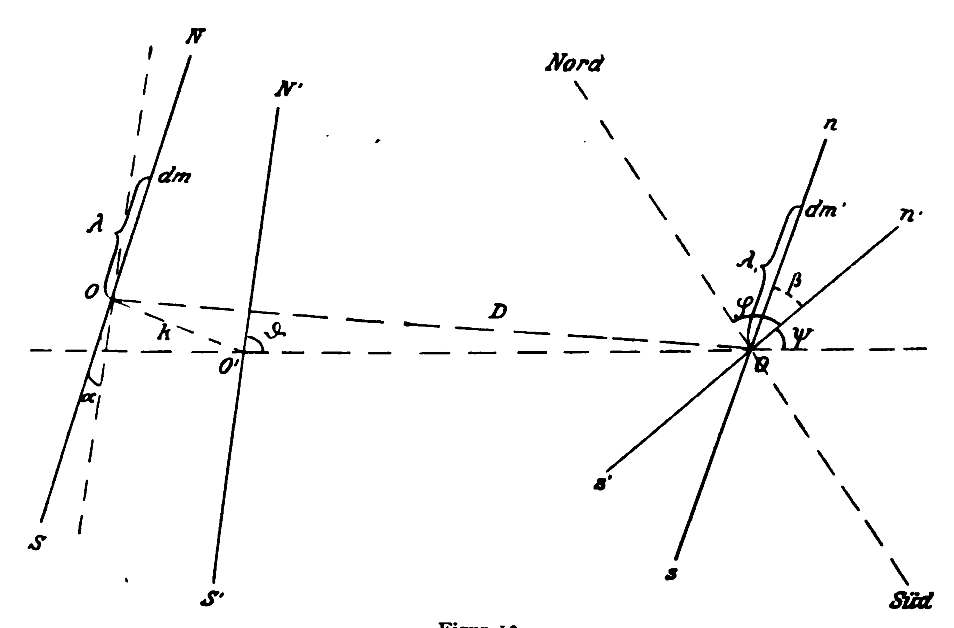
Der hier eingeführte Begriff des magnetischen Moments — das von jetzt ab mit $M$ bezeichnet werden soll — bezieht sich lediglich auf das abstrakte Gebilde des Polpaares oder einfachen Magneten; später wird es auf wirkliche Magnete zu erweitern sein, und es wird alsdann der Begriff der magnetischen Achse hinzugefügt werden, von dessen Benutzung hier abgesehen wurde, weil bei einem Punktpaar der Ausdruck Achse in anderen Gebieten (Mechanik, Hydrodynamik usw.) in anderem Sinne gebraucht zu werden pflegt.

**Besonderer Einfluß der Länge.** Wenn die Entfernung nicht groß genug ist, so hängt die Wirkung, bei gleichem magnetischen Moment, von der Länge ab, und zwar gilt dies sowohl für den wirkenden Magneten als auch für die Nadel, auf welche er einwirkt. Und zwar ergeben sich aus den Formeln (11 bis 13) einige einfache Sätze, von welchen hier nur der folgende aus Gleichung (11) abzulesende angeführt sein möge. Die Wirkung eines Magneten auf eine kleine Magnetnadel ist bei gleichen magnetischen Momenten beider und bei Längslage des Magneten desto größer, je länger er ist; bei Querlage des Magneten ist dies der Fall, solange $L > r\sqrt{\frac{4}{5}}$ ist; ist dagegen $L < r\sqrt{\frac{4}{5}}$, so ist die Wirkung desto

schwächer, je länger der Magnet ist; in jedem Falle ist der Einfluß der Länge hier bei Querlage wesentlich geringfügiger als dort bei Längslage.

**Einfluß der Dicke und Breite.** Ein einfacher Magnet hat zwar lediglich eine Länge. CHWOLSON[1] hat aber den Gedanken durchgeführt, einen wirklichen Magneten von gewisser Breite und Dicke durch vier Polpaare darzustellen, welche gewissermaßen den vier Magneten entsprechen, die man erhält, wenn man den Magneten durch zwei aufeinander senkrechte mediane Längsschnitte zerteilt. Es sind dann bei der Wechselwirkung zweier Magnete $8 \times 8$, also 64 Wirkungen zu berechnen. Die Formeln, welche schließlich resultieren und für die beiden Hauptlagen relativ einfach werden, zeigen, daß die Breiten- und Dickenglieder nicht immer zu vernachlässigen sind. Ob freilich diese ganze Auffassung eines Magneten als aus acht Polen bestehend eine innere Berechtigung besitze, ist eine andere Frage.

**Räumliche Anordnung.** Die Verallgemeinerung der oben für die Anordnung der Magnete in einer Ebene (Horizontalebene) entwickelten Formeln auf




Figur 13.

den Fall der räumlichen Anordnung führt, wie schon bemerkt, zu sehr verwickelten Ausdrücken; man tut gut, dabei wenigstens in der einen oder andern Hinsicht gewisse Beschränkungen einzuführen. So hat CHISTONI[2] die vollständige Theorie durchgeführt für den Fall eines festen Magneten und einer um eine vertikale Achse drehbaren Nadel, deren Mittelpunkte in verschiedenen Horizontalebenen liegen, und die verschiedene, aber unveränderliche Inklinationen gegen die Horizontalebene haben. Aus der allgemeinen Endformel lassen sich dann zahlreiche Spezialfälle ableiten; für den besonderen Fall, daß die beiden Mittelpunkte senkrecht übereinander liegen, gilt, da die allgemeine hinfällig wird, eine besondere Formel. Die beiden in Rede stehenden Gleichgewichtsbedingungen, aus denen sich also zugleich die Nadelablenkungen ergeben, sind folgende:

---

[1] O. CHWOLSON, Mém. Acad. St. Pét. (7). **31.** Nr. 10. 2. Teil. 1883. — [2] CHISTONI, N. Cim. (3). **30.** p. 97. 1891.

$$(21)\quad + M'\mathfrak{H}\sin\varphi \iint \frac{\lambda_1\left[\sin\psi\left(\sqrt{D^2-k^2}-\lambda\cos\beta\cos\vartheta+\lambda_1\cos\alpha\cos\psi\right)+\cos\psi\left(\lambda\cos\beta\sin\vartheta-\lambda_1\cos\alpha\sin\psi\right)\right]}{\left\{(k-\lambda\sin\beta-\lambda_1\sin\alpha)^2+(\lambda\cos\beta\sin\vartheta-\lambda_1\cos\alpha\sin\psi)^2+\left(\sqrt{D^2-k^2}-\lambda\cos\beta\cos\vartheta+\lambda_1\cos\alpha\cos\psi\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\,dm\,dm'=0$$

$$(22)\quad - M'\mathfrak{H}\sin\varphi \iint \frac{\lambda\lambda_1\cos\beta\sin\zeta}{\left\{(D-\lambda_1\sin\alpha-\lambda\sin\beta)^2+\lambda_1^2\cos^2\alpha+\lambda^2\cos^2\beta-2\lambda\lambda_1\cos\alpha\cos\beta\cos\zeta\right\}^{\frac{3}{2}}}\,dm\,dm'=0 \quad .$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Magnete der größeren Allgemeinheit halber nicht als einfache Polpare, sondern als ganze magnetische Linien behandelt sind; daher die Integration über die einzelnen magnetischen Elemente $dm$ und $dm'$. Zur Erleichterung des Überblicks über die in den Formeln enthaltenen Größen diene Figur 13. $SON$ und $son$ sind Magnet und Nadel, $S'O'N'$ und $s'on'$ ihre Projektionen auf die Horizontalebene durch $o$, $k$ ist die Höhe von $O$ über $O'$, $D$ die Entfernung $Oo$; $\lambda$, $\lambda_1$ sind die Abstände eines Magnet- bzw. Nadelteilchens von $O$ bzw. $o$; $\alpha$, $\beta$ sind die Inklinationen des Magneten bzw. der Nadel gegen die Horizontalebene; $\varphi$ ist der Abweichungswinkel der Nadel vom Meridian; $\vartheta$, $\psi$ sind die Winkel der Projektionen des Magneten bzw. der Nadel mit der Verbindungslinie $O'o$; $\zeta$ (in der zweiten Formel) der Winkel $n'oN'$ für die hier senkrecht übereinander liegenden Nadeln; endlich ist $\mathfrak{H}$ die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus und $M'$ das magnetische Moment der Nadel. — Es sei bemerkt, daß die Formeln so ziemlich alle Spezialformeln enthalten, die bei magnetischen Messungen vorkommen (s. Art. Magnetische Messungen).

## E) Schwingungen von Magneten.

Lenkt man eine unter dem Einflusse des Erdmagnetismus befindliche, um die Vertikale drehbare Magnetnadel auf irgend eine Weise ab, so gerät sie in Schwingungen. In dem Augenblicke, wo sie um den Winkel $\varphi$ vom Meridiane abweicht, wirkt auf sie das Drehungsmoment $M\mathfrak{H}\sin\varphi$ ($M$ Moment der Nadel, $\mathfrak{H}$ Horizontalkomponente des Erdmagnetismus) und außerdem, falls die Nadel an einem Faden oder Drahte hängt, das Torsionsmoment desselben; ist dieses für den Torsionswinkel $l$ gleich $N$ und ist in der Lage $\varphi$ der Torsionswinkel gleich $\psi = \varphi \mp \alpha$ (denn die torsionsfreie Lage wird im allgemeinen mit dem Meridian einen Winkel $\alpha$ bilden); ist endlich $K$ das Trägheitsmoment der Nadel und $t$ die Zeit, so hat man die Bewegungsgleichung:

$$(23)\qquad K\frac{d^2\varphi}{dt^2} + M\mathfrak{H}\sin\varphi + N(\varphi-\alpha) = 0 \quad .$$

Die Lösung dieser Gleichung ist im allgemeinen sehr verwickelt: läßt man das Torsionsglied weg, so kommt man auf die Gleichung des ebenen Pendels, also auf elliptische Funktionen und, was die wichtigste Größe, die Schwingungsdauer betrifft, auf eine nach Potenzen der Amplitude fortschreitende Reihe. Sehr einfach hingegen wird die Lösung, wenn man sich auf kleine Schwingungen beschränkt; man kann alsdann $\varphi$ statt $\sin\varphi$ schreiben und die beiden Drehungsmomente zusammenfassen; führt man dann noch das Torsionsverhältnis $\Theta$, d. h. das Verhältnis der beiden Drehungsmomente $N : M\mathfrak{H}$ ein, so erhält man die Gleichung

(24)
$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} + M\mathfrak{H}(1+\Theta)\varphi - M\mathfrak{H}\,\Theta\alpha = 0 \quad ,$$

und als ihre Lösung

(25)
$$\varphi = C\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + p\right) + \varphi_0 \quad ,$$

wo $C$ die Amplitude, $T$ die Schwingungsdauer, $p$ die Phase und $\varphi_0$ die kleine Abweichung bedeutet, welche die Nadel in der Ruhe gegen den Meridian aufweist; letztere ist gegeben durch die Formel

(25a)
$$\varphi_0 = \frac{\Theta}{1+\Theta}\alpha \quad .$$

Die Schwingungsdauer wird in diesem Falle, ganz entsprechend wie bei kleinen Pendelschwingungen:

(26)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{M\mathfrak{H}(1+\Theta)}} \quad .$$

Sie ist, wie man sieht, mit der Wurzel aus dem Trägheitsmoment direkt, mit der Wurzel aus Nadelmoment und Erdmagnetismus umgekehrt proportional.

Im wesentlichen ähnlich liegen die Verhältnisse bei einer um eine vertikale Achse drehbaren, der Vertikalkomponente des Erdmagnetismus unterworfenen, in bezug auf Schwere kompensierten Magnetnadel.

**Asymmetrische Schwingungen.** Derartige Schwingungen treten bei Magneten immer dann auf, wenn — infolge von Torsion oder anderen mitwirkenden Kräften — die Ruhelage des Magneten von der Feldrichtung, z. B. von dem magnetischen Meridian abweicht. Die Asymmetrie ist meist nicht erheblich; trotzdem kann sie, wenn unberücksichtigt, merkliche Fehler bei Messungen usw. herbeiführen. Es haben daher zuerst Richarz und P. Schulze[1], bald darauf F. A. Schulze[2] sich theoretisch und experimentell mit der Frage beschäftigt und sind zu interessanten Ergebnissen gelangt; es muß jedoch hier an diesem Hinweise genügen.

**Mehrere Magnete.** Schwingt eine Nadel, bei aufgehobenem Erdmagnetismus, in der Horizontalebene unter der Einwirkung eines festen Magneten, so gelten, wenn beide senkrecht übereinander liegen, in erster Annäherung die obigen Formeln. Bei allen anderen Konfigurationen dagegen, insbesondere, wenn beide in einer Horizontalebene liegen, tritt begreiflicherweise eine Asymmetrie der Schwingungen ein.

Sehr merkwürdig, und zwar in verschiedenen Hinsichten, ist der Fall zweier gleichzeitig in einer Horizontalebene schwingender Nadeln. Dieser Fall wird bei beweglichen Nadeln sogar stets eintreten, auch wenn man nur die eine der Nadeln in Schwingungen versetzt; denn durch diese wird die andere von selbst zu Schwingungen angeregt. Diese Schwingungen beeinflussen sich nun, je nach ihren Perioden und Amplituden, in sehr komplizierter Weise; und zwar wird im allgemeinen der ganze Charakter der Schwingungen ein anderer, bei kleinen Amplituden und großen Abständen aber mindestens die Periode. J. Fröhlich[3] hat hierfür Formeln entwickelt, und zwar auch für den Fall beliebig vieler, in Reihen angeordneter Nadeln.

**Kinetische Kräfte.** Fröhlich hat aber — und das war der Hauptzweck seiner Untersuchung — des weiteren festgestellt, daß die gleichzeitigen Schwingungen der Nadeln auch verschiebende Kräfte, d. h. Anziehung oder Abstoßung, wachrufen, die sich zu den schon vorhandenen statischen hinzuaddieren; und er stellt

[1] F. Richarz und P. Schulze, Drude Ann. **8**. 348. 1902. — [2] F. A. Schulze, Drude Ann. **9**. 1111. 1902. — [3] J. Fröhlich, Math. u. Nat. Ber. a. Ungarn. **9**. S. 87. 1891 (1892).

die Bedingungen fest, unter denen Anziehung oder Abstoßung eintritt. Eine lange Nadelreihe kann sich z. B. unter Umständen infolge der Schwingungen zusammenziehen, unter anderen wieder dehnen.

## F) Das magnetische Feld.

Die Wirkung eines Poles, eines Polpaares, beliebiger Kombinationen solcher oder wirklicher Magnete erstreckt sich streng genommen natürlich über den ganzen unendlichen Raum. Da aber die Wirkungen umgekehrt proportional der zweiten, dritten und vierten Potenz der Entfernung abnehmen, so wird jede Wirkung tatsächlich nur in einem ziemlich beschränkten Raume sich für unsere Apparate bemerklich machen, und dieser Raum heißt das magnetische Feld des betreffenden magnetischen Gebildes. Damit ist zugleich erläutert, wieso es ein magnetisches Feld eines einzelnen Poles geben kann, während doch ein einzelner Pol gar nicht existiert: der andere kann eben in so großer Entfernung liegen, daß sein Feld sich mit demjenigen des zu betrachtenden Poles gar nicht oder nur in den äußersten Regionen berührt. Man versteht aber unter magnetischem Feld nicht schlechthin diesen angegebenen Raum, sondern den Raum in seiner magnetischen Beschaffenheit, d. h. behaftet mit der in jedem seiner Punkte stattfindenden magnetischen Kraft, die man sich gewissermaßen, ohne damit konkrete Vorstellungen zu verbinden, als ein das ganze Feld erfüllendes Agens denkt. Um das von dem bestimmten magnetischen Körper oder abstrahierten Gebilde erzeugte Feld möglichst ungetrübt zu erhalten, muß man jenen Körper sehr kräftig wählen, anderenfalls wirkt der Erdmagnetismus mit ein, der doch sein eigenes magnetisches Feld besitzt, und man erhält dann ein kombiniertes Feld dieser Wirkungen.

**Magnetische Feldstärke und Kraftlinien.** In jedem Punkte des Feldes herrscht eine bestimmte Kraft, nämlich die Summe der von allen Polen bzw. Magneten herrührenden Kräfte. Diese Kraft hängt, außer von der Stärke und Konfiguration dieser Pole, auch von der Stärke des Poles ab, der sich an der betrachteten Stelle des Feldes befindet und auf den die Kraft wirkt, und zwar ist sie mit derselben proportional. Man denkt sich nun an dieser Stelle einen Pol von der Stärke eins, und nennt die entsprechende Kraft die Intensität des Feldes oder die Feldstärke an dieser Stelle. Sie hat eine bestimmte Größe und eine bestimmte Richtung, beide werden im allgemeinen von Ort zu Ort variieren; tun sie das nicht, sind sie vielmehr überall gleich, so hat man ein gleichförmiges oder homogenes Feld vor sich, in allen anderen Fällen ein ungleichförmiges. Das Feld wird sich ferner im allgemeinen mit der Zeit ändern; tut es das nicht, so heißt es ein konstantes Feld, im anderen ein veränderliches.

Die Bestimmung der Größe und Richtung der Feldstärke ist eine der wichtigsten Aufgaben; sie kann durch Beobachtung oder durch Rechnung gelöst werden. Die Messung der Feldstärke wird, im Zusammenhange mit anderen experimentellen Methoden, in einem besonderen Artikel behandelt werden; die Bestimmung der Richtung kann gleich hier erledigt werden, und es ist hierzu folgendes vorauszuschicken.

Stellt man die Feldrichtung in einem Punkte durch eine kurze, von diesem Punkte ausgehende, entsprechend gerichtete Linie dar, verfährt für den Endpunkt dieser Linie ebenso usw. (bei einem konstanten Felde dürfen diese Linienelemente nacheinander, bei einem veränderlichen müssen sie gleichzeitig festgestellt werden, sich also auf denselben Moment beziehen), so erhält man eine Kurve. Diese Kurve heißt eine magnetische Kraftlinie. Das ganze Feld wird von solchen Kraftlinien durchzogen, ohne daß diese sich irgendwo schnitten; nur in den Polstellen treffen sie zusammen; oder, genauer gesagt, von den, den positiven

Einheitspol abstoßenden positiven Polstellen — auch Quellen genannt — divergieren sie und nach den, den Einheitspol anziehenden negativen Polstellen — auch Senken genannt — hin konvergieren sie.

**Experimentelle Darstellung der Kraftlinien.** Um nun den Verlauf der Kraftlinien experimentell festzustellen, liegt das folgende, freilich mühselige Verfahren am nächsten. Man stellt eine frei im Raume bewegliche kleine Nadel in dem Punkte, von dem man ausgehen will, auf und verzeichnet ihre Richtung; in dieser Richtung schiebt man sie nun ein Stück weiter, so daß sich ihr Mittelpunkt da befindet, wo eben noch ihr Nordpol war, verzeichnet wiederum die Richtung, usw. Will oder kann man eine im Raume drehbare Nadel nicht anwenden, so muß man die Angaben einer horizontal und einer vertikal drehbaren Nadel kombinieren; jene legt die Vertikalebene, in welche die Feldstärke fällt, fest, diese liefert dann, in die ermittelte Ebene eingestellt, die Richtung der Feldstärke. Offenbar ist das Verfahren auf konstante Felder beschränkt. Statt einer Magnetnadel kann man — und zwar in mancher Hinsicht mit Vorteil — eine kleine Drahtspule („Prüfspule“) verwenden, in der durch Erregung des Feldes oder durch Bewegung ihrer selbst ein Strom erregt wird, der dann am stärksten ist, wenn die Spulenebene auf der Feldrichtung senkrecht steht (vgl. Art. Magn. Messungen).

In weit einfacherer und zugleich anschaulicherer Weise erhält man ein Bild des magnetischen Feldes oder vielmehr ein Bild eines ebenen, horizontalen Schnittes desselben, wenn man eine Platte im Felde aufstellt, mit Eisenfeilicht bestreut und in geeigneter Weise erschüttert; das Feilicht ordnet sich dann (s. w. u.) in den Kraftlinien an. Weniger exakt ist diese Methode, einmal wegen der Trägheit der Eisenteilchen, die sich überdies in ihren Bewegungen und Lagerungen gegenseitig mehr oder weniger stören, wenn die Menge und die Feinheit des Feilichts nicht gerade sehr gut getroffen sind; und dann, weil die verschiedenen Späne sich, wie sich später ergeben wird, auch magnetisch beeinflussen und sich infolgedessen nicht genau zu denjenigen Kraftlinien anordnen, welche dem das magnetische Feld erzeugenden Körper allein zukommen würden. Endlich ist drittens zu beachten, daß die Platte, auf der das Feilicht sich anordnet, eine horizontale Ebene darstellt, die Kraftlinien aber im allgemeinen gar nicht, und zwar auch nicht teilweise, in einer solchen verlaufen (wie sich auch daran zeigt, daß die Späne größtenteils mehr oder weniger „zu Berge stehen“), so daß man auf diese Weise im allgemeinen nur scheinbare Kraftlinien erhält. In allen Fällen, wo die Kraftlinien überhaupt ebene Kurven sind, kann man jedoch begreiflicherweise durch geeignete Wahl der Ebene die wirklichen Kraftlinien erhalten.

Im einzelnen sei folgendes bemerkt. Als Unterlage nimmt man am besten steifes weißes Kartonpapier; Glas eignet sich weniger, mindestens muß es weiß und etwas rauh sein; nur wenn die Figuren projiziert werden sollen, bedient man sich durchsichtiger Glasplatten. Gewisse Vorteile für die Reinheit und Feinheit der Kurven gewährt es, statt der festen Unterlage eine Wasser-, Glyzerin- oder Quecksilberoberfläche zu benutzen, aber hier können sich leicht Kapillarwirkungen störend geltend machen[1]. — Die Wahl des Pulvers wird davon abhängen, ob es mehr auf kräftiges Herausholen des Gesamtbildes oder auf Feinheiten der Details ankommt; für grobe Bilder eignet sich feineres Eisenfeilicht, für feinere Züge Ferrum pulverisatum, für feinste Limatura ferri alcoholisata, die, aus einem Leinenbeutelchen herausgeschüttet, die Unterlage mit einer feinen grauen Staubdecke bedeckt. Um trockenes und zugleich schwarzes Pulver zu erhalten, dessen Bilder sich besser abheben, empfiehlt sich das vorherige Glühen. — Zum fixieren der Bilder spritzt man einen feinen Sprühregen von Schellack oder dergleichen auf die Platte, die man auch schon vorher damit überziehen kann, oder man überzieht sie mit einer dünnen Paraffinschicht, stellt die Kurven her und erwärmt dann;

[1] Vgl. z. B. FRANKENBACH, Wied. Ann. **18**. S. 703. 1883.

endlich kann man auch Abdrücke auf Leimpapier machen. Besondere Anweisungen haben in neuester Zeit u. a. F. HOFFMANN[1], sowie KECK und HARTWIG[2] gegeben; nach letzteren stellt man sich eine Suspension feinsten Eisenpulvers in Terpentinöl her und bläst die Mischung mit einem Zerstäuber auf die Platte. — Für die Projektion ist es ungünstig, daß die Bildebene horizontal liegt; man muß also reflektierende Spiegel oder Prismen unter 45° anwenden. — Was endlich die photographische Wiedergabe betrifft, so findet man bei EBERT[3], KECK und HARTWIG (s. o.), sowie bei LEICK (Röntgen-Photographie)[4] geeignete Ratschläge.

Das Gesagte bezieht sich auf Darstellungen in der Ebene. Schwieriger ist die Herstellung und Fixierung von Kraftlinienbildern im Raume, namentlich braucht man hier sehr starke Felder, um die Störungen durch die Schwerkraft auf ein möglichst geringes Maß zu reduzieren. Eine Methode ist das Einbetten der Eisenteilchen in ein zähflüssiges Mittel, z. B. Gelatine (vgl. EBERT, a. a. O.), ein anderes — für kurze Kraftlinien — das Verbrennen und Zusammenbacken der von den Teilchen zwischen den Polen gebildeten Brücken. — Zur bloß qualitativen Demonstration einfacher Fälle kann man sich nach WEINHOLD[5] mit Vorteil der kleinen Fahrradkugeln bedienen; hängt man z. B. an den unteren Pol eines Magnetstabes vier Reihen von je fünf Kugeln, so divergieren sie nach rechts, links, vorn und hinten, bei Annäherung eines anderen Magneten oder Eisenstückes nähern sie sich einander usw. Nach SPIZYN[6] kann man die Richtung der von einem Pole ausgehenden Kraftlinien im Raume auch mit einem Pinsel aus langen Eisendrähten von weniger als 0,1 mm Dicke sehr schön demonstrieren.

**Niveauflächen oder Flächen gleichen Potentials.** Die Feldstärke ist der das Feld charakterisierende Vektor. Es gibt aber auch einen reinen Skalar, durch dessen Zahlenwert, als Funktion der Koordinaten, das Feld vollständig charakterisiert ist, nämlich das schon oben eingeführte magnetische Potential. Wie die Feldstärke durch die Kraftlinien, so läßt sich das Potential durch eine Schar von Flächen anschaulich darstellen. Sind nämlich $V_1$, $V_2$, $V_3$ die Werte des Potentials in drei nahe benachbarten Punkten, und liegt $V_2$ dem Zahlenwerte nach zwischen $V_1$ und $V_3$, so wird im allgemeinen auf jedem Wege, auf dem man von 1 nach 3 gelangen kann, — sofern diese Wege dem Wege 1 2 3 nahe benachbart sind, — ein Punkt liegen, wo das Potential ebenfalls den Wert $V_2$ hat, z. B. die Punkte 2′, 2″, usw. Diese Punkte begrenzen eine kleine, den Punkt 2 umgebende Fläche. Verfährt man nun mit dem Punkte 2′ ebenso wie vorhin mit dem Punkte 2, so erhält man wieder eine kleine Fläche; ebenso nach den anderen Seiten usf. Schließlich erhält man eine krumme Fläche von der Eigenschaft, daß das Potential in allen ihren Punkten denselben Wert hat. Diese, das Feld erfüllenden, einander unendlich benachbarten, sich aber nie schneidenden Flächen heißen magnetische Äquipotentialflächen, Flächen gleichen Potentials oder kurz Niveauflächen. Auf ihnen stehen, wie ohne weiteres einleuchtet, die Kraftlinien überall senkrecht; denn da die Kraft in einem Punkte keine Komponente in irgend einer, in die Niveaufläche fallenden Richtung hat, — hier ist ja das Gefälle des Potentials überall null, — so muß die ganze Kraft senkrecht gegen die Niveaufläche gerichtet sein.

Gelangt von dem Felde nur ein ebener Schnitt zur Darstellung, so treten auch die in Rede stehenden Flächen nur mit ihren Schnittlinien auf; diese heißen dann Äquipotentiallinien oder Niveaulinien. Hat man die Kraftlinien auf eine der oben angegebenen Arten experimentell ermittelt, so kann man die Niveaulinien, als überall normal zu ihnen, leicht zeichnen. Nach COLARDEAU[7] kann

[1] F. HOFFMANN, Z. f. phys. u. chem. Unt. **12**. S. 153. 1899. — [2] KECK und HARTWIG, ebenda. **12**. S. 154. 1899. — [3] H. EBERT, Magnetische Kraftfelder, Leipzig 1896. — [4] W. LEICK, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **2**. S. 165. 1899. — [5] K. WEINHOLD, Z. f. phys. chem. Unt. **9**. S. 136. 1896. — [6] J. SPIZYN, russ. phys.-chem. Ges. **27**. 56. 1895. — [7] E. COLARDEAU, J. de Phys. (2) **6**. S. 83. 1887.

man sie auch direkt zur Darstellung bringen, indem man statt des stark magnetischen Eisenpulvers ein schwach magnetisches Pulver, z. B. Eisenoxyd, nimmt; die Teilchen ordnen sich dann so langsam zu Kraftlinien an, daß die Bahnen, auf denen sie sich beim Klopfen dorthin begeben, durch den zurückgelassenen Staub sichtbar werden. Mit mittelstarken Pulvern erhält man auf diese Weise sogar ein Gemisch beider Kurvensysteme.

Die Gleichung der Niveauflächen lautet einfach:

$$V = \text{const}, \tag{27}$$

diejenigen der Kraftlinien:

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z} \,. \tag{28}$$

**Dichte der Niveauflächen und Kraftlinien.** Sowohl die Niveauflächen als auch die Kraftlinien können Aufschluß nicht nur über die Richtungs-, sondern auch über die Intensitätsverhältnisse des Feldes geben. Man muß nur aus ihrer unendlichen, sich stetig aneinander schließenden Zahl eine geeignete Auswahl treffen. Für die Niveauflächen ergibt sich diese Auswahl ohne weiteres; man hat nur festzusetzen, daß sich der Wert des Potentials von der ersten zur zweiten um ebensoviel ändere wie von der zweiten zur dritten, von dieser zur vierten usw. In der Gleichung

$$F = -\frac{dV}{dn} = \frac{V_1 - V_2}{\delta} \,, \tag{29}$$

wo $\delta$ der Abstand zweier Nachbarflächen ist, ist alsdann $V_1 - V_2$ eine Konstante, und folglich ist die Feldstärke $F$ mit $\delta$ umgekehrt proportional. Man muß nur die konstante Potentialdifferenz genügend klein, und folglich die beiden Flächen genügend nahe beieinander wählen, um das durch $\delta$ dargestellte Kraftlinienstück als geradlinig betrachten zu können. Die umgekehrte Proportionalität der Feldstärke mit $\delta$ gilt sowohl für die verschiedenen Stellen einer und derselben Schicht als auch für die Schichten zwischen den verschiedenen Niveauflächen. Statt des Abstandes der Niveauflächen kann man auch ihre Dichte, d. h. ihre auf die Längeneinheit (in der Kraftrichtung) entfallende Zahl einführen und erhält dann den Satz, daß die Feldstärke mit der Dichte der Niveauflächen direkt proportional ist. Um die Proportionalität zur Gleichheit zu steigern, braucht man nur die Auswahl der Flächen so zu treffen, daß $V_1 - V_2$ überall gerade ein Erg ist; mißt man dann noch $\delta$ in cm, bzw. die Dichte der Flächen durch ihre Anzahl pro cm, so erhält man die Feldstärke unmittelbar in Dynen[1].

Was andererseits die Kraftlinien betrifft, so denke man sich in einer Niveaufläche eine kleine in sich geschlossene Linie und betrachte die Gesamtheit der durch ihre Punkte hindurchgehenden Kraftlinien; man nennt dieses Gebilde eine Kraftröhre oder einen Kraftfaden. Die Betrachtung einfacher Fälle (s. u.), allgemeiner aber die Potentialtheorie lehrt, daß der Querschnitt eines solchen Kraftfadens mit der Feldstärke umgekehrt proportional ist. Statt des Querschnittes des Kraftfadens in qcm kann man nun wieder die Zahl der durch das qcm der Niveaufläche hindurchtretenden Kraftlinien einführen und hat alsdann den Satz, daß die Feldstärke der Dichte der Kraftlinien direkt proportional ist; und diesen zunächst nur für die verschiedenen Stellen eines und desselben Kraftfadens gültigen Satz kann man dann leicht auf das ganze Feld erweitern. Wie man auch hier die Proportionalität zur Gleichheit steigern kann, wird sich bald zeigen.

Die seitdem von so ungeahnter Bedeutung gewordene Einführung des magnetischen Feldes mit seinen charakteristischen Flächen und Linien verdankt

[1] Erg bzw. Dynen, falls das natürliche System benutzt (S. 16) wird, im üblichen sind es Größen von anderen Dimensionen, aber gleicher Beziehung zueinander.

man dem wesentlich auf Anschauung sich stützenden und hierdurch den Mangel formal-mathematischer Durchbildung ersetzenden Forschergeiste FARADAYS[1], die mathematische Formulierung und Ausgestaltung haben dann in kaum minder genialer Weise MAXWELL[2] und seine Nachfolger geleistet.

**Gleichförmiges Feld.** Dies ist offenbar der einfachste Fall: die Feldstärke hat überall dieselbe Größe und Richtung, in dieser Richtung verlaufen die hier geraden Kraftlinien, die auf ihnen senkrechten Ebenen sind die Niveauflächen: jene wie diese sind äquidistant, und sie liegen desto dichter beieinander, je kräftiger das Feld ist; in einem Felde von 1 Dyne sind beide Abstände 1 cm, in einem solchen von 4 Dynen ist der Abstand der Niveauflächen $^1/_4$ cm, derjenige der Kraftlinien $^1/_2$ cm usw. Das verbreitetste gleichförmige Feld ist das der Erde bzw. des Erdmagnetismus, solange man sich in Dimensionen bewegt, die klein sind gegen die der ganzen Erde. Künstlich kann man sich ein sehr nahezu gleichförmiges Feld herstellen, indem man zwei entgegengesetzte Polflächen in einem Abstande, der beträchtlich kleiner als ihr Durchmesser ist, einander parallel gegenüberstellt.

**Feld eines einzelnen Poles** oder **„unipolares Feld".** Das ist offenbar der nächst einfachste Fall. Das Potential ist $V = \frac{m}{r}$, also die Gleichung der Niveauflächen

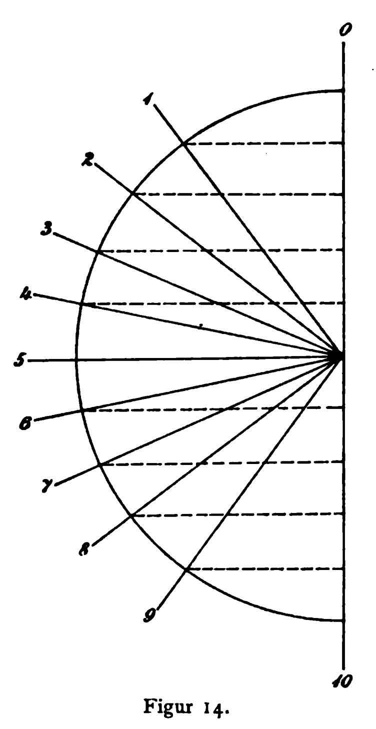
$$\frac{m}{r} = c \quad \text{oder} \quad r = \frac{m}{c} \quad . \tag{30}$$

Diese Flächen sind Kugeln, ihre ebenen, z. B. horizontalen Durchschnitte Kreise. Wählt man aus der unendlichen Zahl dieser Kreise diejenigen, welche den Werten 1, 2, 3 ... von $V$ entsprechen, deren Radien also, vom äußersten zum innersten, $m$, $m/2$, $m/3$ usw. sind, so erhält man Niveauflächen, deren Dichte von innen nach außen quadratisch abnimmt. Die Kraftlinien sind offenbar sämtliche vom Pole ausgehenden geraden Linien, und zwar, wenn man wiederum eine bestimmte Anzahl herausgreift, gleichförmig um den Pol nach allen Seiten hin verteilt. Ist die Polstärke $m$ und zieht man im ganzen $4\pi m$ Kraftlinien, so wird irgend eine Niveau-Kugelfläche von $4\pi m$ Kraftlinien getroffen, also die Flächeneinheit derselben von $\frac{4\pi m}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2}$ Kraftlinien, d. h. die Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit stellt gerade wieder die Kraft, also die Intensität des Feldes dar. Auch bei einem beliebigen Felde kann man hiernach die Intensität gleich der Kraftlinienzahl machen, indem man von jedem Pole $4\pi m$ Kraftlinien ausgehen läßt; es folgt dies daraus, daß beide Größen überall proportional, in den kleinen, die Pole umgebenden Kugelflächen aber gleich, und folglich überall gleich sind. Man kann natürlich auch andere Festsetzungen treffen, z. B. $m$ Kraftlinien ziehen, dann entfallen auf die Flächeneinheit $\frac{m}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$ Kraftlinien, oder man kann es so einrichten, daß eine Kreislinie, welche den Schnitt einer Kugelfläche darstellt, von $m$ Niveaulinien getroffen wird usw. In jedem Falle werden benachbarte Kraftlinien gleiche Winkel miteinander bilden, da das Feld keine ausgezeichnete Richtung hat, sondern alle Richtungen gleichwertig sind.

**Zonale Verteilung der Kraftlinien.** Man kann nun aber, und das ist für die folgenden Anwendungen auf kompliziertere Felder wichtig, dem Feld von vornherein eine ausgezeichnete Richtung unterlegen, indem man eine Achse einführt und alle Niveaukugeln als Rotationsfiguren um diese Achse auffaßt. Es

[1] M. FARADAY, Phil. Trans. 1852. S. 1. — Exp. Unters. üb. Elektr., deutsche Ausg., an zahlreichen Stellen, systematisch namentlich in Bd. 3. S. 298. — [2] J. Cl. MAXWELL, On lines of force und zahlreiche andere Abhandlungen; vgl. Collected PAPERS; ferner: Lehrb. d. Elektr. u. d. Magn., deutsch v. WEINSTEIN, Berlin 1883. Bd. 1. S. 47 u. a. a. St.

handelt sich dann darum, die Oberfläche einer solchen Kugel in lauter gleich große Zonen zu teilen und, damit auf gleiche Flächenteile einer und derselben Niveaufläche auch hier wiederum die gleiche Anzahl von Kraftlinien entfalle, jeder dieser Zonen eine gleiche Anzahl, z. B. eine Kraftlinie zuzuteilen, wofür man auch sagen kann: der ersten Zone, die das Achsenende zum Mittelpunkt hat und die Gestalt einer Kalotte besitzt, soll eine Kraftlinie zukommen, der Kalotte, welche diese und die nächste (ringförmige) Zone enthält, zwei Kraftlinien usw. (Figur 14). Denkt man sich einen Achsenschnitt der Kugel, so werden die Zonen durch Kreisbögen dargestellt, die Kraftlinien durch Radien nach den Grenzen dieser Bögen; und wenn man den Winkel eines solchen Radius mit der Achse $\Theta$ nennt und bedenkt, daß die Größe einer Kalotte $F = 2\pi(1 - \cos\Theta)$ ist, so erhält man als Gleichung der Kraftlinien



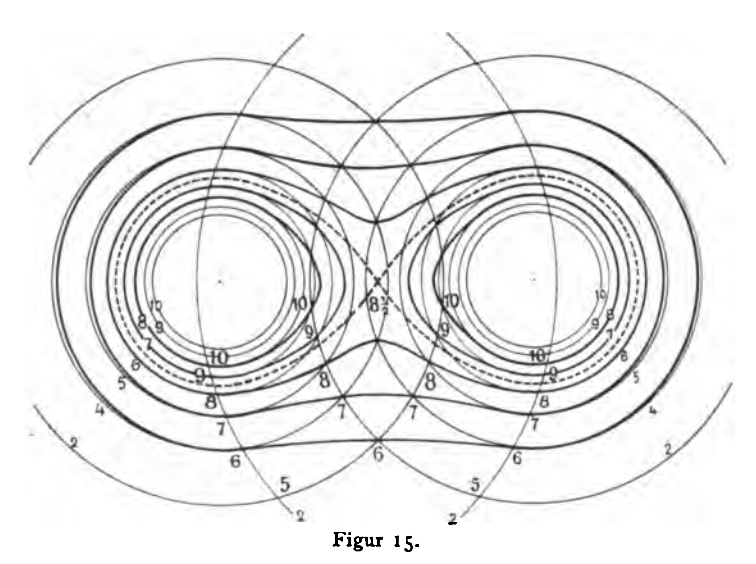
Figur 14.

$$2\pi(1 - \cos\Theta) = C \quad , \tag{31}$$

wo $C$ der Parameter ist, oder, wenn man nach $\Theta$ auflöst und festsetzt, daß auf die Flächeneinheit $m/4\pi$ Kraftlinien entfallen sollen ($C = \frac{4\pi}{m} c$, wo $m$ die Polstärke ist):

$$\Theta = \arc\cos\left(1 - \frac{2c}{m}\right) \quad , \tag{32}$$

wo jetzt dem Parameter der Reihe nach die Werte 1, 2 ... zu geben sind. Wenn $m$ eine ganze Zahl ist, erhält man auf diese Weise nach jeder Hälfte der



Figur 15.

Kreisperipherie hin gerade $m$ Kraftlinien. Eine einfache Überlegung lehrt, daß man diese Kraftlinien erhält, wenn man die Achse in $m$ gleiche Teile teilt, auf den Teilpunkten Senkrechte bis zur Peripherie errichtet und die Schnittpunkte

mit letzterer mit dem Zentrum verbindet. Für $m = 10$ werden z. B. die Winkel $\Theta$ in runden Zahlen 37°, 53°, 66½°, 78½°, 90°, 101½°, 113½°, 127°, 143°, 180°. Soll die Linienzahl pro Flächeneinheit absolut gleich der Feldstärke werden, so muß man statt 10 Kraftlinien $4\pi$ mal so viel, also auf ganze Zahl abgerundet, 124 ziehen. Auf diese Weise findet man die Kraftlinien unabhängig von den Niveauflächen resp. Niveaukurven und kann dann die Forderung, daß beide Systeme sich überall senkrecht schneiden, als Kontrolle benutzen.

**Zwei Pole; „bipolares Feld".** Rührt das Feld von zwei Polen her, so braucht man nur zu erwägen, daß sich die Felder, welche sie einzeln erzeugen würden, einfach übereinander lagern[1]. Es ist also das Potential in einem Punkte, der von dem Pole $m_1$ um $r_1$, von $m_2$ um $r_2$ entfernt ist:

$$V = \frac{m_1}{r_1} \pm \frac{m_2}{r_2} \quad , \tag{33}$$

wo das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem die beiden Pole gleichartig oder entgegengesetzt sind. Die Niveauflächen sind im allgemeinen ziemlich kompliziert, man kann sie aber oder vielmehr die Niveaukurven, d. h. ihre Schnitte mit der Zeichenebene, konstruieren, indem man die beiden einzelnen Niveausysteme (also Kreisscharen) zeichnet und diejenigen Durchschnittspunkte je zweier sucht, für welche $V_1 + V_2$ dieselbe Summe gibt. Die Achse für die zonale Verteilung der Kraftlinien ist hier natürlich die Verbindungslinie der beiden Pole, die Gleichung der Kraftlinien ist

$$m_1(1 - \cos\Theta_1) + m_2(1 - \cos\Theta_2) = 2c \quad , \tag{34}$$

wo $\Theta_1$ und $\Theta_2$ die Winkel sind, welche die von den beiden Polen nach einem Punkte der Kraftlinie gezogenen Linien mit der Pollinie bilden; die Konstruktion erfolgt, wie bei den Niveaulinien, durch Aufsuchung der Schnittpunkte von konstanter Summe der Parameterwerte. Natürlich läßt sich diese Methode auf beliebig viele in der Kraftlinie gelegene Pole verallgemeinern. Sind alle Massen von denselben Zeichen, so verlaufen alle Kraftlinien in die Unendlichkeit; sind einige Massen von anderen Vorzeichen, so gibt es einen Raum, innerhalb dessen die Kraftlinien in der Endlichkeit von einem negativen zu einem positiven Pole laufen, und einen anderen, in welchem sie in die Unendlichkeit auslaufen; beide Räume sind getrennt durch eine eigentümliche Fläche.

**Zwei gleichartige, gleich starke Pole.** Es ist hier

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad , \tag{35}$$

die Niveaukurven

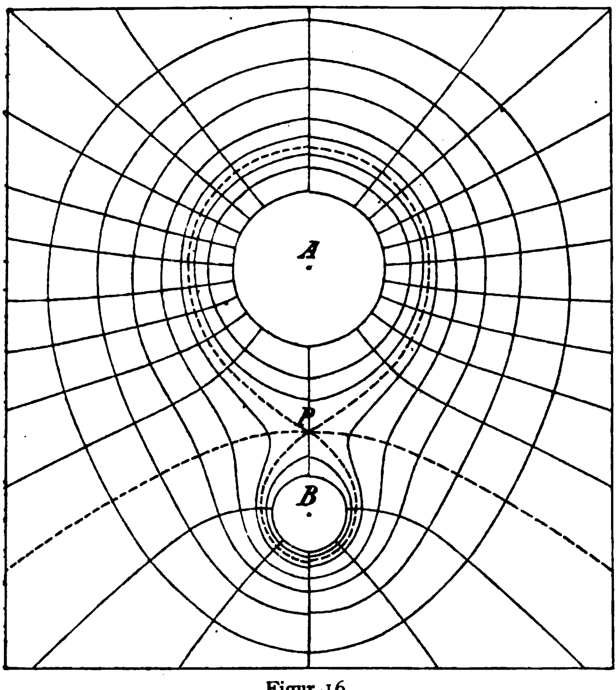
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad r_1 r_2 = c(r_1 + r_2) \tag{36}$$

sind den Lemniskaten in mancher Hinsicht sehr ähnliche Kurven; sie sind in Figur 15 genetisch (aus den beiden Kreisscharen) dargestellt; die kleinen Zahlen beziehen sich auf die Komponenten, die großen auf die Resultanten. Eine der Kurven schneidet sich selbst in der Mitte zwischen den beiden Polen, und zwar ist es diejenige, für welche, wenn $l$ der Abstand der beiden Pole ist, $V = 4m/l$ ist. Die Kraft ist in diesem Punkte nach jeder Richtung hin null, ein dort befindlicher Magnetpol also im Gleichgewicht, jedoch derart, daß er nur für Verschiebungen senkrecht zur Pollinie im stabilen, für Verschiebungen in dieser Linie jedoch im labilen Gleichgewichte sich befindet. Die Kraftlinien haben die Gleichung

[1] Das Superpositionsprinzip gilt nur für unveränderliche Magnete.

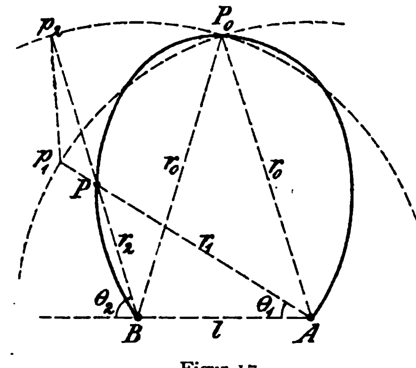
$$\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2 = 2\left(1 - \frac{c}{m}\right) \quad ; \tag{37}$$

sie verlaufen sämtlich in die Unendlichkeit, die vom linken Pole ausgehenden nach links, die vom rechten nach rechts, beide getrennt durch die auf der Pollinie senkrechte Ebene.




Figur 16.

Es sei bemerkt, daß in dem allgemeineren Falle zweier gleichartiger, aber verschieden starker Pole das Feld ein ganz ähnliches Bild darbietet, auch hier sind die Niveaulinien eine Art unsymmetrischer Lemniskaten, auch hier existiert ein Gleichgewichtspunkt, nur daß er nicht in der Mitte zwischen den beiden Polen, sondern so liegt, daß sich seine Abstände von ihnen wie die Wurzeln aus den Polstärken verhalten, und auch hier gibt es eine Trennungsfläche zwischen den von dem einen und dem anderen Pol ausgehenden Kraftlinien, nur daß sie keine Ebene, sondern eine nach dem schwächeren Pole konkave, hyperboloidartige Fläche ist. Für diesen allgemeinen Fall sind in Figur 16 Niveaulinien und Kraftlinien dargestellt, und zwar für $m_1(A) = 20$, $m_2(B) = 5$, also $m_1 = 4\,m_2$.




Figur 17.

**Zwei entgegengesetzte, gleich starke Pole.** Dies ist der wichtige Fall eines Polpaares, also eines idealen Magneten. Man hat für das Potential

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad , \tag{38}$$

für die Niveauflächen also ein System sich umschließender Flächen um einen Pol und ein ebensolches um den anderen Pol, beide getrennt durch die in der Mitte der Pollinie senkrechte Ebene; die Flächen sind Kugeln nicht unähnlich, nur gegen die Trennungsebene hin stark abgeplattet, desto stärker, je größer die Fläche ist. Für die Kraftlinien hat man

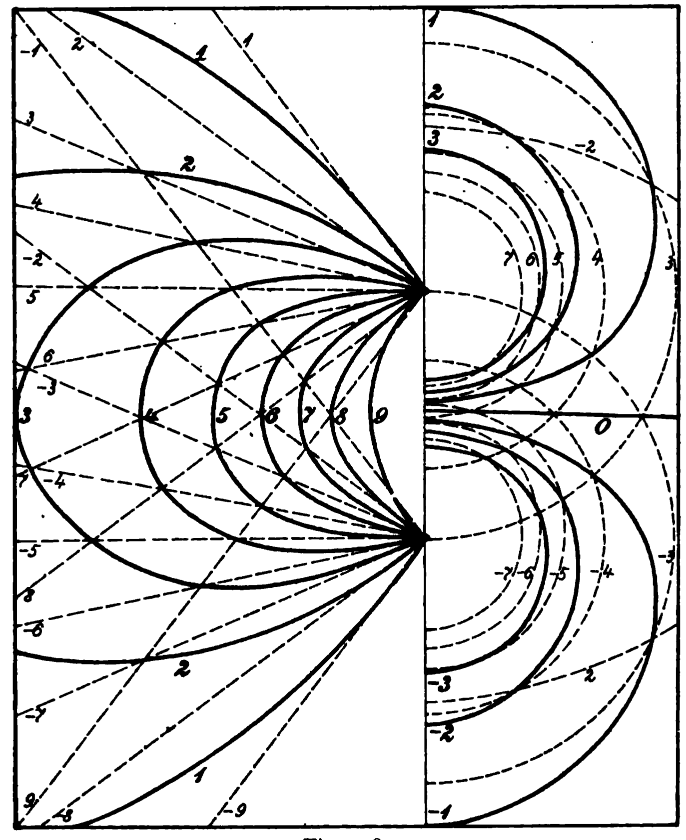
$$\cos\Theta_1 - \cos\Theta_2 = 2\,c \quad .$$

Die Gleichung läßt sich in diesem Falle auch direkt aus der Figur ableiten (Figur) 17 und zwar in der Gestalt $r_1 \cos\Theta_1 - r_2 \cos\Theta_2 = l$, wo $r_1$ und $r_2$ die

Längen der beiden nach dem Punkte $P$ der Kraftlinie gezogenen Strahlen sind und $l$ die Entfernung der beiden Pole ist; oder, wenn man diese Gleichung auf den mittelsten, senkrecht über der Mitte der Pollinie gelegenen Punkt $P_0$ anwendet, hierdurch $r_1$ und $r_2$ eliminiert und dafür den Abstand des Punktes $P_0$ von jedem der beiden Pole, $r_0$, einführt:

$$\cos\Theta_1 - \cos\Theta_2 = \frac{l}{r_0} ,$$

wodurch man ein Bild von der Bedeutung des obigen Parameters $c$ erhält und unmittelbar zu einer schon von ROGET angegebenen Konstruktionsmethode gelangt:

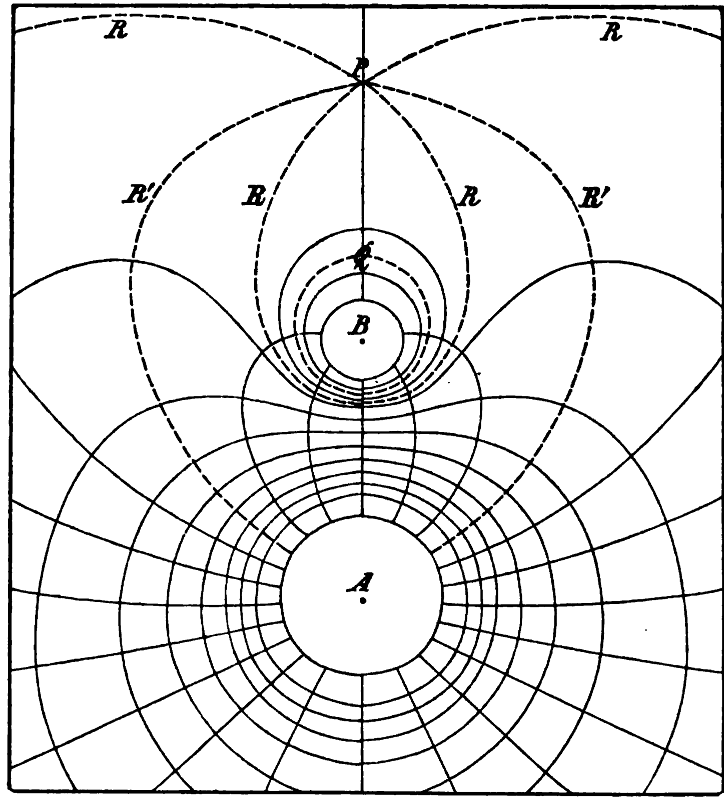


Figur 18.

Man schlägt mit irgend einem Radius $r_0$ Kreise um beide Pole, zieht von irgend einem Punkt $p_1$ des einen eine auf der Pollinie senkrechte Linie $p_1 p_2$ nach dem anderen und verbindet diese beiden Peripheriepunkte mit ihren Mittelpunkten: der Schnittpunkt $P$ der beiden Verbindungslinien ist ein Punkt der Kraftlinie. Durch Variieren von $p_1$ erhält man alle Punkte dieser Kraftlinie, durch Variieren von $r_0$ alle Kraftlinien. Sie weichen von Kreisen, wie man sieht, in dem Sinne ab, daß sie in die Länge gezogen sind. Besondere Konstruktionen haben für diesen Fall noch J. H. VINCENT[1] und A. GRAY[2] angegeben. Allgemeiner und dem Wesen der Sache mehr entsprechend ist natürlich die magnetische Konstruktion, welche in Figur 18 für diesen Fall dargestellt ist, diesmal in etwas

[1] J. H. VINCENT, Nat. 59. 32. 1899. — [2] A. GRAY, Nat. 59. 32. 1899.

anderer, in mancher Hinsicht deutlicheren Weise, nämlich rechts für die Niveaulinien, links für die Kraftlinien; die gestrichelten Linien entsprechen den einzelnen Polen, die ausgezeichneten ihrem Zusammenwirken, die Zahlen geben die Potentialwerte resp. die Ordnungsnummern der Kraftlinien an. Ein vollständigeres und allgemeineres Bild liefert Figur 19, welche verschieden starken, entgegengesetzten Polen entspricht, also das Seitenstück zur Figur 16 ist, und zwar auch insofern, als hier die Polstärken $m_1 = 20$, $m_2 = -5$ sind, ihr Verhältnis also, vom Zeichen abgesehen, wiederum 4 beträgt. $Q$ ist die Niveaufläche vom Potential null, sie ist, wie die Gleichung lehrt, eine Kugel (bei gleichen Polstärken ist es die Mittelebene), $R$ ist die Niveaufläche mit einem Doppelpunkt, also analog der Doppel-



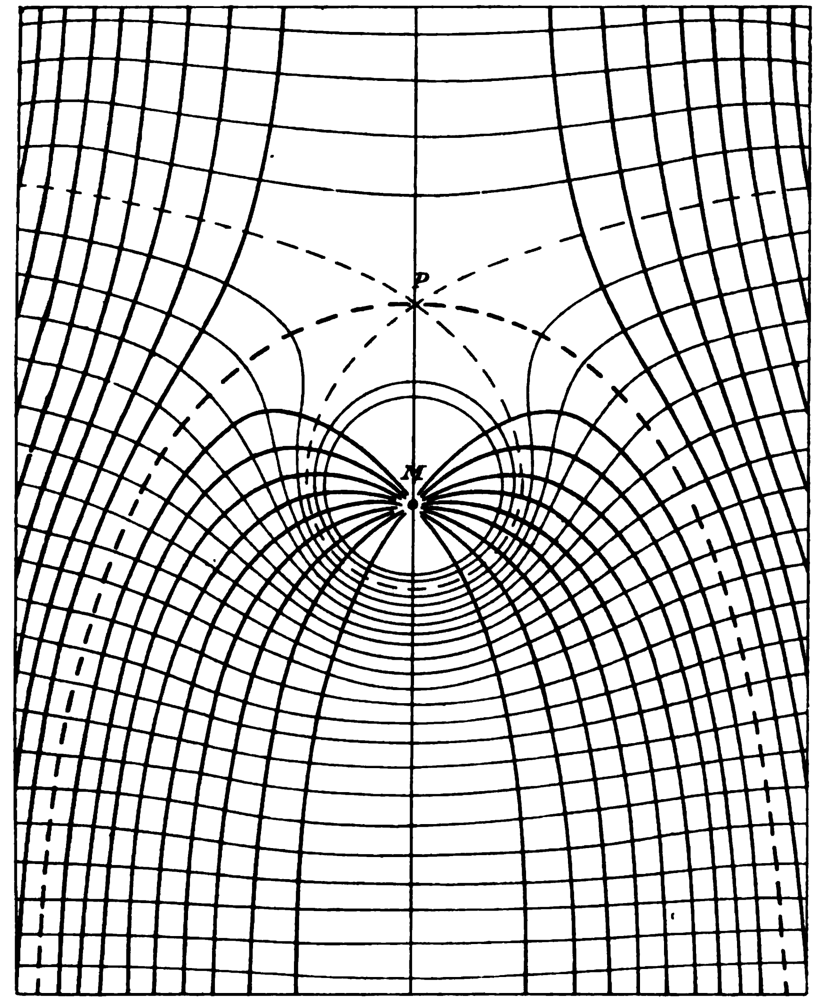

Figur 19.

punkt-Lemniskate bei gleichartigen Polen, nur mit dem Unterschiede, daß dort jede der beiden Schalen der Fläche den einen Pol umschließt, während hier die eine Schale den schwachen Pol, die andere beide Pole umschließt. In dem Gleichgewichtspunkte $P$ ist wieder die Kraft null, dieser Punkt liegt aber hier natürlich jenseits der beiden Pole, nicht zwischen ihnen; bei entgegengesetzt gleichen Polen rückt er in die Unendlichkeit. Die Linie $R'$ stellt die oben erwähnte Grenzfläche zwischen den geschlossen und den in das Unendliche verlaufenden Kraftlinien dar.

**Andere Fälle.** Bei mehr als zwei Polen werden die Verhältnisse offenbar sehr mannigfaltig, und zwar in dreifacher Hinsicht: durch die Vorzeichen, die Stärken und die Konfiguration der Pole. Dabei werden die Fälle mit gerader Anzahl von Polen praktisch wichtiger sein als die mit ungerader. So stellen z. B. die vier Pole $m$, $-m$, $m'$, $-m'$ zwei ideale Magnete dar; sie können gleich

oder ungleich stark sein, sie können beliebige oder eine der oben behandelted „Hauptlagen" zueinander haben usw. Es kann hier nicht näher darauf eingegangen werden[1].

Dagegen ist noch eine andere Klasse von Fällen zu erwähnen, nämlich die Übereinanderlagerung von Polen mit einem gleichförmigen Felde, z. B. dem des




Figur 20.

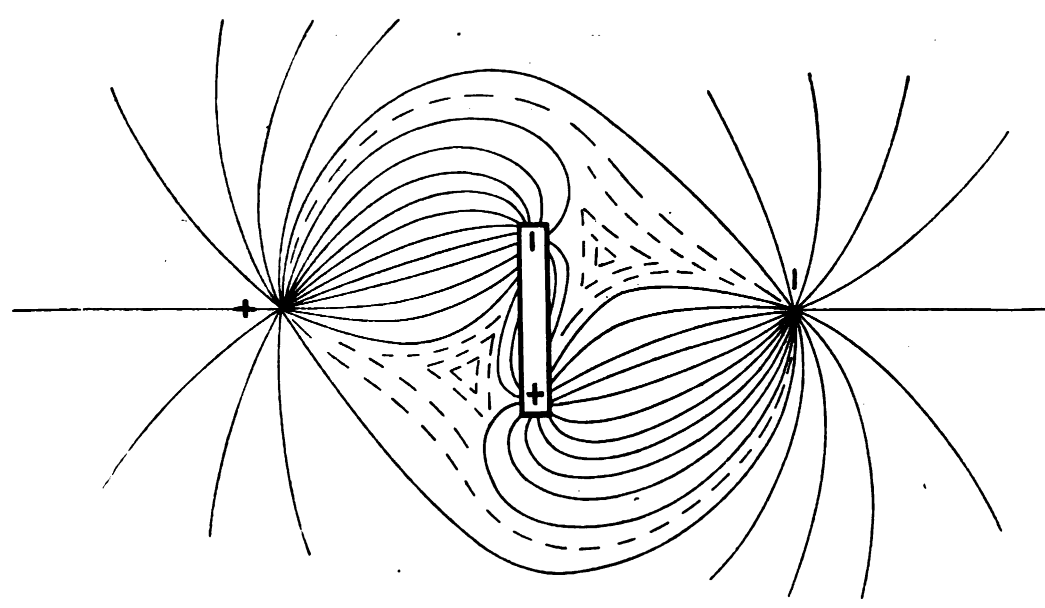
Erdmagnetismus. Die Gleichung der Niveauflächen lautet dann, wenn das gleichförmige Feld die Stärke $\mathfrak{H}$ und die Richtung der $x$-Achse hat:

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \mathfrak{H}\, x = \text{const.} \tag{39}$$

In Figur 20 ist der Fall eines einzigen Poles im gleichförmigen Felde zur Darstellung gebracht. Ganz oben und ganz unten ist die Störung des geradlinigen Verlaufes der Niveau- und Kraftlinien, wie man sieht, nur geringfügig, in der

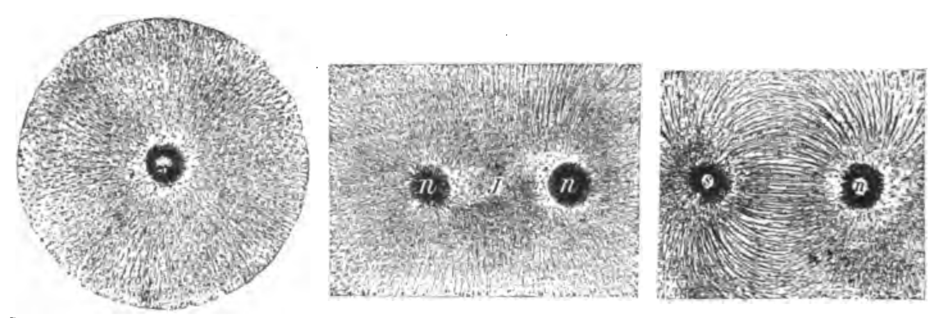
[1] Ein Fall dreier in gerader Linie gelegener Pole ist von MAXWELL gezeichnet und in Bd. 1, Taf. 5 seines Werkes wiedergegeben.

Mitte dagegen desto radikaler; die Niveaulinien stülpen sich, beim Fortschreiten von unten nach oben, in der Mitte mehr und mehr nach hinten aus, dann kommt eine mit einem Doppelpunkt $P$, die folgenden aber bestehen aus je zwei getrennten Stücken, einem den Pol umschließenden und einer schon wieder fast



Figur 21.

geradlinig gewordenen Querlinie; von den Kraftlinien biegen die der Mittelachse nächsten in scharfer Wendung nach dem Pole hin um, während die entfernteren nur leicht eingeschweift sind. Die den Pol zunächst umgebenden Niveaulinien sind weggelassen; dagegen ist die Gegend um $P$ herum wirklich so linienarm,



Figur 22. Figur 23. Figur 24.

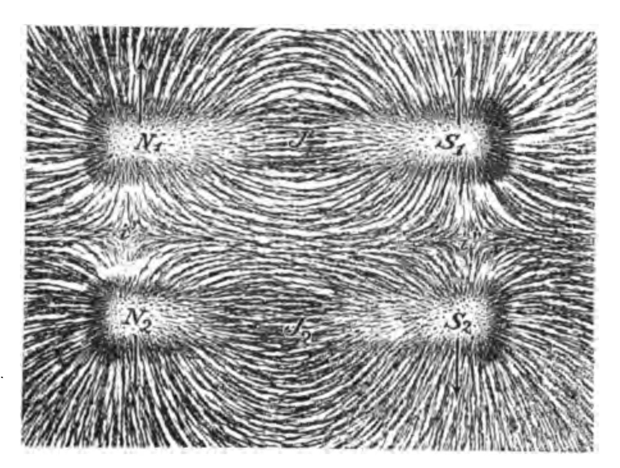
wie sie auf dem Bilde erscheint; hier ist eben die Feldstärke infolge der Interferenz der beiden Feldkomponenten sehr gering, und in $P$ selbst ist sie null.

Endlich stellt Figur 21 die Störung der Kraftlinien zwischen zwei entgegengesetzt gleichen Polen (linke Hälfte der Figur 18) durch einen quer dazwischengestellten Magneten dar.

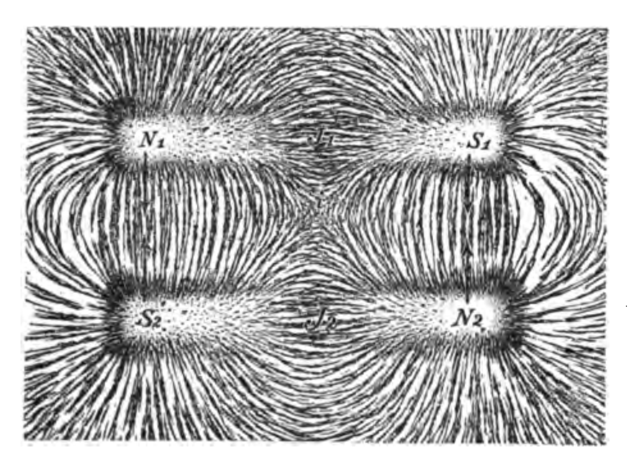
**Experimentelle Feldbilder.** Nach den früher (S. 34) erwähnten Verfahren sind zahlreiche Spezialfälle experimentell dargestellt worden; natürlich weichen diese Kraftlinienbilder in manchen Hinsichten von den soeben behandelten theo-

retischen ab, namentlich da man nie punktförmige Pole anwenden kann, da das Pulver sich an den kräftigeren Feldstellen etwas anders verhält wie an den schwächeren usw. Im folgenden sind einige der wichtigsten Fälle reproduziert, nämlich das Feld eines Poles (Figur 22), zweier gleichnamiger (Figur 23) bzw. zweier ungleichnamiger (Figur 24), gleich starker Pole, zweier parallel nebeneinander liegender, gleich (Figur 25 a) bzw. entgegengesetzt gerichteter (Figur 25 b) Magnetstäbe, endlich zweier in Hauptlage befindlicher Stäbe (Figur 26); die Aufnahmen rühren von EBERT[1] her. Von anderen Aufnahmen seien die schönen, in großem Maßstabe gehaltenen von LINDECK[2] erwähnt.

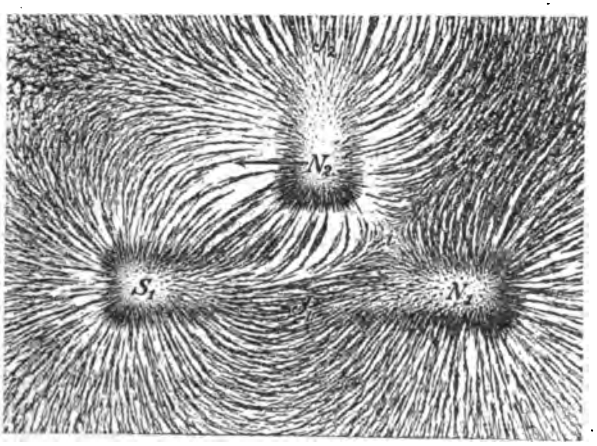
Den Fall eines einzigen Poles kann man realisieren, indem man einen langen, geraden Magnetstab vertikal aufstellt und auf seinen oberen Pol die Darstellungsebene legt; die Anordnung der Späne erfolgt strahlenförmig nach allen Seiten. Zwei gleiche Pole erhält man am besten, indem man zwei lange Stäbe horizontal in eine und dieselbe Linie (mit einem gewissen Zwischenraum zwischen ihren zugewandten Enden) legt, so daß die gleichen Enden einander zugekehrt sind, und dann die Platte darüber legt, doch so, daß sie noch ein ganzes Stück über die beiden einander zugekehrten Pole hinausreicht; oder auch, indem man zwei Magnetstäbe vertikal und parallel miteinander, die gleichen Pole nach oben gekehrt,




Figur 25 a.



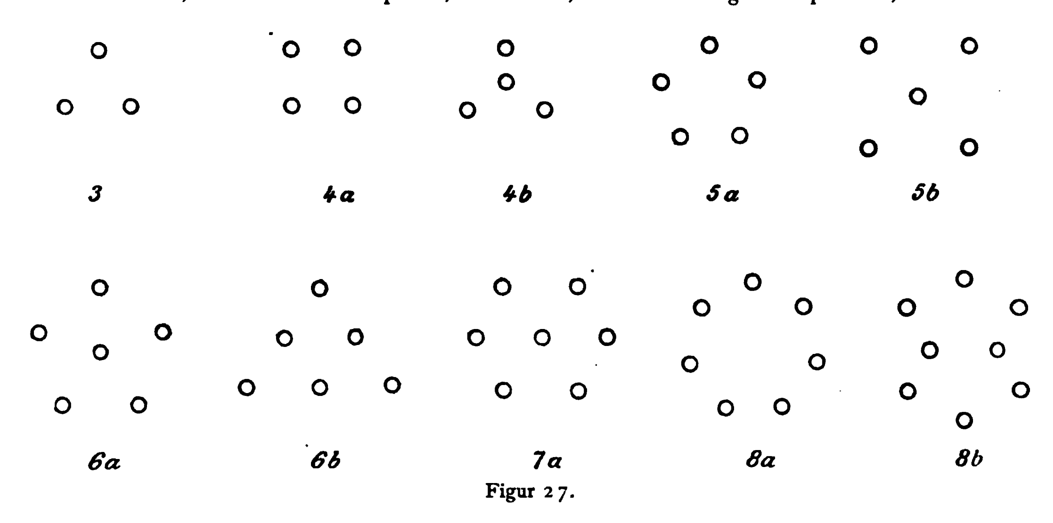

Figur 25 b.




Figur 26.

[1] H. EBERT, Kraftfelder s. o. — [2] St. LINDECK, Z. f. Instr. 9. S. 352. Taf. I—IV.

aufstellt und mit der Platte bedeckt. An den abgewandten, äußeren Seiten bilden die Späne auch hier etwa gerade Strahlen, an den inneren Seiten dagegen erfahren diese Krümmungen, so daß sich in der Mitte der Figur stehende konkavseitige Vierecke entwickeln. Kehrt man die entgegengesetzten Pole einander zu, oder stellt man einen Hufeisenmagneten vertikal mit den Polen nach oben auf, so hat man zwei entgegengesetzte Pole, und zwar im letzteren Falle aus weiter unten näher zu besprechenden Gründen zwei gleich starke. Die Späne bilden hier ein System von die beiden Pole verbindenden Kurven. Alle diese Fälle entsprechen ziemlich genau den theoretischen Entwickelungen von oben. Legt man dagegen einen Magnetstahl horizontal hin und darüber die Entwickelungsplatte, so erhält man eine von der vorigen nicht unwesentlich abweichende Zeichnung, ein Beweis, daß ein Magnetstab nicht einfach identisch ist mit einem Polpaare. Insbesondere sind die Teilchen nahe der Verbindungslinie der beiden Pole nicht, wie bei dem Polpaare, horizontal, also dem Magneten parallel, sondern




Figur 27.

fast senkrecht gegen ihn gerichtet. — Von noch anderen Fällen magnetischer Felder wird bei späteren Gelegenheiten die Rede sein.

**Gleichgewichtsfiguren schwimmender Pole.** Zum Studium der Gleichgewichts-Konfigurationen, in die sich gleichnamige Pole im Felde eines Magneten einstellen, bediente sich A. M. MAYER[1] magnetisierter Nähnadeln, die, durch Korken vertikal hindurchgesteckt, mit den gleichen Polen nach oben auf Wasser schwammen, und denen von oben ein kräftiger Magnet genähert wurde. WOOD[2] nimmt statt der Nähnadeln Fahrradkugeln, die er auf reinem Quecksilber schwimmen läßt (unreines täuscht falsche Gleichgewichtsfiguren vor). Drei Kugeln bzw. Nadeln bilden ein — bei gleich starker, im folgenden stets vorausgesetzter Magnetisierung gleichseitiges — Dreieck, das sich dehnt oder zusammenzieht, je nachdem man den Magneten nähert oder entfernt; bei mehr als drei Kugeln gibt es für eine und dieselbe Anzahl mehrere Gleichgewichtsanordnungen von verschiedenem Grade der Stabilität (in den beifolgenden Figuren ist die stabilere Form immer vorangestellt). Wie man sieht, gibt es drei, vier, fünf Punkte ohne oder mit Zentralpunkt; dagegen ist das Sechseck nur mit Zentralpunkt, nicht aber ohne diesen zu erhalten, was nach Lord KELVIN besonders interessant wäre. Eine größere Kugel, die man auf das Quecksilber wirft, bahnt sich, indem sie die kleineren zu beiden Seiten nach der Peripherie treibt, den Weg nach dem Zentrum.

[1] A. M. MAYER, Phil. Mag. (5). **5**. 397. 1878. — (5). **7**. 98. 1879. — [2] R. W. WOOD, Phil. Mag. (5). **46**. 162. 1898.

## G) Konstitution der Magnete und Felder.

**Molekulare Natur des Magnetismus.** Aus verschiedenen bereits erwähnten Tatsachen, insbesondere aus der Anlagerung des Eisenfeilichts an einen eingetauchten und herausgezogenen Magnetstab, sowie aus der Gestalt der Kraftlinien, wie sie sich auf der Glasplatte über dem Magnetstabe bilden, geht hervor, daß ein Magnet von einem Polpaar denn doch wesentlich verschieden ist. Und zwar ergibt der Umstand, daß die meisten Späne nach den Enden hin, andere nach anderen Stellen des Stabes hin, am wenigsten oder gar keine nach seiner Mitte hin tendieren, als nächstliegende Anschauung die, daß ein Magnetstab aus zwei Hälften besteht, deren eine aus lauter Nordpolen, deren andere aus lauter Südpolen besteht, derart, daß die Stärke dieser Pole von der Mitte, wo sie null ist, nach den Enden zu immer größer wird. Daß diese Vorstellung irrig ist, beweist aber schlagend der folgende Versuch. Wenn man einen langen Magnetstab, z. B. eine Nadel, die man vorher magnetisiert hat, in der Mitte zerbricht, so erhält man nicht etwa zwei Magnete, deren jeder an dem einen Ende einen Pol, am anderen eine neutrale Stelle hat, sondern jede der beiden Hälften erweist sich als ein vollständiger Magnet mit einem Nordpol und einem Südpol. Zu demselben Ergebnis gelangt man für die durch weitere Halbierung entstehenden vier Teilstücke usw.; kurz, jeder noch so kleine Teil eines Magneten ist wieder ein Magnet. Hierdurch ergibt sich zur Evidenz, daß der Magnetismus eine den kleinsten Teilen eigentümliche Eigenschaft ist, also, wenn man sich die Materie aus Molekeln zusammengesetzt denkt, eine molekulare. Man nennt diese kleinen Magnete demgemäß Molekular-Magnete. Jeder Molekular-Magnet enthält daher nördlichen und südlichen Magnetismus, was man sich auch zunächst hierunter vorstellen möge.

Eine weitere Spezialisierung erhält diese Vorstellung insofern, als alle bisherigen Erfahrungen dafür sprechen, daß jeder molekulare Magnet und folglich auch jeder endliche Magnet gleich viel positiven und negativen Magnetismus enthält. Die allgemeinste dieser Erfahrungen ist die, daß, je größer die Entfernung wird, die Wirkung eines Magneten sich desto ausschließlicher auf das Kräftepaar reduziert, was, wie wir sahen, bei einem einfachen Polpaar und somit auch bei einem Magneten, der aus lauter solchen zusammengesetzt gedacht werden kann, stattfinden muß, während bei einem Magneten, bei welchem die Pole der einen Art über diejenigen der anderen an Zahl oder Stärke überwiegen, die verschiebende Kraft auch für große Entfernungen von gleicher Größenordnung bleiben müßte, wie die drehende Kraft. Das greifbarste Beispiel für diese Schlußfolgerungen bietet der Erdmagnetismus dar, und zwar seine vertikal nach unten wirkende Komponente, wie sie bei einer Nadel zum Ausdruck kommt, welche sich nur in vertikaler Ebene, in dieser aber völlig frei, bewegen kann. Eine solche Nadel müßte nach unten gezogen werden, oder, da sie dies doch schon infolge der Schwere wird, sie müßte stärker nach unten gezogen werden als durch die Schwere allein, mit anderen Worten, sie müßte, auf eine Wagschale gelegt, ein größeres Gewicht aufweisen, als bevor sie in den magnetischen Zustand versetzt worden war. Das ist aber zwar in früheren Jahrhunderten wiederholt zu beobachten geglaubt, seitdem aber längst endgültig widerlegt worden. Ohne also über den Begriff „Magnetismus" sich irgendwelche nähere Vorstellung machen zu müssen, kann man den Satz aufstellen: Die Summe des gesamten, in irgendeinem Magneten enthaltenen Magnetismus, den der einen Art als positiven, den der anderen als negativen gerechnet, ist null; in Formel:

$$\Sigma m = 0 \quad . \tag{40}$$

Hieraus folgt nun sofort eine weitere Präzisierung unserer Vorstellungen. Es darf nämlich nie vorkommen, daß von einem Körper in einen anderen oder von

einer Molekel in eine andere ein Übergang von Magnetismus nur der einen Art, oder ein Übergang von verschiedenen Mengen Magnetismus der beiden Arten stattfinde. Ein Übergang gleicher Mengen beider Magnetismen dürfte stattfinden, aber es gibt keine Erscheinung, welche auf einen solchen positiv hinwiese, insbesondere erfolgt die Herstellung von Magneten (s. w. u.) mit Hilfe bereits magnetischer Körper durchaus nicht auf Kosten des Magnetismus dieser letzteren. Man wird also schließen dürfen, daß der Magnetismus an die Molekel gebunden ist, daß er eine molekulare Eigenschaft ist. Hierdurch unterscheidet er sich wesentlich von der auf Leitern befindlichen Elektrizität, er verhält sich vielmehr ebenso wie die Elektrizität in den sogenannten dielektrischen Körpern.

**Scheidungshypothese.** Was nun den Magnetismus der einzelnen Molekeln betrifft, so kann man sich darüber verschiedene Vorstellungen machen. Nach der einen enthält eine Molekel im unmagnetischen Zustande beide Magnetismen gleichförmig durcheinander gemischt, im magnetischen dagegen mehr oder weniger geschieden, so daß ein größerer oder geringerer Grad von Polarität nach einer bestimmten Richtung hin vorhanden ist. Bei der Kleinheit der Molekel wird man sie sich im allgemeinen als ein einfaches Polpaar denken können, dessen Magnetisierungsgrad durch Polstärke und Polabstand, in seinen Veränderungen innerhalb desselben Teilchens wesentlich sogar nur durch letzteren bestimmt ist. Die Scheidungshypothese ist ursprünglich von WILCKE[1] aufgestellt worden, hat aber erst durch COULOMB[2], POISSON[3] und GAUSS[4] ihre strenge Ausbildung erfahren. Vielfach ist sie auch durch die Vorstellung besonderer magnetischer Fluida, die zu den sogenannten Imponderabilien gehören sollten, spezifiziert worden; durch die Häufung von ad hoc gemachten Hypothesen ist der Wert der Theorie schließlich sehr fraglich geworden. Gegenwärtig spielt sie als Ganzes kaum noch eine Rolle, nur einzelne an sie anknüpfende Vorstellungen, die sich für die formale Behandlung der Magnete als nützlich erwiesen haben, sind noch von Wichtigkeit, und dazu gehört namentlich die folgende.

**Ganzer und freier Magnetismus.** Um nämlich die Wirkung, die ein Magnet nach außen hin ausübt, als von seinen einzelnen Punkten ausgehend betrachten zu können, muß man annehmen, daß in diesen Punkten ein Überschuß von Magnetismus der einen über den Magnetismus der anderen Art, also verschieden starke Magnetismen positiver und negativer Art, vorhanden seien. Von den beiden Polen eines und desselben Polpaares kann dieser Überschuß nach dem obigen nicht herrühren, man nimmt also an, daß in jedem Punkte der positive Pol einer Molekel mit dem negativen einer benachbarten zusammenfällt, mit anderen Worten, man setzt den Abstand der einander zugewandten Enden zweier benachbarter molekularer Magnete unendlich klein selbst gegen ihre eigene Länge. Diese Annahme wird durch nichts gestützt, und doch ist sie für die folgenden Schlüsse insofern wesentlich, als man ganz andere Resultate erhält, wenn man das Verhältnis zwischen Länge und Abstand der Molekeln endlich oder gar erstere klein gegen letzteren wählt. Die Berechtigung dieser Vorstellung liegt also nur darin, daß sie besonders einfach ist.

Den in jedem Punkte überschüssigen Magnetismus nennt man, im Gegensatz zum gesamten oder ganzen, noch gegenwärtig häufig freien Magnetismus, obgleich dieser Terminus in der neueren Theorie für einen von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus eingeführten Begriff — nämlich im Gegensatz zum „wahren" Magnetismus — gebraucht wird; darauf ist in jedem Falle zu achten.

**Richtungshypothese.** Eine zweite Vorstellung ist systematisch durchgebildet in der Drehungs- oder besser Richtungshypothese, welche von KIRWAN[5]

[1] J. R. WILKE, Vetensk. Akad. Afh. 1766. — [2] Ch. A. COULOMB, Mém. s. l. magn. Mém. Ac. Paris 1789ff. — [3] S. D. POISSON, Mém. Ac. Paris **5**. 1824. — [4] C. F. GAUSS, Intensitas etc. — Pogg. Ann. **28**. S. 241. — [5] KIRWAN, Trans. Irish. Ac. **6**. S. 177. 1797. — Gilb. Ann. **6**. S. 391.

herrührt, aber erst durch OHM[1] und namentlich durch W. WEBER[2] ausgeführt worden ist, worauf sich ihr zahlreiche Physiker angeschlossen haben (s. u.). Nach ihr sind auch im unmagnetischen Zustande die Magnetismen beiderseits geschieden, die Molekeln also Magnete, die man sich wiederum als Polpaare denken kann. Aber während die Verbindungslinien der Pole, die von nun an als ihre Achsen bezeichnet werden sollen, in einem unmagnetischen Körper die verschiedensten Richtungen haben (weshalb sie sich im allgemeinen in ihren Wirkungen nach außen gegenseitig aufheben, so daß der Körper unmagnetisch erscheint), sind sie in dem magnetischen Körper sämtlich mehr oder weniger gleichgerichtet, der Akt des Magnetisierens besteht eben in der Gleichrichtung, und je vollständiger die Gleichrichtung ist, desto stärker magnetisch ist der Körper. Zahlreiche magnetische Erscheinungen lassen sowohl die eine wie die andere Vorstellung zu, es gibt aber eine Reihe von solchen, welche lehren, daß zwischen der Magnetisierung und der Lagerung der Molekeln ein gewisser, mannigfaltiger Zusammenhang besteht, wodurch die Richtungshypothese der Scheidungshypothese gegenüber an Wahrscheinlichkeit gewinnt. In der Tat hatte sie längere Zeit hindurch die Scheidungshypothese so gut wie vollständig verdrängt.

**Wirbelhypothese.** Inzwischen aber war eine dritte Vorstellung in den Vordergrund des Interesses gerückt, die, den beiden ersten gegenüber, den Magnetismus nicht als etwas primäres auffaßt, sondern auf etwas anderes, nämlich auf elektrische Ströme, welche die Teilchen umkreisen, zurückführt: das ist die Ampèresche Theorie, von der im Artikel „Elektromagnetismus“ noch die Rede sein wird. Sie bildet aber den Ausgangspunkt für die sie an Allgemeinheit weit übertreffenden modernen Vorstellungen, und diese können und müssen wir schon hier besprechen.

Die neuere Physik ist sehr zurückhaltend geworden in der konkreten Ausgestaltung der Bilder, die sie zur Darstellung von Erscheinungen benutzt. Sie führt am liebsten nicht Fluida, Molekeln, Molekularmagnete, elektrische Molekularströme usw. ein, sondern sie frägt: was lehren uns denn, rein formal und abstrakt, die Tatsachen? Die Grundtatsache ist nun in unserem Falle das magnetische Feld mit seinen Kraftlinien und Niveauflächen; und zwar das Feld innerhalb wie außerhalb der Magnete selbst; zwischen beiden Regionen besteht nur der Unterschied, daß der Verlauf jener Linien und Flächen hier und dort, infolge der Verschiedenheit der sie erfüllenden Arten von Materie, verschieden sein wird, wozu noch der praktische Unterschied kommt, daß man das äußere Feld leichter untersuchen kann als das innere. Was lehren uns nun die bekanntlich überaus zahlreichen magnetischen Erscheinungen — von denen wir ja bisher erst den kleinsten Teil behandelt haben — über den Charakter der magnetischen Kraftlinien und Niveauflächen? Zwischen beiden besteht zunächst offenbar der Unterschied, daß die Niveauflächen sich auf eine reine Zahlengröße, einen Skalar, nämlich das magnetische Potential, beziehen, während die Kraftlinien einen Vektor, eine gerichtete Größe, nämlich die magnetische Kraft darstellen; bei der Zeichnung eines Feldes hat man also die Niveaulinien mit Zahlen, die Kraftlinien hingegen mit Pfeilen zu versehen. Nun gibt es zwar nur eine einzige Art Skalare, aber verschiedene Arten von Vektoren, nämlich polare und axiale; für jene ist jede durch die Vektorlinie hindurchgelegte Ebene eine Symmetrieebene, ihr typisches Beispiel ist eine Verschiebung oder Strömung, für diese findet Symmetrie nur statt in bezug auf eine zur Vektorlinie senkrechte Ebene, ihr typisches Beispiel ist eine Drehung. Nun spricht man, wie bei anderen, so auch bei den magnetischen Kraftlinien häufig von einer Kraftströmung, die sie darstellen; und was insbesondere das Innere der Magnete selbst betrifft, so legt die Aneinanderreihung

[1] G. S. OHM, Beiträge z. Molekular-Physik. Nürnberg 1840. — [2] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen 3. S. 557.





von Polpaaren in den Kraftlinien deren polaren Charakter ebenfalls nahe. Die elektromagnetischen Erscheinungen zeigen indessen, daß man die elektrische und die magnetische nicht beide als gleichartige Vektoren betrachten darf, daß sie vielmehr im Verhältnis eines polaren und eines axialen Vektors zueinander stehen: und weitere Tatsachen auf dem Gebiete der magnetischen Erscheinungen, die auf dem der elektrischen keine oder doch keine vollkommenen Analoga haben, zwingen zu der Entscheidung für den polaren Charakter der elektrischen und für den axialen der magnetischen Kräfte.

Sieht man also von allen speziellen Bildern ab, so kann man doch soviel sagen: in den elektrischen Kraftlinien verschiebt sich irgend etwas, um die magnetischen dreht sich irgend etwas; das elektrische Feld ist — bildlich gesprochen — ein Strömungsfeld, das magnetische ein Wirbelfeld. Die Elemente des Wirbelfeldes aber sind die Molekularwirbel MAXWELLS. Sie stellen das interessanteste Beispiel für die von HELMHOLTZ eingeführten verborgenen zyklischen Dauerbewegungen dar; auf die Einzelheiten der ihnen in dieser Hinsicht beizulegenden Eigenschaften kann hier nicht näher eingegangen werden[1].

**Linearer Magnet. Verteilung der Länge nach.** Kehren wir jetzt zu den Magneten zurück. Am einfachsten werden sich die Verhältnisse bei einem nur in einer Dimension ausgedehnten Magneten gestalten; man kann einen solchen als magnetischen Faden bezeichnen. Besteht dieser aus einer Reihe gleich starker Polpaare, so wird die Wirkung des inneren Poles des ersten Paares durch die Wirkung des benachbarten Poles des zweiten Paares usw. aufgehoben werden, und es werden nur die Wirkungen der beiden äußersten Pole übrig bleiben, mit anderen Worten, es ist nirgends, außer an den Enden, freier Magnetismus vorhanden. Eine solche Reihe von Polpaaren heißt ein gleichförmiger magnetischer Faden. Es ist nach dem Vorhergegangenen klar, daß ein wirklicher Magnet, auch abgesehen von seiner Ausdehnung der Quere nach, kein gleichförmiger Faden ist. Nächstdem kommt man auf den Gedanken. die Polstärke der Molekeln als von den Enden nach der Mitte zu abnehmend anzunehmen, da doch erfahrungsgemäß die Wirkung nach außen, also der freie Magnetismus, sich so verhält. Indessen entnimmt man der Anschauung ohne weiteres, daß man alsdann auf derjenigen Seite des Fadens, nach welcher hin die Nordpole aller Molekeln gekehrt sind, zwar am Ende einen freien Nordpol, im übrigen aber lauter freien südlichen Magnetismus erhält und umgekehrt auf der anderen Hälfte des Fadens. Dagegen führt die entgegengesetzte Annahme zum Ziel; man muß also schließen, daß die Polstärke der Molekeln oder allgemeiner gesagt, ihr magnetisches Moment (denn nach der Scheidungshypothese ist z. B. gerade ihr Polabstand eine veränderliche Größe) von den Enden nach der Mitte hin zunimmt und dort ihr Maximum erreicht. Man kann sich auch aus der Anschauung leicht begreiflich machen, daß die Wirkung der Molekeln aufeinander einen solchen Zustand zur Folge haben muß, auch wenn die Magnetisierung ursprünglich einen gleichförmigen Faden hergestellt hat, wobei sich, da doch der freie Magnetismus von den Enden nach der Mitte abnimmt, das weitere Detail ergibt, daß die Zunahme des Momentes von den Enden an anfänglich eine starke sein, allmählich aber immer schwächer werden

[1] Über die Vektorencharaktere vgl. namentlich W. VOIGT, Die physikalischen Eigenschaften der Kristalle, wo sich auch ein reiches Literaturverzeichnis findet. Über die Wirbeltheorie vgl. außer in MAXWELLS Elektrizität und Magnetismus selbst u. a. FÖPPL, Einführung in die MAXWELLsche Theorie, Leipzig 1894. — Magnetische Wirbelfelder, Leipzig 1897. — H. EBERT, Magnetische Kraftfelder, Leipzig 1905.

Man vergleiche auch eine Abhandlung von ALLEN, Phys. Review 3. 470. 1896. Hier wird an mehreren Diagrammen, die sich auf das Feld eines Zylinders und einer Kugel beziehen, gezeigt, inwieweit die verschiedenen Theorien des Magnetismus zu gleichen und inwieweit sie zu verschiedenen Ergebnissen betreffend die Anordnung der Kraftlinien und Niveauflächen führen.

muß. Dieser Gedanke ist dann von BIOT[1], VAN REES[2], GREEN[3] und JAMIN[4] in exakte methodische Form gebracht worden von zum Teil verschiedenartigen Ausgangspunkten aus und unter Anwendung eines sehr verschiedenen Gedankenganges, jedoch für den hier zunächst vorliegenden Zweck mit wesentlich gleichen Ergebnissen. Hiernach ist das, was man die „Dichte“ des freien Magnetismus an einer bestimmten Stelle des Fadens nennen kann, wenn $c$ ein echter Bruch ist:

$$\delta = a(c^{-x} - c^{+x}) \tag{41}$$

und das magnetische Moment daselbst

$$M = b_1 - b_2(c^x + c^{-x}) \quad , \tag{42}$$

wo $a$, $b_1$, $b_2$ hier nicht näher interessierende positive Konstante sind (s. w. u.), $x$ aber den Abstand der betreffenden Stelle von der Mitte des Fadens bedeutet. Die zweite Gleichung ist, wie es begreiflicherweise sein muß, das Integral der ersten.

Einen ungleichförmigen Faden kann man sich offenbar aus lauter gleichförmigen, von zusammenfallenden Mitten und verschiedenen Längen, zusammengesetzt denken; und es ist nach dem Gesagten klar, wie man deren Polstärken abzustufen hat, um einen Faden von gewünschter Ungleichförmigkeit, z. B. den obigen, natürlichen Faden zu erhalten.

In experimenteller Weise ist die vorliegende Frage von vielen Seiten behandelt worden, zuerst und in einer für jetzt ausreichenden Weise (näheres im Art. Magn. Messungen) von COULOMB[5], und zwar wieder durch Schwingungen einer kleinen Nadel, welche dicht an die verschiedenen Stellen eines vertikal aufgestellten, langen, dünnen Magneten herangebracht wurde. Wenn eine solche Nadel nicht nur gegenüber den Polen, sondern auch gegenüber anderen Stellen des Stabes eine von ihrer natürlichen verschiedene Schwingungsdauer zeigt, so folgt freilich daraus noch nicht, daß auch diese Stellen freien Magnetismus haben: denn der Einfluß der Pole könnte sich ja so weit erstrecken. Indessen sieht man doch ein, daß, wenn man die Nadel, wie es geschah, sehr nahe heranbringt, die Wirkung der Pole und insbesondere ihre Horizontalkomponente, um die es sich hier handelt, schon bei einiger Entfernung der betreffenden Stellen sehr klein wird. Will man strenger zu Werke gehen, so kann man nach einer einfachen Formel berechnen, welche Wirkungen, also Schwingungszahlen, zu erwarten wären, wenn nur die Pole wirkten, und diese mit den beobachteten vergleichen, ein Verfahren, bei welchem man so schreiende Widersprüche findet, daß der Gegenbeweis geliefert ist. Dagegen führt die Anwendung der obigen theoretischen Verteilungsformel für $\delta$ zu sehr befriedigender Übereinstimmung mit den Versuchen. In der Figur 6 (S. 11) sind durch die gestrichelten Linien (die ausgezogenen gehören nicht hierher) die Kurven des freien und des gesamten Magnetismus zur Anschauung gebracht, die letztere ist eine umgekehrte Kettenlinie.

Es is übrigens ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, daß nicht notwendig jeder magnetische Faden die geschilderte Verteilung des Magnetismus aufweisen muß. Es wird das vielmehr, wie die Theorie zeigt, nur dann der Fall sein, wenn man alle Teile des Stabes dem gleichen äußeren magnetisierenden Einfluß ausgesetzt hat, insbesondere wenn man den ganzen Stab so stark wie möglich magnetisiert hat, nicht aber, wenn man verschiedene Teile desselben verschieden oder verschieden stark oder überhaupt nur einige und andere gar nicht

[1] J. B. BIOT, Traité de physique, Paris 1816. Bd. **3**. S. 76. — [2] VAN REES, Pogg. Ann. **70**, S. 1. 1847; **74**. S. 213. 1848. — [3] G. GREEN, An essay on the application of math. analysis to the theories of electr. a. magn. Nottingham 1828. — Abgedruckt in Crelles Journ. **39**. S. 13; **44**. S. 356; **47**. S. 161. Hier kommt insbesondere in Betracht **47**. S. 215. — [4] Vgl. dessen Formeln bei MASCART und JOUBERT, Lehrb. d. El. u. d. M. **1**. S. 371. — [5] C. A. COULOMB, Mém. Ac. Paris 1789. S. 468. — GEHLERS Wörterbuch **6**. S. 789.

bearbeitet hat. Ein Ausgleich des Magnetismus findet ja infolge seiner molekularen Natur nicht statt, und der Einfluß der Fernwirkung zwischen einzelnen Teilen ist im allgemeinen viel zu gering, um auch nur einigermaßen Gleichförmigkeit erzielen zu können. Infolgedessen kann es sich sehr wohl in gewissen Fällen herausstellen, daß die Kurve der Verteilung eine nicht unwesentlich andere ist, und insbesondere, daß sie nicht symmetrisch nach beiden Seiten ist, der Punkt, in welchem der freie Magnetismus null, der gesamte ein Maximum ist, also nicht in der Mitte des Stabes, sondern nach der einen Seite hin verschoben liegt, woraus dann ohne weiteres folgt, daß auch die beiden oben symmetrisch resp. umgekehrt symmetrisch gedachten Äste der Kurve ungleich (vgl. die ausgezogenen Linien) ausfallen werden (s. auch Magn. Messungen und Elektromagnetismus).

Für einzelne Stücke der Kurve kann man bei längeren Stäben den BIOTschen Ausdruck vereinfachen und findet dann u. a., daß von der Mitte aus eine Strecke weit der freie Magnetismus ziemlich in arithmetischer Progression zunimmt, vom Ende aus dagegen eine Strecke weit etwa in geometrischer Progression abnimmt. Diese Gesetze kann man natürlich auch durch empirische Verschmelzung zu einem einzigen vereinigen, wie DUB[1] u. a. getan haben, kann dann aber nicht erwarten, daß eine ähnlich gute Übereinstimmung stattfinde, wie bei der obigen, den theoretischen Verhältnissen entsprechenden. Endlich kann man durch Integration der Formeln für den freien resp. ganzen Magnetismus einer bestimmten Stelle des Fadens von 0 bis $x$ oder von 0 bis $\pm l/2$ die Summe des auf einer bestimmten Strecke des Fadens oder auf dem ganzen Faden enthaltenen freien oder ganzen Magnetismus ableiten.

Die weitere Verfolgung dieser Fragen muß auf später verschoben werden (vgl. Art. Magnetische Induktion).

**Magnetisches Moment und Pole eines Fadens.** Die Vorstellung, wonach ein Magnetstab in der einen Hälfte aus lauter Nordpolen, in der anderen aus lauter Südpolen besteht, mußte oben fallen gelassen werden. Man kann sie aber jetzt in modifizierter Form wieder aufnehmen, indem man von den in jeder Molekel vereinigten entgegengesetzten Polen ganz absieht, nur die freien Magnetismen ins Auge faßt und diese für den Augenblick als Pole bezeichnet. Ein Faden besteht alsdann aus lauter Polen, deren erster ein starker Pol der einen Art ist, deren nächster schwächer, deren mittelster null usw. und deren letzter ein starker Pol der anderen Art ist. Nennt man $m$ die Stärke eines dieser Pole und $x$ wieder seinen Abstand von der Mitte, so kann man als magnetisches Moment jetzt die Größe

$$M = \sum m x = \int_{-l/2}^{+l/2} m x \, d x \tag{43}$$

betrachten, wo für $m$ der Ausdruck (42) einzusetzen ist. Die betreffende Formel enthält natürlich im wesentlichen die Länge $l$ des Fadens und wird ebenfalls später in allgemeinerer Weise betrachtet werden. Hier soll nur darauf hingewiesen werden, daß diese Größe, gerade wie bei dem einfachen Polpaar, für die Wirkungen in große Ferne und aus großer Ferne, aber auch nur für solche, die maßgebende Größe wird. Für solche Wirkungen kann man dann noch einen weiteren Begriff einführen, nämlich die Schwerpunkte der als Massen betrachteten freien Magnetismen der beiden Hälften, also diejenigen Punkte, in welchen man sich die ganzen freien Magnetismen der beiden Hälften vereinigt denken muß, um dasselbe Moment zu erhalten. Diese Punkte nennt man die Pole des Magneten, und man sieht unmittelbar ein, daß sie nicht, wie bei dem einfachen

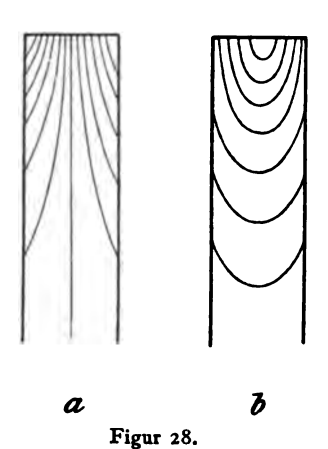
[1] J. DUB, Pogg. Ann. **106**. S. 83. 1859. — D. Elektromagnetismus. Berlin 1861. S. 268 u. a. a. O.



Polpaar, an den Enden, sondern in einiger Entfernung von denselben liegen werden, eine Entfernung, die allerdings bei dem Magnetfaden nicht sehr erheblich sein wird, da gerade die den Enden nahen freien Pole sich durch große Polstärke auszeichnen. Näheres hierüber folgt in den späteren Artikeln.

**Verteilung im Querschnitt. Magnetstäbe.** Ein wirklicher Magnetstab ist kein einzelner Faden, sondern ein Bündel unendlich vieler solcher Fäden. In dem einfachsten, aber abstrakten Falle, daß die Fäden sämtlich gleichförmig und gleich lang sind, wird auch der Magnetstab gleichförmig, und sein freier Magnetismus reduziert sich dann auf die beiden Endflächen. Bei den in der Wirklichkeit vorkommenden Magneten ist hingegen auch in jedem inneren Querschnitt freier Magnetismus anzunehmen, und zwar in einem Betrage, welcher sich nach den soeben betrachteten Gesetzen regelt.

Hierdurch wird indessen die Frage noch nicht erledigt, wie sich in einem und demselben Querschnitte die verschiedenen Punkte verhalten. Daß diese, daß also die einzelnen Fäden nicht gleich stark magnetisch sind, ergibt schon die Beobachtung, daß, wenn man einen dicken Stab mit seiner Endfläche in Feilicht taucht und herauszieht, dies vorzugsweise am Rande haftet, nach innen zu weniger und in der Mitte der Endfläche so gut wie gar nicht. Die Ursache hiervon, oder vielmehr zwei solche Ursachen, liegen auf der Hand. Einmal sind die äußeren Fäden der Magnetisierungsursache in den meisten Fällen weit stärker ausgesetzt, und zweitens wird in den inneren Fäden in ganz ähnlicher Weise ein partieller Ausgleich des Magnetismus infolge der Wirkung der umgebenden Fäden eintreten, wie bei Betrachtung eines Fadens in den mittleren Molekeln durch den Einfluß der den Enden näheren. Es erweist sich hier bereits die Allgemeinheit der Tatsache, daß magnetisierbares Material dadurch, daß es von ebensolchem umgeben ist, äußeren Einwirkungen unzugänglicher wird, daß die Umgebung als Schutzhülle wirkt. Aus der Abnahme des freien Magnetismus nach innen zu folgt auch hier natürlich wieder eine Zunahme des ganzen Magnetismus. Das Gesetz dieser Abnahme resp. Zunahme nach dem Innerndes Querschnittes zu wird natürlich für verschiedene Formen desselben ein verschiedenes sein, unmittelbare Versuche hierüber scheinen aber nicht vorzuliegen.



Figur 28.

Kombiniert man jetzt die Vorstellungen von der Längs- und Querteilung des Magnetismus, so sieht man, daß die Flächen, welche sämtliche Punkte von gleichem freiem Magnetismus enthalten, schräg von Umfangstellen nach Stellen des Endquerschnittes verlaufen werden, etwa wie Figur 28a im Längsschnitt veranschaulicht, und daß die Flächen gleichen ganzen Magnetismus, etwa wie in Figur 28b, sich gestalten werden.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die Pole hier ganz ebenso definiert sind, wie bei einfachen Fäden und daß sie bei der geringeren Konzentration des Magnetismus der inneren Fäden nach den Enden zu desto weiter von den Enden entfernt liegen müssen, je dicker der Stab ist. Im Prinzip müßten sie außerdem in der geometrischen Mittellinie liegen, wodurch ihre Lage alsdann vollständig bestimmt wäre. Tatsächlich ist dies meist nicht vollständig der Fall, sie liegen etwas zur Seite, und ihre Verbindungslinie, die man jetzt allgemein als magnetische Achse bezeichnen kann, weicht infolgedessen von der geometrischen Mittellinie des Stabes ein wenig ab.

**Andere Formen von Magneten.** Der Fall eines einfachen magnetischen Fadens, der bisher als geradlinig gedacht wurde, läßt sich natürlich für alle

beliebigen Formen seiner Linie verallgemeinern, nur daß dann die Wechselwirkung der Teilchen unter einander und folglich auch die Verteilung des Magnetismus eine andere werden wird. Man nennt einen beliebig geformten Faden, wenn er gleichförmig magnetisiert ist, nach W. THOMSON[1] auch ein magnetisches Solenoid, weil er, wie später ausgeführt werden wird, dieselben Wirkungen ausübt, wie ein elektrisches Solenoid, d. h. wie eine Reihe zylindrisch aufeinander geschichteter Kreisströme. Die Pole eines Solenoids fallen mit seinen Enden zusammen; läuft das Solenoid in sich zurück, so hat es keine Pole, und folglich übt es nach außen keine magnetische Wirkung aus.

Ein Magnet, welcher aus lauter gleichförmigen Fäden besteht, die entweder in sich zurücklaufen oder in einer Oberfläche enden, hat nur an seiner Oberfläche freien Magnetismus, nämlich nur da, wo diejenigen Fäden, welche nicht im Innern geschlossen verlaufen, enden. Ein solcher Magnet wird als solenoidaler Magnet bezeichnet. Als ein Beispiel sei ein abgestumpfter Kegel angeführt, welcher, nach der Achse magnetisiert, außer auf den beiden Endflächen (wie der Zylinder) auch auf dem Mantel freien Magnetismus besitzt, weil hier Fäden endigen.

Ein gleichförmiger Faden heißt auch einfaches Solenoid. Im Gegensatz hierzu steht ein ungleichförmiger Faden, den man, wie schon bemerkt wurde, zusammengesetzt denken kann aus lauter gleichförmigen Fäden von verschiedener Länge; er wird daher komplexes Solenoid genannt. Ein solches hat freien Magnetismus nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Innern.

Ein magnetischer Faden hat nur in der Richtung, in welcher die Teilchen polarisiert sind, Ausdehnung. In dieser Hinsicht bildet seinen Gegensatz eine andere abstrakte magnetische Form, die magnetische Schale, das magnetische Blatt oder die magnetische Lamelle[2]. Es ist eine irgendwie geformte dünne Platte, welche in jedem Punkte senkrecht zu ihrer Oberfläche magnetisiert ist, derart, daß man sich die Pole der einen Art in der einen Oberfläche, die der anderen in der anderen gelegen denken kann; die in Figur 5 (d), S. 10 abgebildete Scheibe, bietet, unendlich dünn gedacht, ein Beispiel. Eine geschlossene Schale hat zwar die gesamte eine Oberfläche zum Nordpol, die gesamte andere zum Südpol, sie hat aber, worauf später zurückgekommen werden wird, trotzdem ebensowenig eine magnetische Wirkung, wie ein geschlossener Faden. Eine Schale kann entweder von konstanter Dicke, d. h. es können alle ihre elementaren Magnete von gleicher Länge sein, oder diese kann variieren. Dasselbe gilt von der Polstärke der einzelnen Elemente. Das Produkt beider, also das magnetische Moment, heißt die Stärke der Schale. Ist diese für alle ihre Punkte konstant, so heißt die Schale einfach; variiert sie, so kann man sich ähnlich wie beim Solenoid eine Übereinanderlagerung verschieden weit übergreifender einfacher Schalen denken, und eine solche Schale heißt dann komplex.

Lamellarer Magnet heißt in der Theorie ein solcher, welcher sich aus einfachen Schalen zusammensetzt, die entweder geschlossene oder in der Oberfläche des Magneten endigende Figuren bilden.

Bei einem beliebigen Magneten wird man nach dem Vorausgeschickten im allgemeinen nur sagen können, daß er freien Magnetismus teils an der Oberfläche, teils im Innern besitzt, und daß es, wenigstens theoretisch, Fälle geben kann, wo der letztere in Fortfall kommt; ein solcher Fall ist insbesondere der, in welchem alle Molekeln gleiche Achsenrichtung und gleiche Polstärke haben. Auf das Moment, die Pole und die Achse eines beliebigen Magneten, soweit sie nicht von dem bei einem Faden Gesagten ohne weiteres hierher übertragen werden können, wird später eingegangen werden.

[1] W. THOMSON, Trans. Roy. Soc. 1849 u. 1850. — Ges. Abh. über El. u. Mag. Berlin 1890, S. 366. — Vgl. auch MAXWELL, Lehrb. d. El. u. Magn. 2. S. 38. — [2] W. THOMSON, Ges. Abh. S. 367. — MAXWELL 2. S. 41.

## H) Wirkung der Magnete nach außen.

Nachdem wir früher die Wirkung eines Poles und diejenige eines Polpaares kennen gelernt haben, vervollständigen wir die Reihe durch ihr wichtigstes Glied, indem wir die Wirkung von Magneten, wie sie in der Wirklichkeit vorkommen, betrachten. Dabei sehen wir ihre eigene magnetische Konstitution als gegeben und unveränderlich an, eine Voraussetzung, die tatsächlich nur bei gewissen Magneten und unter gewissen Umständen erfüllt ist, während in den meisten Fällen gerade durch die Veränderlichkeit des eigenen Zustandes und dessen Rückwirkung auf die Erscheinung eine große Komplikation hervorgerufen wird. Im Zusammenhange hiermit steht es, wenn fürs erste die Wirkung nur in Punkten des äußeren Raumes, nicht aber in Punkten der Eisenmasse selbst zur Untersuchung gelangt.

**Wirkung einer magnetischen Molekel.** Man kann die Wirkung von Magneten auf zwei ganz verschiedene Weisen rechnerisch verfolgen, indem man entweder jedes Volumenteilchen als einen einfachen Magneten betrachtet von bestimmtem Momente, oder indem man von dem gesamten Magnetismus ganz absieht und sich den Körper einfach mit freiem Magnetismus von variabler Dichte erfüllt denkt. Die erstere Methode ist, vom Standpunkte der älteren Theorien aus, offenbar die tiefer auf das Wesen der Sache eingehende, sie ist daher auch meist bevorzugt und namentlich von Sir W. THOMSON sehr vollständig und unter möglichst wenigen hypothetischen Voraussetzungen (wodurch sie sich u. a. von der älteren POISSONschen Theorie unterscheidet) ausgearbeitet worden[1]. Das Volumenelement sei $dv$, die Polstärke des Polpaares, welches dieses Element darstellt, $m$, der Abstand seiner beiden Pole $ds$ und folglich sein magnetisches Moment $m\,ds$. Nennt man das auf die Volumeneinheit bezogene Moment die Stärke oder Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}$, so hat man

$$\mathfrak{J} = \frac{m\,ds}{dv} \tag{44}$$

und kann also statt $m\,ds$ auch $\mathfrak{J}\,dv$ schreiben. Die Größe $\mathfrak{J}$ hat nicht nur einen bestimmten Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte, durch die Achse bezeichnete Richtung; man kann die letztere durch die Richtungscosinus $\lambda$, $\mu$, $\nu$ mit den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems charakterisieren. Dann werden die Größen

$$A = \mathfrak{J}\lambda\ , \quad B = \mathfrak{J}\mu\ , \quad C = \mathfrak{J}\nu \tag{45}$$

die Komponenten der Magnetisierung, und ihre Resultante wird

$$\mathfrak{J} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\quad . \tag{46}$$

Das Potential $dV$ des Teilchens $dv$ auf einen von den beiden Polen um $r$ resp. $r'$ entfernten Punkt $P$ setzt sich aus den Potentialen der beiden Pole zusammen, es ist also

$$dV = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{m}{r\,r'}(r' - r)\quad ,$$

oder, da wegen der Kleinheit von $ds$, und wenn $\varepsilon$ der Winkel zwischen $r$ und $ds$ ist, die Differenz $r' - r$ durch $ds\cos\varepsilon$, im Nenner aber $r'$ geradezu durch $r$ ersetzt werden darf:

$$dV = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\varepsilon = \frac{\mathfrak{J}\,dv}{r^2}\cos\varepsilon\quad , \tag{47}$$

---

[1] POISSON, Mém. Ac. Paris 5. S. 248 u. 488. 1824. — Pogg. Ann. 1 u. 3. — GREEN, An essay etc. — W. THOMSON, Ges. Abh. S. 329. — A. BEER, Einl. i. d. Elektrostatik usw. Braunschweig 1865. S. 118.

oder endlich, wenn $xyz$ die Koordinaten des Teilchens, $\xi\eta\zeta$ diejenigen von $P$ sind:

$$dV = \frac{dv}{r^3}[A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)] \quad , \tag{48}$$

womit offenbar der Ausdruck

$$dV = dv\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) \tag{49}$$

identisch ist. Jede der Formeln (47) bis (49) hat für gewisse Zwecke ihre Vorzüge.

## Wirkung eines ganzen Magneten. Oberflächlicher und innerer Magnetismus.

Durch Integration erhält man nun sofort für einen ganzen Magneten:

$$V = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r^3}[A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)] \tag{50}$$

oder auch

$$V = \iiint dx\,dy\,dz\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) \quad . \tag{50a}$$

Indem man ferner jedes der drei Glieder nach der betreffenden Koordinate partiell integriert, erhält man die ausgeführten Integrale in der Form

$$\iint\frac{A}{r}\,dy\,dz + \iint\frac{B}{r}\,dz\,dx + \iint\frac{C}{r}\,dx\,dy \quad ,$$

welche man umgestalten kann, wenn man bedenkt, daß die Produkte $dy\,dz$ usw. nichts anderes sind als die Projektionen eines Oberflächenelementes $ds$ auf die Achse und folglich ausdrückbar sind als Produkte von $ds$ in die Cosinus derjenigen Winkel, welche die nach außen auf $ds$ errichtete Normale mit den Koordinatenachsen bildet. Sind $lmn$ diese Cosinus, so wird demgemäß:

$$V = \iint\frac{ds}{r}(Al + Bm + Cn) - \iiint\frac{dv}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \quad ,$$

und indem man die Symbole

$$\sigma = Al + Bm + Cn \quad , \tag{51}$$

$$\varrho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \tag{52}$$

einführt, erhält man das Potential des Magneten in der übersichtlichen und anschaulichen Form

$$V = \iint\frac{\sigma\,ds}{r} + \iiint\frac{\varrho\,dv}{r} \quad . \tag{53}$$

Wie man sieht, setzt sich $V$ aus zwei Teilen zusammen, einem Oberflächenintegral und einem Raumintegral, und jedes von beiden hat die Form eines Potentials der betreffenden Art, nur daß $\sigma$ und $\varrho$, formell die Flächen- resp. Raumdichte des das Potential hervorbringenden Agens, hier eine kompliziertere Bedeutung haben, nämlich die durch die Gleichungen (51) und (52) definierte; d. h. $\sigma$ ist die normal zur Oberfläche genommene Komponente der an der betreffenden Stelle der Oberfläche vorhandenen Stärke der Magnetisierung; $\varrho$ ist die Summe der Gefälle der Magnetisierungskomponenten nach ihren entsprechenden Koordinatenrichtungen, eine Größe, die MAXWELL[1] als die Konver-

[1] MAXWELL 1. S. 29.

genz der Intensität der Magnetisierung nach dem betreffenden inneren Punkte hin bezeichnete, die man indessen gegenwärtig, vom negativen Vorzeichen abgesehen, als Divergenz von $\mathfrak{J}$ zu bezeichnen pflegt. Zu ganz derselben Gleichung (53) wäre man natürlich, und zwar ohne jede Rechnung, auch gelangt, wenn man den anderen Weg eingeschlagen hätte, d. h. von den obigen Ergebnissen hinsichtlich der Verteilung des freien Magnetismus ausgegangen wäre; $\sigma$ würde alsdann einfach die Dichte des freien Magnetismus an der Oberfläche, $\varrho$ dieselbe für das Innere sein. Man sieht jetzt, in welcher Beziehung diese den freien Magnetismus charakterisierenden Größen zu der den Gesamtmagnetismus charakterisierenden Größe $\mathfrak{J}$ bzw. ihren Komponenten $ABC$ stehen. Endlich ist zu bemerken, daß für $V$ im ganzen Raume die Gleichung

$$\Delta V = 0$$

gilt, worüber das Nähere im ersten Bande (Potentialtheorie) nachzusehen ist.

Bei einem gleichförmig magnetisierten Körper, d. h. bei einem Körper, in welchem $\mathfrak{J}$ überall denselben Wert und dieselbe Richtung hat, wird $\varrho = 0$, nach der einen Auffassung ohne weiteres, weil hier im Innern freier Magnetismus nicht vorhanden ist, nach der anderen, weil wegen der räumlichen Konstanz von $ABC$ die rechte Seite der Gleichung (52) verschwindet.

Der gefundene Satz von der Zerlegung des Magnetismus in einen oberflächlichen und einen inneren darf nicht mit einem von Gauss[1] herrührenden Satze verwechselt werden, welchen man den Satz von der äquivalenten Massentransposition nennen kann, und welcher aussagt, daß man anstatt einer beliebigen Massenverteilung in dem von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raume eine Massenverteilung auf dieser Fläche substituieren kann, welche nach außen dieselbe Wirkung ausübt wie jene. Der Satz gilt für Massen jeder Art, wenn sie nur dem Grundgesetze der Fernwirkung gehorchen: sein Beweis wird am anschaulichsten für elektrische Massen in einem Leiter, den man sich mit der Erde verbunden denkt, es sei dieserhalb (außer auf Gauss) auf Mascart[2] verwiesen. Hier sei auf den besonders wichtigen Schluß aufmerksam gemacht, der sich aus dem Satze ziehen läßt, auf den Schluß, daß sich aus den äußeren Wirkungen die Verteilung des Magnetismus nicht mit Eindeutigkeit ergibt, daß dies vielmehr nur hinsichtlich der äquivalenten, aber fingierten Oberflächenbelegung der Fall ist.

In den oben charakterisierten Fällen, in welchen die innere Verteilung, also das erste Glied der ersten (Poissonschen) Darstellung (53), in Fortfall kommt, werden natürlich die Poissonsche und die Gausssche Oberflächenverteilung miteinander identisch.

**Magnetisches Moment und magnetische Achse.** Bei einem gleichförmigen Magneten werden ferner die Begriffe des magnetischen Momentes und der magnetischen Achse sehr einfach. Da nämlich ihre Molekeln gleich gerichtete Achsen haben, ist diese Richtung natürlich auch die Achse des ganzen Körpers, und sein Moment ergibt sich durch Summation aller molekularen Momente. In Formel kann man dies so ausdrücken

$$M = \int m\,ds = \int \mathfrak{J}\,dv = \mathfrak{J}\int dv = \mathfrak{J}v \quad , \tag{54}$$

d. h. das magnetische Moment eines gleichförmigen Magneten ist gleich dem Produkt seines Volumens in die Stärke der Magnetisierung. Es sei bemerkt, daß man das Potential in diesem Falle in einer der beiden einfachen Formen

---

[1] C. F. Gauss, Allg. Lehrsätze in bez. a. d. im verkehrten Verh. des Quadrats der Entf. wirk. Anzieh. u. Abst. Kräfte. Resultate a. d. Beob. d. magn. Vereins 1839. S. 1. — Abgedruckt in den Klassikern der exakten Wiss. Heft 2, insbesondere S. 49. — [2] Mascart u. Joubert, Lehrb. d. El. u. d. Magn., deutsch v. L. Levy, 1. S. 287.

$$V = \mathfrak{J}\int\frac{ds\cos\Theta}{r} = \mathfrak{J}\int\frac{ds_1}{r} \tag{55}$$

darstellen kann, wo $\Theta$ der Winkel ist, welchen die Normale des Flächenelementes $ds$ mit der Richtung der Magnetisierung bildet, und $ds_1$ die Projektion von $ds$ auf eine zur Richtung der Magnetisierung senkrechte Ebene ist.

Ist der Körper ungleichförmig magnetisiert, so hat natürlich, da die verschiedenen Molekeln verschiedene Achsenrichtungen haben, der Begriff des Momentes des Körpers keine Bedeutung schlechthin, man kann nur sein Moment in bezug auf eine bestimmte Richtung nehmen, dies für alle Richtungen wiederholen und schließlich zusehen, für welche Richtung es am größten wird. Zu diesem Ziele kommt man am einfachsten, wenn man die Komponenten der Molekularmomente für die Koordinatenachsen über den ganzen Körper addiert, also die Größen $\int A\,dv$, $\int B\,dv$, $\int C\,dv$ bildet. Nennt man diese Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, setzt also

$$\alpha = \int A\,dv\;,\quad \beta = \int B\,dv\;,\quad \gamma = \int C\,dv\;, \tag{56}$$

so wird folglich der Maximalwert des Momentes des Körpers

$$M = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \tag{56a}$$

werden und die Richtung, in welcher dies stattfindet, durch die Gleichungen

$$\cos(Mx) = \frac{\alpha}{M}\;,\qquad \cos(My) = \frac{\beta}{M}\;,\qquad \cos(Mz) = \frac{\gamma}{M} \tag{57}$$

bestimmt sein. Diese Größe kann dann kurzweg als magnetisches Moment und diese Richtung als magnetische Achse des Momentes bezeichnet werden.

**Die beiden speziellen Fälle. Potential eines Fadens.** Das Potential eines gleichförmigen Fadens oder Solenoids auf einen Punkt, welcher von seinem positiven Ende um $r_2$, von seinem negativen um $r_1$ entfernt ist, ist

$$V = q\,\mathfrak{J}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\;,$$

wo $q$ der kleine Querschnitt des Fadens ist. Es sei übrigens bemerkt, daß nicht notwendig, wie in der bisherigen Definition angenommen, $q$ und $\mathfrak{J}$ konstant sein müssen, es genügt, wenn ihr Produkt konstant ist. Das Potential eines einfachen Fadens ist also nur von den Endpunkten, nicht von der Gestalt des Fadens abhängig, was nach dem Früheren klar ist, einer sogleich folgenden Analogie halber jedoch nochmals hervorzuheben ist.

Das Potential eines ungleichförmigen (komplexen) Fadens setzt sich aus lauter Elementen von der Form

$$dV = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\varepsilon = -\frac{m\,dr}{r^2}$$

zusammen, nimmt also durch partielle Integration die Gestalt an

$$V = \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_1}{r_1} - \int_1^2 \frac{dm}{ds}\frac{ds}{r}\;, \tag{58}$$

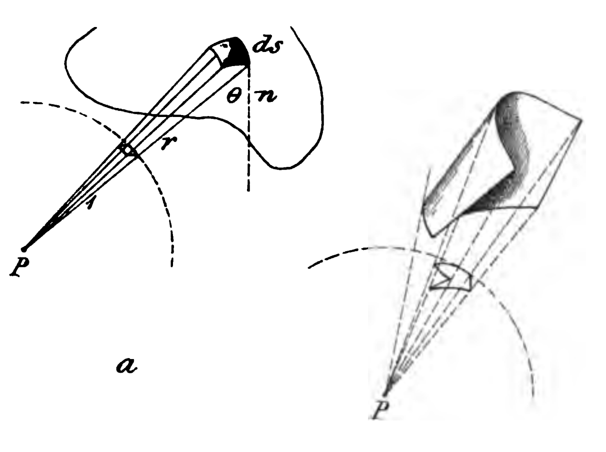
wo 1 und 2 die Endpunkte, $m_1$ und $m_2$ die diesen entsprechenden Magnetismen sind; das Potential ist also gleich dem eines gleichförmigen Fadens vermehrt um einen anderen Teil, welchen man, wenn man $dm/ds$, d. h. die Änderung des Magnetismus von Punkt zu Punkt als Dichte auffaßt, als ein Linienpotential des freien Magnetismus betrachten kann.

**Potential einer Schale. Satz von GAUSS.** Das Potential einer einfachen Schale, d. h. einer Schale, in welcher die kleine Dicke und die Polstärke oder

wenigstens ihr Produkt $m$ für alle Punkte denselben Wert hat, setzt sich ebenfalls aus Elementen von der Form

$$dV = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\Theta \tag{59}$$

zusammen, wenn jetzt $ds$ ein Oberflächenelement und $\Theta$ der Winkel zwischen der Normalen seiner positiven Seite und $r$ ist; hierin ist aber der Faktor von $m$ offenbar (Figur 29a) die scheinbare Größe von $ds$, von $P$ aus gesehen, d. h. die Fläche, welche von dem von $P$ aus nach den Randpunkten von $ds$ gezogenen Strahlenkegel aus einer mit dem Radius 1 um $P$ geschlagenen Kugel ausgeschnitten wird; nennt man diese scheinbare Größe $d\omega$, so wird also

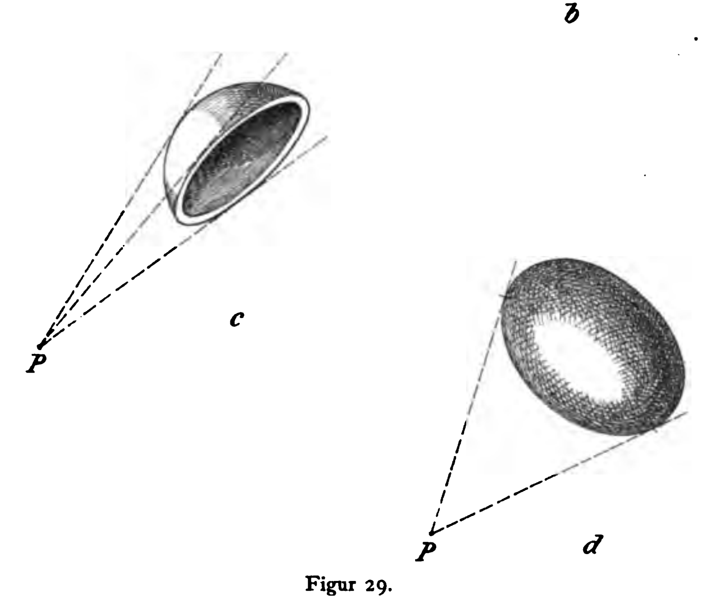



$$dV = m\,d\omega$$

oder, da $m$ und $\mathfrak{J}$ hier offenbar identisch sind, $dV = \mathfrak{J}\,d\omega$ und somit, da bei der Konstanz von $\mathfrak{J}$ einfach summiert werden darf,

$$V = \mathfrak{J}\cdot\omega\,, \tag{60}$$

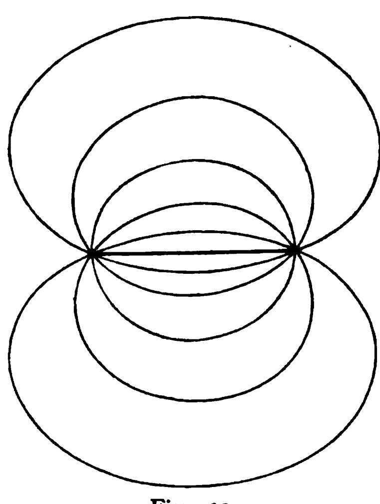
ein Satz, welcher von Gauss herrührt und in Worten lautet: Das Potential einer einfachen Schale auf einen äußeren (d. h. nicht der Schale selbst angehörigen) Punkt ist gleich dem Produkte ihrer magnetischen Stärke und ihrer scheinbaren Größe von diesem Punkte aus. Jedoch ist hierbei das Vorzeichen des Potentials noch außer acht gelassen, die scheinbare Größe ist nämlich dem Sinne nach eine stets positive Größe, das Potential dagegen nach (59) positiv oder negativ, je nachdem der Winkel $\Theta$ spitz oder stumpf ist, je nachdem man also von dem Punkte $P$ die positive oder die negative Seite der Schale sieht.




Figur 29.

Der Gausssche Satz führt ohne weiteres zu einigen wichtigen Schlüssen: 1. Das Potential und damit auch die Wirkung einer einfachen Schale nach außen ist nur von der Gestalt ihres Randes, nicht aber von der ihrer Fläche abhängig, sie ist also für alle gleich stark magnetischen

Schalen, welche dieselbe Kontur haben, dieselbe. Dieser Satz ist das Analogon zu dem, wonach bei einem Faden ausschließlich die Endpunkte in Betracht kommen. 2. Wenn sich von einem Punkte aus zwei Schalenstücke, von deren einem man die positive, von deren anderem man die negative Seite sieht (das Material durchsichtig vorgestellt) scheinbar decken, so heben sich ihre Wirkungen auf, und es bleibt nur die Wirkung des freien, dritten Stückes übrig (Figur 29b). 3. Findet vollständige Deckung statt, so ist die Wirkung null. 4. So ist z. B. die Wirkung einer gekrümmten Schale mit ebenem Rande null für alle in dieser Ebene liegenden Punkte, dasselbe gilt natürlich auch für eine Schale, welche selbst eben ist (Figur 29c). 5. Das Potential einer geschlossenen Schale (Figur 29d) ist für alle Punkte des äußeren Raumes null, für alle Punkte des inneren Hohlraumes gleich $4\pi\mathfrak{J}$; die Kraft ist folglich sowohl im äußeren wie im Hohlraume null. 6. Man kann auch die geschlossene Schale als zwei zusammenstoßende Schalen betrachten, die Magnetisierung der einen umkehren und erhält dann den Satz: Zwei gleich starke, in gleichem Sinne magnetisierte Schalen mit gemeinsamem Rande haben für alle außerhalb liegenden Punkte dasselbe Potential, dagegen für alle zwischen ihnen liegenden zwei um $4\pi\mathfrak{J}$ verschiedene. 7. Ebenso ist das Potential einer einfachen Schale auf zwei Punkte, welche zu beiden Seiten der Schale, aber einander dicht gegenüber liegen, um $4\pi\mathfrak{J}$ unterschieden.



Figur 30.

Was das Feld einer Schale betrifft, so gestaltet es sich am einfachsten, wenn sie lineare Form hat, also aus zwei entgegengesetzt magnetischen, sich der Länge nach berührenden geraden Linien besteht. Die Niveaulinien sind dann nämlich, wegen der bekannten Eigenschaft der Gleichheit der Peripheriewinkel, Kreise. Bei einer eigentlichen, d. h. flächenhaften, z. B. kreisförmigen Schale, trifft dies nicht mehr zu, die Niveaulinien, d. h. die Orte gleichen Gesichtswinkels, weichen hier von den Kreisen stark ab, sie sind (Figur 30, worin die gerade Linie die von der Seite gesehene Schale ist) erheblich in die Breite gezogen. Man vergleiche diesen Fall mit dem umgekehrt analogen zweier entgegengesetzter Punkte (S. 40 bis 41 und Figur 17 u. 18).

**Solenoidale und lamellare Magnete.** Aus einfachen Fäden können nun solenoidale, aus einfachen Schalen lamellare Magnete aufgebaut werden; sie stehen in einem prägnanten Gegensatze zueinander, indem für jede der beiden Klassen eine den Vektor $\mathfrak{J}$ charakterisierende Größe, aber für jede eine andere null wird, die übrig bleibende also allein maßgebend bleibt.

Für den solenoidalen Magneten ist nämlich nach der Definition die innere Raumdichte des freien Magnetismus $\varrho = 0$, und somit nach Gleichung (52)

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad , \tag{61}$$

d. h. die Divergenz der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ ist überall null.

Für den lamellaren Magneten andererseits ändert sich, wenn man normal zu den Schalen, von Schale zu Schale fortschreitet, $\mathfrak{J}$ umgekehrt wie der Abstand $dn$ der Schalen, d. h. es ist, wenn $d\Phi$ das Differential einer neuen Größe bezeichnet,

$$(62)\quad \begin{cases} \mathfrak{J}\cdot dn = -d\Phi\ , \qquad \mathfrak{J} = -\dfrac{d\Phi}{dn}\ , \\ \text{und weiter} \\ A = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\ , \quad B = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\ , \quad C = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\ , \end{cases}$$

oder

$$(62\text{a})\qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = -d\Phi\ .$$

Die Größen $A$, $B$, $C$ haben also ein Potential, das man als Magnetisierungspotential bezeichnen kann und nicht mit dem magnetischen Potential verwechseln darf. Infolge seiner Existenz gelten die Gleichungen

$$(63)\qquad \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0\ , \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0\ ,$$

die ausdrücken, daß die den Vektorkomponenten $A$, $B$, $C$ zugeordneten Drehungskomponenten null sind; kurz gesagt: der Quirl von $\mathfrak{J}$ ist null.

Man hat demnach die charakteristischen Gleichungen:

für den solenoidalen Magneten

$$(64)\qquad \operatorname{div}(\mathfrak{J}) = 0\ ,$$

für den lamellaren Magneten

$$(65)\qquad \operatorname{quirl}(\mathfrak{J}) = 0\ .$$

Das äußere Potential eines solenoidalen Magneten wird

$$(66)\qquad V_s = \int \Phi \frac{\mathfrak{J}\cos\Theta}{r}\, ds\ ,$$

das eines lamellaren, unter Benutzung der neuen Größe $\Phi$;

$$(67)\qquad V_l = \int \frac{\cos\Theta}{r^2}\, ds = \int \Phi \cdot d\omega\ .$$

Der Herleitung gemäß wird man bei solenoidalen Magneten zunächst an Stäbe, bei lamellaren an Platten — jene längs-, diese quermagnetisiert — denken. Es ist das aber natürlich durchaus nicht allgemein, es kann vielmehr eine und dieselbe Körperform jede der beiden Magnetisierungsarten aufweisen, wie die schematische Figur 31 für eine Kreisscheibe (oder auch für eine Kugel) andeutet.

Die gleichzeitige Erfüllung der Gleichungen (64) und (65) oder, was dasselbe ist, der Gleichungen (61) und (62) führt zur Gleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0\ ,$$

d. h. zur LAPLACEschen Gleichung für das Magnetisierungspotential; bei der zugleich solenoidalen und lamellaren Magnetisierung sind also die Magnetisierungskomponenten die nach den Koordinatenachsen genommenen Differentialquotienten einer und derselben, der LAPLACEschen Gleichung genügenden Funktion. Andererseits braucht keine der beiden Gleichungen (64) und (65) erfüllt zu sein, man hat dann allgemeinere Fälle von Magnetisierung vor sich. Den Übergang zu ihnen bildet gewissermaßen der komplex-lamellare Magnet, dessen Elemente nicht gleichförmige, sondern ungleichförmige Schalen sind. Bei ihm ist $\mathfrak{J}$ nicht mehr umgekehrt proportional mit $dn$, die Gleichungen (62) sind daher nicht erfüllt: aber immer noch sind die Magnetisierungslinien senkrecht zu den Schalen, und es gilt folglich wenigstens die Proportion

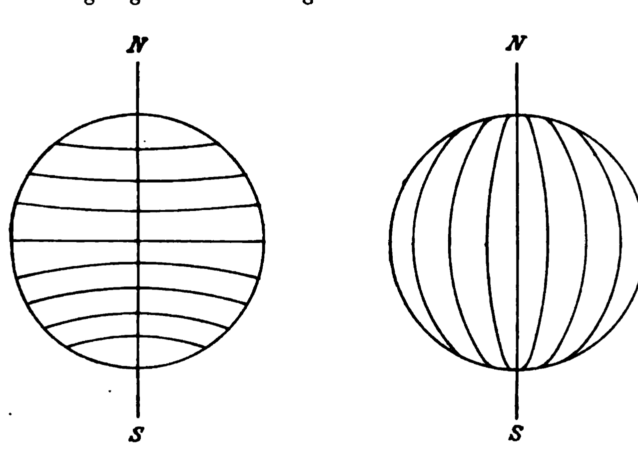
$$A:B:C = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{68}$$

oder, wenn $\Phi$ eliminiert wird, die charakteristische Gleichung:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0 \quad . \tag{69}$$

Auf die weiteren Betrachtungen, welche sich im Anschluß hieran über die verschiedenen Typen der Magnete anstellen lassen, kann hier leider nicht eingegangen werden.

**Potential zweier Magnete aufeinander.** Bisher ist immer nur die Wirkung irgend eines magnetischen Gebildes auf einen Punkt, d. h. auf einen einzelnen Pol mit der Polstärke 1 betrachtet worden. Es ist nun erforderlich, hiervon überzugehen auf die Wirkung, welche ein Magnet auf einen ganzen Magneten ausübt, und diese findet ihren einfachsten Ausdruck in der Größe, welche man als Potential des ersten Magneten auf den zweiten, als das Potential zwischen beiden Magneten oder als potentielle Energie des einen Magneten in dem vom anderen erzeugten Felde bezeichnen kann. Diese Größe, welche physikalisch gefaßt nichts anderes ist, als die Arbeit, welche der eine von den beiden Magneten leisten kann, wenn man ihn aus dem Felde des anderen entfernt, ergibt sich, wenn jetzt $m$, $\sigma$, $\varrho$ auf den ersteren (also den, auf den die Wirkung untersucht wird), $V$ dagegen auf den zweiten (wirkenden) Magneten Bezug hat, als




Figur 31.

$$W = \sum m V = \int V \sigma \, ds + \int V \varrho \, dv \tag{70}$$

oder auch, wenn $XYZ$ die Komponenten der Kraft des Feldes sind,

$$\left\{\begin{aligned} W &= \int (AX + BY + CZ)\, dv \quad , \\ &= \int \mathfrak{J} (\lambda X + \mu Y + \nu Z)\, dv \quad . \end{aligned}\right. \tag{70a}$$

Ist das Feld gleichförmig, so kann man das Moment $M$ des beeinflußten Magneten einführen und erhält in leicht ersichtlicher Weise

$$W = MK \cos \delta \tag{71}$$

wo $K$ die Kraft des Feldes und $\delta$ der Winkel zwischen der Achse des Magneten und der Richtung der Kraftlinien im Felde ist. Hieraus ersieht man, daß der Magnet im stabilen oder labilen Gleichgewicht ist, je nachdem seine Magnetisierung mit der des Feldes zusammenfällt oder ihr entgegengesetzt ist.

Ist der beeinflußte Magnet eine Schale, so kann man die Kraftströmung resp. die Zahl der durch sie hindurchgehenden Kraftlinien $L$ einführen und erhält dann die höchst einfache Gleichung:

$$W = \mathfrak{J} L \quad , \tag{72}$$

in Worten: Die potentielle Energie einer einfachen Schale ist das Produkt aus ihrer Stärke und der durch sie hindurchgehenden Kraftströmung.

Man erhält ferner den Satz: Die Wirkung eines magnetischen Feldes auf eine einfache Schale hängt nur von ihrem Rande ab, und zwar ist die Wirkung auf ein Element des Randes dem Produkt der magnetischen Stärke der Schale, der Kraft des Feldes, der Länge des Elementes und dem Sinus des Winkels zwischen diesen beiden Richtungen proportional.

Für zwei Schalen, die aufeinander einwirken, erhält man, wenn $ds$ und $ds'$ zwei Randelemente sind und $r$ ihre Entfernung bedeutet

$$W = -4\,II'\iint \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\cdot\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,ds\,ds' \tag{73}$$

oder, wenn $\varepsilon$ der Winkel zwischen den beiden Randelementen ist

$$W = \mathfrak{J}\mathfrak{J}'\iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds' \quad . \tag{74}$$

Diese Formeln, welche von F. Neumann herrühren, stehen in einer bemerkenswerten Analogie zu den entsprechenden elektrodynamischen Formeln, von welchen später die Rede sein wird.

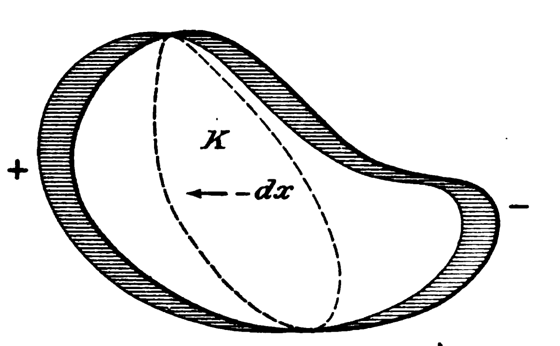
**Ableitung des magnetischen Potentials gleichförmiger Magnete aus dem Newtonschen Potential.** Wendet man auf einen gleichförmig magnetisierten Körper die Gleichung (50a) an und wählt die $x$-Achse als Achse der Magnetisierung, so wird

$$V = \mathfrak{J}\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,dx \quad . \tag{75}$$

Nun ist $-1/r$ das Potential, welches überall da auftritt, wo die wirkenden Massen gleich 1 sind und die Kraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist (z. B. auch bei der Wirkung zweier Magnetpole aufeinander, s. o.) und welches man Newtonsches oder Gravitationspotential nennen kann. Bezeichnet man es mit $P$, so erhält man also

$$V = \mathfrak{J}\frac{\partial P}{\partial x} \quad , \tag{76}$$

in Worten: Das Potential eines gleichförmigen Magneten ist gleich dem negativen Produkte der Stärke seiner Magnetisierung und des nach der Magnetisierungsrichtung genommenen Differentialquotienten des Newtonschen Potentials des mit Masse von der Dichte 1 erfüllt gedachten Magneten. Der Zusammenhang dieser Definition mit der früheren ist leicht vorzustellen.



Figur 32.

Dieses Ergebnis zusammengehalten mit dem früheren, wonach bei einem gleichförmigen Magneten wirksamer Magnetismus nur an der Oberfläche sich befindet, führt zu einer sehr anschaulichen Vorstel-

lung dieser Oberflächenschicht. Denkt man sich nämlich (Figur 32) den auf den Punkt $p$ wirkenden Körper $K$ in der der Magnetisierungsrichtung entgegengesetzten Richtung um $dx$ verschoben, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, als ob man unter Festhaltung des Körpers den Punkt $p$ um $dx$ verschöbe, so wird von dem NEWTONschen Potential der von dem rechten schraffierten Stück herrührende Teil wegfallen und dafür der von dem linken schraffierten Teil herrührende neu hinzukommen, die Differenz dieser beiden Teilpotentiale oder, wenn man sie sich mit Masse von entgegengesetztem Vorzeichen erfüllt denkt, die Summe dieser Teilpotentiale ist also gerade $\partial P/\partial x$; diese beiden Stücke bilden also jene Oberflächenschicht, in welcher man sich den freien Magnetismus zu denken hat. Man sieht jetzt, daß die Dicke dieser Schicht im gewöhnlichen Sinne des Wortes sehr verschieden an verschiedenen Stellen ist, dagegen überall dieselbe, wenn man sie überall in der Magnetisierungsrichtung nimmt; man sieht ferner, daß die Oberflächenschicht in dem einen Teile mit positivem, im anderen mit negativem Magnetismus erfüllt ist, und daß diese beiden Teile getrennt sind durch diejenige auf der Oberfläche gezogene (in der Figur gestrichelte) Linie, in welcher die Magnetisierungsrichtung die Oberfläche tangiert.

**Beispiele gleichförmiger Magnetisierung.** Es können hier nur einige wenige Endformeln Platz finden. Für eine Kugel vom Volumen $K$ wird

$$V = \mathfrak{J} K \frac{x}{r^3} \quad . \tag{77}$$

Daß das magnetische Potential einer solchen Kugel identisch ist mit dem eines Molekularmagneten in ihrem Mittelpunkte, der das gleiche Moment hat, war zu erwarten, da dieser Satz auch vom NEWTONschen Potential gilt. — Für eine Hohlkugel erhält man im äußeren Raume dasselbe $V$ wie oben, im Hohlraume dagegen ist $P =$ konst, also $V = 0$.

Für einen unbegrenzten transversal magnetisierten Kreiszylinder vom Radius $a$ wird:

$$V = \mathfrak{J} \cdot 2\pi a^2 \cdot \frac{x}{r^2} \quad , \tag{78}$$

endlich für das Potential einer gleichförmigen, von einer Kreislinie vom Radius $a$ begrenzten Schale auf einen Punkt, der auf der im Mittelpunkte der Kreisebene errichteten Senkrechten um $x$ entfernt und von dieser Linie seitwärts um $\varrho$ entfernt ist (zur Abkürzung ist $\sqrt{a^2 + x^2} = u$ gesetzt):

$$V = 2\pi\mathfrak{J}\left\{1 - \frac{x}{u}\left[1 - \frac{3}{2^2}\frac{a^2}{u^2}\left(\frac{\varrho}{u}\right)^2 - \frac{3 \cdot 5}{(2 \cdot 4)^2}\frac{7x^2a^2 - 3a^2u^2}{u^4}\left(\frac{\varrho}{u}\right)^4 + \dots\right]\right\} \quad , \tag{79}$$

eine Reihe, die stets konvergiert, falls $\varrho < u$ ist, und die für Punkte auf jener Senkrechten selbst

$$V = 2\pi\mathfrak{J}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) \tag{79a}$$

liefert[1].

An diese Formel sei eine ähnliche angeschlossen, welche in dem für die Herstellung starker Felder wichtigen Falle zweier einander im Abstande $2a$ gegenüberstehender kreisförmiger Polflächen entgegengesetzter Natur gilt. Nach STEFAN[2] ist dann in dem Punkte in der Mitte zwischen den Polflächen (Radius derselben $r$) die Kraft

$$\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{J}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right) \quad , \tag{80}$$

[1] MASCART u. JOUBERT, Lehrb. d. El. u. d. Magn. 1. S. 329. — [2] J. STEFAN, Wied. Ann. 38. S. 440. 1889.

und wenn $a$ klein gegen $r$, einfach $\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{J}$. Dabei ist angenommen, daß die Polflächen die Enden zylindrischer, gleichförmiger Magnete sind. Für abgestumpfte Kegel wird $\mathfrak{H}$ unter Umständen noch etwas größer, im günstigsten Falle $\mathfrak{H} = 1{,}442 \cdot 4\pi\mathfrak{J}$.

Andere Fälle, so den einer kreisförmigen Schale, einer kugelförmigen Schicht und den eines solenoidalen Zylinders findet man z. B. bei MASCART und JOUBERT[1] ausführlich entwickelt.

**Mitwirkung des Erdmagnetismus.** Wie sich ein drehbarer Magnet unter dem gleichzeitigen Einflusse eines festen Magneten und des Erdmagnetismus einstellt, ist bereits oben (S. 25) untersucht worden, jedoch nur für den Fall zweier idealer Magnete (Polpaare). Handelt es sich dagegen um wirkliche Magnete und berücksichtigt man überdies die meist noch in nicht zu vernachlässigender Höhe mitwirkende Torsion des Fadens, an welchem der drehbare Magnet aufgehängt ist, so wird die Rechnung natürlich viel komplizierter, und man muß sie, um übersichtliche Formeln zu erhalten, in zweckentsprechender Weise spezialisieren. Eine solche Berechnung ist von GAUSS[2] ausgeführt worden, und zwar unter Zugrundelegung der freien Magnetismen $E$ und $e$ der Teilchen der beiden Magnete; die hier benutzte Bezeichnungs- und Darstellungsweise rührt von RIECKE[3] her. Der Winkel $u$, den die Nadel (d. h. der drehbare Magnet) in ihrer schließlichen Stellung mit dem magnetischen Meridian bildet, ist dann bestimmt durch die Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial u}\Sigma\frac{Ee}{r} - \mathfrak{H}\, m \sin u + \Theta(N-u) = 0 \quad , \tag{81}$$

wo $\mathfrak{H}$ die horizontale Intensität des Erdmagnetismus, $m$ das magnetische Moment der Nadel, $\Theta$ der Torsionskoeffizient und $N$ der Winkel ist, welchen die Nadel bei Torsionsfreiheit des Fadens mit dem Meridian bilden würde. Auch hier tritt natürlich bei der Entwickelung das Verhältnis der Dimensionen der Magnete zu ihrer Entfernung auf, ein Verhältnis, dessen vierte Potenz vernachlässigt werden mag. Im allgemeinen wird ferner der magnetische Mittelpunkt des wirklichen Magneten mit seinem geometrischen Mittelpunkt nicht zusammenfallen, sondern in der Achsenrichtung um $\alpha$, in der darauf senkrechten um $\beta$ von ihm abweichen; dies sind also seine Koordinaten, während allgemein die Koordinaten eines Punktes des Magneten $ABC$, eines Punktes der Nadel $abc$ seien, von je ihren geometrischen Mittelpunkten gerechnet. Endlich sei bemerkt, daß man aus gewissen Gründen (s. Art. Magnetische Messungen) den Winkel $u$ nicht einmal, sondern aus zwei Beobachtungen bei entgegengesetzten Lagen des festen Magneten bestimmt denken muß. Alsdann erhält man für die beiden Hauptlagen (fester Magnet west- oder ostwärts in der Längslage resp. nord- oder südwärts in der Querlage) die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{H}}{M}\left(1 + \frac{\Theta}{m\mathfrak{H}}\right)R^3 \operatorname{tg} u = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{f_1}{Mm} \\ 1 - \dfrac{1}{R^2}\dfrac{f_2}{Mm} \end{cases} , \tag{82}$$

wo $M$ das Moment des wirkenden Magneten, $R$ der Abstand der Mittelpunkte und $f_1$ und $f_2$ folgende Konstanten sind

[1] MASCART u. JOUBERT, a. a. O. S. 329 ff. — [2] C. F. GAUSS, Intens. vis magn. etc. — [3] E. RIECKE, Wied. Ann. 8. S. 299. 1879.





$$
(83)\quad \begin{cases}
f_1 = 4m(\Sigma E A^3 - \frac{3}{2}\Sigma E A B^2 - \frac{3}{2}\Sigma E A C^2) \\
\qquad - 6M(\Sigma e a^3 - 4\Sigma e a b^2 + \Sigma e a c^2) \\
\qquad - 6(\alpha^2 - 2\beta^2) \\
f_2 = \frac{3}{2}m(\Sigma E A^3 - 4\Sigma E A B^2 + \Sigma E A C^2) \\
\qquad - 6M\left[\Sigma e a e^3 - \frac{3}{2}\Sigma e a b^2 - \frac{3}{2}\Sigma e a c^2 + \frac{15}{2}M(\Sigma e a b^2 - \Sigma e a c^2)\right] \\
\qquad - 6(\alpha^2 - \frac{3}{4}\beta^2) \quad .
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen sind natürlich den empirischen, von GAUSS aus seinen Beobachtungen berechneten auf S. 29 angegebenen formell analog, aber die Ausdrücke für $f_1$ und $f_2$ gehen eben auf die Konstitution der beiden Magnete zurück. Wenn der magnetische Mittelpunkt mit dem geometrischen zusammenfällt, fallen die Glieder mit $\alpha$ und $\beta$ fort.

**Gewöhnliche und äquivalente Pole.** Die Definition der Pole eines Magneten als Schwerpunkte des freien nördlichen und südlichen Magnetismus (s. o. S. 52) ergibt ohne weiteres, daß ihre Bedeutung beschränkt ist auf Fälle, in denen nur Parallelkräfte auftreten, d. h. auf die Wirkung des Magneten in die Ferne oder seine Beeinflussung aus großer Ferne. Das aus den Polen konstruierte Polpaar stellt eben einen einfachen Magneten dar, welcher dasselbe magnetische Moment wie der gegebene hat, und bei Fernwirkung kommt es allein auf dieses Moment an. Aber gerade dieser letztere Umstand drückt die Wichtigkeit der Pole sehr herab; denn ihre Lage an und für sich, also namentlich ihr Abstand voneinander, ist für die Wirkungen in die Ferne nicht maßgebend, man könnte sie geradezu durch irgend zwei andere Punkte ersetzen, wenn man nur ihre Stärke entsprechend veränderte. Ihre Bedeutung beschränkt sich daher lediglich auf die Konstitution des Magneten selbst, indem sie von der Verteilung des Magnetismus in demselben ein, wenn auch nicht vollständiges, so doch charakteristisches Bild geben. Für die Wirkung eines Magneten nach außen gewinnen die Pole nur dann Bedeutung, wenn diese Wirkung auf Punkte in Betracht gezogen wird, welche so nahe liegen, daß die höheren Glieder der Entwickelung und damit der Polabstand selbst in Betracht kommen; aber dann handelt es sich gar nicht mehr um parallele Kräfte, und die bisher definierten Pole haben keine Bedeutung mehr. An ihre Stelle sind vielmehr jetzt andere Punkte zu setzen, und zwar für jeden Punkt, auf welchen die Wirkung des Magneten betrachtet wird, oder von welchem aus eine Mitwirkung auf den Magneten stattfindet, ein anderes Punktepaar, mit anderen Worten, der Sitz, resp. Angriffspunkt der Kraft ist ein von Ort zu Ort variabler. Man kann diese Pole mit RIECKE als äquivalente Pole bezeichnen. Ein Polpaar, daß aus ihnen gebildet ist, hat die doppelte Eigenschaft, erstens dasselbe Moment wie der gegebene Magnet (also dieselbe Wirkung in die Ferne und Beeinflussung aus der Ferne) zu haben und zweitens dieselbe Wirkung in der Nähe auszuüben und aus der Nähe zu erfahren, wie der gegebene; die erstere Eigenschaft ist natürlich eigentlich nur ein spezieller Fall der letzteren; die gewöhnlichen Pole besitzen aber eben nur die spezielle Eigenschaft, oder wenigstens nur diese streng, die andere nur mehr oder weniger angenähert, und zwar desto weniger, je näher der Wirkungspunkt an der Oberfläche des Magneten heranrückt.

Die Bestimmung der äquivalenten Pole im allgemeinen und in besonderen Fällen, welche zeigen, daß in der Tat die äquivalenten Pole oft beträchtlich entfernt von den gewöhnlichen liegen, hat RIECKE[1] durchgeführt; es können hier nur einige der Resultate kurz angeführt werden. Entwickelt man in derselben Weise, in welcher man zu den Formeln (82) gelangt ist, die Formeln für die

[1] E. RIECKE, Pogg. Ann. **149**. S. 62. 1873. — Wied. Ann. **8**. S. 299. 1879.

Ablenkung eines idealen Polpaares unter Einfluß eines festen Polpaares und des Erdmagnetismus (mit anderen Worten, vervollständigt man die Formeln (19a) usw. durch Hinzufügung eines zweiten Annäherungsgliedes), so erhält man Ausdrücke, die sich von (82) nur dadurch unterscheiden, daß an die Stelle von $f_1/Mm$ die Größe $4L^2 - 6l^2$ und an die Stelle von $f_2/Mm$ die Größe $\frac{3}{2}L - 6l^2$ tritt, wenn $L$ und $l$ die halben Polabstände in den beiden Polpaaren sind. Beachtet man nun die Werte von $f_1$ und $f_2$ (Gleichung 83), so erhält man folgenden Satz: Für alle Verschiebungen der Nadel längs eines und desselben, vom Mittelpunkt des Magneten (oder eventuell von einem anderen Punkte) gezogenen Radiusvektors kann der Magnet durch ein und dasselbe Polpaar ersetzt werden, dagegen ändert sich die Lage der äquivalenten Pole mit der Richtung des Radiusvektors. Das Quadrat des halben Abstandes der äquivalenten Pole ist für die beiden Hauptlagen:

$$(84) \qquad L^2 = \begin{cases} \frac{1}{M}\left(\Sigma EA^3 - \frac{3}{2}\Sigma EAB^2 - \frac{3}{2}\Sigma EAC^2\right) - 6(\alpha^2 - 2\beta^2) \\ \frac{1}{M}\left(\Sigma EA^3 - 4\Sigma EAB^2 + \Sigma EAC^2\right) - 6\left(\alpha^2 - \frac{3}{4}\beta^2\right) \end{cases} .$$

Für alle Punkte aller Radienvektoren treten dieselben äquivalenten Pole in dem speziellen Falle ein, wenn $\Sigma EAB^2 = \Sigma EAC^2$ ist, also z. B. für einen Rotationskörper. Man kann, um ein Bild aus der Optik zu gebrauchen, in dem letzteren Spezialfalle etwa von einem „scharfen Bilde", im allgemeinen Falle von einem durch die verschiedenen Lagen eines Poles bei verschiedener Lage der Nadel gebildeten „Zerstreuungskreise" sprechen.

**Spezielle Fälle.** Für einen Faden tritt der Unterschied der beiden Punktpaare in sehr einfacher Weise hervor; es ist nämlich der Abstand $2L_0$ der gewöhnlichen Pole resp. der Abstand $2L$ der äquivalenten Pole bestimmt durch

$$(85) \qquad L_0 = \frac{\Sigma EA}{\Sigma E} \qquad L^2 = \frac{\Sigma EA^3}{\Sigma EA} .$$

Beispielsweise wird unter Annahme der bei dünnen Stäben experimentell gefundenen Kettenlinien-Verteilung des ganzen Magnetismus (S. 51) in Bruchteilen der halben Länge des Fadens

$$(86) \qquad L_0 = 0{,}717 \qquad L = 0{,}825 \quad ,$$

also sehr verschieden. In der Folge wird hierauf noch zurückgekommen werden. Bei einem gleichförmig nach der Achse $x$ magnetisierten Ellipsoid wird $L_0 = \frac{2}{3}x$, dagegen $L^2$:

$$(87) \qquad \begin{cases} \text{erste Hauptlage:} & L^2 = \frac{3}{5}\left(x^2 - \frac{y^2 + z^2}{2}\right) \\ \text{zweite Hauptlage:} & L^2 = \frac{3}{5}\left(x^2 - \frac{4y^2 - z^2}{3}\right) \end{cases}$$

und insbesondere für ein Rotationsellipsoid $L^2 = \frac{3}{5}(x^2 - y^2)$, also z. B. für die Kugel $L = 0$, für ein sehr längliches Rotationsellipsoid $L = 0{,}77\,x$ und nur für ein bestimmtes, nämlich das vom Achsenverhältnis $(y:x) = 0{,}509$ in Übereinstimmung mit den gewöhnlichen Polen $L = \frac{2}{3}x$. Schließlich sei bemerkt, daß die äquivalenten Pole unter Umständen imaginär werden, und zwar entweder infolge der Form des Magneten (z. B. abgeplattetes Rotationsellipsoid, nach der kurzen Achse magnetisiert) oder infolge eigentümlicher Verteilung des Magnetismus oder endlich infolge starker Abweichung des magnetischen vom geometrischen Mittelpunkte. Die Berechnung der Nahewirkung ist in diesen Fällen genau wie sonst möglich, aber die äquivalenten Pole sind dann nicht mehr Repräsentanten derselben.





# Magnetische Messungen.

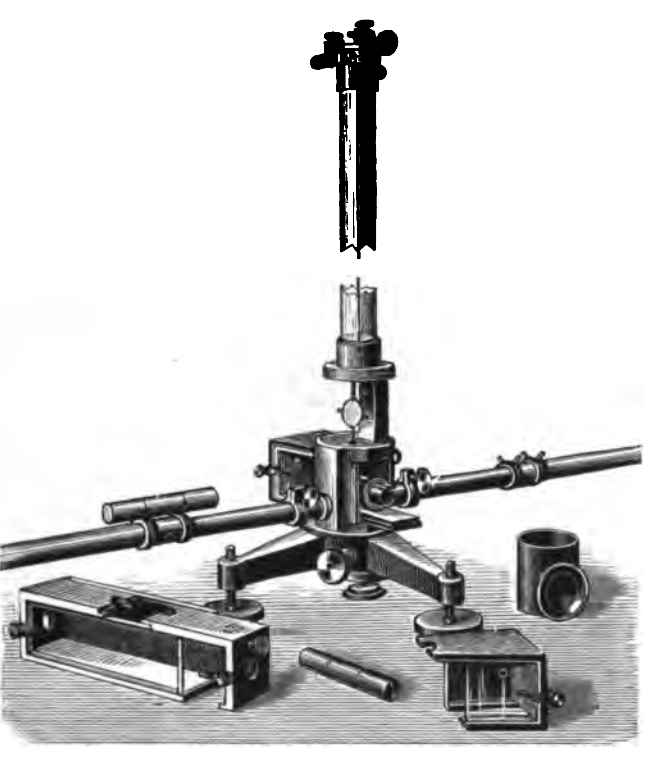
Von F. AUERBACH.

**Übersicht.** Die magnetischen Messungen laufen in vielen Hinsichten ihrem Zweck und ihrer Methodik nach den elektrischen Strommessungen (Bd. 4, S. 254) parallel. Wie dort um die Stärke der Ströme, so handelt es sich hier in erster Linie um die Stärke des Magnetismus, und um sie zu ermitteln, bedient man sich dort wie hier der bezüglichen Außenwirkungen. Größer jedoch als die Ähnlichkeiten sind die Unterschiede zwischen beiden Gebieten. Erstens handelt es sich dort, wenigstens in den weitaus meisten Fällen, um die Messung einer linearen Größe, nämlich der Stromstärke in einem linearen Leiter, hier dagegen um den Magnetismus eines Körpers, den man erst vollständig ermittelt hat, wenn man seine auf drei Koordinatenachsen bezogenen Komponenten, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn man die Achse und die Größe der Magnetisierung angegeben hat. Noch mehr, während in einem einfachen Leiter die Stromstärke im stationären Zustande überall die gleiche ist, besitzen die verschiedenen Teile eines Magneten verschieden starken Magnetismus. Es bietet sich also die weitere Aufgabe dar, diese einzelnen Teile zu untersuchen und damit zugleich die Verteilung des Magnetismus zu ermitteln, eine Aufgabe, welche sich streng genommen freilich nicht lösen läßt, da dieselbe Außenwirkung durch sehr verschiedene Verteilungen hervorgerufen werden kann (s. d. vor. Art.), welche aber in beschränkterem Sinne Lösungen zuläßt in der Weise, daß man z. B. die GAUSSsche Oberflächenverteilung ermittelt, oder daß man die Pole (s. o.) angibt, welche den Magneten bei Fernwirkungen, resp. die äquivalenten Pole, welche ihn bei einer bestimmten Nahewirkung vertreten (s. o. S. 66); insbesondere wird es sich bei Magnetstäben von symmetrischem Querschnitt, wie sie in der Praxis schon vielfach angewandt werden, um die Bestimmung des Polabstandes handeln. Ein ferneres Problem betrifft die Messung derselben Größen, von denen bisher mit Bezug auf den Magneten selbst die Rede war, also insbesondere der Stärke und Richtung des Magnetismus, für jenen ganzen Raum, den man ein magnetisches Feld nennt, sei es, daß dies Feld von einem künstlichen Magneten (resp. elektrischen Strömen, s. Art. Elektromagnetismus) oder von dem Erdmagnetismus herrührt. Dieser letztere Hinweis führt uns auf einen weiteren Punkt, der dem in Rede stehenden Gebiete ein charakteristisches Gepräge verleiht. Bei allen magnetischen Messungen nämlich befindet man sich von vornherein in dem magnetischen Felde der Erde, und man müßte daher behufs ungetrübter Messungen die Erdkraft unwirksam machen (z. B. durch Kompensierung, s. o. S. 6), wenn man es nicht in den meisten Fällen vorzöge, gerade umgekehrt den Erdmagnetismus für die Messung des Stabmagnetismus nutzbar zu machen. Die Messung wird damit zu einer Vergleichung beider Größen, so daß man die eine findet, wenn man die andere kennt oder, durch Hilfsbeobachtungen gewisser Art, eliminiert. Man ersieht hieraus, daß die magnetischen und die erdmagnetischen Messungsmethoden gemeinschaftlich zu behandeln sind, wenigstens soweit



es sich um Intensitätsmessungen handelt; für den Erdmagnetismus kommen dann noch Richtungsmessungen (Deklination, Inklination) hinzu.

Was die **Methodik,** also insbesondere die Wirkungen betrifft, welche man zur Messung des Magnetismus benutzt, so stehen die Fernwirkungen auf andere Magnetkörper, welche drehbar aufgestellt sind, vorn an; die betreffenden Instrumente, welche den Galvanometern entsprechen, heißen Magnetometer. Neben ihnen finden, analog den Stromwagen, auch magnetische Wagen Anwendung. An dritter Stelle sind die auf der Induktion von Magnetismus oder von elektrischen Strömen durch Bewegung von Spulen oder Magneten oder Änderung ihres Magnetismus beruhenden Methoden zu nennen, welche sowohl für erdmagnetische als auch für magnetische Messungen, zumal in weichen Eisenkörpern, von großer Bedeutung geworden sind. An letzter Stelle endlich steht die Messung vermittels der Tragkraft der Magnete und verwandter Kraftäußerungen, die Benutzung optischer Wirkungen, der Widerstandsänderung im Magnetfelde usw.



Figur 33.

Wie die Stärke eines elektrischen Stromes eine tiefere Bedeutung erst gewinnt, wenn man sie mit der elektromotorischen Kraft, die sie hervorrief, zusammenhält, und wie demgemäß im früheren der Strommessung die Messung der elektromotorischen Kraft vorangeschickt wurde, so müßte auch hier die magnetisierende Kraft als Messungsgröße eingeführt und den Messungen von Stabmagnetismen vorangestellt werden. Nun ist aber die Messung der magnetisierenden Kraft — außer, wo sie mit der Messung von Feldern zusammenfällt — in exakterer Weise nur bei einer einzigen Erzeugungsart des Magnetismus, nämlich bei der elektromagnetischen, möglich; das Nähere über diese Untersuchungen und ihre Ergebnisse muß daher dem Artikel über Elektromagnetismus vorbehalten bleiben.

Schließlich ist darauf hinzuweisen, daß die Methoden und Apparate zum Teil eine recht verschiedene Gestalt annehmen, je nachdem es sich um absolute Bestimmungen oder lediglich um relative, z. B. Vergleichungen von Magnetismen, Änderungen mit der Zeit oder dem Ort usw., handelt.

## A) Magnetometer.

**Messung magnetischer Intensitäten.** Fast alle magnetischen Meßapparate stellen ein um eine Achse drehbares System dar, welchem bei Ausführung

der Messungen feste Systeme gegenübergestellt werden. Diejenigen Apparate, bei welchen jene Drehungsachse vertikal steht, heißen Magnetometer im engeren Sinne des Wortes. Figur 33 zeigt die GAUSS-WEBERsche Form des Magnetometers mit, der besseren Sichtbarkeit halber, zum Teil abgenommenen Teilen, Figur 34a und b zwei von F. KOHLRAUSCH herrührende Formen. Das drehbare System besteht aus einem Magneten von einer für die betreffenden Zwecke geeigneten Form, Größe und Stärke, sowie aus Hilfsteilen, welche zur Befestigung, Messung usw. dienen. An der Achse ist das System entweder mittels einer Spitze angebracht, oder es hängt an einem oder zwei Fäden herab (Unifilar- resp. Bifilar-Magnetometer); jene Einrichtung ist bequemer, einfacher und leichter transportabel, diese, die Fadenaufhängung, zuverlässiger und empfindlicher. Bei beiden muß man zunächst dafür sorgen, daß der Magnet jederzeit in horizontaler Lage sei, was man in Anbetracht der neigenden Kraft des Erdmagnetismus (s. w. u. Inklination) nur durch besondere Einrichtungen erreichen kann, auf die aber hier nicht näher eingegangen zu werden braucht, da sie rein mechanischer Natur sind und bei jedem einzelnen Apparat deutlich in die Augen fallen: nur sei bemerkt, daß, zum Teil mit aus diesem Grunde, die Fadenaufhängung in ihrem untersten Teile in eine Suspension von starrem Charakter übergeht, bestehend aus einem Stäbchen oder ähnlichem Metallteil in vertikaler und einem darauf senkrechten, also in horizontaler Lage befindlichen Schiffchen oder Träger für den Magneten; es ist damit zugleich die vielfach unentbehrliche Gelegenheit gegeben, den Magneten umlegen, d. h. in einer gegen die vorhergehende um 180° gedrehten Lage in das Schiffchen bringen zu können. Bei der Spitzeneinrichtung muß man die Reibung möglichst gering machen und die doch noch vorhandene, da man sie nicht exakt ermitteln kann, entweder ganz vernachlässigen oder durch geeignete Kombination von Beobachtungen ihren Einfluß möglichst reduzieren und ihn dann ebenfalls vernachlässigen; bei der Fadenaufhängung muß man die Torsion so klein wie möglich machen, indem man einen oder einige Kokonfäden, noch besser aber neuerdings einen Quarzfaden, oder, wenn diese wegen des großen Gewichtes des Magneten oder der feuchten Luft nicht brauchbar sind, ausgeglühte Metalldrähte benutzt, kann dann aber die doch noch vorhandene Torsion leicht in Rechnung ziehen; bei der Bifilaraufhängung tritt dann noch die Wirkung der Schwere hinzu. Hiervon abgesehen befindet sich der Magnet in dem Felde des Erdmagnetismus und zwar, da er sich nur in einer horizontalen Ebene drehen kann, unter der Einwirkung der Horizontalkomponente $H$[1] desselben; bei einigen Methoden kompensiert man sie ähnlich wie bei Galvanometern (**4**, 272), bei den meisten läßt man sie voll einwirken. Das Magnetometer enthält ferner:



Figur 34.

[1] In diesem und dem letzten Artikel (Erdmagnetismus) ist, dem Gebrauche der Erdmagnetiker entsprechend, die Horizontalkomponente mit $H$ (nicht mit $\mathfrak{H}$) bezeichnet.

1. Am oberen oder unteren Ende der Aufhängung einen Torsionskreis, durch welchen man der Aufhängung eine zu messende Torsion erteilen kann.

2. Eine Vorrichtung zur Ablesung der Stellung des Magneten, d. h. der Winkel, um welche er sich dreht, und zwar entweder: a) eine Kreisteilung oder b) einen sich mitdrehenden Spiegel, der an der Drehachse oder an einer Endfläche des Magneten befestigt ist[1] und dem man zum Zwecke der Spiegelablesung ein Fernrohr mit Skala gegenüberstellt (4, 269ff.), oder c) eine Linse an dem einen, eine kleine Skala an dem anderen Magnetende, die man in ähnlicher Weise benutzt (Kollimationsmethode)[2].

3. Eine Vorrichtung zur Änderung des Trägheitsmomentes des hängenden Systems zum Zwecke seiner experimentellen Ermittelung, wozu ein Körper von so einfacher Gestalt, daß sich sein Trägheitsmoment berechnen läßt, dient, z. B. ein an dem Magneten konzentrisch angebrachter Ring oder besser zwei zu beiden Seiten symmetrisch aufgesetzte zylindrische Gewichte (sie anzuhängen ist wegen ihrer dann auftretenden Eigenschwingungen und Eigendrehungen nicht ratsam).

4. Einen Dämpfer, d. h. eine Vorrichtung, um die Beruhigung des in Schwingungen versetzten Magneten zu beschleunigen: es kann in dieser Hinsicht auf das frühere (4, 272ff.) verwiesen werden; nur sei bemerkt, daß für sehr feine Messungen der elektrischen, von magnetischen Einflüssen nie ganz freien Dämpfung stets die mechanische vorzuziehen sein wird.

5. Ein Gehäuse aus Holz, Glas oder eisenfreiem Metall, welches, ohne die Beobachtung des Magneten zu hindern, ihn vor Luftströmungen schützt.

6. Eine oder zwei Schienen, welche die magnetische Ost-West- resp. Nord-Süd-Richtung haben, graduiert sind und zur Aufnahme der festen Magnete dienen, deren Wirkung bestimmt oder benutzt werden soll.

**Torsionsverhältnis.** Bei allen Beobachtungen, die man an dem drehbaren Magneten mit Fadensuspension anstellt, seien es nun Ablenkungen, welche ihm feste Magnete aus der ursprünglichen Lage erteilen, oder Schwingungen, die er um diese ausführt, summieren sich die Wirkungen des Erdmagnetismus und der Torsion; es ist daher erforderlich, diese beiden Glieder voneinander zu trennen. Man kann dies leicht, indem man beachtet, daß das Drehungsmoment der Torsion dem Torsionswinkel, dasjenige des Erdmagnetismus dem Sinus des Abweichungswinkels aus dem magnetischen Meridian, also für kleine Abweichungen dem Abweichungswinkel selbst proportional ist; gibt man also dem Faden eine absichtliche Torsion $\alpha$ und folgt der Magnet dieser Drehung um den Winkel $\varphi$, so ist

$$\vartheta = \frac{\varphi}{\alpha - \varphi} \tag{1}$$

das Verhältnis der Drehungsmomente. Man nennt es Torsionsverhältnis. Ist ein Torsionskreis zu willkürlicher Wahl und Ablesung von $\alpha$ nicht vorhanden, so dreht man den Magneten einmal um sich herum, und findet dann den dem Werte $\alpha = 360^0$ entsprechenden Wert von $\varphi$. In allen Formeln, die auftreten, muß man nun, wenn das Magnetometer Fadeneinrichtung besitzt, statt der einfachen Größe $H$ das Produkt $H(1 + \vartheta)$ einführen.

**Asymmetrie.** Im Anschluß an die Torsionsvorrichtung ist noch auf einen Umstand hinzuweisen, den neuerdings RICHARZ und P. SCHULZE sowie F. A. SCHULZE

[1] Im letzteren Falle gelten jedoch etwas kompliziertere Formeln, als sie früher entwickelt worden sind; auch sei noch bemerkt, daß man gut tut, den Spiegel mittels rückwärts angebrachter Stellschrauben zu regulieren, so daß er vertikal steht, weil man sonst ebenfalls eine Korrektion an der Rechnung anbringen muß. — [2] Näheres über diese Methode, die durch die längliche Gestalt der Magnete nahe gelegt ist, findet man in den Lehrbüchern von LAMONT, MAXWELL usw. Technisch am einfachsten gestaltet sie sich, wenn der Magnetstab hohl ist; man kann dann das eine Ende mit der Linse, das andere mit der Skala (oder Marke, was zuweilen genügt) verschließen.

(vgl. o. S. 32) näher untersucht haben[1]. Wenn man nämlich bei einem Unifilarmagnetometer dem Magneten durch tordieren des Aufhängefadens eine vom magnetischen Meridian abweichende Ruhelage gibt, so sind erstens die Schwingungen unsymmetrisch, es sind nämlich die Elongationen nach der Seite hin, nach welcher tordiert wurde, größer; und zweitens sind auch die Ablenkungen durch gleiche Drehungsmomente asymmetrisch. Namentlich dieser letztere Einfluß kann, wie sich zeigt, unter Umständen recht bemerklich werden. In solchen Fällen sind also die von den genannten Autoren entwickelten Formeln zu benutzen.

**GAUSSsche Methode zur Bestimmung des Magnetismus $M$ eines Stabes oder der Horizontalkomponente $H$ des Erdmagnetismus[2].** Bringt man in das Magnetometer eine Magnetnadel und läßt man den zu untersuchenden Stab von außen auf sie einwirken, so findet man aus ihrer Ablenkung das Verhältnis $M/H$, also, wenn man $H$ kennt, $M$; wendet man umgekehrt einen Stab von bekanntem Magnetismus $M$ an, so findet man $H$. Kennt man weder $M$ noch $H$, so muß man, um sie zu finden, sich noch eine zweite Gleichung zwischen ihnen verschaffen, und zwar eine solche, welche nicht ebenfalls wieder ihr Verhältnis enthält; man erreicht dies, indem man nunmehr statt der Hilfsnadel den Magnetstab selbst in das Magnetometer bringt und seine Schwingungsdauer beobachtet. Die ganze Untersuchung zerfällt also in Ablenkungsbeobachtungen und Schwingungsbeobachtungen.

1. Ablenkungsbeobachtungen[3]. Im vorigen Artikel sind die Formeln entwickelt worden, welche für die Wirkung eines festen auf einen drehbaren Magneten unter Mitwirkung des Erdmagnetismus gelten; an sie schließen sich die hier zu benutzenden Formeln unmittelbar an. Der Einfachheit halber wird man den Magnetstab aus einer der beiden Hauptlagen wirken lassen, d. h. entweder vom magnetischen Osten oder Westen, wobei seine eigene Längsrichtung in diese Richtung zu bringen ist, oder vom magnetischen Norden oder Süden, wobei seine Längsrichtung quer zu stellen ist. Nennt man den Ablenkungswinkel $\varphi$, so wird der Ausdruck für $\operatorname{tang}\varphi$ zunächst den Faktor $M/H(1+\vartheta)$ enthalten, ferner den Faktor $1/r^3$, wo $r$ die Entfernung der Mittelpunkte beider Magnete ist, sodann einen Zahlenfaktor, welcher für die erste Hauptlage $1/2$, für die zweite 1 ist, endlich einen Faktor, welcher die Form

$$1+\frac{A_1}{r^2}+\frac{A_2}{r^4}+\dots \tag{2}$$

hat, und dessen Koeffizienten von den Längen und Formen der beiden Magnete abhängen. Man wird diese Längen im Vergleich zu $r$ immerhin nicht so klein nehmen können, daß es nicht erforderlich wäre, wenigstens noch das zweite Glied der Reihe zu berücksichtigen, das wird aber auch fast stets ausreichen. Die Größe $A_1$, welche dann noch vorkommt, enthält, wenn es sich um einfache Polpaare (S. 17) handelt, die Längen $L$ und $l$ dieser beiden, d. h. den Polabstand des einen und des anderen; bei wirklichen Magneten kann man, wenn sie die Gestalt sehr gestreckter Stäbe oder Nadeln haben, dieselbe Formel für $A_1$ benutzen, nur bedeuten dann $L$ und $l$ nicht mehr die Längen, sondern die nicht unwesentlich kleineren Polabstände (S. 67); kennt man diese oder begnügt man sich damit, sie rund zu $5/6$ der Längen anzunehmen (s. w. u.), so kann man für die beiden Hauptlagen

[1] P. SCHULZE, Über asymmetrische Schwingungen, In.-Diss. Greifsw. 1900. — Drude Ann. **8**. 714. 1902. — F. RICHARZ u. F. A. SCHULZE, Drude Ann. **8**. 348. 1902. — F. A. SCHULZE, Drude Ann. **9**. 1111. 1902. — [2] C. F. GAUSS, Intensitas vis magneticae etc. Gött. Abh. Bd. **8**. 1832. Pogg. Ann. Bd. **27**, S. 241 u. 581. Res. a. d. Beob. d. Magn. Vereins, Bd. **1**. 1837. Ges. Werke, Bd. **5**. — [3] HANSTEEN scheint der erste gewesen zu sein, welcher Ablenkungsbeobachtungen in wissenschaftliche Form brachte; die folgende Form rührt aber erst von C. F. GAUSS her.

(3) $$A_1 = \tfrac{1}{2} L^2 - \tfrac{3}{4} l^2 \quad \text{resp.} \quad A_1' = -\tfrac{3}{8} L^2 + \tfrac{3}{2} l^2$$

setzen und findet dann unmittelbar für die erste Hauptlage

(4) $$\frac{M}{H} = \tfrac{1}{2}(1 + \vartheta) \frac{r^3 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \dfrac{A_1}{r^2}}$$

resp. ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ in der 2. Hauptlage.

Bei nicht sehr gestreckten Magnetstäben wird jedoch das Korrektionsglied $A_1$ auf diese Weise erheblich fehlerhaft, man müßte die Verteilung des Magnetismus wirklich in Betracht ziehen, und es ist daher weitaus vorzuziehen, jenes Korrektionsglied, statt es zu berechnen, zu eliminieren, was man erreicht, wenn man den Magnetstab aus zwei verschiedenen Entfernungen wirken läßt und beachtet, daß $A_1$ in beiden Fällen denselben Wert besitzt. Man hat alsdann nämlich z. B. für die erste Hauptlage

(5) $$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2}{r_1^3} \frac{M}{H(1 + \vartheta)} \left(1 + \frac{A_1}{r_1^2}\right), \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2}{r_2^3} \frac{M}{H(1 + \vartheta)} \left(1 + \frac{A_1}{r_2^2}\right),$$

woraus durch Elimination von $A_1$

(6) $$\frac{M}{H} = \tfrac{1}{2}(1 + \vartheta) \frac{r_1^5 \operatorname{tg} \varphi_1 - r_2^5 \operatorname{tg} \varphi_2}{r_1^2 - r_2^2}$$

resultiert (bei Spitzeneinrichtung ist $\vartheta = 0$ zu setzen); hiermit ist das Verhältnis von $M : H$ gefunden. Für die 2. Hauptlage fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ fort.

Zur Ausführung dieser Versuche ist noch eine Reihe nicht unwichtiger Bemerkungen zu machen: a) Zunächst ist die zur Auflage des ablenkenden Magnetstabs dienende Schiene, falls sie nicht ein für allemal in der magnetischen Ost-West- resp. Nord-Süd-Linie festgelegt ist, möglichst exakt in diese zu bringen, was mit Hilfe einer Magnetnadel unter Beobachtung der nötigen Vorsichtsmaßregeln (s. w. u.) geschieht. b) Was ferner die Wahl der Magnetnadel und des ablenkenden Magneten (falls dieser nicht gegeben ist) betrifft, so hat sich darin ein Wandel vollzogen, insofern Gauss und seine Nachfolger große und schwere Magnete benutzten, in neuerer Zeit dagegen die Anwendung kleiner und leichter Magnete in den Vordergrund getreten ist, was besonders für Observatorien den Vorteil mit sich bringt, daß die störenden Fernwirkungen verschiedener magnetischer Apparate weit schwächer ausfallen. Der ablenkende Magnet erhält stets Stabform, der schwingende statt der gewöhnlichen Stab- oder Nadelform zuweilen auch Ring- oder Kreisform, in welch letzterem Falle er zugleich als Ablesungsspiegel eingerichtet werden kann. c) Alsdann sind die beiden Abstände $r_1$ und $r_2$ passend zu wählen, also erstens so klein, daß die Ablenkungen hinreichend groß werden, zweitens so groß, daß die oben gemachten Vernachlässigungen erlaubt sind (die kleinere Entfernung, als welche $r_2$ gelten möge, muß für mäßige Genauigkeit mindestens das 6fache, für größere mindestens das 8 bis 10fache der Länge des längeren der beiden Magnetkörper betragen), endlich drittens derart, daß $r_1^2$ etwa doppelt so groß ist wie $r_2^2$, die Entfernungen sich also wie 3 : 2 bis 4 : 3 verhalten, weil dann, wie die Gestalt der obigen Formel lehrt, der Einfluß von Beobachtungsfehlern am kleinsten wird. Die auf diese Weise gewählten Entfernungen sind von der Mitte des festen Magneten bis zur Drehungsachse des beweglichen zu messen, eine Aufgabe, die erspart wird, wenn die Schienen mit dem Magnetometer fest verbunden, graduiert und der der Drehachse entsprechende Punkt dieser Graduierung genau bekannt ist, so daß man nur nötig hat, ihn von dem der Mitte des ablenkenden Magneten entsprechenden Punkte abzuziehen, wobei letzterer meist nicht direkt ablesbar, sondern als Mittel aus den, den beiden Enden des Magneten (oder seines Trägers) entsprechenden

Punkten zu berechnen sein wird. d) Was ferner die Ablenkungen betrifft, so muß man, um die geometrischen und magnetischen Asymmetrien, die stets noch, wenn auch in geringem Grade, vorhanden sind, unschädlich zu machen, aus jeder der beiden Entfernungen viermal beobachten, nämlich mit ostwärts und

4 5 8 1
*N S n s* $\nu$ *n s N S*
*S N s n* $\sigma$ *s n S N*
3 6 7 2
*W* *Erste Hauptlage.* *O*

Figur 35.

mit westwärts (resp. in der zweiten Hauptlage nordwärts und südwärts) liegendem Magnetstabe, sowie mit der Nadel zugewandtem Nordende und Südende des Stabes (resp. in der zweiten Hauptlage mit rechts und links liegendem Nordende); bei Spitzeneinrichtung und Kreisablesung muß man überdies jede dieser acht Ablenkungen zweimal, nämlich an beiden Nadelspitzen, ablesen. Um auch bei der zeitlichen Anordnung dieser Beobachtungen die Symmetrie möglichst zu wahren, verfährt man am besten folgendermaßen: Man bringt (bei Benutzung der ersten Hauptlage, Figur 35) den Stab auf der einen Seite des Magnetometers, z. B. der Ostseite, in die größere Entfernung $r_1$, kehrt sein Nordende der Nadel zu und beobachtet die Ablenkung, sie sei 1) $\varphi(ON)$, man kehrt jetzt den Stab, ohne ihn zu verschieben, um, so daß sein Südende der Nadel näher liegt, und mißt 2) $\varphi(OS)$; man bringt jetzt den Stab (in weitem Bogen, um die Nadel nicht zu beunruhigen) auf die Westseite, indem man ihn beim Transport sich selbst parallel läßt, so daß er nunmehr wieder den Nordpol der Nadel zukehrt, stellt ihn wieder in der größeren Entfernung $r_1$ auf und beobachtet 3) $\varphi(WN)$; man dreht ihn ohne Verschiebung um sich selbst herum und mißt 4) $\varphi(WS)$; man verschiebt ihn nunmehr, ohne ihn zu drehen, bis in die kleinere Entfernung $r_2$ und mißt 5) $\varphi(ws)$; man kehrt ihn wieder um und mißt 6) $\varphi(wn)$; man schafft ihn in derselben Weise wie vorhin auf die Ostseite, stellt ihn in der kleineren Entfernung $r_2$ auf und mißt 7) $\varphi(os)$; man kehrt ihn endlich wieder um und mißt 8) $\varphi(on)$. Aus den vier, nahezu gleichen Werten von $\varphi$, welche der Entfernung $r_1$ entsprechen, nimmt man nun das Mittel und erhält $\varphi_1$, ebenso liefert das Mittel der vier anderen Werte $\varphi_2$. Entsprechend verfährt man bei Benutzung der zweiten Hauptlage (Figur 36). Um die Beobachtungen zu beschleunigen, was nicht nur der Zeitersparnis halber, sondern auch im Interesse der Genauigkeit, wegen der fortwährend schwankenden Stab-, Erd- und Lokalmagnetismen wünschenswert ist, wartet man bei jeder einzelnen Messung nicht die abgelenkte Ruhelage ab, sondern berechnet sie aus drei oder besser aus einer größeren ungeraden oder geraden Anzahl von Umkehrpunkten in einer der im ersten Bande angegebenen Weisen; auch darf man bei einiger Vorsicht hinsichtlich schädlicher magnetisierender Einflüsse Beruhigungsmaßregeln vorausschicken (4, 274f., unter 1).

1
*N S*
*S N*
2
*N*
8
*n s*
*s n*
7
$\nu$
$\sigma$
6
*s n*
*n s*
5
*S*
3
*S N*
*N S*
4

*Zweite Hauptlage.*

Figur 36.

Die Beobachtung aus zwei verschiedenen Entfernungen ist, wenn man sich mit dem oben angegebenen Einsetzen eines ungefähren Wertes von $A_1$ nicht begnügen will, stets von neuem erforderlich, sobald es sich um die Ermittelung von $M$ für einen neu zu prüfenden Stab handelt. Handelt es sich dagegen um die Ermittelung von $H$, so daß der Stab, dessen Magnetismus $M$ ist, nur ein Hilfsmittel der Beobachtung ist, so kann man die Untersuchung wesentlich vereinfachen, indem man bei jeder neuen Bestimmung von $H$ wieder denselben Stab benutzt; man braucht dann nämlich nur ein einziges Mal mit beiden Entfernungen zu arbeiten, findet hieraus den ein für allemal gültigen Wert

$$A_1 = r_1^2 r_2^2 \frac{r_2^3 \operatorname{tg}\varphi_2 - r_1^3 \operatorname{tg}\varphi_1}{r_1^5 \operatorname{tg}\varphi_1 - r_2^5 \operatorname{tg}\varphi_2} \tag{7}$$

und kommt in allen späteren Fällen, indem man diesen Wert $A_1$ in die Formel (4) einsetzt, mit der Messung der Ablenkung aus einer einzigen Entfernung aus. Dieselbe Vereinfachung darf man sich auch gestatten, wenn es sich um wiederholte Bestimmungen des Magnetismus $M$ eines und desselben Stabes handelt, wobei man allerdings voraussetzt, daß trotz der in den verschiedenen Fällen verschiedenen Größe von $M$ die Verteilung dieses Magnetismus in dem Stabe eine ähnliche sei.

Für Fälle, in denen die GAUSSsche Annäherung nicht genügt, in denen man also noch aus einer dritten Entfernung beobachten müßte, hat neuerdings E. KOHLRAUSCH[1] Formeln aufgestellt, welche die dritte Beobachtung überflüssig machen, die GAUSSschen Formeln aber trotzdem an Genauigkeit nicht unwesentlich übertreffen. Sie lauten, von der Torsion abgesehen (für kleine Nadel):

*Erste Hauptlage:*

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{r_1^2 - r_2^2}{\sqrt{\frac{r_1}{\operatorname{tg}\varphi_1}} - \sqrt{\frac{r_2}{\operatorname{tg}\varphi_2}}}\right]^2$$

*Zweite Hauptlage:*

$$\frac{M}{H} = \left[\frac{r_1^2 - r_2^2}{\operatorname{tg}\varphi_1^{-2/3} - \operatorname{tg}\varphi_2^{-2/3}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

oder, wenn man Polabstände $L$ und $l'$ von Stab und Nadel ein für allemal ermittelt und dann stets nur aus einer Entfernung beobachtet:

*Erste Hauptlage:*

$$L^2 - \tfrac{3}{2} l'^2 = 4\,\frac{\sqrt{r_1^3 \operatorname{tg}\varphi_1} - \sqrt{r_2^3 \operatorname{tg}\varphi_2}}{\sqrt{(\operatorname{tg}\varphi_1)/r_1} - \sqrt{(\operatorname{tg}\varphi_2)/r_2}}$$

$$\frac{M}{H} = \tfrac{1}{2} r^3 \operatorname{tg}\varphi \left[1 - \frac{1}{4}\,\frac{L^2 - \frac{3}{2} l'^2}{r^2}\right]^2 .$$

*Zweite Hauptlage:*

$$L^2 - 4\,l'^2 = 4\,\frac{r_1^2 \operatorname{tg}\varphi_1^{2/3} - r_2^2 \operatorname{tg}\varphi_2^{2/3}}{\operatorname{tg}\varphi_2^{2/3} - \operatorname{tg}\varphi_1^{2/3}}$$

$$\frac{M}{H} = r^3 \operatorname{tg}\varphi \left[1 + \frac{1}{4}\,\frac{L^2 - 4\,l'^2}{r^2}\right]^{\frac{3}{2}} .$$

Der skizzierten, weitaus verbreitetsten „Methode der Tangenten" steht die von LAMONT[2] herrührende und zuweilen angewandte „Methode der Sinus" gegenüber. Hier ist der ablenkende Magnet nicht im magnetischen Osten oder Westen (resp. Norden oder Süden) der Nadel aufgestellt, vielmehr ist die Schiene,

[1] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. 31. S. 609. 1887. — [2] J. LAMONT, Handb. d. Magn. Lpz. 1867. S. 279, ferner J. LAMONT, Handb. d. Erdmagn. Berlin 1849.

auf welche er der Länge nach gelegt wird, um die Drehungsachse der Nadel mit drehbar, und man dreht sie so lange, bis sie, also auch die Längsachse des Stabes (resp. in dem zweiten Falle die darauf senkrechte Linie), senkrecht steht auf derjenigen Ruhelage der Nadel, welche sie unter dem Zusammenwirken des Stab- und des Erdmagnetismus annimmt. Der Stab wirkt alsdann mit voller Kraft, der Erdmagnetismus mit der durch den Sinus des Ablenkungswinkels bestimmten Komponente, dieser Sinus gibt also das Verhältnis beider Kräfte, er tritt mithin an die Stelle des Tangens bei der vorigen Methode. Sonst bleiben die Formeln dieselben, nur braucht, wie man leicht einsieht, die Torsion nicht berücksichtigt zu werden, und die Ermittelung des Korrektionsgliedes $A_1$ läßt sich, wenn sie erforderlich wird, exakter durchführen, weil die Magnete stets senkrecht zueinander bleiben. Natürlich muß bei dieser Methode die von dem Stabe ausgehende Kraft kleiner als die von der Erde ausgehende sein, d. h. man muß, wenn $H$ bestimmt werden soll, einen nicht zu starken Stab benutzen und andererseits, wenn der Magnetismus eines gegebenen Stabes bestimmt werden soll, diesen in genügend großer Entfernung aufstellen.

2. Schwingungsbeobachtungen[1]. Um sie anzustellen, bringt man statt der Nadel resp. des Hilfsmagneten den zu untersuchenden resp. als Vergleichsobjekt für den Erdmagnetismus dienenden Magneten, der bisher ablenkend wirkte, in das Magnetometer oder stellt ihn in anderer Weise so auf, daß man seine Schwingungsdauer $t$ beobachten kann. Das Grundgesetz der magnetischen Fernwirkung ergibt dann (vgl. S. 31), daß das Drehungsmoment resp. die Direktionskraft, welche den Stab in den magnetischen Meridian, wenn er aus diesem abgelenkt ist, zurückführt, gleich dem Produkte von $M$ und $H$ ist. Andererseits ist das Quadrat der Schwingungsdauer hier wie beim Pendel gleich dem Verhältnis des Trägheitsmoments zum Drehungsmoment, wozu noch der Faktor $\pi^2$ kommt; es ergibt sich also, wenn $K$ das Trägheitsmoment des schwingenden Systems ist und die Mitwirkung der Torsion beachtet wird (s. o.):

$$MH = \frac{\pi^2 K}{(1+\vartheta)\,t^2} \quad . \tag{8}$$

Es ist zu bemerken, daß $t$ hier die einfache Zeit zwischen zwei Umkehrpunkten bedeutet (andernfalls müßte im Zähler der Faktor 4 hinzugefügt werden), und daß die Größe $\vartheta$ hier nicht identisch ist mit der bei den Ablenkungsformeln auftretenden, weil das sich tordierende System in beiden Fällen verschiedene Magnete enthält. Über die Ermittelung von $K$ durch Hinzufügung von Hilfskörpern, deren regelmäßige Gestalt ihr Trägheitsmoment um die eigene Achse und folglich auch dasjenige $k$ um die Achse des Magnetometers leicht zu berechnen gestattet, sowie über die dabei gültigen Formeln findet man näheres in Bd. 1; für Zylinder von der Höhe $h$, dem Radius $\varrho$ und der Masse $m$, die man beiderseits symmetrisch so aufsetzt, daß ihre Achse von der Drehachse den Abstand $d$ hat, wird

$$k = 2m\left(d^2 + \tfrac{1}{2}r^2\right) \quad , \tag{9}$$

und es ist alsdann, wenn noch die Schwingungsdauer $t_1$ des so belasteten Systems beobachtet wird:

$$K = k\frac{t^2}{t_1^2 - t^2} \quad . \tag{10}$$

Über die Ermittelung der Schwingungsdauer ist auf Bd. 1 zu verweisen; es möge hinzugefügt werden, daß HANSEMANN[2] eine photographische Methode zu

[1] Aus der Geschichte der wissenschaftlichen Gestaltung der Schwingungsbeobachtungen sind besonders LAMBERT, v. HUMBOLDT, COULOMB, HANSTEEN und schließlich GAUSS zu nennen. —
[2] G. HANSEMANN, Wied. Ann. 28. S. 245. 1886.

ihrer Bestimmung angegeben hat, welche zwar etwas umständliche Einrichtungen erfordert, dafür aber in kürzerer Zeit genaue Werte liefert.

3. Schlußergebnis. Für die Kombination der Ergebnisse beider Beobachtungen zur Gewinnung des Endergebnisses sind noch zwei Bemerkungen von Wichtigkeit, die sich beide auf die Frage der Vergleichbarkeit der beiden Messungsreihen beziehen. Wie nämlich schon bei den Ablenkungsbeobachtungen, so muß auch, und zwar in erhöhtem Maße, während der Dauer der Gesamtversuche jede der beiden Größen $M$ und $H$ als konstant angesehen werden, wenn das Resultat exakt ausfallen soll. In Wahrheit ändert sich aber erstens der Erdmagnetismus selbst im Laufe einiger Stunden um merkliche Beträge; soweit diese Änderungen unregelmäßige sind, würden sie sich der Berücksichtigung entziehen, und es dürfen daher derartige Messungen zu Zeiten außergewöhnlicher magnetischer Erscheinungen nicht ausgeführt werden, ausgenommen wenn die letzteren selbst Gegenstand der Untersuchung sind; regelmäßige Änderungen kann man, da sie ohnehin klein sind, auch ohne ihre Kenntnis dadurch eliminieren, daß man die Schwingungsbeobachtungen vor den Ablenkungsbeobachtungen anstellt und sie nach ihnen wiederholt, wobei man allerdings annehmen muß, daß während dieser Zeit $H$ entweder nur fällt oder nur steigt, was in den frühen Vormittagsstunden und in den späteren Nachmittagsstunden meist der Fall ist. — Der andere Punkt betrifft in gleicher Weise die etwaigen Änderungen von $M$ während der Versuche; Umstände, welche solche Änderungen hervorrufen könnten, z. B. Erschütterungen und Temperaturänderungen, sind also zu vermeiden, letztere eventuell durch Bestimmung der „Temperaturkoeffizienten“ $c$ aus zwei vergleichenden Beobachtungen bei recht verschiedenen Temperaturen zu berücksichtigen, so daß alsdann $M(1 - c\,dT)$ an die Stelle von $M$ tritt. Insbesondere aber bedingt der Umstand einen Fehler, daß sich der Magnetstab mit seiner Längsachse bei den Ablenkungsbeobachtungen (gleichviel ob man erste oder zweite Hauptlage anwendet) in Ost-West-Richtung, bei den Schwingungsbeobachtungen dagegen in Nord-Süd-Richtung befindet, und daß er folglich wegen des im ersten Falle nicht, wohl aber im zweiten Falle mitwirkenden induzierten Magnetismus, des Magnetismus der Lage (s. o.) bei den Schwingungen einen etwas stärkeren Magnetismus besitzt als bei den Ablenkungen, wodurch der Wert von $H$ zu groß wird. Das exakte Mittel, um diesen Fehler zu beseitigen, würde darin bestehen, daß man den Stab bei beiden Beobachtungen in dieselben Verhältnisse bringt, also ihn entweder beide Male dem Magnetismus der Lage aussetzt oder diesen beide Male ausschließt. Jeder von diesen Wegen ist theoretisch möglich, wenn er auch praktisch kaum größere Bedeutung beanspruchen dürfte. Im ersten Falle[1] führt man die Schwingungsbeobachtungen ganz wie bisher aus, die Ablenkungsbeobachtungen dagegen in modifizierter Form; geht man nämlich von der ersten Hauptlage aus, wo der Stab der Länge nach auf der Ost-West-Schiene liegt, bringt man ihn nun in die Querlage, so daß er gar nicht auf die Nadel wirkt und verschiebt man ihn nun in der Richtung seiner eigenen Verlängerung, so erhält man wieder eine Wirkung, die man messen und, da der Magnetismus der Lage mitwirkt, exakt mit den Schwingungsbeobachtungen kombinieren kann; verschiebt man ihn speziell so lange, bis der Cosinus des Winkels, den die von seiner Mitte zur Nadelmitte gezogene Linie mit seiner Richtung, d. h. mit dem magnetischen Meridian bildet, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, so wird, wie sich leicht findet, die von ihm ausgeübte Kraft $\sqrt{2}$ mal so groß wie in der ersten Hauptlage, so daß in den Formeln $M\sqrt{2}$ an die Stelle von $M$ tritt; man wird übrigens gut tun, diese Messung nicht direkt für die Hauptformel, sondern nur zur Ermittelung des Magnetismus der Lage $\mu$ im Verhältnis zum eigentlichen Stab-

[1] J. C. MAXWELL, El. u. Mag. 2. S. 34.

magnetismus zu benutzen und in der Hauptformel dann $M$ durch $M(1+\mu)$ zu ersetzen. Im zweiten Falle führt man nach Joule[1] die Ablenkungsbeobachtungen wie gewöhnlich aus und schließt den Magnetismus auch bei den Schwingungsbeobachtungen aus, indem man unter dem Magnetstab an derselben Drehungsachse und in gleicher Richtung mit ihm einen zweiten Stab von möglichst gleich großem Magnetismus in solcher Entfernung fest mit ihm verbindet, daß die magnetische Induktionswirkung, die er auf den Hauptstab ausübt, diejenige des Erdmagnetismus, also den Magnetismus der Lage gerade aufhebt, eine Entfernung, die man findet, indem man bei entgegengesetzt gerichteten Stäben (der Hilfsstab fest hingelegt gedacht und dem Hauptstab allmählich genähert) die Stelle aufsucht, wo der Hauptstab in die entgegengesetzte Lage umschlägt[2]. — Natürlich kann man die Größe $\mu$ auch anderweitig ermitteln (s. w. u.) und braucht dann weder die Schwingungs- noch die Ablenkungsbeobachtungen zu modifizieren. Bei guten Stahlstäben beträgt, wie bemerkt werden möge, $\mu$ meist weniger als $1\%$, der Fehler in $H$, wie die Endformel zeigt, also weniger als $^1/_2\%$, wenn man $\mu$ ganz unberücksichtigt läßt, und noch weniger, wenn man an $H$ eine Durchschnittskorrektion von etwa $^1/_4\%$ vornimmt; bei weniger harten Stäben ist der Einfluß natürlich bedeutender.

Die allgemeine Endformel wird nunmehr, wenn der Wert von $M/H$ in Gleichung (6) mit $Q$ (Quotient), der Wert von $MH$ in Gleichung (8) mit $P$ (Produkt) bezeichnet wird, für den Stabmagnetismus (ohne den der Lage)

$$M = \sqrt{\frac{PQ}{1+\mu}}\,, \tag{11}$$

für die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus:

$$H = \sqrt{\frac{P}{(1+\mu)Q}}\,. \tag{12}$$

Man könnte schließlich in diese Formeln die Werte von $P$ und $Q$ einsetzen, es hat das aber, da eine wesentliche Vereinfachung nicht entsteht, keinen Zweck, man wird vielmehr jene Werte vorher für sich berechnen.

**Ersetzung der Ablenkungs- durch Schwingungsbeobachtungen.** Statt das Verhältnis $M/H$ durch die Ablenkung zu bestimmen, welche ein Hilfsstab durch den Hauptstab erfährt, kann man es nach einem schon von Poisson[3] ausgegangenen und neuerdings von Pfannstiel[4] und Häbler[5] näher untersuchten Vorschlage auch aus der Dauer der Schwingungen ableiten, welche ein Hilfsstab, in das Magnetometer gebracht oder sonst drehbar aufgestellt, unter gleichzeitiger Einwirkung des Erdmagnetismus und des Hauptstabes ausführt. Den Hauptstab muß man hier, statt in die erste oder zweite Hauptlage, d. h. in die Lagen stärkster ablenkender Wirkung, gerade umgekehrt in diejenigen Lagen bringen, in welchen er gar nicht ablenkend, dafür aber am stärksten richtend, d. h. den Erdmagnetismus unterstützend (oder bei entgegengesetzter Lage schwächend) wirkt; mit anderen Worten, man muß seine Längsrichtung in den magnetischen Meridian bringen, ihn also bei Anwendung der Ost-West-Schiene quer, bei Anwendung der Nord-Süd-Schiene der Länge nach auf diese stellen; natürlich braucht man ebenso wie bei der Gaussschen Methode nur eine der beiden Schienen je nach Wahl zu verwenden. Für größere Genauigkeit muß man auch hier das zweite von der Verteilung des Magnetismus im Stabe herrührende Glied berücksichtigen

[1] J. P. Joule, Proc. Phil. Soc. Manchester, 19. März 1867. — [2] Wegen noch anderer Methoden vgl. u. a. Mascart u. Joubert, El. u. Magn. **2**. S. 569. — [3] Poisson, Connaissance des temps 1828. S. 113. Vgl. auch M. Lamont, Abh. d. Münch. Akad. **5**. S. 74. — [4] A. Pfannstiel, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **25**. S. 271. 1880. — [5] Th. Häbler, Z. Best. d. Int. d. Erdmagn. In.-Diss. Jena 1884.

und zu diesem Zwecke aus zwei verschiedenen Entfernungen $r_1$ und $r_2$ beobachten; da man ferner in jeder Entfernung gerade wie bei GAUSS den Hauptstab zu beiden Seiten des Hilfsstabs und auf jeder Seite in den beiden entgegengesetzten Lagen aufstellt, und endlich auch die Schwingungsdauer des Hilfsstabs unter alleiniger Wirkung des Erdmagnetismus, und zwar behufs Elimination zeitlicher Veränderungen vor und nach den übrigen Beobachtungen ermitteln muß, so besteht dieser Teil der Messung aus 10 Schwingungsbeobachtungen; dazu kommen dann noch die Schwingungsbeobachtung des Hauptstabs zu Anfang und zu Ende der Beobachtungen und die Schwingungsbeobachtung für den belasteten Hauptstab (falls das Trägheitsmoment des schwingenden Systems nicht bekannt ist), so daß sich im ganzen 13 Schwingungsbeobachtungen ergeben. Die Formel für $MH$ ist die frühere, die Formel für $M/H$ lautet

$$\frac{M}{H} = f(1+\vartheta)\, t_0^2 \frac{D r_1^5 - \varDelta r_2^5}{r_1^2 - r_2^2} \quad ,$$

wo der Faktor $f$ gleich $-1$ oder $+\,1/_2$ ist, je nachdem man die ost-westliche oder die nord-südliche Schiene benutzt und wo, wenn $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ die Schwingungsdauern bei der Entfernung $r_1$ und $\tau_1\, \tau_2\, \tau_3\, \tau_4$ diejenigen bei der Entfernung $r_2$ sind,

$$D = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} - \frac{1}{t_4^2}\right) \quad , \qquad \varDelta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} + \frac{1}{\tau_3^2} - \frac{1}{\tau_4^2}\right)$$

ist. Bei einiger Übung wird die Untersuchung nicht mehr Zeit beanspruchen als die GAUSSsche. Andererseits aber hat die Methode der Schwingungen den Vorzug, daß bei beiden Teilen der Untersuchung die Achse des Hauptstabes nord-südlich gerichtet ist, und daß auch die sonstigen Induktionswirkungen, weil sie nahe proportional mit den Hauptwirkungen sind, auf das Endergebnis keinen Einfluß haben; man erhält also auch ohne Kenntnis der Korrektionsgröße $\mu$ (S. 77) das wahre $H$ und dasjenige $M$, welches dem nord-südlich gerichteten Magnetstabe entspricht; um das $M$ des ost-westlich liegenden Stabes zu finden, muß man freilich auch hier $\mu$ kennen.

**Ersetzung der Schwingungs- durch Ablenkungsbeobachtungen. Torsionsmagnetometer.** Statt das Produkt $MH$ durch Schwingungen zu ermitteln, kann man es auch aus einer Ablenkung ableiten. Gibt man nämlich dem Faden des Magnetometers, das man in diesem Falle Torsionsmagnetometer (oder magnetische Torsionswage) nennen hann, mit Hilfe des Torsionskreises eine Torsion $\alpha$, und folgt der Magnet dieser Drehung um den Winkel $\varphi$, so ist, wenn $\tau$ das Torsionsmoment für den Torsionswinkel 1 ist, das Torsionsmoment $\tau(\alpha - \varphi)$, das magnetische Drehungsmoment $MH \sin\varphi$, also

$$MH = \tau \frac{\alpha - \varphi}{\sin\varphi} \quad . \tag{13}$$

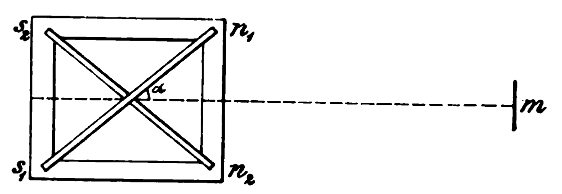
Zweckmäßig ist es, die Torsion so lange (d. h. auf einige ganze Umdrehungen) zu steigern, bis der Magnet fast senkrecht gegen den Meridian steht; setzt man alsdann $\pi/2 - \varphi = \varphi'$, so kann man $\varphi'$ durch Spiegelablesung sehr genau ermitteln und hat alsdann:

$$MH = \frac{\tau\left(\alpha + \varphi' - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \frac{\varphi'^2}{2}} \quad . \tag{13a}$$

Die Größe $\tau$ findet sich aus dem Trägheitsmoment $K$ und der Dauer $t$ einer einfachen Schwingung

$$\tau = \frac{\pi^2 K}{t^2} \quad .$$

Um den Fehler zu vermeiden, der dadurch entsteht, daß der Faden während der Untersuchung eine kleine permanente Torsion erhält, muß man am Schlusse die Stellung des Torsionskreises kontrollieren und für $\alpha$ den betreffenden mittleren Wert setzen.

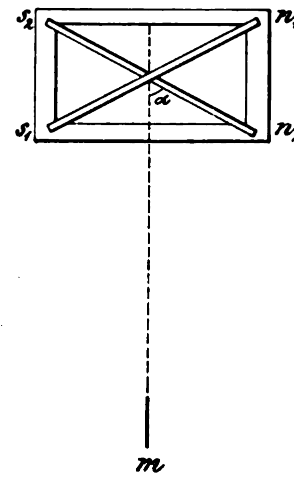



Erste Hauptlage.

Figur 37.

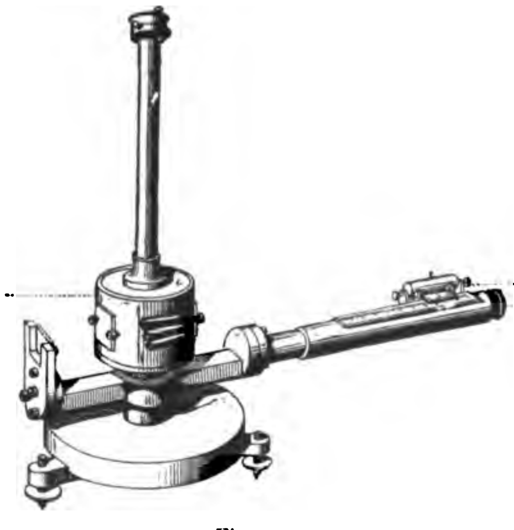
Ein Sinusmagnetometer, das zugleich auch zur Bestimmung von Temperatur- und Induktionskoeffizienten dienen kann, hat CHISTONI[1] angegeben.

**Kompensationsmethode.** Bei den GAUSSschen Ablenkungsbeobachtungen ist die Anwendung zweier verschiedener Entfernungen erforderlich, um das zweite Glied der die Wirkung des Magneten darstellenden Reihe eliminieren zu können. W. WEBER hat nun den sinnreichen Gedanken gehabt, eine Einrichtung zu treffen, bei welcher dieses Glied überhaupt fortfällt, d. h. auch schon bei der Wirkung aus einer einzigen Entfernung. Es ist dies deshalb erreichbar, weil jenes Glied bei den beiden GAUSSschen Hauptlagen entgegengesetzte Zeichen besitzt (s. o. S. 73); kombiniert man also zwei oder, der Symmetrie halber, vier Magnetstäbe von geeigneter Größe und Lage, so wird man die Wirkung durch das Hauptglied allein ausdrücken dürfen. Demgemäß besteht nach F. KOHLRAUSCH[2] das „kompensierte Magnetometer", das allerdings nur zur Bestimmung von $H$ (nicht zu der von $M$) brauchbar ist, aus einem gewöhnlichen Magnetometer mit kurzer Nadel und einem daran zu befestigenden Holzrahmen mit 4 Magneten, von denen die beiden kleineren, von den doppelten Dimensionen der Nadel, östlich und westlich, die beiden anderen, in allen Dimensionen um die Hälfte größeren, nördlich und südlich zu liegen kommen, und zwar derart, daß die Entfernungen $R$ der Mitten der größeren Stäbe von der Nadelmitte das 1,204fache der betreffenden Größe $r$ für die kleineren Stäbe ausmacht, und daß die Pole der kleineren Magnete entgegengesetzt gerichtet sind wie die der größeren. Beobachtet man in den beiden Lagen, welche man erhält, wenn man den Rahmen in seiner Ebene um 180° dreht und nimmt man aus beiden Ablenkungen das Mittel, so erhält man einen von den Asymmetrien der Lage unabhängigen Wert; um auch




Zweite Hauptlage.

Figur 38.



Figur 39.

[1] C. CHISTONI, vgl. Beibl. 1894. S. 465. — [2] F. KOHLRAUSCH, Gött. Nachr. 1871, S. 50; Pogg. Ann. **142**. S. 547. — Vgl. auch die Figur weiter unten.

eine etwaige Asymmetrie der Magnetstäbe zu eliminieren, kehrt man sie, jeden für sich, um und beobachtet wieder. Außer der so ermittelten Ablenkung $\varphi$ muß man nun noch die Schwingungsdauer $t$ des Rahmens mit den Magneten in ihrer obigen Lage, die Schwingungsdauer $\tau$ desselben Rahmens, nachdem die kleineren Magnete umgedreht worden sind, das Torsionsverhältnis $\vartheta$ im letzteren Falle und das Trägheitsmoment $K$ bestimmen und hat dann

$$(14) \qquad H = \frac{\pi}{t\tau}\sqrt{\frac{K}{\operatorname{tg}\varphi}\left[\frac{t^2-\tau^2}{r^3}+\frac{t^2(1-2\vartheta)+\tau^2}{2R^3}\right]} \ .$$

Über die Genauigkeit des in Rede stehenden Apparates gehen die Ansichten einigermaßen auseinander; doch sind die Einwände, die z. B. HELLMANN[1] erhoben hat, von STROUHAL[2] in bindender Weise zurückgewiesen worden.

Eine andere Art der Kompensation hat TÖPLER[3] vorgeschlagen; sie besteht in der schon im vorigen Artikel genannten kreuzförmigen Verbindung zweier Magnetstäbe (Figur 37 u. 38). Der Winkel $2\alpha$, welchen die beiden Stäbe miteinander bilden müssen, damit in der Richtung der Mittellinie dieses Winkels Kompensation des zweiten Gliedes der Fernwirkung eintrete, beträgt in der der ersten Hauptlage entsprechenden Lage $78^0\ 27'\ 48''$, in der zweiten $126^0\ 52'\ 12''$, in jener Lage müssen gleichnamige, in dieser ungleichnamige Pole der Nadel zugekehrt sein. Im übrigen sei auf Figur 37 und 38 verwiesen und nur noch bemerkt, daß die Anwendung derartiger Kreuzmagnete auch noch den weiteren Vorteil gewährt, daß der Magnetismus der Lage ohne Einfluß bleibt.

**Magnetometer mit konstanten Ablenkungswinkeln.** Statt bei der GAUSSschen Methode die Ablenkungswinkel zu bestimmen, welche bei willkürlich gewählten Entfernungen des ablenkenden Magneten stattfinden, kann man dem Vorschlage von EDELMANN[4] und zwar unter Umständen mit Vorteil, die Aufgabe umkehren und diejenigen beiden Entfernungen messen, durch welche zwei willkürliche aber ein für allemal fest gewählte Ablenkungswinkel erzeugt werden; die Winkelmessung, also ev. die Skalenablesung, fällt dann ganz fort, man braucht eben nur zu konstatieren, daß die Ablenkungen die beiden gewählten Werte haben. Zu diesem Zwecke enthält das Instrument (Figur 39) außer dem sich mitdrehenden Spiegel noch drei feste, nur auf der unteren Hälfte belegte, welche die beiden gewählten Winkel miteinander einschließen und in leicht ersichtlicher Weise erkennen lassen, wann der drehbare Spiegel mit einem von ihnen parallel ist.

**Störungsfreie Magnetometer.** H. DU BOIS[5] hat gezeigt, wie man Magnetometer einrichten muß, um in Räumen, wo unvermeidliche magnetische Störungen vorhanden sind, noch leidlich genaue Werte zu erhalten. Am besten eignet sich hierfür ein über dem Versuchsmagneten und senkrecht zu ihm hängendes astatisches Paar; da die beiden Teile desselben nie genau gleich sein werden, muß man den etwas stärkeren mit einem STEFANschen Schutzring umgeben und das Ganze an eine Stelle bringen, wo die störende Rückwirkung des Versuchsmagneten sich am wenigsten geltend macht; diese Stellen werden von DU BOIS für stab-, kugel- und ovoidförmige Versuchskörper bestimmt.

Ein wirklich ausgeführtes Instrument, das als störungsfrei unter bestimmten Umständen zu bezeichnen ist, ist von KOHLRAUSCH und HOLBORN[6] ausgearbeitet worden. Auf die detaillierte Beschreibung des Instrumentes kann hier nicht eingegangen werden; es sei nur die Hauptsache erwähnt: das astatische Nadelpaar, dessen gegenseitiger Abstand so gewählt ist, daß der Zweck in der möglichst

[1] G. HELLMANN, Rep. d. Phys. **16**. S. 180. 1880. — [2] V. STROUHAL, Rep. d. Phys. **17**. S. 345. 1881. — [3] A. TÖPLER, Berl. Ber. 1883. S. 925. — [4] TH. EDELMANN, Neuere Apparate usw. Stuttgart 1882. Bd. **1**. S. 8. — [5] H. DU BOIS, Drude Ann. **9**. 938. 1902. — [6] F. KOHLRAUSCH und L. HOLBORN, Drude Ann. **10**. 287. 1903. — **13**. 1054. 1904. — H. DU BOIS, Drude Ann. **11**. 609. 1903. — Vgl. auch die Arbeit von F. HENNING, Drude Ann. **15**. 815. 1904.

vollkommenen Weise erreicht ist; hierzu ist nötig, daß der Abstand etwa 5/4 derjenigen Entfernung betrage, aus der die zu messenden Wirkungen stammen. Freilich ist das ein unbequemer Abstand, der auch andere Übelstände mit sich bringt, und es hat daher H. DU BOIS die Meinung ausgesprochen, daß sich das Instrument an noch ungünstigeren Stellen wie die Reichsanstalt doch nicht genügend bewähren würde. Andererseits haben KOHLRAUSCH und HOLBORN weiter an der Verbesserung des Apparates gearbeitet und so ein tragbares störungsfreies Magnetometer erhalten; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

## B) Bifilarmethoden.

**Bifilar-Magnetometer** von GAUSS. Statt an einem Faden kann man schwere Körper überhaupt und insbesondere Magnete auch an zwei parallelen Fäden aufhängen[1]; es wirken dann von mechanischen Kräften die Schwere, da der Körper bei jeder Drehung gehoben oder gesenkt wird, und außerdem die Torsions- und Biegungselastizität der Drähte; da letztere meist klein gegen die erste sind, wird sich ein unmagnetischer Körper mit seiner Längsrichtung nahe in die Ebene der Aufhängefäden einstellen. Ist der Körper dagegen ein Magnetstab, und weicht die Ebene der Fäden vom magnetischen Meridian ab, so wird die Gleichgewichtslage von der natürlichen abweichen, und dasselbe wird eintreten, wenn außer dem Erdmagnetismus noch ein fester Magnet auf den aufgehängten einwirkt. Am einfachsten ist es natürlich, die Aufhängungsebene magnetisch ostwestlich zu richten, es ist dann, wenn die Ablenkung $\alpha$ erfolgt und $D$ die mechanische Direktionskraft ist, $MH\cos\alpha = D\sin\alpha$, also

$$MH = D\,\mathrm{tang}\,\alpha \quad . \tag{15}$$

Auch hier muß man die Beobachtung von $\alpha$ wiederholen, nachdem man den Stab in umgekehrter Lage in das Schiffchen der Bifilar-Aufhängung gelegt hat, und aus beiden Werten das Mittel nehmen. Diese Methode entspricht der Torsionsmethode bei der unifilaren Aufhängung (S. 79); wie dort könnte man auch hier statt dessen die Schwingungs-Methode zur Ermittelung von $MH$ anwenden, wobei man dann natürlich die Aufhängungsebene in den magnetischen Meridian bringen müßte; während aber bei der unifilaren Aufhängung die Schwingungsmethode weitaus die gebräuchlichste ist, findet sie bei der bifilaren kaum Anwendung, vermutlich weil $D$ einen größeren Einfluß auf die Schwingungsdauer hat, als $MH$, die Bestimmung des letzteren also nicht sonderlich genau ausfallen wird. — Die Größe $D$ setzt sich nach der exakten Berechnung von F. KOHLRAUSCH[2] aus den drei der Schwere, Biegungs- und Torsionselastizität entsprechenden Gliedern zusammen, von denen jedoch das zweite mit dem ersten vereinigt werden kann, da es dieselbe Wirkung hat, als ob die mittlere Länge der Aufhängefäden $l$ um den Betrag $\varrho^2\sqrt{2\pi E/m}$ verringert würde, wo $\varrho$ der Radius, $E$ der Elastizitätsmodul der Fäden und $m$ die von den Fäden getragene Masse, einschließlich der halben Masse der Fäden selbst, bedeutet. Ist noch $e$ der oben und unten gleich angenommene Abstand der beiden Fäden und $g$ die Schwere, so ist

$$D = g\,m\,\frac{e^2}{4\left(l - \varrho^2\sqrt{2\pi E/m}\right)} + \frac{2\pi}{5}\,\frac{\varrho^4 E g}{l - \varrho^2\sqrt{2\pi E/m}} \quad . \tag{15a}$$

Von den hierin vorkommenden Größen sind einige leicht genau meßbar, bei anderen genügt es, da sie nur die Rolle von Korrektionsgrößen spielen, ungefähre Werte zu benutzen. Von entscheidender Wichtigkeit ist nur die Messung

---

[1] Die bifilare Aufhängung ist zu wissenschaftlichen Zwecken überhaupt zuerst von SNOW HARRIS (Rep. Brit. Ass. 1832. S. 563), zu magnetischen Messungen von GAUSS (Res. d. magn. Ver. 1837. S. 1) benutzt worden. — [2] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **17**. S. 737. 1882.

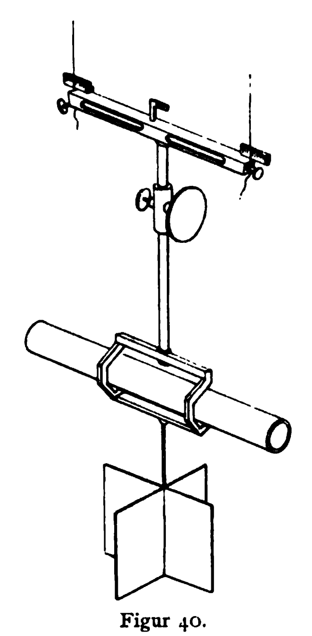
von $e$, welche, zumal da der Abstand der Fäden meist klein genommen wird, mit unvermeidlichen Fehlern behaftet zu sein scheint. Dieser Umstand hat viele Physiker abgehalten, die bifilare Methode zu benutzen oder zu empfehlen; indessen hat F. KOHLRAUSCH gezeigt, daß, besonders wenn man $e$ so groß wählt, wie die Umstände es zulassen, jenes Bedenken unbegründet ist, und seitdem, sowie durch die Bemühungen von WILD (s. w. u.) u. a., ist die bifilare Aufhängung wieder in verdiente Aufnahme gekommen.

Die Bestimmung von $M/H$, welche noch übrig bleibt, kann ganz auf die frühere Weise geschehen; benutzt man dabei eine kurze Magnetnadel, stellt den vorhin bifilar aufgehängten Magneten in großer Entfernung in einer Hauptlage, z. B. der zweiten, auf und nennt $L$ den Polabstand im Magneten, wofür es wieder genügt, $^5/_6$ seiner Länge zu setzen, $l$ die entsprechende Größe für die Nadel[1], so kann man sich mit der Ablenkung $\varphi$ aus einer einzigen Entfernung $r$ begnügen und erhält (vgl. Formeln 3 und 4)

$$\frac{M}{H} = (1 + \vartheta) \frac{r^3}{1 - \frac{3}{8}\frac{L^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{l^2}{r^2}} \operatorname{tang} \varphi \quad , \tag{16}$$

wo man das Glied mit $l$ häufig wird vernachlässigen können. Hat man eine genügend große Entfernung $r$ nicht zur Verfügung, so muß man für jeden Stab, dessen $M$ ermittelt werden soll, aus zwei Entfernungen beobachten, braucht dagegen, wenn es sich um die Bestimmung von $H$ handelt und stets derselbe Stab benutzt wird, nur ein für allemal nach Gleichung (7) die Korrektion zu bestimmen. Die Multiplikation der Gleichungen (15) und (16) oder der an die Stelle der letzteren tretenden liefert schließlich $M$, ihre Division $H$.

In Figur 40 ist der Hauptteil des KOHLRAUSCHschen Magnetometers[2], nämlich der Magnet mit Suspension und mechanischem Dämpfer dargestellt.



Figur 40.

**Gleichzeitige Ausführung beider Messungen.** Die skizzierte Methode leidet an dem Übelstande, daß die beiden Messungen, deren Kombination das Resultat liefert, nacheinander ausgeführt werden, daß in der Zwischenzeit $M$ und $H$ sich ändern (die Verschiedenheit der Lage ist bei der bifilaren Methode wenigstens großenteils vermieden) und daß die betreffenden Korrektionen nur mühsam ermittelt werden können. Dies ändert sich mit einem Schlage, wenn man beide Messungen gleichzeitig ausführt, d. h. den Magneten, während er bifilar schwingt, auf die Nadel eines nördlich oder südlich aufgestellten Magnetometers ablenkend wirken läßt. Freilich kommt dann sowohl für die Einstellung des Magneten, als auch für die der Nadel noch eine weitere, wenn auch meist kleine Kraft in Betracht, nämlich für den Stab die Einwirkung der Nadel und für die Nadel die wegen der abgelenkten Stellung des Stabes gegen früher veränderte Einwirkung desselben. Nach den Formeln des vorigen Artikels kann man aber diese Ausdrücke leicht bilden, wobei man die Schrägstellung der Nadel in ihrem Einfluß auf die Rückwirkung auf den Magneten meist wird vernachlässigen dürfen. Es genüge, das Endergebnis anzuführen. Bedeutet $\varkappa$ den auf irgend eine Weise ohne

[1] Besteht die Nadel in einem kreisförmigen Spiegel, so ist $l$ etwa $^2/_3$ des Durchmessers. — [2] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. 17. S. 765. 1882.

besondere Genauigkeit zu bestimmenden Magnetismus der Lage im Verhältnis zum Erdmagnetismus, so wird:

$$MH = \frac{D \operatorname{tang} \alpha}{1 + 2\frac{\varkappa}{r^3}} , \tag{17}$$

$$\frac{M}{H} = \frac{(1+\vartheta) r^3 \operatorname{tang} \varphi}{\left(1 - \frac{3}{8}\frac{L^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{l^2}{r^2}\right)(\cos\alpha - 2\sin\alpha \operatorname{tang}\varphi)} , \tag{18}$$

woraus sich dann sofort die Formeln für $M$ und $H$ selbst ergeben; diejenige für $H$ nimmt nach einiger Vereinfachung die Form an:

$$H^2 = \frac{D}{r^3(1+\vartheta)}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{L^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{l^2}{r^2} - 2\frac{\varkappa}{r^3}\right)\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\varphi}(1 - 2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\varphi) . \tag{19}$$

**Bifilar-Methode** von WILD[1]. In anderer Weise hat WILD, nachdem er ebenfalls eine vervollständigte Theorie der Bifilarsuspension gegeben hatte, diese Aufhängungsweise experimentell verwertet, wobei sich allerdings, da mehrere verschiedene Magnetstäbe benutzt werden, nur der Wert von $H$ ergibt; das Eigentümliche der Methode liegt darin, daß sie nur eines einzigen Apparates statt der zwei bei GAUSS und KOHLRAUSCH (Bifilar- und Unifilar-Magnetometer) bedarf; vergleichbar ist sie der oben erwähnten Torsionsmethode. Von den beiden etwas verschiedenen, 1880 resp. 1886 von WILD beschriebenen Verfahrungsarten sei hier die letztere als die vermutlich auch vom Verfasser vorgezogene gewählt. Durch Vergleichung der Lagen, welche die Bifilarebene annimmt, wenn einmal ein Magnet, das andere Mal ein unmagnetischer Stab eingelegt wird, findet man die Meridianrichtung und kann nun die Bifilarebene in diese bringen. Man stellt nun durch Drehung um 90° (mit Hilfe eines Torsionskreises) das oberste Stück der Bifilarebene senkrecht gegen den Meridian, wobei ihr unterstes Stück samt dem Magneten wegen der Richtkraft des letzteren davon abweichen wird; man dreht endlich oben noch weiter um einen Winkel $\alpha_1$, bis der Magnet selbst gerade senkrecht zum Meridian steht. Führt man diese Bestimmung bei zwei gleich schweren Stäben von verschiedenen magnetischen Momenten $M_1$ und $M_2$ aus, so erhält man bei der früheren Bedeutung von $D$ die Gleichungen

$$M_1 H = D \sin\alpha_1 , \qquad M_2 H = D \sin\alpha_2 .$$

Nun nehme man einen dritten Stab von wenigstens annähernd gleichem Gewicht, so daß die Direktionskraft $D'$ nicht erheblich von $D$ abweicht, und ermittele die drei Winkel $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$, von denen $\alpha_3$ genau den obigen Winkeln $\alpha_1$ und $\alpha_2$ entspricht, $\alpha_4$ und $\alpha_5$ dagegen für den Fall gelten, wenn die beiden ersten Magnetstäbe auf eine im magnetischen Meridian liegende Schiene der Länge nach, der eine nördlich, der andere südlich vom Magnetometer, in beiderseits gleicher Entfernung $r$ aufgelegt werden, und zwar $\alpha_4$, wenn ihre Nordpole, $\alpha_5$, wenn ihre Südpole nach Norden zeigen. Es gelten dann, wenn $M_3$ der Magnetismus des dritten, bei diesem Versuche hängenden Stabes ist, die drei Gleichungen

$$M_3 H = D' \sin\alpha_3 ,$$

$$M_3 H + 2M_3\frac{M_1 + M_2}{r^3} = D'\sin\alpha_4 , \qquad M_3 H - 2M_3\frac{M_1 + M_2}{r^3} = D'\sin\alpha_5 .$$

Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen voneinander und dividiert man dann die vorhergehende hinein, so erhält man das Verhältnis von $H$ und

[1] H. WILD, Bull. Acad. St. Pétersbourg 1880. S. 174; Rep. f. Meteor. Bd. **8**; Mém. Acad. St. Pétersbourg. Bd. **34**. 1886.

$(M_1 + M_2)$; addiert man andererseits die beiden ersten Gleichungen, so erhält man das Produkt derselben beiden Größen; durch Multiplikation findet man also schließlich:

$$H^2 = \frac{4D}{r^3} \frac{\sin\alpha_3(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}{\sin\alpha_4 - \sin\alpha_5} \quad . \tag{20}$$

Hierzu kommen nun noch Korrektionen wegen des Magnetismus der Lage, wegen der Temperatur, wegen der Verteilung des Magnetismus in den Stäben usw., auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.

## C) Galvanische Methoden.

**Galvanische Methode für $H$.** Handelt es sich lediglich um die Bestimmung von $H$ (nicht von $M$), so kann man das GAUSSsche Magnetometer auch durch ein Galvanometer ersetzen, wobei dann genau die umgekehrten Formeln Anwendung finden, wie bei der Strommessung. Derartige Vorschläge haben TANAKADATÉ[1] u. a. gemacht. Insbesondere verdient die Methode R. A. LEHFELDTS[2] Erwähnung.

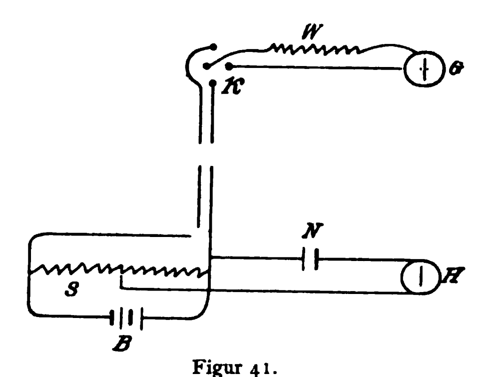
Da man nämlich gegenwärtig die Stromstärke mit Widerstandskasten und Normalelement sehr genau bestimmen kann, kann man $H$ ermitteln, indem man einfach einen Strom durch ein Galvanometer schickt; am besten wendet man dabei die Torsions- bzw. Sinusmethode an. Es wird dann, wenn $u$ der Ablenkungswinkel aus dem Meridian und $c$ die Galvanometerkonstante ist:

$$H = \frac{\sin u}{c\,i} \quad ,$$

woran noch die Korrektionen anzubringen sind. Beobachtet man in zwei Lagen des Galvanometers, die auf beiden Seiten des Meridians und senkrecht zueinander sind, und nennt man das Torsionsverhältnis $\tau$, den Torsionswinkel der Aufhängung $\varphi$, so erhält man schließlich:

$$H^2 = c^2(i_1^2 + i_2^2) + 2\tau^2\varphi^2 + 2c\tau\varphi(i_1 - i_2) \quad ;$$

hierin ist das erste Glied das Hauptglied, die beiden anderen sind die Korrektionsglieder. Als Schema der Ausführung des Verfahrens diene die Figur 41; in ihr bedeuten: $B$ die Akkumulatorenbatterie, $N$ das Normalelement, $G$ das Galvanometer, $H$ ein Hilfsgalvanometer zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft, $K$ ein vierteiliger Schlüssel, $W$ ein variabler Widerstand, $S$ eine Potentiometer-Drahtbrücke (vgl. 4, 199).



Figur 41.

**Methode für $M$.** Umgekehrt kann man, wie SIMON und MADELUNG[3] gezeigt haben, mittels des Amperemeters auch $M$ mit Vorteil messen. Es gilt nämlich der folgende Satz (vgl. Art. Elektromagnetismus): Ein kurzer Stabmagnet vom Momente $M$ läßt sich in seiner magnetischen Wirkung auf einen Punkt $P$, der in der Verlängerung der Stabachse vom Stabmittelpunkt um $u$ absteht, ersetzen durch einen Kreisstrom vom Radius $R$, mit der Achse in der Stabachse, im Abstande $a$ von $P$ und von der Stromstärke $i$:

[1] TANAKADATÉ, Phil. Soc. Glasgow 1889. — [2] R. A. LEHFELDT, Phil. Mag. (5) 33. S. 78. 1892. — [3] H. Th. SIMON und E. MADELUNG, Phys. Z. 1904. 410.

$$a = \sqrt{u^2 - R^2}\ , \qquad i = \frac{M}{\pi R^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{u}\right)\right]\ .$$

($\lambda$ Polabstand). Besonders einfach wird diese Beziehung, wenn man $u$ und $R$ gleich groß wählt. Man kann sie dann benutzen, um mit Hilfe des Amperemeters magnetische Momente nach folgendem Prinzip zu messen: In die Nadelebene eines in erster Hauptlage benutzten Magnetometers legt man einen Stromkreis vom Radius $R$ (Kompensationskreis), stellt den Magneten in erster Hauptlage in der Entfernung $R$ von der Nadel auf und kompensiert den Ausschlag durch einen Strom $i$; dann hat man

$$M = \frac{\pi R^2 i}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{R}\right)^2}\ .$$

Die Methode ist bequem und vom Erdmagnetismus sowie von Störungen bei geeigneter Anordnung nur sehr wenig abhängig; eventuell kann man leicht eine Stromastasierung anbringen.

**Bifilargalvanische Methode.** Von besonderer Bedeutung ist die Ersetzung des Bifilarmagnetometers durch das Bifilargalvanometer geworden, d. h. des Stabes durch eine bifilarhängende Spule, deren Ebene sich bei entsprechender Lage der Bifilar-Ebene nordsüdlich einstellt, aus dieser Lage jedoch abgelenkt wird, sobald ein Strom hindurch geschickt wird. Dieser Gedanke rührt von W. WEBER her, er ist dann mehrfach (z. B. in Breslau durch KIRCHHOFF) verwirklicht[1] und von F. KOHLRAUSCH ausführlich beschrieben worden. Der Vorteil gegenüber der bifilarmagnetischen Methode besteht im wesentlichen darin, daß man die Verteilung der elektrischen Ströme in der Spule und damit ihre magnetische Wirkung (s. Art. Elektromagnetismus) kennt und somit nicht nötig hat, aus zwei verschiedenen Entfernungen zu beobachten.

**Neuere Form der Methode.** Merkwürdigerweise ist von den beiden Arten, auf welche die Methode nutzbar gemacht worden ist, nicht die ältere, sondern die weit später erst von F. KOHLRAUSCH[2] angegebene diejenige, welche der bifilarmagnetischen Methode desselben Physikers genau entspricht, bei welcher also gleichzeitig die Ablenkung der Drahtspule und die durch sie erzeugte Ablenkung einer Magnetometer-Nadel gemessen wird. Ihr großer Vorzug, gegenüber der älteren Art, die Methode zu verwenden, beruht darauf, daß eine schwer zu messende Größe, nämlich die Windungsfläche der Drahtspule (Summe aller von den einzelnen Windungen eingeschlossenen Flächen) aus dem Resultate herausfällt. Für den Ablenkungswinkel $\alpha$ gilt nämlich wieder die Formel (17), nur daß hier das Korrektionsglied im Nenner wegfällt und $M$ das magnetische Moment der stromdurchflossenen Spule, d. h. das Produkt aus Windungsfläche $f$ und Stromstärke $i$ bedeutet; hier kommt also das Produkt von $fi$ und $H$ vor; andererseits liefert die Ablenkung $\varphi$ der Magnetnadel wiederum das Verhältnis dieser beiden Größen; der Endwert von $H$ enthält also $f$ (und ebenso $i$) gar nicht. Die genauere Berechnung liefert bei Rücksicht auf die Schrägstellung der beiden drehbaren Körper und auf die für die Fernwirkung einer Drahtspule geltenden Gesetze die folgenden Formeln, in denen $r$ die Entfernung der Mittelpunkte von Drahtspule und Nadel, $\varrho$ den mittleren Radius der Drahtspule, $\lambda$ die wirkliche Länge der Nadel und $\varkappa$ ihren Magnetismus im Verhältnis zum Erdmagnetismus bedeutet:

---

[1] Das Bifilar-Galvanometer im allgemeinen stammt aus dem Jahre 1846 (W. WEBER, Sächs. Ber. **186**. S. 2411); die Breslauer Apparate von G. KIRCHHOFF sind etwa 1850 konstruiert. — [2] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **17**. S. 737. 1882.

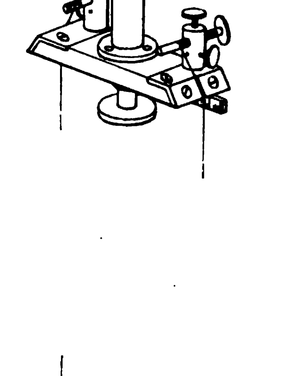
$$H \cdot fi = \frac{D \sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{\varkappa}{r^3}(2\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)}$$

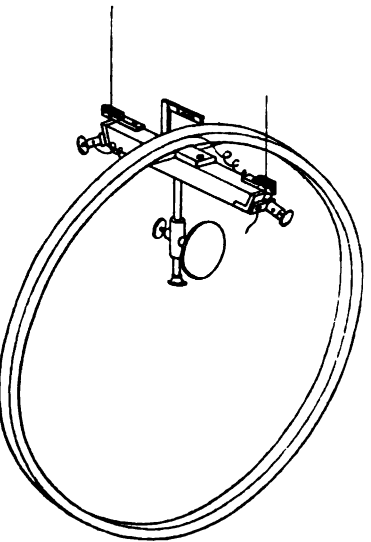
$$\frac{H}{fi} = \frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi}{r(r^2 - \varrho^2)\,\mathrm{tang}\,\varphi\,(1+\vartheta)}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{3}{64}\frac{\varrho^4}{r^4}\right)\left(1 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right)$$

(der zweite der drei Faktoren ist die Spulenkonstante, vgl. Art. Strommessung), und endlich mit erlaubten Vernachlässigungen

$$(21)\quad H^2 = \frac{D}{r(r^2-\varrho^2)(1+\vartheta)}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\varrho^2}{r^2}+\frac{3}{64}\frac{\varrho^4}{r^4}+\frac{\lambda^2}{r^2}-2\frac{\varkappa}{r^3}\right)\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tang}\,\varphi}(1-2\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi)\,.$$

Zur Ausführung der Versuche ist noch folgendes zu bemerken. Die Spule muß mehrere hundert Windungen erhalten und, um trotzdem nicht zu schwer zu sein, aus feinem besponnenem Drahte bestehen; mit den Fäden wird sie am besten durch einen Querstab verbunden, an dessen Enden die beiden Fäden münden, so daß man mit Hilfe einer an dem Querstabe angebrachten Teilung zugleich die — möglichst groß zu wählende — Entfernung der beiden Fäden voneinander messen kann (am besten mit mikroskopischer Ablesung) (Figur 42). Die Bifilarebene ist in diesem Falle ostwestlich zu richten, so daß die Spulenebene nordsüdlich wird. Die Fäden sind feine Metalldrähte, sie dienen zugleich als Zuleitungsdrähte für den Strom, den man so wählt, daß ein passender Ausschlag resultiert, und den man mit Hilfe eines Kommutators zum Zwecke der Mittelwertsbildung in beiden Richtungen (jedoch stets nur auf kurze Zeit) durch die Spule schicken kann. Das Magnetometer wird in eine der beiden Gaussschen Hauptlagen gebracht; bequemer ist die zweite Hauptlage (nordsüdlich), auf welche sich auch die obigen Formeln beziehen. Beide Apparate tragen drehbare Spiegel, denen man Fernrohre und Skalen oder, was noch besser ist, eine gemeinsame Skale östlich oder westlich (wobei man sich nach der Orientierung der Spiegel zu richten hat) gegenüberstellt, so daß die Skalenabstände $A$ und $A'$ von den beiden Spiegeln nahezu gleich sind. Wählt man dann noch den Abstand $r$ der beiden Apparate so, daß auch ihre Ausschläge nahezu gleich groß werden, so kann man sich die Ausrechnung wesentlich vereinfachen, indem man den trigonometrischen Faktor von $H^2$ durch





Figur 42.

$$(22)\qquad \frac{n}{n'}\frac{A'}{A}\left(1 - \frac{5}{8}\frac{n^2}{A^2}\right)$$

ersetzt, wo $n$ und $n'$ die Skalenablenkungen sind. Was endlich die Größe $D$, die statische Direktionskraft der Spule nebst Zubehör betrifft, so pflegte man diese früher aus Schwingungszeit und Trägheitsmoment abzuleiten; die Wahl

eines großen Abstandes zwischen den beiden Aufhängefäden ermöglicht es jetzt, diese Entfernung genau genug zu messen, um $D$ aus der Formel (15a) direkt berechnen zu können.

**Ältere Form der Methode.** Bei der älteren Methode, die ebenfalls F. KOHLRAUSCH[1] ausführlich beschrieben hat, verwendet man neben dem Bifilar-Galvanometer eine nördlich oder südlich aufgestellte Tangentenbussole und schickt durch beide einen und denselben Strom $i$. Hat die Tangentenbussole den mittleren Radius $a$ und die Windungszahl $n$, sowie das Torsionsverhältnis $\vartheta$, so lautet die Endformel

$$H^2 = \frac{D}{f} \frac{2\pi n}{a(1+\vartheta)} \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi} \tag{23}$$

Für rohe Messungen genügt es, die Windungsfläche der Spule aus dem mittleren Radius zu berechnen, d. h. wenn $n'$ die Zahl der Windungen ist, $f = 2\pi\varrho n'$ zu setzen, wo jedoch derjenige Mittelwert $\varrho$ zu nehmen ist, welcher den Mittelwert der Kreisfläche liefert. Für genauere Messungen muß man entweder eine wirkliche Ausmessung vornehmen, oder, da dies nur vor Fertigstellung oder durch Zerlegung der Spule geschehen kann, das galvanische Verfahren anwenden, d. h. $f$ dadurch bestimmen, daß man die Wirkung der fest aufgestellten Spule auf eine Magnetnadel mit derjenigen eines einfachen, seiner Fläche nach leicht auszumessenden Stromkreises vergleicht, in welcher Hinsicht namentlich auf F. KOHLRAUSCH und A. HEYDWEILLER zu verweisen ist[2].

Die WEBERsche Methode hat den Übelstand, daß zwei Beobachter nötig sind, um während der kurzen Zeit, während deren man den Strom durch die Apparate schicken darf, die beiden Ausschläge zu messen. Eine von W. THOMSON vorgeschlagene, von MAXWELL[3] angeführte Modifikation des Verfahrens hat den Zweck, einen einzigen Beobachter in den Stand zu setzen, beide Ablesungen zu machen. Man hängt nämlich die Nadel, welche als Bussolennadel dienen soll, in der Mitte der Spule auf und benutzt diese zugleich als Bussolenwindung, so daß bei Stromdurchgang die Spule bei einem Ablenkungswinkel $\alpha$ nach der einen Seite, die Nadel bei einem Ablenkungswinkel $\varphi$ nach der anderen Seite zur Ruhe kommt. Man erreicht durch diese Anordnung zugleich den Vorteil, daß die beiden Ablenkungen genau an derselben Stelle des Raumes stattfinden, etwaige lokale Verschiedenheiten von $H$ also nicht in Betracht kommen. Die Formel hat hier freilich, wenn $G$ die Spulenkonstante (**4**, 259 und 278) ist, die verwickeltere Gestalt[4]:

$$H^2 = \frac{D G \sin\alpha \cos(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi\,[f\cos\alpha + \varkappa G \cos(\alpha+\varphi)]}\,, \tag{24}$$

wo $G$ der obigen Spulenkonstante entspricht, hier aber sich auf den Fall bezieht, daß, wie bei den Galvanometern, die Nadel in ihrer Mitte (nicht in einer äußeren Entfernung $r$) sich befindet, so daß die bei den Galvanometern angegebenen Arten, $G$ zu ermitteln, auch hier anzuwenden sind.

Eine Vergleichung der wichtigsten der bisher betrachteten Methoden zur Bestimmung von $H$, nämlich der GAUSSschen, der bifilarmagnetischen und der bifilargalvanischen, haben F. und W. KOHLRAUSCH[5] auf elektrochemischem Wege durchgeführt. Ferner hat H. Wild[6] die Gründe diskutiert, aus denen Unifilar- und Bifilarinstrumente verschiedene Werte von $H$ ergeben. Neuerdings hat sich übrigens infolge der Möglichkeit, Quarzfäden zu benutzen, das Verhältnis zugunsten der Unifilarinstrumente verschoben (s. auch w. u.).

[1] F. KOHLRAUSCH, Gött. Nachr. 1869. S. 36; Pogg. Ann. **138**. S. 1. — [2] Vgl. IV, 278, wo in der Anmerkung die wichtigste Literatur aufgeführt ist. — [3] W. THOMSON, bei J. C. MAXWELL, El. u. Magn. **2**. S. 456. — [4] Vgl. z. B. MASCART und JOUBERT, Lehrb. der El. und des Magn. **2**. S. 224, Gleichung (25) und (26), aus denen man nur $\mathfrak{J}$ zu eliminieren braucht. — [5] F. und W. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **27**. S. 1. 1886. — [6] H. WILD, Bull. Acad. St. Pétersb. (5). **8**. S. 239. 1898.

## D) Magnetische Wagen.

Wie man behufs Messung elektrischer Ströme außer eigentlichen Galvanometern auch Stromwagen benutzt, so hat man auch magnetische Meßapparate konstruiert, deren Drehungsachse nicht wie bei den eigentlichen Magnetometern vertikal, sondern, wie bei der gewöhnlichen Wage, horizontal liegt, die man also magnetische Wagen nennen kann. Aber erst aus der neuesten Zeit liegen zwei Apparate dieser Art vor, welche den an feine und absolute Meßinstrumente zu stellenden Anforderungen genügen. Die eine, zur Messung von Stabmagnetismen bestimmte, rührt von HELMHOLTZ[1] her und ist in der ursprünglichen Gestalt von ihm selbst, in einer späteren nebst eingehenden Untersuchungen darüber von KÖPSEL[2] beschrieben worden, die andere, zur Messung von $H$ dienende, ist von TÖPLER konstruiert und von ihm und FREYBERG beschrieben worden. Von den ebenfalls als magnetische Wagen bezeichneten Instrumenten zur Auswertung von Eisenkörpern wird weiter unten die Rede sein.

**Magnetische Wage von HELMHOLTZ.** Die ursprüngliche Form ist folgende. An einer Wage hängt einerseits horizontal und dem Wagebalken parallel, andererseits vertikal und mit seiner Mitte in gleicher Höhe, je ein Magnetstab; ihre magnetischen Momente seien $M_1$ und $M_2$, der Abstand ihrer Mittelpunkte, also auch derjenige der Schneiden, sei $r$, er sei einigermaßen groß gegen die Polabstände $l_1$ und $l_2$ in den beiden Stäben. Die Wage sei, ev. infolge Auflegens geeigneter Gewichte, im Gleichgewicht. Kehrt man nun einen der Magnete um, so daß seine Pole ihre Lagen miteinander vertauschen, so wird man ein Gewicht auflegen müssen, um das gestörte Gleichgewicht von neuem herzustellen (Figur 43). Schließlich kehrt man, um den Einfluß etwaiger Asymmetrien zu eliminieren, auch den anderen Stab um, bestimmt das jetzt fortzunehmende Gewicht und nimmt aus den beiden nahezu gleichen Gewichten das Mittel $p$. Man hat alsdann, wenn $g$ die Schwere ist, die Formel:



Figur 43.

$$M_1 M_2 = \frac{1}{12} \frac{g p r^4}{1 + \frac{20 l_1^2 - 15 l_2^2}{6 r^2}} \quad (25)$$

Nennt man dieses Produkt $P(1, 2)$ und stellt eine entsprechende Beobachtung mit dem ersten und einem dritten, sowie mit dem zweiten und dem dritten Stabe an, wodurch man die Produkte $P(1, 3)$ und $P(2, 3)$ erhält, so findet man

$$M_1 = \sqrt{\frac{P(1, 2) P(1, 3)}{P(2, 3)}} \quad (26)$$

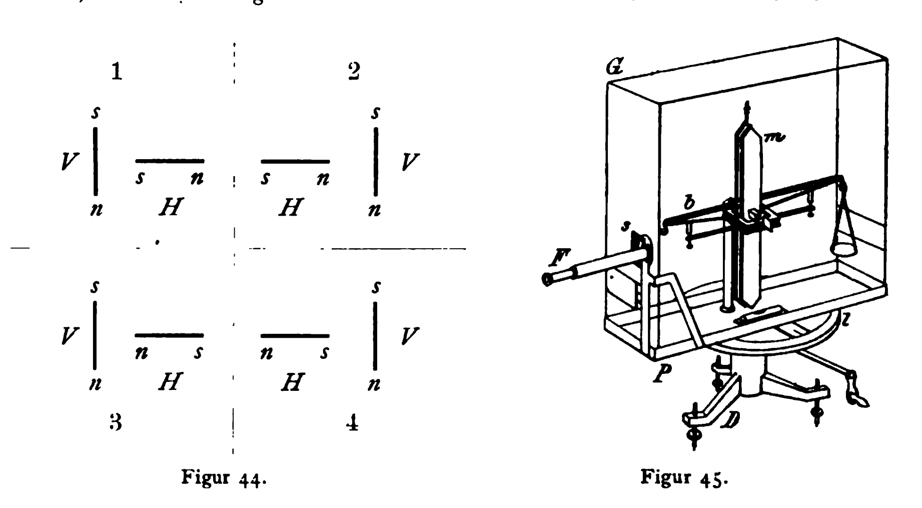
und $M_2$ und $M_3$ durch analoge Formeln. Die Wage muß eisenfrei, ihre Empfindlichkeit möglichst groß sein. Immerhin haften der Methode zwei Übelstände an, nämlich der Umstand, daß man, um zu einem guten Resultate zu gelangen, jedesmal noch die beiden Stäbe miteinander vertauschen und die Messung wiederholen muß, und der Umstand, daß, da die Wirkung der Magnete aufeinander nur aus der einzigen Entfernung $r$ gemessen wird (eine andere hat man nicht zur Verfügung), die unsicheren Polabstände in die Endformeln eingehen. Von beiden Übelständen ist die modifizierte Anordnung frei. Hier wird der horizon-

[1] H. v. HELMHOLTZ, Berl. Ber. 1883. S. 405. — [2] A. KÖPSEL, Wied. Ann. 31. S. 250. 1887.

tale Stab überhaupt nicht an die Wage gehängt, sondern außerhalb ihres Gehäuses in gleicher Höhe mit dem vertikalen Mittelpunkt des Stabes festgelegt, und zwar, ähnlich wie bei den GAUSSschen Beobachtungen, der Reihe nach rechts und mit dem Südpol voran, links und mit dem Nordpol voran, rechts und mit dem Nordpol voran, links und mit dem Südpol voran, so daß der Mittelwert des Zusatzgewichtes $p_1$ von etwaigen Änderungen des Nullpunktes der Wage so gut wie frei ist (Figur 44). Dieselben Beobachtungen wie aus der Entfernung $r_1$ werden alsdann aus einer anderen Entfernung $r_2$ angestellt, wobei man $p_2$ erhält. Schließlich kann man noch die Messung von $p_1$ wiederholen und aus beiden $p_1$-Werten das Mittel nehmen. An die Stelle von (25) tritt dann die Formel:

$$M_1 M_2 = \frac{g(p_1 r_1^6 - p_2 r_2^6)}{5(r_1^2 - r_2^2)} \quad . \tag{27}$$

Die Endformel (26) bleibt, hiervon abgesehen, ungeändert. Noch sei bemerkt, daß diese modifizierte Methode es mit Hilfe einer Reitervorrichtung gestattet, während der ganzen Versuchsreihe das Gehäuse nicht zu öffnen.




Figur 44. Figur 45.

**Erdmagnetische Wage von TÖPLER**[1]. Eine gewöhnliche Wage, deren drei Schneiden annähernd in eine Ebene fallen, wird auf einen Zapfen gesetzt, dadurch um eine vertikale Achse drehbar gemacht und durch einen Teilkreis $t$ dafür gesorgt, daß diese Drehungen bis auf Minuten abgelesen werden können. Der schwingende Teil der Wage ist kreuzförmig und besteht aus einem leichten horizontalen Messingbalken $b$ und einem vertikalen Magnetstab $m$. Dazu kommen dann noch zwei recht leichte Wagschalen aus Aluminium, eine Arretierungsvorrichtung, ein Ablesespiegel, eine Skale $s$ und ein Ablesefernrohr $F$ (Figur 45). Um nun das Produkt $MH$ zu bestimmen, orientiert man die Schwingungsebene der Wage in den magnetischen Meridian und äquilibriert sie durch Belastung der zu leicht erscheinenden Schale; alsdann dreht man die Wage um 180° und äquilibriert wieder auf derselben Schale; es ist dann

$$MH = \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2)\, l g \quad ,$$

wo $p_1$ und $p_2$ die beiden Belastungen und $l$ der Hebelarm der benutzten Schale ist, und wo links noch der Faktor $1 + \mu$ hinzugefügt werden muß, wenn der durch die Erde in dem vertikal stehenden Magneten induzierte Magnetismus be-

[1] A. TÖPLER, Berl. Ber. 1883. S. 1029; Wied. Ann. **21**. S. 158. 1884. — J. FREYBERG, Wied. Ann. **25**. S. 511. 1885.

rücksichtigt werden soll; will man auch den Temperatureinfluß beachten, so muß man einen Vorversuch machen, durch den man die Gewichtsdifferenz $p_1 - p_2$ bei beträchtlich verschiedenen Temperaturen vergleicht. Den zweiten Teil der Messung, nämlich die Ermittelung von $M/H$ muß man auf dem gewöhnlichen Wege der Ablenkungen ausführen, indem man den Magnetstab aus der Wage herausnimmt und in einer Hauptlage einem Magnetometer gegenüberstellt. Man kann aber nach einem Vorschlage Töplers, der bisher allerdings nicht ausgeführt worden zu sein scheint, den Apparat so modifizieren, daß man, ähnlich wie bei den Bifilarmethoden, beide Messungen gleichzeitig ausführen kann. Neigt man nämlich den Magneten gegen die Mittelschneide, z. B. um 45°, so geht die in die Schwingungsebene fallende Komponente seines magnetischen Momentes in die Wägungsbeobachtung ein, während die Komponente nach der Schneidenrichtung hauptsächlich seine Fernwirkung in dieser Richtung bestimmt, also gleichzeitig zur Erzielung einer Ablenkung bei einem in dieser Richtung aufgestellten Magnetometer benutzt werden kann.

Im Anschluß hieran sei die magnetische Drehwage erwähnt, die Strecker [1] zunächst allerdings zu didaktischen Zwecken konstruiert hat, die aber auch zur leidlich genauen Bestimmung wirklicher $H$- und $M$-Werte tauglich sein dürfte. Für rasche Demonstrationsmessungen vergleiche man auch den Vorschlag von Dechant.

## E) Methode der Induktionsströme.

In dem Abschnitt über die Induktion elektrischer Ströme wird gezeigt werden, daß, wenn man einen Drahtring oder, der kräftigeren Wirkung halber, eine Drahtspule der Wirkung eines Magneten aussetzt oder der Wirkung eines Magneten, der sie bis dahin ausgesetzt war, entzieht oder endlich der der bisherigen entgegengesetzten Wirkung aussetzt, im Augenblicke der betreffenden Änderung ein Strom durch die Spule läuft, den man messen kann, wenn man in ihren Kreis ein Galvanometer einschaltet. Am vorteilhaftesten ist es, die Spule lang zu wählen, beträchtlich länger als der zu untersuchende Stab ist, den letzteren so in die erstere zu legen, daß seine Achse mit dem mittleren Stück der Spulenachse zusammenfällt, und ihn dann plötzlich herauszuziehen oder, bei vertikaler Stellung, herausfallen zu lassen. Die Ortsänderung, die man hiernach mit dem Magneten, — oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, mit der Spule — und zwar möglichst exakt und rasch, vornehmen muß, ist freilich wegen der auf der Hand liegenden, damit verbundenen Übelstände und der dabei auftretenden Schwierigkeiten wenig empfehlenswert; aber eine andere Möglichkeit, die Spule dem Einfluß des Magneten zu entziehen, gibt es für permanente Stahlmagnete nicht, und so ist es erklärlich, daß man für derartige Magnete die Methode bisher wenig angewendet hat. Anders für weiche Eisenstäbe, welche auf elektromagnetischem Wege mit Hilfe einer besonderen, der obigen konzentrischen Spule temporär magnetisiert werden. Schickt man durch diese Spule einen Strom und macht dadurch den Eisenstab plötzlich zum Magneten, so erhält man in der anderen Spule einen dem erregten Strom plus Magnetismus proportionalen Induktionsstrom; unterbricht man jenen Strom wieder, so erhält man einen dem nun wieder verschwindenden Strom plus Magnetismus proportionalen Induktionsstrom, endlich gibt die Differenz zwischen beiden Größen, wenn sie vorhanden ist, ein Maß für den in dem Stabe zurückgebliebenen Magnetismus ab. Letzteren Magnetismus erhält man also ohne weiteres; um die beiden ersteren rein zu erhalten, muß man die entsprechenden Versuche mit leerer Spule (ohne Stab) anstellen und die betreffenden Induktionsströme von den obigen abziehen. Um

[1] K. Strecker, Z. f. phys. u. chem. Unt. 9. 209. 1896.



die absoluten Werte der Magnetismen zu erhalten, muß man dann noch einen Faktor einführen, der von der Beschaffenheit und den Lageverhältnissen von Spule und Magnet abhängt. In späteren Artikeln wird auf diese Methode noch zurückgekommen werden.

**Magnetismus der Lage.** Sehr einfach gestaltet sich diese Methode in ihrer Anwendung zur Bestimmung des im obigen oft genannten und als Korrektionsgröße wichtigen, einem Magnetstabe zugehörigen „Induktionskoeffizienten" durch die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus, d. h. der Differenz der Magnetismen, die er in Nord-Südlage und in Ost-Westlage annimmt, im Verhältnis zu der letzteren Größe. Die Ortsänderung führt man in diesem Falle natürlich in der Gestalt einer Drehung aus der Nord-Südlage in die Ost-Westlage aus, oder noch besser (weil exakter ausführbar und von doppelter Wirksamkeit) aus der Nord-Südlage in die Süd-Nordlage, also um 180°. Der Induktionsstrom, welcher in der Spule entsteht, wenn sie allein die gedachte Drehung ausführt, bringe den Galvanometerausschlag $\alpha_0$ hervor; wird die Spule mit dem in ihr befindlichen Magnetstabe gedreht, so entstehe der Ausschlag $\alpha$; und wird ein Hilfsstab von bekanntem Magnetismus $M_1$ rasch in die Spule geschoben oder rasch entfernt, so entstehe der Ausschlag $\alpha_1$, es ist dann der Magnetismus der Lage

$$L = \frac{M_1}{2} \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1}$$

und der Induktionskoeffizient

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{M_1}{M} \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1} ,$$

wo $M$ der eigene Magnetismus des Stabes in Ost-Westlage ist; benutzt man als Hilfsstab den Hauptstab selbst, so wird einfach

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1} .$$

Übrigens ist diese Methode nicht nur zur Ermittelung der Korrektion bei $M$- und $H$-Bestimmungen von Wert, sondern — für Eisenkörper — nach dem Vorgange von RIECKE[1] auch wohl geeignet, zum Studium der Gesetze der Magnetisierung überhaupt zu dienen, worauf später zurückzukommen sein wird[2].

## F) Messung der Vertikalintensität des Erdmagnetismus.

Die Größen, deren Messung die bisher skizzierten Methoden gewidmet sind, sind der Magnetismus eines Stabes und die horizontale Komponente des Magnetismus der Erde; zum Teil ergeben sie sich dabei gleichzeitig aus einer und derselben Versuchsanordnung. Das Charakteristische der Anordnungen war insbesondere dies, daß (mit Ausnahme der letztgenannten Fälle) alle Vorgänge in einer horizontalen Ebene stattfanden, d. h. die Ablenkungen von horizontal liegenden und horizontal wirkenden Stäben ausgingen und die Schwingungen in horizontalen Ebenen, also um vertikale Achsen, erfolgten; bei der TÖPLERschen Wage ist zwar die Drehungsachse horizontal, dies wird aber dadurch wieder ausgeglichen, daß der Magnetstab vertikal steht.

Man könnte nun jenen Methoden analoge gegenüberstellen, bei welchen die Ablenkungen und Schwingungen in vertikalen Richtungen erfolgen, letztere also um horizontale Drehungsachsen stattfinden. Für Stabmagnetismen würden dies

[1] E. RIECKE, Pogg. Ann. **141**. S. 453. 1870. — [2] Näheres über den Induktionskoeffizienten findet man bei F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **22**. S. 415. 1884, sowie bei H. WILD, Mém. Ac. St. Pét. **34**. 1886.

nur neue Methoden zur Messung derselben Größe sein, die nur dann eine Existenzberechtigung würden beanspruchen dürfen, wenn sie den früheren gegenüber Vorteile aufwiesen. Das Gegenteil ist aber der Fall. Die Beobachtung vertikaler Vorgänge, namentlich Schwingungen, ist nämlich augenscheinlich unbequemer als die horizontaler, und die störende Mitwirkung fremder Kräfte ist hier viel beträchtlicher als dort; denn während sie dort bei den unifilaren Methoden von der leicht auf ein geringes Maß herabzudrückenden Torsionskraft und bei den bifilaren Methoden wenigstens nur von einem Bruchteile der Schwerkraft (vgl. Gleichung 15a) ausgeht, wirkt hier die volle Schwerkraft ein, und die hier unvermeidliche Lagerung auf Schneiden, Spitzen oder Lagern bringt ein schwer zu bestimmendes Element hinein. Man kann wohl sagen, daß hierdurch Schwingungs- und Ablenkungsbeobachtungen für genauere Zwecke so gut wie ausgeschlossen werden, und es würden daher nur Wägungsmethoden übrig bleiben, wie sie in der Tat beispielsweise bei der v. HELMHOLTZschen Wage Anwendung finden.

Was andererseits den Erdmagnetismus betrifft, so liegt die Sache freilich hier anders, insofern die früheren Methoden lediglich seine Horizontalkomponente, die jetzt in Rede stehenden aber eine ganz neue Größe, nämlich seine Vertikalkomponente liefern. Man würde daher darauf angewiesen sein, diese Methoden auszubilden und die gedachten Schwierigkeiten zu beseitigen, wenn man nicht für diese Größe indirekte Methoden besäße, welche einfacher zum Ziele führen, und welche auf der Erwägung beruhen, daß, wenn die Richtung, in der die Gesamtkraft des Erdmagnetismus wirkt, also die sogenannte Inklinationsrichtung $I$ (s. w. u.) bekannt ist, die Vertikalkomponente $Z$ des Erdmagnetismus und dann auch dessen Gesamtgröße $F$ sich aus der Horizontalkomponente $H$ mittels der einfachen Formeln

$$Z = H \operatorname{tang} I \,, \qquad F = \frac{H}{\cos I}$$

ableiten lassen. Dies Verfahren wird denn auch fast ausschließlich geübt. Immerhin ist es prinzipiell als wünschenswert zu bezeichnen, auch direkte Methoden zur Messung von $Z$ zu besitzen, und es mögen daher, unter Übergehung älterer Methoden, einige solche hier erwähnt werden. Eine derselben scheint noch nicht verwirklicht worden zu sein, beschränkt sich vielmehr auf einen Vorschlag, den TÖPLER[1] im Anschluß an seine $H$-Wage gemacht hat. Man benutzt einen horizontal auf einer Schneide spielenden, mit Schalen versehenen Magneten, der durch west-östliche Stellung dem Einfluß der Horizontalintensität entzogen wird. In die Doppelwägung tritt an Stelle der Umdrehung die Ummagnetisierung des Magneten ein, welche vermittels einer Magnetisierungsspirale nötigenfalls ohne Zerlegung des Instrumentes bewerkstelligt werden kann. Das Produkt $(p_1 - p_2) \cdot l$ (vgl. o. S. 90) mißt die Größe $Z \cdot (M_1 + M_2)$, unter $M_1$ und $M_2$ die im allgemeinen verschiedenen magnetischen Momente vor und nach dem Ummagnetisieren verstanden. Das Verhältnis dieser Momente kann gleichzeitig mit den Wägungen aus der Wirkung auf ein in der Richtung des Balkens aufgestelltes Magnetometer erkannt werden, zu welchem Zwecke die Wage um die vertikale Achse drehbar zu machen ist. Der absolute Wert von $M_1$ oder $M_2$ kann vorher oder nachher durch Vergleich mit einem Magnete von bereits bekanntem Momente bestimmt werden.

Übrigens hat schon LLOYD[2] die Wägungsmethode angegeben, und zwar sowohl für die vertikale Komponente allein, als auch für die ganze Kraft $F$, letzteres in der Weise, daß einmal ein Magnet, dann ein Gewicht zur Ablenkung einer Inklinationsnadel angewandt wird. Ferner gehört hierher das WILDsche Vertikal-

---

[1] A. TÖPLER, Berl. Ber. 1883. S. 1042 (Schluß der Abhandlung). — [2] H. LLOYD, Proc. Ir. Ac. 1. S. 334. 1838; 2. S. 210. 1842 (Apparat mit vertikalen Deflektoren); Trans. Ir. Ac. 23. 1858.

magnetometer[1]. Eine neue Form der LLOYDschen Wage hat ganz neuerdings ESCHENHAGEN[2] angegeben und ihre Brauchbarkeit durch Versuche nachgewiesen.

Eine galvanische Wägungsmethode hat ferner TANAKADATÉ[3] vorgeschlagen. Doch muß es an diesem Hinweise genügen.

Die von RIECKE[4] herrührende und in seiner „elektrodynamischen Drehwage“ verwirklichte Methode beruht auf der von irgend einem Magnetpol, also auch vom Erdmagnetismus auf ein Stromelement ausgeübten Wirkung (s. w. u.); ist das Stromelement $i\,ds$ horizontal gerichtet, so ist die von der Vertikalkomponente $Z$ des Erdmagnetismus auf $ds$ ausgeübte Kraft gleich $Z\,i\,ds$ und horizontal, aber senkrecht zum Stromelement gerichtet; gehört das Element einem geraden Leiter von der Länge $l$ an, der um eine vertikale, durch seinen Anfangspunkt gehende Achse drehbar ist, so wird das jener Kraft entsprechende Drehungsmoment demgemäß $\frac{1}{2}Zil^2$, und man kann durch Beobachtung des Drehungsmomentes, resp. der ihm entsprechenden veränderten Gleichgewichtslage, sowie durch Messung der Stromstärke zur Bestimmung von $Z$ gelangen. Der Apparat besteht nun aus einem mit Kupfervitriollösung gefüllten Gefäß, in dessen Mitte eine an einem Faden hängende Kupferscheibe schwebt, während ihr eine zweite, mit dem Boden durch ein Stativ fest verbundene Kupferplatte gegenübersteht: die einander abgekehrten Seiten der Scheiben werden vollständig, die zugekehrten bis auf einen schmalen Rand mit einer isolierenden Schicht, z. B. Glas oder Siegellack überzogen. Tritt nun ein Strom durch den Aufhängefaden ein und durch das Stativ wieder aus, so tritt eine Ablenkung ein, aus welcher $Z$ nach der Formel

$$Z = \frac{2\varphi D}{il^2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\delta^2}{l^2}\right)} = \frac{Dn\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{n}{r}\right)^2\right]}{irl^2\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{n}\right)^2\right]}$$

berechnet werden kann, wo $l$ der Scheibenradius bis zur Mitte der frei gebliebenen Randschicht, $\delta$ die halbe Breite dieser Randschicht, $\varphi$ der Ablenkungswinkel und $D$ das aus den Schwingungen einer Messingplatte abgeleitete Drehungsmoment der Torsion bezeichnet, während in dem zweiten Ausdruck, der sich auf Spiegelablesung bezieht, $n$ die Skalenablenkung und $r$ der Skalenabstand ist. Die Stromstärke $i$ muß man anderweitig in absolutem Maße bestimmen. Näheres hierüber findet sich in einer Abhandlung von R. KRUGER[5], der auch die obige berichtigte Formel entnommen ist.

Eine eigenartige Methode hat schließlich GUGLIELMO[6] vorgeschlagen; er benutzt nämlich ein Aräometer, das aus einer mit einem Stabmagneten versehenen, unsymmetrischen Masse besteht, in Flüssigkeit taucht und gegen eine Ebene drehbar gestützt ist.

## G) Messung von Deklination und Inklination.

Unter Deklination versteht man den Winkel, den der magnetische Meridian mit dem astronomischen bildet, unter Inklination den Winkel, welchen in der Ebene des magnetischen Meridians die Richtung der gesamten erdmagnetischen Kraft mit der horizontalen Richtung bildet. Bei der großen Wichtigkeit beider Größen für die Geophysik, Geographie und Nautik ist es erklärlich, daß zu ihrer

[1] H. WILD, Bull. Ac. St. Pét. 1872. S. 456. — [2] ESCHENHAGEN, Terr. Magn. **6**. S. 59. 1901. — [3] TANAKADATÉ, Phil. Soc. Glasg. 1889. — [4] E. RIECKE, Wied. Ann. **13**. S. 198. 1881. — [5] R. KRÜGER, Wied. Ann. **28**. S. 613. 1886. — [6] G. GUGLIELMO, Arch. Néerl. (2) **5**. S. 175. 1900 (Jub.-Bd. f. Lorentz).

Bestimmung außergewöhnlich zahlreiche Apparate und Methoden konstruiert worden sind; hier kann nur eine kurze Auswahl getroffen werden[1].

**Deklination.** Die Bestimmung der Deklination zerfällt naturgemäß in zwei Teile, nämlich in die Bestimmung des astronomischen und des magnetischen Meridians. Zur Ermittelung des astronomischen Meridians kann man entweder terrestrische Gegenstände, z. B. Kirchtürme benutzen, deren Richtung man kennt und deren Einstellung scharf zu bewerkstelligen ist, oder, wenn man hierzu nicht in der Lage ist, astronomische Objekte. Von den dabei möglichen Methoden sind die wichtigsten folgende: 1. Beobachtung eines Sonnenrandes (des westlichen oder östlichen) mit einem Theodolithen im Augenblicke des wahren Mittags, d. h. des mittleren Mittags vermindert um die aus den Tafeln zu entnehmende Zeitgleichung; das Resultat muß man dann natürlich um den dem Sonnenradius $\varrho$ entsprechenden Winkel $\varepsilon$ korrigieren, wozu man die angenäherte Formel $\varepsilon = \varrho/\sin(\varphi - \delta)$ benutzen kann ($\varphi$ Polhöhe, $\delta$ astronomische Deklination der Sonne). 2. Beobachtung der äußersten östlichen und westlichen Lage eines Sternes; die Halbierungslinie gibt den Meridian. 3. Beobachtung nur einer dieser beiden Lagen und Hinzufügung oder Abzug des Winkels $\arcsin(\cos\delta/\cos\varphi)$ ($\varphi$ Polhöhe, $\delta$ Deklination des Sternes). Für beide Messungen sind offenbar dem Himmelspol nahe gelegene Sterne, z. B. der Polarstern selbst, am besten geeignet. 4. Einstellung eines Theodolithen auf einen Stern am Morgen unter Ablesung des Horizontalkreises, dann die entsprechende Ablesung am Abend zur Zeit, wo der Stern wieder dieselbe Höhe hat und Bildung des Mittels beider Einstellungen. Statt eines Sternes kann man auch den westlichen und östlichen Sonnenrand benutzen, muß dann aber eine kleine Korrektion wegen der Änderung der Sonnendeklination anbringen. Hat man auf eine dieser Arten den astronomischen Meridian bestimmt, so markiert man seine Richtung durch eine Linie oder, wenn die Achse des Beobachtungsapparates eine feste Aufstellung hat, durch eine Wandmarke, deren Verbindungslinie mit der Achse jene Richtung hat.

Um nun andererseits den magnetischen Meridian und durch Vergleich desselben mit dem astronomischen die Deklination zu bestimmen, bedient man sich eines Deklinatoriums oder Deklinometers (auch Deklinationsbussole genannt). Als typische Vertreter der drei gebräuchlichsten Klassen derartiger Instrumente können diejenigen von GAMBEY[2], GAUSS und LAMONT gelten. Das Deklinatorium von GAMBEY enthält eine horizontale Kreisteilung, ein vertikales rechteckiges Stativ, dessen Ebene sich um die vertikale Mittelachse drehen läßt, wobei man den Drehungswinkel mittels Nonien an der Teilung ablesen kann, in der Mitte des oberen Querarms ein auch in vertikaler Ebene drehbares Fernrohr, mit dem man ferne oder nahe Objekte beobachten kann, je nachdem man den ringförmigen oder den zentralen Teil des Objektivs benutzt, endlich einen horizontalen Magnetstab, der an einem in die Vertikalachse des Apparates fallenden Faden hängt und an seinen Enden überstehende Ringe mit Fadenkreuzen trägt. Man stellt zuerst auf die Marke des astronomischen Meridians, alsdann so ein, daß die beiden Fadenkreuze des Magneten bei vertikaler Drehung des Fernrohrs nacheinander mit dessen Fadenkreuz zusammenfallen; die Differenz beider Einstellungen ist die Deklination. Korrektionen sind anzubringen wegen der Asymmetrie des Magneten, wegen der Torsion des Fadens und wegen des Umstandes, daß die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Fadenkreuze des Magneten nicht genau in die Vertikalebene der Fernrohrdrehung fallen wird (s. w. u.)

---

[1] Näheres hierüber und über die folgenden Abschnitte findet man u. a. in: J. LAMONT, Handb. d. Erdmagn. 1849. — G. B. AIRY, Üb. d. Magn., deutsch von TIETJEN, Berlin 1874. — S. GÜNTHER, Lehrb. d. Geophysik, Bd. 2. S. 12—37. Stuttg. 1885. — KREIL, Anl. zu magn. Beob. Wien 1858. — J. LIZNAR, Anl. z. Messung u. Berechnung d. Elemente d. Erdmagn. Wien 1883. — ESCHENHAGEN, in KIRCHHOFFs Anl. z. deutschen Landesforschung, Stuttg. 1889. — Zeitschr. f. Instr.-K. Bd. 1. 1881 u. ff. — [2] GAMBEY, GEHLERs Wörterb. Bd. 1. S. 131.

Das Deklinatorium von GAUSS[1] setzt sich aus einem gewöhnlichen Magnetometer und einem ihm in einiger Entfernung gegenübergestellten Theodolithen zusammen. Man sorgt zunächst dafür, daß der Magnet torsionsfrei hänge und folglich die Richtung des magnetischen Meridians annehme, was man durch Beobachtung der Einstellung eines an die Stelle des Magneten gehängten unmagnetischen Stabes und entsprechende Nachdrehung des Fadens leicht bewerkstelligen kann; daß es eventuell nach mehrmaligem Korrigieren erreicht ist, erkennt man daran, daß der Magnet dieselbe Richtung annimmt, wie der unmagnetische Stab, daß also, wenn Spiegelablesung benutzt wird, derselbe Skalenteil oder (eine Skale ist sonst nicht nötig) dieselbe Marke im Fernrohr erscheint. Oder man bestimmt annähernd den Winkel $\varphi$ zwischen den Einstellungen des magnetischen und des unmagnetischen, gleich schweren Stabes und führt die Größe $\vartheta\varphi$ ($\vartheta$ Torsionsverhältnis) als Korrektion ein. Man stellt dann, mit Hilfe von Stellschrauben, den Spiegel senkrecht zur magnetischen Achse des Stabes, was erreicht ist, wenn nach Umkehrung des Stabes, so daß seine obere Seite zur unteren wird, dieselbe Marke im Fernrohr erscheint. Stellt man nun den Theodolithen einmal auf die astronomische Marke, dann so ein, daß das Spiegelbild einer vor der Mitte des Objektivs aufgestellten Marke ins Fadenkreuz fällt, so erhält man die Deklination. Am bequemsten ist es, die astronomische Marke, eventuell durch Erzeugung eines Bildes mittels einer Linie in gleiche Sehweite mit der Objektivmarke zu bringen — man kann auch einen hohlen Magneten benutzen, so daß man durch eine Linse am vorderen Ende eine Marke am hinteren Ende betrachten kann. Eine dritte Beobachtungsart wird gleich genannt werden. — Das Deklinatorium oder der magnetische Theodolith von LAMONT[2] ist annähernd ebenso fein wie der GAUSSsche und dabei kompakter, insoweit das Fernrohr wieder an dem Magnetometer selbst angebracht ist, im übrigen zeichnet er sich aus durch eine besondere Art die Fernrohrachse mit der Spiegelnormale, also, wenn diese in die Richtung der magnetischen Achse des Stabes fällt, auch mit dieser zur Coincidenz zu bringen. Diese, inzwischen vielfach auch bei anderen Beobachtungen angewandte und auch für das GAUSSsche Deklinatorium verwertbare Einrichtung besteht darin, daß dicht hinter dem Fadenkreuz des Fernrohrs, an dessen Stelle noch besser eine Glasplatte mit einem eingeritzten Kreuz tritt, in die zur einen Hälfte aufgeschnittene Rohrwand ein unter 45° geneigter Spiegel oder ein Prisma eingesetzt ist, dessen zugekehrte Fläche dieselbe Neigung hat; die von der Seite kommenden Strahlen fallen auf das Kreuz, gehen durch das Objektiv zum Spiegel, kehren von dort zurück und erzeugen nun ein Bild des Kreuzes, welches bei normaler Stellung desselben mit dem Kreuz zusammenfällt. — Die neuesten Deklinatorien sind die von BRUNNER und CARPENTIER in Paris, sowie von BAMBERG in Berlin konstruierten. Eine eingehende Beschreibung der Deklinatorien, insbesondere der verschiedenen BRUNNERschen Modelle findet man, nebst Abbildungen, bei MASCART[3].

Von indirekten Methoden sei hier nur die von TANAKADATÉ[4] genannt, welche man als Vergrößerungsmethode bezeichnen kann. Eine flache, stromdurchflossene Spule lenkt eine zentrale Magnetometernadel ab, außer, wenn ihre Achse mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt. Ist diese Ablenkung $\delta$, der Winkel zwischen Rollenachse und Meridian $\vartheta$, die Kraft der Rolle $K$, so ist näherungsweise

$$\delta = \frac{\vartheta}{1 \pm \frac{H}{K}} ,$$

---

[1] C. F. GAUSS, Res. a. d. Beob. d. Magn. Ver. Bd. **1**. 1836; Ges. Werke. Bd. **5**. — [2] J. LAMONT, Handb. d. Erdmagn. S. 46. DOVEs Rep. d. Phys. Bd. **7**. — [3] E. MASCART, Tr. de Magn. terrestre. S. 137 ff. — [4] TANAKADATÉ, Phil. Soc., Glasg. 1889.

so daß man, wenn man durch Wahl der Stromrichtung $K$ negativ und $H/K$ wenig von 1 verschieden macht, $\delta$ als stark vergrößertes Bild von $\vartheta$ erhält.

**Kompaß.** Ein Apparat, der die umgekehrte Bestimmung hat wie ein Deklinatorium, also in den Stand setzt, bei bekannter Größe der magnetischen Deklination aus dem magnetischen den astronomischen Meridian und damit überhaupt die Himmelsrichtungen zu ermitteln, wird Kompaß genannt; er gehört bekanntlich zu den ältesten[1] und praktisch, besonders für die Schiffahrt und für die Vermessungs- und Erdkunde wichtigsten Apparaten. Natürlich könnte man ihn auch als Deklinometer benutzen, wenn er nicht für diesen Zweck zu wenig genau und empfindlich wäre. Der gewöhnliche Reise- und Taschenkompaß ist zu bekannt, als daß auf ihn hier näher einzugehen wäre, der Vermessungskompaß andererseits liegt außerhalb des Rahmens dieses Buchs. Der Schiffskompaß besteht aus einer in einer horizontalen Ebene drehbaren, meist mit einer Spitze auf ein Hütchen gesetzten Magnetnadel, einer fest auf sie aufgelegten, geteilten oder wenigstens mit einer Windrose versehenen, sich mitdrehenden Kreisscheibe und einem festen, deren Peripherie umgebenden, sich nicht mitdrehenden Ringe, auf welchem die Längsrichtung des Schiffes durch zwei Marken bezeichnet ist; der feste Teil des Apparates ist durch cardanische Aufhängung von den Längs- und Querschwankungen des Schiffes unabhängig gemacht. Da die Deklination keine konstante Größe ist (s. Art. Erdmagnetismus), kann man auf der Scheibe nicht direkt die astronomischen, sondern muß die magnetischen Richtungen angeben und hieran bei jeder Ablesung die dem Orte und Zeitpunkte derselben entsprechende Korrektion anbringen.

Um dem Kompaß die Einstellungsfähigkeit recht lange zu bewahren, muß man ihn möglichst leicht machen: andererseits hat sich gezeigt, daß ein ganzes System von Magneten viel besser wirkt als eine einzelne Nadel; drittens endlich muß der Kompaß vor Erschütterungen möglichst bewahrt werden. Die beiden ersteren Anforderungen hat namentlich Lord KELVIN bei seinen Konstruktionen mit Erfolg vereinigt, seine Rose besteht aus einem Aluminiumring, der durch Seidenfäden mit dem Hütchen verbunden ist, und aus einem System von acht feinen, in Seidenfäden hängenden Magnetnadeln; das Ganze hat, bei kräftigem magnetischem Moment, ein Gewicht von nur 14 Gramm. Den Schutz vor Erschütterungen erreicht man bei den sogenannten Fluidkompassen dadurch, daß man das Gehäuse mit Glyzerin oder Spiritus füllt. Auf die einzelnen Arten der Schiffskompasse, Azimut-, Regel-, Steuer-, Bootskompasse usw., kann hier nicht eingegangen werden. Nur der selbstregistrierende Kompaß, der den Kurs des Schiffes fortdauernd aufzeichnet, sei noch erwähnt.

So einfach insoweit die Lehre vom Kompaß ist, so verwickelt gestaltet sie sich, wenn man die Störungen oder Deviationen der Nadel durch den Magnetismus des Schiffes berücksichtigen will, was namentlich seit teilweiser oder überwiegender Anwendung des Eisens beim Schiffsbau geradezu unumgänglich geworden ist. Der Magnetismus eines Schiffes läßt sich der Achsenrichtung nach in einen horizontalen und einen vertikalen Anteil zerlegen, andererseits seinem Charakter nach in permanenten, subpermanenten und temporären Magnetismus; sie rühren teils von der Lage her, welche die Eisenmassen während ihrer mechanischen Bearbeitung dem Erdmagnetismus gegenüber einnahmen, teils von der Lage, welche diese Massen während der Fahrt des Schiffes dem Erdmagnetismus gegenüber annehmen; jener Teil ist von konstantem, resp. allmählich abnehmendem, dieser von fortwährend veränderlichem Betrage, veränderlich ins-

[1] Von zweifelhaften chinesischen Nachrichten abgesehen, stammt die älteste Kunde von der Verwendung der Richtkraft der Magnetnadel aus dem 11. Jahrhundert; der eigentliche Kompaß scheint erst im 13. oder 14. Jahrhundert in Aufnahme gekommen zu sein. Den wesentlichsten Anteil an seiner Vervollkommnung hat jedenfalls FLAVIO GIOJA gehabt. Vgl. hierzu GÜNTHER, Lehrbuch der Geophysik. 2. Bd. (auch f. d. folgende).





besondere mit der Schiffsrichtung, seinen Schwankungen und der geographischen Breite, in der es sich befindet; aber auch der konstante Teil übt eine von der geographischen Breite abhängige Wirkung auf die Kompaßnadel aus, weil diese Wirkung in ihrem Verhältnis zu dem von der Breite abhängigen Erdmagnetismus in Betracht kommt. Ferner ist diese Wirkung je nach der Art und Richtung des magnetischen Anteils, von dem sie ausgeht, entweder von semizirkularem oder von quadrantalem Charakter, d. h. sie wird nur bei zwei oder aber bei vier Stellungen des Schiffes null und bei zwei, resp. vier anderen ein Maximum oder Minimum. Aus alledem geht hervor, daß die nächstliegende Idee, dem Schiffe Deviationstabellen mitzugeben, kaum durchführbar ist, und daß auch der Versuch, diese Deviationen durch Magnet- und Eisenmassen, die man der Kompaßnadel in bestimmter Form und Lage gegenüberstellt, zu kompensieren, keine einfache Lösung zulassen wird. Trotzdem ist es den Bemühungen von FLINDERS, AIRY, Sir W. THOMSON u. a., die übrigens noch bis in die neueste Zeit hinein fortgesetzt werden, gelungen, eine im großen und ganzen allen Anforderungen genügende Anordnung aufzufinden. Bei der AIRYschen Anordnung stellt man in der Nähe des Kompasses longitudinale und transversale Magnete, sowie Barren von weichem Eisen auf. Bei der THOMSONschen Anordnung werden diese Körper in die Kompaßbüchse selbst verlegt und, um die dadurch drohenden schädlichen Einflüsse zu vermeiden, die Kompaßnadel (oder ein System solcher) möglichst leicht gewählt: der semizirkulare Fehler wird durch einen transversalen und zwei longitudinale Magnete kompensiert, die unter dem Kompaß symmetrisch gegen die Vertikale angeordnet sind, wozu dann für die Schwankungen dieses Fehlers mit der geographischen Breite ein vertikaler Weicheisenstab kommt; der quadrantale Fehler wird durch zwei Kugeln von weichem Eisen aufgehoben, welche symmetrisch zu beiden Seiten der Nadelspitzen angebracht sind; endlich kompensiert ein vertikaler Magnet den durch die Schwankungen des Schiffes entstehenden Fehler; durch Vorversuche kann man es dann dahin bringen, daß die Kompensation eine allgemein gültige ist. Im übrigen muß auf die bezügliche Literatur verwiesen werden[1]. Schließlich sei noch auf das Problem der Übertragung von Kompaßstellungen in die Ferne hingewiesen[2].

**Inklination.** Um den Winkel zu bestimmen, den die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit der Horizontalen bildet, benutzt man das sogenannte Inklinatorium. Es ist das ein dem Deklinatorium zur Seite zu stellender Apparat, der jedoch aus den mehrfach erwähnten Gründen nicht die entsprechende Genauigkeit der Messungen zuläßt. Die Magnetnadel ist mit einer durch ihren Trägheitsmittelpunkt gehenden und auf ihrer magnetischen Achse senkrechten Drehungsachse versehen, deren zylindrisch abgedrehte Zapfen auf zwei glatten, horizontalen Flächen ruhen, so daß sie bei Drehungen der Nadel mit möglichst geringer Reibung auf ihnen rollen; dabei spielen die Spitzen der Nadel auf einem geteilten Vertikalkreise. Der ganze Apparat läßt sich um eine vertikale Achse drehen und mit Hilfe eines Horizontalkreises in einem beliebigen Winkel $\delta$ zum magnetischen Meridian einstellen[3]. Bei rechtwinkliger Stellung gegen den

[1] Die Theorie ist von POISSON zuerst entwickelt worden: Mém. de l'Inst. **5**. S. 521. 1824. — Die AIRYsche Kompensationsmethode ist dargelegt in Trans. R. Soc. 1856. — Die THOMSONsche in verschiedenen Bänden des Phil. Mag. und der Proc. Edinb. Soc. (eine kurze Darlegung findet sich in Nat. **10**. S. 388, 1874, eine Abbildung des THOMSONschen Kompasses in Encycl. Brit. **6**. S. 228). — Eine ausführliche Übersicht des ganzen Problems gibt G. B. AIRY: Über den Magnetismus, deutsch von TIETJEN, Berlin 1874, 10. Abschnitt, eine kürzere MASCART und JOUBERT, Lehrb. d. El. u. d. Magn. **2**. S. 626 ff. Ferner vergleiche man das Nautische Handbuch und das Manual of the deviation of the compass, sowie E. GELCICH, Z. f. Instr.-K. 1883. S. 273, 337 und 373; endlich die neuesten Bände der letztgenannten Zeitschrift. — [2] H. Th. SIMON, Verh. D. Phys. Ges. 1904. 266. — Phys. Z. 1904. 686. — [3] Ein Nadel-Inklinatorium neuester Konstruktion beschreibt H. WILD in den Mém. Ac. St. Pét. **32**, Nr. 6 und in Zeitschr. f. Instr.-K. 1891. S. 138. — Über eine Fadenaufhängung für Inklinatorien

Meridian stellt sich die Nadel vertikal ein, bei kleinerem $\delta$ bildet sie mit der Horizontalen einen Winkel $I'$, aus welchem man die Inklination $I$ aus der Formel

$$\operatorname{tang} I = \cos\delta \operatorname{tang} I'$$

findet, wobei man die beiden Stellungen $\delta$ östlich und westlich vom Meridian kombinieren kann. Gewöhnlich stellt man in den Meridian selbst ein und findet dann $I$ ohne weiteres. Nur muß man bei allen derartigen Inklinationsbestimmungen den Winkel $I$, statt einmal, achtmal beobachten, nämlich 1. in den beiden, um 180° verschiedenen Stellungen des ganzen Apparates, 2. vor und nach Umlegen der Nadel, so daß oben und unten vertauscht werden, 3. vor und nach Umlegen der Nadel, so daß rechts und links vertauscht werden, 4. vor und nach dem Ummagnetisieren der Nadel durch Streichen mit einem Magneten; endlich muß man jedesmal beide Nadelspitzen ablesen. Hierdurch erreicht man, daß man alle etwaigen Unvollkommenheiten des Apparates soweit als möglich eliminiert (Exzentrizität der Kreisteilung, Nicht-Horizontalität der Lager, mechanische Asymmetrie der Nadel, d. h. transversale und longitudinale Abweichung ihres Schwerpunktes vom Mittelpunkt, magnetische Asymmetrie der Nadel). Man nimmt dann aus allen Messungen das Mittel, bei größeren Abweichungen der Einzelwerte voneinander kann man auch genauere Kombinationsformeln anwenden[1]. Hat man Zeit, so tut man gut, die Nadel, statt sie jedesmal möglichst rasch zu beruhigen, im Gegenteil langsam ausschwingen zu lassen und aus den Umkehrpunkten die Ruhelagen, die dann durch Reibung nicht mehr getrübt sein werden, zu berechnen.

**Indirekte Methoden.** Die Methode von LIZNAR[2] besteht in der Messung von $\frac{H}{M}$ nach GAUSS, andererseits von $\frac{Z}{M}$ durch Ablenkung derselben vertikal schwingenden Nadel, woraus dann durch Kombination in leicht ersichtlicher Weise $\operatorname{tang} I = Z/H$ folgt.

Bei der Methode von PSCHEIDL[3] wird ein Magnetstab einmal horizontal, das andere Mal vertikal aufgehängt, in jener Lage durch Schwingungen $MH$, in dieser durch Schwingungen in der zum Meridian senkrechten Ebene die Größe (Moment der Schwere $\pm MZ$) bestimmt, je nachdem der Nordpol oder der Südpol unterliegt. Sind $t$, $t_1$, $t_2$ die betr. Schwingungsdauern, $K$ und $K_1$ die Trägheitsmomente, so ist schließlich

$$\operatorname{tang} I = \frac{Z}{H} = \frac{K_1\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right) t^2}{2K} .$$

Andere indirekte Methoden zur Bestimmung der Inklination beruhen auf der von den beiden Komponenten des Erdmagnetismus ausgehenden Induktionswirkung, und zwar entweder von der Induktion von Magnetismus in weichen Eisenstäben oder von elektrischen Strömen in Drahtspulen. Am nächsten liegt es, die Magnetismen, welche ein und derselbe an sich unmagnetische Eisenstab bei vertikaler und horizontaler Lage annimmt, durch Bestimmung ihrer ablenkenden Wirkungen auf eine Magnetnadel zu vergleichen und den arc tang des gefundenen Verhältnisses aufzusuchen. Hierin besteht das Verfahren von LLOYD[4]; der Eisenstab wird östlich oder westlich von der Nadel um eine zu seiner Achse und zum Meridian senkrechte Achse drehbar angebracht, das Weitere ergibt sich von selbst; freilich liegen auch die Übelstände dieser Methode auf der Hand.

---

1. J. P. JOULE, Proc. Manch. Soc. 8. S. 171; über eine übersichtliche Kritik der Inklinatorien LEYST, Rep. f. Met. (Petersburg) 1887. Bd. 10, Nr. 5. — [1] Vgl. z. B. F. KOHLRAUSCH, Leitf. d. pr. Phys., Nr. 56, oder MAXWELL, El. u. Magn. 2. S. 146. — [2] J. LIZNAR, Rep. de Phys. 23. S. 306. 1888. — [3] W. PSCHEIDL, Wien. Ber. 80. S. 1. 1879. — [4] H. LLOYD, Account of the magn. Observ. of Dublin 1842.

Die Methode von LAMONT[1] knüpft an dessen oben genanntes Deklinatorium an. Nachdem dessen Spiegel so orientiert ist, daß das Okularkreuz mit seinem Spiegelbilde sich deckt, wird auf das Gehäuse ein Ring geschoben, der an zwei gegenüberliegenden Stellen Fortsätze und an diesen befestigte Eisenstäbe trägt, beide vertikal stehend, aber der eine von der Schwingungsebene der Nadel nach unten, der andere nach oben sich erstreckend. Stellt man diesen Ring so auf, daß die Ebene der beiden Stäbe auf dem Meridian senkrecht steht, so hat man auf der einen Seite der Nadel einen Nordpol, auf der anderen Seite einen Südpol, jeden von der Stärke $kZ$, wo $Z$ die Vertikalkomponente des Erdmagnetismus und $k$ der Induktionskoeffizient der Lage ist. Bestimmt man diesen ein für allemal für die benutzten Stäbe und nennt man die Ablenkung, welche die Nadel durch die Stäbe erfährt, $\alpha$, so hat man

$$H \sin\alpha = 2kZ \quad ,$$

also die Inklination

$$I = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{2k}\sin\alpha\right) \quad .$$

Zur Elimination aller Asymmetrien tut man gut, den Ring um 180° zu drehen, die Stäbe umzukehren und die Stäbe miteinander zu vertauschen, in allen diesen Stellungen den Winkel $\alpha$ zu messen und schließlich aus sämtlichen Werten das Mittel zu nehmen.

**W. Webers Erdinduktor.** Statt den Erdmagnetismus Magnetismus, kann man ihn auch Induktionsströme hervorrufen lassen, und der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß Stromstärken bequemer und exakter gemessen werden können, als Magnetismen; der von W. WEBER[2] konstruierte Erdinduktor ist demgemäß von hervorragender Bedeutung geworden. Er besteht aus einer Drahtspule von möglichst zahlreichen Windungen, deren Drehungsachse sowohl horizontal als auch vertikal gestellt werden kann, und die sich in jeder von beiden Lagen rasch um 180° drehen läßt, derart, daß ihre Ebene vor und nach der Drehung in dem einen Falle genau horizontal liegt, in dem anderen Falle genau vertikal und genau senkrecht zum Meridian; man kann sich hiervon entweder mittels einer kleinen Magnetnadel in rechteckigem Rahmen resp. einer Libelle überzeugen, oder auch mit Hilfe gewisser, an dem Apparate anzubringender Vorrichtungen eine Kontroll-Versuchsreihe ausführen. Ebenso muß man die Drehungsachse vor



Figur 46.

[1] J. LAMONT, Doves Rep. d. Physik, Bd. 7. — [2] W. WEBER, Abh. Gött. Ges. 5 (2) S. 3; POGG, Ann. 90. S. 209. 1853; Werke 2. S. 277. — Vgl. auch TH. EDELMANN, In.-Diss., Jena 1881 und „Neuere Apparate“, Stuttgart 1882. Bd. 1. S. 113.



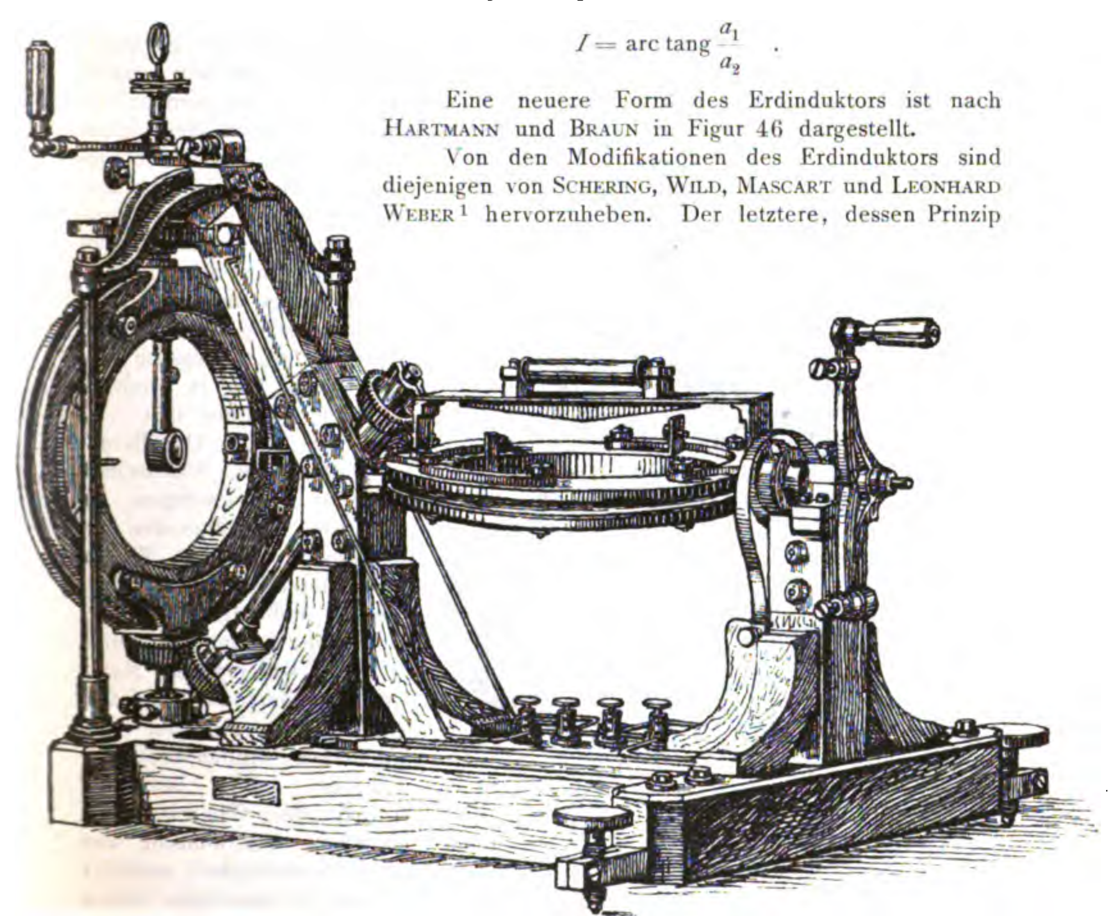


jedem Versuche genau orientieren, d. h. genau horizontal und in den Meridian resp. genau vertikal stellen. Nunmehr beoabachtet man die Wirkungen der beiden gedachten Drehungen um 180⁰ auf das Galvanometer, wobei man, da die Ausschlagsmethode eine verwickelte Berechnung erfordern und auch sonst Ungenauigkeiten involoieren würde, das Multiplikationsverfahren oder, wenn die Ströme kräftig sind, das Zurückwerfungsverfahren anwendet (s. o. S. 236 ff). Sind die schließlichen Ausschlagsbögen $a_1$ und $a_2$, so ist wieder

$$I = \text{arc tang} \frac{a_1}{a_2} \quad .$$

Eine neuere Form des Erdinduktors ist nach Hartmann und Braun in Figur 46 dargestellt.

Von den Modifikationen des Erdinduktors sind diejenigen von Schering, Wild, Mascart und Leonhard Weber[1] hervorzuheben. Der letztere, dessen Prinzip



Figur 47.

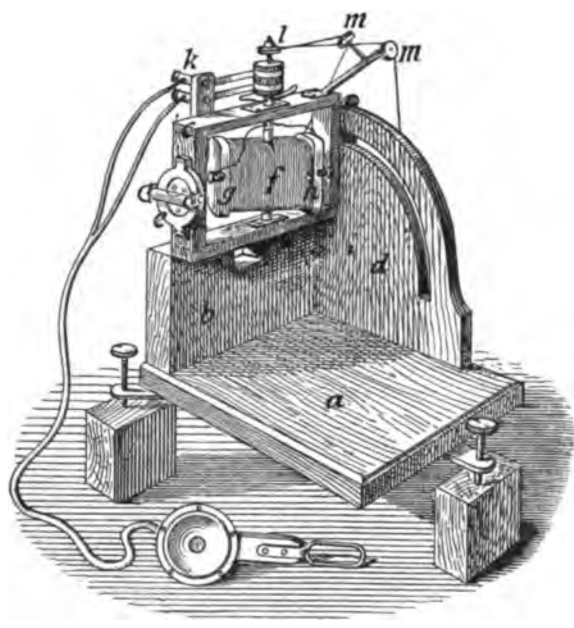
übrigens schon von F. Neumann in seinen Vorlesungen erläutert wurde, läuft wie der Mascartsche auf eine Nullmethode hinaus; er hat gegenüber dem W. Weberschen denselben Vorzug wie das Weber-Kohlrauschsche Bifilar-Magnetometer vor dem Gaussschen Apparat, nämlich den, daß man die beiden Messungen, die erforderlich sind, statt nacheinander zu gleicher Zeit ausführen kann und somit von zeitlichen Einflüssen unabhängig wird. Der L. Webersche Differential-Erdinduktor enthält zu diesem Ende zwei genau gleiche Rollen, die durch eine Zahnradübertragung so verbunden sind, daß mit der einen auch die andere um 180⁰ gedreht wird, und zwar die eine um eine horizontale, die andere um eine vertikale Achse (Figur 47). Die dabei auftretenden Induktionsströme verhalten sich wie die beiden Komponenten des Erdmagnetismus, lassen sich aber durch

[1] Leonh. Weber, Berl. Ber. 1885. S. 1105.

Einschaltung eines an der Drehung nicht teilnehmenden Widerstandes in den Kreis der einen Spule gleich machen, so daß sie, in ein Differential-Galvanometer geschickt, die Nadel desselben in Ruhe lassen; nennt man alsdann die gesamten Widerstände der beiden Stromkreise $w_v$ und $w_h$, so ist einfach

$$I = \text{arc tang}\frac{w_h}{w_v} \quad .$$

Statt des Differential-Galvanometers kann man auch mit einem gewöhnlichen Galvanometer oder selbst Galvanoskop auskommen, wenn man eine geeignete Schaltung anwendet. Da die beiden Rollen nie absolut gleich ausfallen werden, muß man zur Erreichung größter Genauigkeit die beiden Rollen miteinander vertauschen und aus beiden Messungen das Mittel nehmen: hat man dies einmal getan, so kann man sich jedoch einen die Ungleichheit der beiden Rollen berücksichtigenden Korrektionsfaktor verschaffen und kommt dann in der Folge mit einer einzigen Messung aus, so daß nunmehr eine Messung der Inklination sich in wenigen Minuten ausführen läßt.



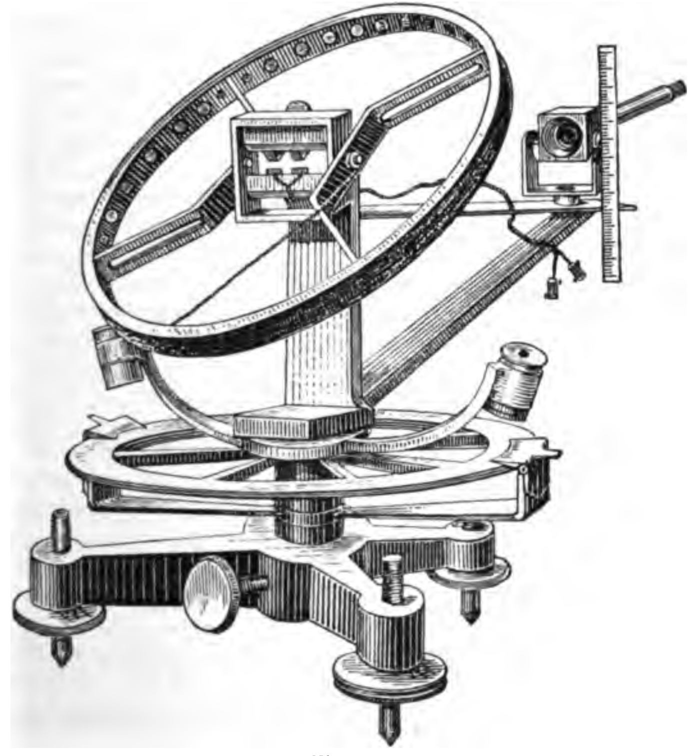
Figur 48.

Eine andere Unvollkommenheit der W. WEBERschen Methode zu beseitigen, ist der Zweck der Methoden von SCHERING[1] und von WILD[2]. Jene Methode setzt nämlich voraus, daß die Dämpfung, welche die Galvanometerrolle auf die schwingende Nadel ausübt, in beiden Fällen gleich groß sei; da dies bei empfindlicheren Rollen nicht der Fall ist, müßte man auf Grund der Theorien von CHWOLSON[3] und SCHERING[4] die Verschiedenheit berechnen, was mühsam und unsicher wäre. Bei den Differentialmethoden fällt diese Schwierigkeit natürlich weg, und auch bei dem gewöhnlichen Induktor könnte man sie beseitigen, indem man durch Einschaltung eines Widerstandes beide Ausschläge gleich groß macht. Man kann aber noch andere Wege einschlagen. So kann man nach SCHERING aus einigen Beobachtungen mit der Inklination nahen Richtungen der Drehungsachse der Induktorrolle diejenige Richtung derselben ableiten, bei welcher gar keine Induktion stattfinden würde. Dies ist die genaue Inklinationsrichtung. Oder (vgl. insbesondere WILD) man beobachtet ganz wie bei W. WEBER, nämlich bei zwei Lagen der Drehungsachse, die eine ist auch hier die vertikale Lage, die andere ist diejenige Richtung, welche mit der Inklinationsrichtung nahezu denselben Winkel wie die Vertikale bildet, nur nach der anderen Seite; die Ausschläge werden dann in beiden Fällen nahezu gleich und folglich auch die Dämpfung dieselbe. Man erhält dann eine Formel, welche die genaue Inklination

[1] K. SCHERING, Tagebl. d. Naturf.-Vers. Kassel 1878. S. 42; Gött. Nachr. 1882. S. 345. — [2] H. WILD, Mém. Ac. St. Pét. 1878. Nr. 8; Bull. 1881. S. 320 und Mém. 1890. Nr. 3; Zeitschr. f. Inst.-K. 1891. S. 203 u. 248. — [3] O. CHWOLSON, Mém. Ac. St. Pét. 1879, Nr. 14; 1880, Nr. 3. — [4] K. SCHERING, Wied. Ann. 9. S. 287. 1879.

darstellt als die Summe der ungefähr bekannten, zur Einstellung der Drehungsachse benutzten und eines die Differenz der gedachten Ausschläge enthaltenden Zusatzgliedes. Die Resultate, welche WILD mit einem auf diese Idee gegründeten Erdinduktor erzielt hat, zeigen eine große Genauigkeit (nach neueren Messungen in Pawlowsk[1] beträgt der Fehler nur etwa 2″), das Verfahren ist aber immerhin ziemlich umständlich.

Die Mißstände, welche auch die letztgenannten Methoden noch aufweisen, haben G. MEYER[2] veranlaßt einen Apparat zu konstruieren, der in zwei Hinsichten Neues bietet: erstens wird die neutrale Stellung der Drehungsachse mittels des Telephons oder des Kapillar-Elektrometers festgestellt, und zweitens wird die



Figur 49.

Spule nicht hin- und zurückgewendet, sondern in eine kontinuierliche Rotation versetzt, deren Geschwindigkeit nicht einmal konstant zu sein braucht. In Figur 48 ist ein Modell zu dem Apparat skizziert; *fgh* ist die auf einen Kern von 100 dünnen Eisenblechen aufgewickelte Spule, bestehend aus zwei getrennten Wickelungen von je 2000 Windungen 2,5 mm starken Drahtes; *l* ist der Kommutator mit den Schleifkontakten, *mm* sind Zwischenrollen, die Kurbel — hinter *d* — ist nicht sichtbar; *e* ist der Vertikalkreis mit Minutenteilung, Libelle und Nonien, an dem die Neigung der Spulenachse abgelesen werden kann; diejenige Neigung, bei der das Geräusch im Telephon verschwindet, liefert die Inklination. Durch eine geringe Abänderung kann man das Instrument geeignet machen, die Horizontalintensität zu messen.

Weitere Methoden beruhen auf dem Prinzip der Wage, es muß jedoch hier genügen, nur kurz auf sie hinzuweisen. Man kann solche Wagen entweder wie

[1] H. WILD, Bull. Ac. St. Pet. (5) **2**. S. 205. 1895. — [2] G. MEYER, Wied. Ann. **64**. S. 742. 1898.

bei der LLOYDschen und der TÖPLERschen (s. o.) Wage mit Magneten kombinieren (wofür aber absolute Resultate noch nicht vorzuliegen scheinen) oder mit Stromspulen, wie bei der Wage von C. L. WEBER[3]. Diese Wage besteht aus einer drehbaren Tragsäule, einem Wagebalken mit Schalen und einer mit dem Wagebalken verbundenen, einem Stromkreis zugehörigen Drahtspule; das Gleichgewicht ist also von den mechanischen Kräften einerseits, d. h. von dem der Wage samt aufzulegenden Gewichten zukommenden Moment der Schwere, andererseits von den elektromagnetischen Kräften, d. h. dem Produkt aus Windungsfläche, Stromstärke und der betreffenden Komponente des Erdmagnetismus abhängig. Je nachdem man den Stromkreis vertikal, horizontal oder unter $45^0$ orientiert, erhält man drei verschiedene Methoden, von denen die dritte die bequemste ist, weil man bei ihr die bei den beiden anderen noch erforderlichen Ablenkungsbeobachtungen an einem besonderen Instrumente ganz vermeiden kann, indem man zwei Beobachtungen mit senkrecht und parallel zum Meridian stehenden Wagebalken miteinander kombiniert. — Übrigens hat später C. L. WEBER[4] die Methode so modifiziert, daß er den Stromkreis zwar beibehalten, die Wägung aber aufgegeben und durch eine ablenkende Nullmethode ersetzt hat (Figur 49). Ist nämlich der um einen horizontalen Durchmesser leicht drehbare Stromkreis in seiner natürlichen Lage etwas steiler als die Inklination, der Winkel also $\gamma$ statt $I$, so ist, wenn die Schwingungsebene senkrecht zum Meridian steht, das Drehungsmoment $Z \cdot fi \cos\gamma$, im Meridian kommt noch $\pm Hfi \sin\gamma$ hinzu, in einer Zwischenlage (Winkel $\alpha$ gegen den Meridian) $Hf \sin\gamma \cos\alpha$; für ein gewisses $\alpha$ wird nun $Zfi \cos\gamma = Hf \sin\gamma \cos\alpha$, und dann ist

$$\operatorname{tang} I = \operatorname{tang}\gamma \cdot \cos\alpha \quad .$$

Man braucht also lediglich zwei Winkel zu messen.

Schließlich ist noch auf die oben skizzierte elektrodynamische Drehwage von RIECKE (S. 94) zurückzuverweisen. Kombiniert man nämlich diesen Apparat, welcher das Produkt $Zi$ aus Vertikalintensität und Stromstärke liefert, mit einem Bifilar-Galvanometer, aus dem sich $Hi$ ergibt, so findet man

$$\frac{Z}{H} = \operatorname{tang} I = \frac{2FR}{r} \cdot \frac{D}{D' l^2 \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2\right]} \cdot \frac{n\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{n}{r}\right)^2\right]}{N\left[1 - \left(\frac{N}{2R}\right)^2 + 2\left(\frac{N}{2R}\right)^4\right]},$$

wo $D$ und $D'$ die mechanischen Drehungsmomente für Drehwage und Galvanometer, $F$ die Windungsfläche der Rolle des letzteren und $n$, $r$ resp. $N$, $R$ Ablenkung und Abstand der Skalen zur Beobachtung der Drehwage resp. des Galvanometers sind. Die Methode ist, wie man sieht, mühsam, aber sie liefert, wie es scheint, Werte, deren Genauigkeit $^1/_3$ bis $^1/_2$ Bogenminute beträgt.

## H) Relative Messung magnetischer Intensitäten und Richtungen.

Die bisherigen Auseinandersetzungen bezogen sich auf die absolute Messung einer Reihe magnetischer Größen, nämlich von Stabmagnetismen, des Erdmagnetismus und seiner beiden Komponenten, der erdmagnetischen Deklination und Inklination. Die bezüglichen Methoden enthalten natürlich, da sie von weitergehendem Charakter sind, ebensoviele Methoden zu lediglich relativen Bestimmungen der gedachten Größen, d. h. zur Vergleichung der verschiedenen Werte einer und derselben Größe a) an demselben Orte zu verschiedenen Zeiten, b) an benachbarten Orten zu derselben Zeit. Der Apparat dieser Methoden wird sich

[1] C. L. WEBER, Wied. Ann. **35**. S. 810. 1888; **43**. S. 659. 1891. — [2] C. L. WEBER, Wied. Ann. **43**. S. 659. 1891.

sogar in experimenteller und rechnerischer Hinsicht meist sehr beträchtlich vereinfachen, wenn es sich nur darum handelt, untereinander vergleichbare Werte einer und derselben Größe zu gewinnen. Andererseits freilich wird es gerade für derartige Vergleichungen, zumal wenn es sich um wenig voneinander abweichende Werte handelt, auf die Empfindlichkeit der Methoden ankommen, sowie darauf, daß man wirklich ceteris paribus arbeitet, d. h. daß die Anordnungen in den verschiedenen Fällen sich ausschließlich hinsichtlich der zu vergleichenden Größe unterscheiden. Unter diesen Umständen nehmen die Methoden nicht selten eine veränderte Gestalt an, eine Gestalt, die für die absoluten Werte weniger, um so empfindlicher aber für die relativen ist. Namentlich spielen hier ganz allgemein zwei Beobachtungsformen eine wichtige Rolle, nämlich die Querstellung der zur Beobachtug dienenden Magnetnadel durch Torsion und die Kompensationsanordnung, bei welcher der absolute Hauptbetrag der betreffenden Größe ganz herausfällt und der die Vergleichungsgrößen charakterisierende Anteil auch deshalb deutlicher hervortritt. Die Resultate der Beobachtungen an den Vergleichsapparaten sind dann eventuell noch mit Hilfe absoluter Apparate auf absolutes Maß zurückzuführen, d. h. erstens der absolute Wert irgend einer beobachteten Zahl und zweitens der Wert einer Differenz zweier Beobachtungszahlen, d. h. der Skalenwert des Relativinstrumentes zu ermitteln. Im übrigen kann hier nur weniges angeführt werden; die Bedeutung der meisten Methoden erstreckt sich wesentlich auf die Geophysik, daneben ist die Anwendung der betreffenden Apparate zur Kontrolle der oben beschriebenen absoluten Methoden zu nennen[1].

**Vergleichung von Stabmagnetismen.** Die bezüglichen Methoden ergeben sich aus dem früheren ohne weiteres. Von den beiden Methoden, der Ablenkungen und der Schwingungen, die für absolute Messungen zu kombinieren waren, ist hier jede für sich ausreichend. Eine für rasche Vergleichungen sehr bequeme Methode hat Bouty[2] angegeben. Man hängt die beiden Magnete an demselben Gerüst, aber hinreichend weit voneinander entfernt auf, wählt irgend einen Winkel $\vartheta$ zwischen ihren Richtungen und beobachtet den Winkel $\alpha$, in den sich der Stab $M$ gegen den Meridian stellt; dann ist

$$\frac{M'}{M} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} \quad ,$$

speziell wenn die Magnete senkrecht zueinander gerichtet werden:

$$\frac{M'}{M} = \operatorname{tang}\alpha \quad .$$

Als dritte reiht sich ihnen die Methode der Induktionsströme in Spulen an, die man der Wirkung der zu vergleichenden Magnete in jedesmal gleicher Weise plötzlich aussetzt oder plötzlich entzieht, eine Methode, die vor den beiden ersten den Vorteil voraus hat, daß sie von den Schwankungen des Erdmagnetismus unabhängig ist. Will man zwei Stäbe von wenig verschiedenem Magnetismus vergleichen, so kann man ihre ablenkenden oder ihre induzierenden Wirkungen kompensieren, d. h. sie in entgegengesetztem Sinne auf eine Ablenkungsnadel oder auf ein mit ihren Spulen verbundenes Galvanometer wirken lassen und die Differentialwirkung messen, wobei das spezielle Verfahren sich verschieden gestalten wird, je nachdem es darauf ankommt, die Differenz oder das Verhältnis der Magnetismen zu ermitteln, Größen, deren jede in besonderen Fällen wissenswert ist. Zu derartigen relativen Messungen gehören schließlich auch diejenigen

---

[1] Außer der oben gegebenen Spezialliteratur für erdmagnetische Messungsmethoden mögen hier noch angeführt werden: C. F. Gauss, Res. a. d. Beob. d. magn. Ver. 1836—1841 u. Ges. Werke, Bd. **5**; F. Kohlrausch, Wied. Ann. **15**. S. 533. 1882; **19**. S. 130. 1883; **29**. S. 47. 1886. — Ferner die von Neumayer und Wild verfaßten Anleitungen zu magn. Beob. auf Reisen. — [2] E. Bouty, Ann. Ec. norm. (2) **4**. S. 9. 1875.

des Induktionskoeffizienten eines Stabes durch die Erde (s. o. S. 92) und des Temperaturkoeffizienten eines Stabes (s. o. S. 77 sowie weiter unten in Magnetismus und Wärme).

Über die Anwendung der Methode auf Eisenkörper s. w. u.

**Intensitätsvariometer.** Die zeitlichen Variationen der Horizontalintensität des Erdmagnetismus könnte man durch Schwingungs- oder Ablenkungsbeobachtungen verfolgen, die ersteren sind aber zeitraubend und kommen darum nicht wesentlich in Betracht. Für die Ablenkungsmethoden wird, wie schon bemerkt wurde, meist die gegen den Meridian senkrechte Stellung des hängenden Magneten benutzt, die zugleich den Vorteil bietet, daß Änderungen der Deklination einflußlos bleiben. Dagegen müssen in alle folgenden Formeln zur Erzielung größerer Genauigkeit Korrektionsglieder für die Temperatur und die zeitliche Schwächung des Stabmagnetismus eingeführt werden, wozu am besten von Zeit zu Zeit anzustellende Kontrollversuche dienen. Zur Erzielung der Quer- oder einer anderen Zwangsstellung der Magnetnadel können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Ein solcher besteht in der Torsion des Fadens, an welchem der Magnet unifilar hängt; tordiert man um den Winkel $\alpha$ und folgt der Magnet um den Winkel $\varphi$, so ist, wenn $\vartheta$ das Torsionsverhältnis ist, die einer Änderung von $\varphi$ um $\delta\varphi$ entsprechende relative Änderung von $H$ durch die leicht abzuleitende Gleichung

$$\frac{\delta H}{H} = \frac{\cos\varphi + \vartheta}{\sin\varphi}\,\delta\varphi$$

gegeben, also, wenn $\varphi = 90^0$ gewählt wird, sehr einfach:

$$\frac{\delta H}{H} = \vartheta \cdot \delta\varphi \quad .$$

Zuverlässiger ist die Anwendung der bifilaren Aufhängung, für welche die entsprechende allgemeine Formel

$$\frac{\delta H}{H} = [\operatorname{cotang}(\alpha - \varphi) + \operatorname{cotang}\varphi]\,\delta\varphi$$

gilt, für $\varphi = 90^0$ die spezielle Gleichung

$$\frac{\delta H}{H} = -\operatorname{tang}\alpha \cdot \delta\varphi$$

(wobei angenommen ist, daß der ganze Drehungswinkel $\alpha$ unter $180^0$ bleibt), oder, wenn man statt $\alpha$ den Winkel einführt, um den die Bifilarebene unten gegen oben gedreht ist, d. h. den Winkel $\alpha - \varphi = \beta$:

$$\text{allgemein:} \quad \frac{\delta H}{H} = (\operatorname{cotang}\beta + \operatorname{cotang}\varphi)\,\delta\varphi \quad ,$$

$$\text{für } \varphi = 90^0\text{:} \quad \frac{\delta H}{H} = \operatorname{cotang}\beta \cdot \delta\varphi \quad .$$

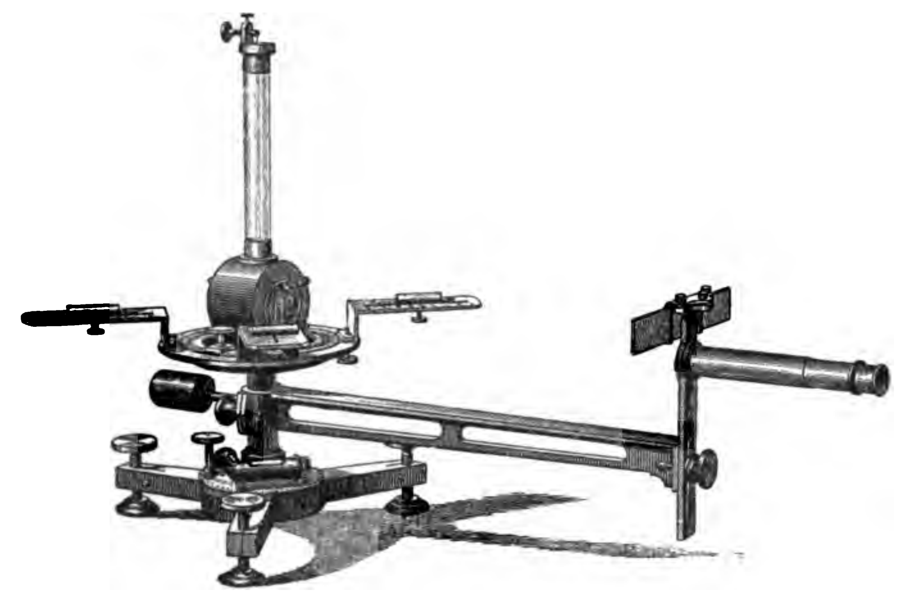
Bei Spiegelablesung mit einer um $r$ entfernten Skala kann man $\delta\varphi$, da es stets klein sein wird, durch $\delta s/2r$ ersetzen, wo $\delta s$ die Änderung der Skalenablesung ist. Das Temperaturglied hat, wenn $-\mu$ der Temperaturkoeffizient der Nadel und $\gamma$ der Ausdehnungskoeffizient der Drähte ist, die Form $(\mu + \gamma)\,\delta t$, das Zeitglied, wenn $a$ der Schwächungskoeffizient ist, die Form $-a \cdot \delta T$, unter Umständen muß man endlich auch noch die eigene Torsion der Drähte berücksichtigen. — Eine dritte Methode, die Nadel querzustellen, besteht in der geeigneten Gegenüberstellung von Magnetstäben, sogenannten Deflektoren. Die allgemeine Gleichung lautet hier

$$\frac{\delta H}{H} - \operatorname{tang}(\varphi + \alpha)(\delta\varphi + \delta\alpha) = \frac{\delta F}{F} + \operatorname{cotang}\varphi\,\delta\varphi \quad ,$$

wo $F$ die Größe der vom Deflektor am Orte der Nadel ausgeübten Kraft, $\varphi$ ihr Winkel mit der abgelenkten Nadel und $\alpha$ ihr Winkel mit der Normale des Meridians ist; für Querstellung wird unter Vernachlässigung von $\delta F$, also der Änderungen des Stabmagnetismus wiederum sehr einfach

$$\frac{\delta H}{H} = \operatorname{cotang}\varphi\,\delta\varphi \quad ,$$

die beiden Korrektionsglieder für Temperatur und Zeit sind hier beide negativ zu nehmen, $\varphi$ kann man bestimmen, indem man diejenige Stellung des Mag-



Figur 50.

neten sucht, bei welcher er ohne Einfluß auf die Nadelstellung ist; eine andere Anordnung ist mit $\varphi = 45^{0}$, es ist dann unter Berücksichtigung der Änderung der Deklination $D$

$$\frac{\delta H}{H} = 2\,\delta\varphi + \delta D \quad .$$

Statt eines Deflektors kann man nach F. KOHLRAUSCH (Figur 50) zweckmäßig deren vier verwenden, die man ähnlich auf einem Rahmen anordnet wie beim Kompensations-Magnetometer (S. 80), wobei man dann zugleich den Vorteil hat, den Winkel $\alpha$ aus der Drehung des Rahmens ableiten zu können.

Seit der Erfindung der Quarzfäden läßt sich nun auch die Torsionskraft der unifilaren Aufhängung mit gesteigertem Vorteil zur Messung der zeitlichen Variationen der erdmagnetischen Kraft verwenden. ESCHENHAGEN[1] hat daraufhin neue Magnetometer bauen lassen. Freilich muß man jetzt, um feine Quarzfäden benutzen zu können, möglichst leichte Magnetsysteme wählen, die in Rede stehenden wiegen nur etwa 1,5 g, sie bestehen aus 25 mm langen, gut gehärteten Uhrfederlamellen, der Quarzfaden braucht nur 0,05 bis 0,1 mm stark zu

[1] M. ESCHENHAGEN, Verh. d. D. Phys. Ges. 1899. 147.

sein. Ist $u$ der Torsionswinkel zwischen den Fadenenden, so gilt für den Fall der Querstellung die Gleichung

$$\frac{\delta H}{H} = \frac{\delta u}{u} \quad ,$$

für kleine Variationen mit hinreichender Genauigkeit. Je dünner der Faden, je größer also $u$, desto empfindlicher ist das Instrument. Schon für $u = 60^0$ erhält man die vielfach übliche Empfindlichkeit von 0,00005 für die Bogenminute, man kann aber ohne Gefahr bis zu drei vollen Umdrehungen gehen, womit die Empfindlichkeit auf das 20fache steigt. Der Apparat ist somit zur Verfolgung der allerkleinsten Schwankungen des Erdmagnetismus[1] geeignet (s. auch w. u.).

Die Änderungen der Vertikalkomponente des Erdmagnetismus kann man in ähnlicher Weise an einer als Wagebalken eingerichteten Inklinationsnadel verfolgen, oder man kann hierzu die schon erwähnten Apparate von LLOYD, WILD, TÖPLER u. a. benutzen. Die LLOYDsche Wage scheint sich zu diesem Zwecke besonders bewährt zu haben.

Einen besonderen Apparat für diesen Zweck, das „Quadrifilar-Magnetometer“, haben E. und K. SCHERING[2] konstruiert. Der Magnet hängt hier in eigentümlicher Weise an zwei Fadenpaaren, die, schräg durchs Zimmer laufend, an entgegengesetzten Wänden befestigt sind; die vertikalen Drehungen werden mit Spiegel und vertikaler Skala verfolgt.

**Deklinations- und Inklinationsvariometer.** Über die Verfolgung der zeitlichen Änderungen der Deklination ist wenig zu sagen, meist beobachtet man die Einstellungen der Nadel selbst, eine andere Methode, der sich eine beliebige Empfindlichkeit geben läßt, besteht in der Umkehrung der Nadel um $180^0$, so daß ihr Nordpol nach Süden, ihr Südpol nach Norden zeigt[3]. Ferner kommt hier die TÖPLERsche Wage mit zum Meridian senkrecht gestellter Schwingungsebene in Betracht[4]. — Für die Inklination liefern die oben angegebenen absoluten Methoden zum Teil sehr einfache Variationsformeln, so namentlich die Methode von LAMONT sowie die verschiedenen Erdinduktoren; für die LAMONTsche Methode gilt z. B. die Formel

$$\delta I = \frac{\cos^2 I}{2k\cos^2\alpha}\,\delta\alpha + \left(\frac{\operatorname{tang}\alpha\cos^2 I}{2k} - \sin I\cos I\right)\frac{\delta H}{H} \quad ,$$

wo $I$ und $\delta I$ die Inklination und ihre Änderung, $\alpha$ und $\delta\alpha$ die Ablenkung und ihre Änderung, $k$ der Induktionskoeffizient der LAMONTschen Stäbe ist (S. 92), eine Formel, welche unter bestimmten Umständen eine einfachere Gestalt annimmt. Den WEBERschen Erdinduktor hat WILD[5] durch geeignete Anordnung für Variationsmessungen brauchbar gemacht.

**Magnetographen.** Wie in anderen Gebieten der Meßkunde hat man auch hier, um die häufige Ablesung zu ersparen und um überdies statt einer Reihe von Einzelwerten eine fortlaufende Kurve der betreffenden Größe zu erhalten, selbstregistrierende Apparate eingeführt und in den großen magnetischen Observatorien, z. B. in Kew (England), im Park St. Maur (Frankreich), Potsdam (Deutschland) aufgestellt. Die Registrierung erfolgt durchweg nicht eigentlich auf graphischem, sondern auf photographischem Wege, indem der von einem Lichtpünktchen ausgehende und vom Drehspiegel des betreffenden Apparates reflektierte Strahl mittels Linse auf eine mit empfindlichem Papier bespannte Walze geworfen wird, welche sich vermöge eines Uhrwerks täglich einmal herumdreht; von einem festen Spiegel gelangt ebenfalls ein Strahl auf die Walze und erzeugt die geradlinige

---

[1] M. ESCHENHAGEN, Sitz. Berl. Akad. 1896. 965. — [2] K. SCHERING, Wied. Ann. **23**. S. 686. 1884. — Auch von BIESE in Helsingfors ist ein Vertikalvariometer konstruiert worden. — [3] J. C. MAXWELL, El. u. Magn. **2**. S. 141. — [4] Vgl. J. FREYBERG, Wied. Ann. **25**. S. 514. 1885. — [5] W. G. CADY, Terr. Magn. **6**. 63. 1901.

„Basis“, die überdies, vermöge einer besonderen Einrichtung, jede Stunde eine Lücke zeigt und so die Zeiten angibt. Derartige Magnetographen sind u. a. von AIRY, LEU, MASCART, ESCHENHAGEN konstruiert worden. Namentlich der letztgenannte Forscher hat sich um die Vervollkommnung dieser Methodik sehr verdient gemacht; es muß aber genügen, auf seine schon oben zitierten Mitteilungen zu verweisen. Ferner vergleiche man die Ratschläge, die F. KOHLRAUSCH[1] für den Fall sehr rascher Schwankungen gibt.

**Vergleichung erdmagnetischer Felder an verschiedenen Orten.** Der Messung der zeitlichen Relativwerte der erdmagnetischen Elemente schließt sich die entsprechende Aufgabe für örtliche Verschiedenheiten an, eine Aufgabe, die bei ihrer Wichtigkeit für wissenschaftliche Reisen sehr zahlreiche Bearbeitungen gefunden und zur Konstruktion von Reiseapparaten geführt hat, welche die Bequemlichkeit des Transports und der Beobachtungen sowie Dauerhaftigkeit mit verhältnismäßig großer Genauigkeit verbinden, und die man, wenn sie für sämtliche Elemente des Erdmagnetismus brauchbar sind, Universalmagnetometer nennt. Aber auch für physikalische Zwecke sind lokale Vergleichsmethoden oft von Wichtigkeit, zumal da die magnetischen Elemente häufig schon an zwei nahe beieinander befindlichen Orten, z. B. innerhalb eines und desselben Gebäudes, wenn es nicht (wie moderne magnetische Observatorien) ganz eisenfrei gebaut ist, beträchtliche Verschiedenheiten aufweisen. Die beiden nächstliegenden, hier anzuwendenden Methoden zur Vergleichung von $H$ sind natürlich wiederum die Schwingungs- und die Ablenkungsmethode.

Die Schwingungsmethode würde auf der einfachen Gleichung

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}$$

($t_1$ und $t_2$ Schwingungsdauer einer und derselben Nadel an den beiden Orten) beruhen, wenn nicht an $H$ die schon wiederholt erwähnten Korrekturen anzubringen wären: die Temperaturkorrektion, die $H_1$ in $H_1(1+\alpha\Theta_1)$, $H_2$ in $H_2(1+\alpha\Theta_2)$ verwandelt, also bei erheblicher Verschiedenheit von $\Theta_1$ und $\Theta_2$ etwas ausmachen kann; sodann aber die Korrektion wegen Induktion von Magnetismus in der Nadel, die den Faktor $(1+\mu H)$ hinzufügt, also wenn $H_1$ und $H_2$ erheblich verschieden sind, den von 1 merklich abweichenden Faktor $(1+\mu H_1)/(1+\mu H_2)$ hineinbringt. Für stark magnetische Stahlstäbe kann man dafür unbedenklich $1+\mu(H_1-H_2)$ setzen, für weicheres Material nicht mehr, und für weiches Eisen bleibt sogar allein das Glied mit $\mu$, also oben mit $H_1^2$, unten mit $H_2^2$ übrig, und man erhält

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{t_2}{t_1} \quad .$$

Ein alter, aber noch immer viel benutzter Apparat für die Schwingungsmethode ist die GAMBEYsche Intensitätsbussole, wegen deren Einrichtung und Handhabung auf MASCART[2] verwiesen sei.

Die Ablenkungsmethode andererseits beruht auf der Gleichung

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\operatorname{tang}\alpha_2}{\operatorname{tang}\alpha_1}$$

($\alpha_1$ und $\alpha_2$ Ablenkung der Nadel an den beiden Orten). Den Einfluß der zeitlichen und Temperatur-Änderungen darf man auch hier nicht unberücksichtigt lassen, man kann aber den ersteren größtenteils eliminieren, wenn man die erste Beobachtung nach der zweiten wiederholt, oder auch, indem man an den beiden

[1] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **60**. 336. 1897. — [2] E. MASCART, Tr. de Magn. terr. S. 178ff.

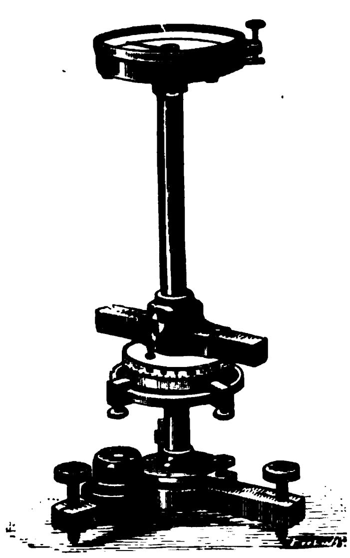
Orten gleichzeitig mit je einer Nadel (und eventuell je einem Ablenkungsstab) beobachtet, diese dann vertauscht und schließlich auch hier wieder die erste Beobachtung wiederholt. Zu derartigen lokalen Vergleichungen läßt sich z. B. das kompensierte Magnetometer von F. KOHLRAUSCH gut verwenden. Weniger zeitraubend als die eine und empfindlicher als die andere der genannten Methoden ist jedoch auch hier die Methode der erzwungenen Querstellung der Nadel, wozu (besser als andere Direktionskräfte) Ablenkungsstäbe dienen; ein derartiger Apparat ist das Ablenkungsvariometer von KOHLRAUSCH[1] (s. o. Figur 50), das man sonach als „Universalmagnetometer" bezeichnen kann. Muß man diese Stäbe, um Querstellung der Nadel zu erzielen, so orientieren, daß der Winkel der Kraft mit der Nadel $\varphi$ ist, und ist an dem anderen Orte alsdann die Abweichung von der Querstellung $\delta$, so hat man

$$\frac{H_1 - H_2}{H_1} = \delta \operatorname{tang} \varphi \quad .$$

In der Ausführung gestaltet sich die Messung am besten folgendermaßen: Als Magnetnadel benutzt man einen auf beiden Seiten spiegelnden magnetischen Stahlspiegel, orientiert ihn in der gedachten Weise, dreht die Deflektoren resp. den sie tragenden Rahmen (S. 107) um einen solchen Winkel $2\varphi$, daß der Spiegel sich um nahe 180° dreht, und mißt die dabei gegen die erste Stellung eintretende Verschiebung $n$ des Bildes einer um $r$ entfernten Skala; die entsprechende Beobachtung ($n'$) führt man an dem anderen Orte aus und findet dann

$$\frac{H' - H}{H} = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{4r} (n' - n) \quad ;$$

hierbei ist für beide Orte gleicher Skalenabstand angenommen, man braucht überdies gar nicht mit großem Skalenabstand zu beobachten und kann folglich, was für einen transportablen Apparat sehr wichtig ist, Skale und Fernrohr durch einen Arm mit dem Apparate fest verbinden, wie dies die Figur zeigt. Die Temperaturkorrektion hat wieder die Form $\gamma (t' - t)$, wo $\gamma$ durch zwei Vergleichsversuche bei hoher und niederer Temperatur ein für allemal bestimmt werden kann.



Figur 51.

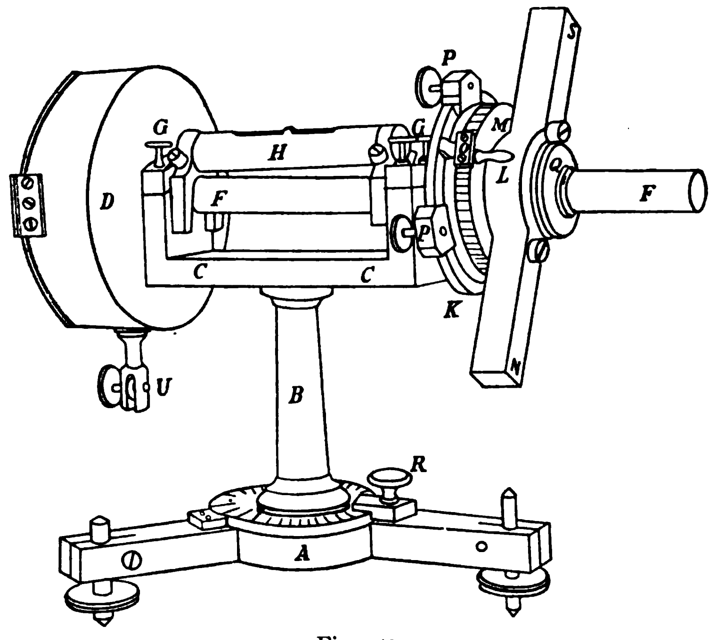
Später hat F. KOHLRAUSCH[2] ein kleines sehr kompendiöses Lokalvariometer angegeben, dessen Benutzung in sehr einfacher und rascher Weise zum Ziele führt (Figur 51). Es enthält eine horizontal bewegliche Nadel auf hohem Stativ und einen um letzteres als Achse drehbaren, an seinem Fuße angebrachten Magneten; man stellt diesen nordsüdlich ein, so daß die Nadel sich in umgekehrter Zwangslage befindet, dreht ihn dann um einen gewissen Winkel und beobachtet die entsprechende Drehung der Nadel.

In vielen Fällen ist es wichtig, nicht bloß die horizontale Komponente, sondern den ganzen Erdmagnetismus in seinen bekannten Schwankungen zu verfolgen: hierzu dient das Gebirgsmagnetometer von O. E. MEYER[3]. Man kann sich dieses Instrument (Figur 52) durch Umlegung aus dem von KOHLRAUSCH entstanden denken;

[1] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **19**. S. 130. 1883. — [2] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **29**. S. 47. 1886. — [3] O. E. MEYER, Wied. Ann. **40**. S. 489. 1890.

das Stativ läuft in einen horizontalen Träger aus, an dessen einem Ende die Inklinationsnadel, an dessen anderem Ende der Deflektor sich befindet, und der mit diesen Teilen um das Stativ drehbar ist. Man bringt bei entferntem Deflektor die Nadel zunächst in den Meridian und in die Inklinationsrichtung, dann mittels des Deflektors in die umgekehrte Zwangslage und bringt ihr schließlich durch die Drehung des Deflektors eine Ablenkung bei. Wählt man den Drehungswinkel des Deflektors $\varphi$ so, daß der Drehungswinkel $\omega$ der Nadel an einem bestimmten Orte $90^0$ wird, und beobachtet man an einem anderen Orte $\omega + \delta$, so sind Verhältnis und relative Differenz der ganzen Erdmagnetismen durch die Formeln

$$\frac{F'}{F} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}, \quad \frac{F' - F}{F} = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$$




Figur 52.

bestimmt. Bei beiden Apparaten resp. Formeln sind die höheren Glieder der magnetischen Fernwirkung vernachlässigt, der betreffende Fehler macht sich aber bei den Beobachtungen kaum geltend.

Beachtenswert sind ferner die von HEYDWEILLER[1] konstruierten bzw. vorgeschlagenen Instrumente; ihr Grundprinzip ist folgendes: Zwei gleiche übereinanderliegende Deklinationsnadeln mit gemeinsamer Drehungsachse werden in solchen Abstand gebracht, daß sie sich senkrecht, jede unter $45^0$ gegen den magnetischen Meridian, kreuzen; dann bewegt sich bei Drehungen der Nadeln jeder der vier Pole in einem nahezu homogenen Felde, die Drehung ist also der Änderung des Feldes proportional. Zunächst handelt es sich um ein einfaches Lokalvariometer für die Horizontalintensität, das vor dem von KOHLRAUSCH manche Vorzüge hat, sodann um ein feineres Instrument mit Spiegelablesung, endlich um ein Vertikalvariometer, das vielleicht nicht ganz so genaue Resultate gibt wie die Instrumente von O. E. MEYER und C. L. WEBER (s. o.), sich aber durch größere Einfachheit auszeichnet.

---

[1] A. HEYDWEILLER, Wied. Ann. **64**, 795. 1898.



Schließlich sei noch auf ein Spezialkapitel hingewiesen, welches für erdmagnetische Messungen von großer Wichtigkeit ist, nämlich auf die besonderen Einrichtungen für magnetische Messungen in hohen Breiten, in denen die Verhältnisse ganz anders liegen als in mittleren Breiten, und in denen es z. B. sehr unzweckmäßig sein würde, die Messung des dort sehr kleinen $H$ zur Grundlage aller anderen Messungen zu machen. Vielmehr wird man dort $Z$ oder die ganze Kraft $F$ direkt messen, z. B. nach dem LLOYDschen (S. 93) Verfahren[1]. Im übrigen muß es genügen, auf eine zusammenfassende Schrift von WEYPRECHT[2] hinzuweisen.

## I) Messung magnetischer Felder.

Die Aufgabe, die Stärke und Richtung irgend eines magnetischen Feldes (S. 33) zu bestimmen, ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe, dieselben Größen für den Erdmagnetismus, also Intensität, Deklination und Inklination zu ermitteln. Handelt es sich um künstlich erzeugte Felder von schwacher Intensität, also von einer Intensität, welche von derselben Größenordnung ist wie $H$, $Z$ oder $F = \sqrt{H^2 + Z^2}$, so können die oben aufgeführten Methoden natürlich ohne weiteres Anwendung finden; liefert doch jede Messung von $H$, die in einem von Lokaleinflüssen nicht freien Raume angestellt ist, streng genommen die Stärke und Richtung eines teils natürlichen, teils künstlichen Feldes. Für starke Felder, wie es die absichtlich und zu bestimmten Zwecken erzeugten meist sind (Felder von Elektromagneten, Dynamomaschinen usw.) kommen dann besondere Methoden hinzu. Über diese gibt das Folgende eine gedrängte Übersicht, ohne daß dabei auf die — meist ganz anderen Kapiteln angehörige — Theorie der Methoden näher eingegangen wird[3].

Am einfachsten ist die Bestimmung der Stärke von Feldern, die ausschließlich von elektrischen Strömen herrühren. Hier handelt es sich, von den geometrischen Verhältnissen der Stromträger abgesehen, lediglich um die Stromstärke; man vergleiche hierüber im Artikel Elektromagnetismus. Sobald aber bei der Felderzeugung Magnete, sei es auch nur zur Unterstützung von Strömen, mitwirken, ist eine solche Rechnung nicht mehr durchführbar.

1. **Magnetometrische Methoden.** Hierüber ist dem schon Gesagten wenig hinzuzufügen. Das GAUSSsche Verfahren ist natürlich auf horizontale, homogene Felder beschränkt, und die Feldstärke darf etwa das fünffache des Erdfeldes, d. h. etwa 1 im absoluten Maße nicht übersteigen, sonst werden die Ablenkungen zu klein.

2. **Elektrodynamische Methoden.** Man kann entweder die verschiebende Kraft des Feldes auf einen geradlinigen oder die drehende auf einen kreisförmigen Stromleiter beobachten; letztere Methode kann schon deshalb genauer ausgestaltet werden, weil man eine ganze Spule nehmen kann.

a) Methode von Lord KELVIN[4]. Figur 53 wird zum prinzipiellen Verständnis genügen. Das Feld ist horizontal und senkrecht zur Papierebene, $f$ ist der zwischen den Polschuhen $F$ herabhängende Draht, dem durch die Quecksilbernäpfe $C$ der Strom $i$ zugeführt wird. Die auf ihn nach links ausgeübte Kraft $K = ilH$ ($l$ die wirksame Länge) wird äquilibriert durch die, kraft der Verbindungen $t_1$ und $t_2$ erzeugte Spannung der Pendelfäden $p_1P_1$ und $p_2P_2$; aus den Dimensionen, den Skalenablesungen $S_1$ und $S_2$ und den Pendelgewichten

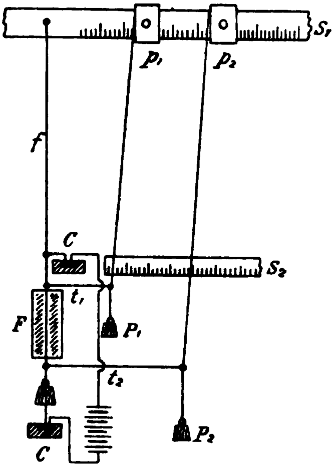
[1] H. LLOYD, Trans. Ir. Ac. **23**. 1858; vgl. Encycl. Brit. 16, S. 160. — [2] C. WEYPRECHT, Prakt. Anl. z. Beob. d. magn. Erschein. in hohen Breiten. Wien 1881. — [3] Ausführliches hierüber u. a. in den Büchern von F. KOHLRAUSCH, HEYDWEILLER, MASCART und JOUBERT, EWING, Magnet. Induktion, und H. DU BOIS, Magnet. Kreise, Berlin 1894, S. 306 ff. Die in letzterem Buche gegebene vortreffliche und besonders die neueren Methoden berücksichtigende Darstellung ist hier benutzt und zum Teil ergänzt worden. — [4] Vgl. A. GRAY, Abs. Meas. in El. a. Magn. **2**. S. 701. Lond. 1893.

$P_1$ und $P_2$ kann man $K$ und alsdann aus obiger Formel $H$ in absolutem Maße bestimmen. Eine Modifikation des Verfahrens besteht darin, daß man den Draht durch ein Gewicht spannt und seine Ausbuchtung mißt (EWING). Eine Kompensationsmethode dieser Art, bei der ein senkrechter Strom auf einen ganz kleinen Kompaß wirkt, hat A. RUSSEL[1] angegeben.

b) Das Drehungsmoment auf eine Spule kann durch bifilare Aufhängung, Torsion oder Wägung bestimmt werden.

$\alpha$) Methode von STENGER[2]. Eine kleine Spule mit einer Windungslage hängt bifilar an zwei Drähten, die zugleich den Strom zuführen; die Windungsebenen sind den — als horizontal vorausgesetzten — Kraftlinien des Feldes parallel. Aus der Ablenkung $\alpha$ durch den Strom $i$, der bifilaren Direktionskraft $D$ und der Windungsfläche $f$ ergibt sich die Feldstärke

$$M = \frac{D \operatorname{tang} \alpha}{f i} \quad .$$



Figur 53.

Die Methode ist sehr empfindlich und gestattet Feldstärken von etwa 100 Einheiten sicher und bequem auf 0,1 % zu bestimmen; durch geeignete Wahl von $i$ kann man aber die Empfindlichkeit beliebig variieren und so auch sehr starke Felder messen. Der Apparat ist offenbar eine Umkehrung des Bifilargalvanometers von F. KOHLRAUSCH (Bd. 4, S. 294).

$\beta$) Die Torsion hat zuerst A. DU BOIS-REYMOND[3] benutzt — man hat hier offenbar die Umkehrung des DEPREZ-DARSONVALschen Galvanometers (Bd. 4, S. 293) vor sich. Hierher gehört auch das bequeme, tragbare Feldmeßinstrument von EDSER und STANSFIELD[4].

$\gamma$) ÅNGSTRÖM[5] endlich bringt die Spule mit einer Wage in Verbindung und kompensiert die Wirkung durch Gewichte.

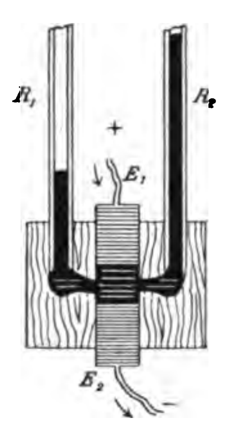
$\delta$) Eine kombinierte Anordnung, namentlich für starke Felder, hat COTTON[6] angegeben; es muß aber an diesem Hinweis genügen.

3. **Methode des hydrostatischen Drucks.** Diese Methode schließt sich am nächsten an 2a) an, nur tritt an die Stelle des Drahtes ein flüssiger Leiter, nämlich Quecksilber. Dieses wird in eine flache isolierende Kammer eingeschlossen, die von oben nach unten von dem Strom $E_1 E_2$ (Figur 54) durchflossen wird, in der Feldrichtung — von vorn nach hinten — dagegen äußerst schmal — Dicke $d$ — ist; infolge der elektrodynamischen Wirkung bildet sich nun in den kommunizierenden Röhren $R_1$ und $R_2$ eine Niveaudifferenz heraus, die einen Überdruck $P$ darstellt. Es gilt dann die Gleichung $Hi = Pd$, und aus ihr kann man entweder — wie beim LIPPMANNschen Galvanometer (Bd. 4, S. 311) — $i$ aus $H$, oder umgekehrt $H$ aus $i$ ermitteln. Einen derartigen Apparat hat zuerst LEDUC[7] beschrieben und angewandt; das Quecksilber befindet sich hier zwischen zwei Glasplatten, die Röhren haben Erweiterungen mit über das Quecksilber gegossenem Wasser oder Alkohol, wodurch die Empfindlichkeit offenbar bedeutend gesteigert wird. Später hat H. DU BOIS[8] das Instrument modifiziert,

[1] A. RUSSEL, Electrician **31.** 282. 1893. — [2] F. STENGER, Wied. Ann. **33.** 312. 1888. — [3] A. DU BOIS-REYMOND, Elektrotechn. Zeitschr. **12.** 305. 1891. — [4] EDSER und STANSFIELD, Phil. Mag. (5) **34.** 186. 1892. — [5] K. ÅNGSTRÖM, Rep. d. Phys. **25.** 383. 1889. — [6] A. COTTON, J. de phys. (3) **9.** 383. 1900. Daselbst sind noch weitere Methoden von HOULLEVIGNE, MIOT und GÉRARD erwähnt. Eine schematische Figur des COTTONschen Apparates mit kurzer Beschreibung findet man in Beibl. 1900. 1162. — [7] A. LEDUC, J. de Phys. (2) **6.** 184. 1887. — [8] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35.** 142. 1888.

um es auch im engen Raume zwischen Polschuhen benutzen zu können. Zur relativen Ausmessung von starken Feldern von etwa 50 bis 2000 Einheiten ist das Instrument sehr bequem und recht genau; absoluten Messungen stellt sich die Schwierigkeit die Größe $d$ genau zu messen, hinderlich in den Weg.

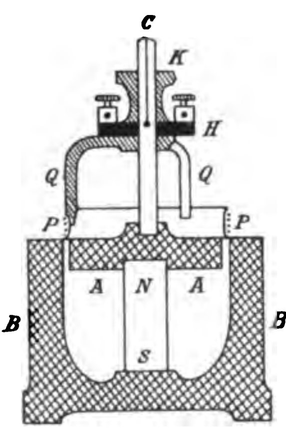
4. **Induktionsmethode.** Sie beruht auf der Induktion von Magnetismus in weichem Eisen oder von Strömen in Drahtspulen, welche eintritt, sobald diese Prüfkörper ihre Lage gegen die Kraftlinien ändern; man benutzt fast ausschließlich Drahtspulen, stellt sie mit ihrer Ebene senkrecht gegen die Kraftlinien und dreht sie alsdann um einen bestimmten Winkel: je nach dem Winkel tritt in dem Ausdruck für die Feldstärke ein anderer Faktor auf, für 90° ist er 1, für 180° (der methodisch bequemste Fall) ist er $^1/_2$. Die Methode entspricht offenbar der Anwendung des Erdinduktors. Die relative Feldstärke ist ceteris paribus einfach dem Ausschlag des Galvanometers proportional. Um die Feldstärke in absolutem Maße zu erhalten, muß man dann noch die Windungsfläche der Spule, den Widerstand des ganzen Stromkreises, sowie Schwingungsdauer, Reduktionsfaktor und Dämpfungsverhältnis des benutzten Galvanometers bestimmen. Man kann die Ermittelung dieser Größen mit Ausnahme der ersten vermeiden, wenn man in den Stromkreis des Galvanometers und der Spule einen Erdinduktor einschaltet und die Ausschläge $b$ und $B$ bei Umlegung der Spule und des Erdinduktors (des letzteren z. B. um eine vertikale Achse) nacheinander beobachtet[1]; sind $f$ und $F$ die Windungsflächen von Spule und Erdinduktor, so ist dann die Feldstärke



Figur 54.

$$H = \frac{F}{f} \cdot \frac{b}{B} \cdot H_0 \quad .$$

Statt die Spule zu drehen, kann man sie auch aus dem Felde herausziehen. Ferner kann man bei elektrisch erregten Feldern auch den erregenden Strom umkehren, erhält dann aber nicht genau denselben Wert, weil in $H$ die Komponente des Erdmagnetismus nach der Richtung von $H$ das eine Mal mitenthalten ist, das andere Mal aber nicht; soll sie nicht einbegriffen werden, so kann man sie im ersten Falle natürlich leicht in Abzug bringen. Häufig handelt es sich um die Messung des Magnetismus, den bestimmte Körper in Feldern von bestimmter Stärke annehmen, und es können dann beide Größen (die Ursache und die Wirkung) durch Induktionsströme in je einer besonderen Spule gemessen werden; man sieht leicht ein, wie sich diese Messung dann gestaltet.



Figur 55.

Ausmessung von Feldern durch Prüfspulen. In neuester Zeit hat die Methodik der topographischen Ausmessung beliebiger Felder durch sogenannte Prüfspulen eine besondere Ausbildung erfahren; es sei daher hier wenigstens eine kurze Skizze gegeben. Als Spule dient meist eine einzige Drahtwindung, deren Windungsfläche man direkt oder indirekt (vgl. Bd. **4**, S. 278) bestimmt; zur Strommessung dient ein ballistisches Galvanometer (vgl. Bd. **4**, S. 283). Die Feldstärke ergibt sich aus der Formel $H = cu/f$, wo $u$ der Ausschlag, $f$ die Windungsfläche und $c$ ein Faktor ist. Dieser Faktor muß mit Hilfe irgend eines „Etalons"

---

[1] Vgl. z. B. A. v. Ettingshausen und W. Nernst, Rep. d. Phys. **23**. 111. 1887, sowie G. Quincke, Wied. Ann. **24**. 347. 1885.

ermittelt werden; also entweder durch den Erdinduktor (s. o.), oder, da man neuerdings die Hineinziehung erdmagnetischer Faktoren in magnetische Messungen möglichst vermeidet, durch andere Etalons. Als solche haben sich besonders zwei bewährt, nämlich: 1. die kernlose Hilfsspule nach Lord KELVIN, mit genau meßbaren geometrischen Dimensionen, erregt durch einen in absolutem Maße gemessenen Eichstrom; oder 2. durch den von HIBBERT[1] angegebenen „Permanenten Feldetalon", der im wesentlichen aus einem durch geeignete Vorbehandlung gut konstant gemachten (vgl. o. S. 12) Stahlmagneten besteht, gegen den sich die Spule in, durch Anschläge genau festgelegter Weise verschieben läßt. Figur 55 gibt eine Skizze des Apparates. Der Stahlmagnet $NS$ ist durch die Eisenscheibe $AA$ und die Eisenglocke $BB$ geschlossen, bis auf einen schmalen Ring, durch den sich die Spule $PP$ eben hindurchbewegen kann; letztere ist mit den Armen $Q$ an der Ebonitscheibe $H$ befestigt und wird mit dem Knopf $K$ an der Stange $C$ gehoben oder gesenkt. Bei geeigneter Wahl der Dimensionen und der Stärke der Induktion bewährt sich dieser Etalon, wie Dauerversuche von HIBBERT zeigen, als hinreichend konstant.

5. **Dämpfungsmethode.** Die Dämpfung der Schwingungen, welche ein Leiter in einem kräftigen Magnetfelde erfährt, ist nicht unbeträchtlich; ihr logarithmisches Dekrement, das sich bekanntlich sehr genau bestimmen läßt, ist dem Quadrate der Feldstärke proportional, was für relative Messungen genügt[2]. Will man absolute Messungen anstellen, so benutzt man besser einen Spezialfall und verfährt folgendermaßen. Man hängt eine Spule vom Trägheitsmoment $K$ und von der Windungsfläche $F$ unifilar oder bifilar auf und ermittelt ihre Schwingungsdauer $T$ bei offenem Stromkreise; dann schließt man diesen durch einen Rheostaten (ohne Selbstinduktion) und verringert den Rheostatenwiderstand so lange, bis die Schwingung gerade aperiodisch wird, was sich ziemlich scharf beurteilen läßt; dieser Widerstand sei $W$. Es gilt alsdann die einfache Formel[3]:



Figur 56.

$$HF = \sqrt{\frac{4\pi W K}{T}} .$$

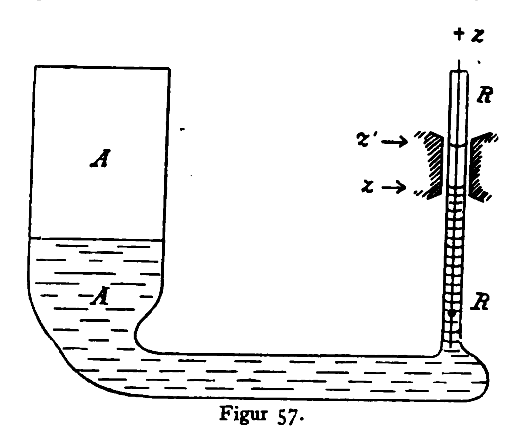
6. **Hall- und Wismuthmethode.** Diese beiden Methoden stehen in nahem Zusammenhange miteinander.

a) Hall-Methode. Schickt man durch ein Metallblech der Länge nach einen Strom und bringt es gleichzeitig in ein zu seiner Ebene senkrechtes Feld, so besteht zwischen gegenüberliegenden Randpunkten eine Potentialdifferenz, die

[1] W. HIBBERT, Phil. Mag. (5) **33**. S. 307. 1892. — [2] A. GRAY, Phil. Mag. (5) **16**. 144. 1883. — H. LUGGIN, Wien. Ber. **95**. 646. 1887. — U. a. m. — [3] Vgl. A. GRAY, Abs. Meas. in Electr. and Magn. **2**. 708. 1893.

man mit einem Galvanometer bestimmen kann. Die Ausschläge sind innerhalb gewisser Grenzen der Feldstärke proportional, z. B. für Gold und Silber bis zu Feldern von etwa 25000 Einheiten[1]; außerdem sind sie dem primären Strom proportional, man kann also die Empfindlichkeit bequem abstufen.

b) Wismutmethode. Der elektrische Widerstand der Metalle erfährt im Magnetfelde eine Änderung; während dieselbe bei den meisten Metallen sehr geringfügig ist, ist sie beim Wismut sehr beträchtlich, derart, daß sein Widerstand in kräftigen Feldern auf mehr als das Doppelte des normalen Wertes steigen kann. Nachdem deshalb zuerst LEDUC[2] vorgeschlagen hatte, Felder mit Hilfe von Wismutplättchen oder Röhren, die mit geschmolzenem Wismut gefüllt sind, auszumessen — wofür er die nötigen Formeln entwickelte, — ist es LENARD, z. T. in Verbindung mit HOWARD[3] gelungen, eine brauchbare Methode auszuarbeiten. Reiner, dünner Wismutdraht wird in eine ebene, bifilare Spirale geformt und zwischen Glimmerblättchen verkittet; die Dicke des Präparates beträgt noch kein mm, sein Widerstand etwa 10 Ohm; die Figur 56 gibt eine Skizze. Die Spirale wird senkrecht zur Feldrichtung gestellt. Da zwischen Widerstand und Feldstärke keine einfache Beziehung besteht, muß man die Spirale vorher eichen; zur Ermöglichung direkter Ablesung der Feldstärke haben HARTMANN und BRAUN eine zugehörige Meßbrücke konstruiert. Für die topographische Auswertung konstanter Felder hat sich die Wismutspirale sehr bewährt; dagegen darf sie nach neuesten Untersuchungen[4] wegen der mit der Erscheinung verbundenen Hysteresis zur Bestimmung von Momentanwerten schnell wechselnder Felder nicht ohne weiteres verwandt werden. — Über die Verwendung von elektrolytisch niedergeschlagenem Wismut zu vorliegendem Zwecke vergleiche man eine Arbeit von van AUBEL[5].



Figur 57.

7. **Wasserstrahlmethode.** Auf Induktion beruht auch die von BOUTY[6] angegebene Methode. Ein Strahl von Leitungswasser, mit gleichförmigem Querschnitt und parallelen Geschwindigkeiten der Fäden fließt senkrecht zum Felde: in der Querrichtung des Strahles wird dann eine elektromotorische Kraft $E$ induziert, die mit einem LIPPMANNschen Quecksilber-Elektrometer gemessen wird. Ist $d$ die Strahldicke und $m$ die in der Sekunde vorbeifließende Wassermenge, so ist: $H = Ed/m$, woran noch gewisse Korrektionen anzubringen sind. Die Methode eignet sich natürlich nur für starke Felder, erlaubt dann aber noch bequem 0,25 Einheiten zu messen.

8. **Steighöhenmethode.** Sie ist eine Umkehrung der von QUINCKE[7] zur Untersuchung der Eigenschaften schwach magnetischer Stoffe erfundenen Methode, ist von H. DU BOIS[8] weiter ausgebildet worden und läßt sich an dem Schema der Figur 57 kurz erläutern. Ein U-Rohr besteht aus einem breiten „Reservoirrohr“ $AA$ und einem engen „Steigrohr“ $RR$; bringt man letzteres in ein quer gerichtetes Feld, so steigt (oder fällt) das Niveau von $z$ auf $z'$; für schwach

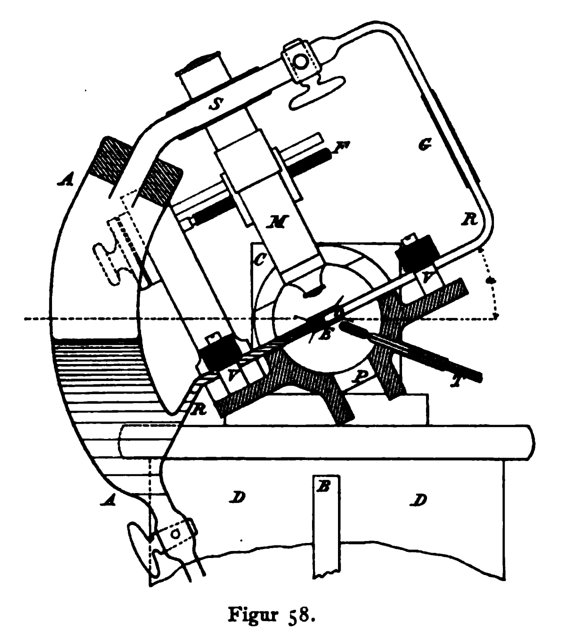
---

[1] A. KUNDT, Wied. Ann. **49**. 257. 1893. — [2] A. LEDUC, J. de Phys. (2) **5**. 116. 1886. — **6**. 189. 1887. — [3] P. LENARD und HOWARD, Elektrot. Z. **9**. 340. 1888. — LENARD, Wied. Ann. **39**. 619. 1890. — [4] W. EICHHORN, Drude Ann. **3**. 20. 1900. — [5] van AUBEL, Arch. Sc. phys. et nat. **33**. 222. 1895. — [6] E. BOUTY, J. de Phys. (3) **7**. 253. 1898. — C. R. 126. 238. 1898. — [7] G. QUINCKE. Wied. Ann. **24**. 374. 1885. — [8] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. 137. 1888

magnetisierbare Flüssigkeiten ist dann, wenn $p$ der der magnetischen Steighöhe entsprechende Druck und $\varkappa$ die Susceptbilität der Flüssigkeit (s. Art. Magnetische Induktion) ist:

$$H = \sqrt{\frac{2p}{\varkappa}} .$$

Die Wirkung ist natürlich nur in sehr starken Feldern beträchtlich: in den stärksten herstellbaren — 40000 Einheiten — würde Wasser nur um 0,5 cm fallen; konzentrierte Eisenchloridlösung würde freilich um 50 cm steigen, hier wäre aber die einfache Formel kaum noch exakt gültig. — H. DU BOIS[1] hat daher bei seinem in Figur 58 abgebildeten Apparat den Kunstgriff angewendet, das Steigrohr derart zu neigen, daß es mit der Horizontalen den Winkel $u$ bildet, wodurch die Methode offenbar im Verhältnis $1 : \sin u$ empfindlicher wird. Das U-Rohr ist hier durch Glasgefäß *AARRGS* ersetzt, mit dem sich das Mikroskop $M$ zur Beobachtung der Kuppe $E$ mitdreht. Als Flüssigkeit wird am meisten eine halbkonzentrierte Lösung des grünen rhombischen Nickelsulfats empfohlen. Ist $g$ die Schwere, $d$ die Dichte der Flüssigkeit und $b$ die schräge Steighöhe, so hat man die Formel:



Figur 58.

$$H = \left(\sqrt{\frac{2gd}{\varkappa}}\right) \cdot \sqrt{b} \sin u \quad ,$$

wo man die Klammer durch Wahl der Konzentration leicht auf eine runde Zahl — z. B. 10000 — bringen und dem $u$, je nach der Feldstärke, einen passenden Wert geben kann.

**9. Optische Methode.** Sie beruht auf der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes (s. w. u.) in durchsichtigen Substanzen. Für in der Lichtrichtung gleichförmige Felder ist sie einfach der Feldstärke und der Schichtdicke proportional; der Proportionalitätsfaktor, also die Drehung im Felde 1 durch die Schicht von der Dicke 1, die sogenannte VERDETsche Konstante, ist für Wasser, Schwefelkohlenstoff, einige andere Flüssigkeiten und Jenaer Gläser sehr gut bekannt; für Schwefelkohlenstoff ist sie für Natriumlicht und 18° C 0,0000122 im Bogenmaß oder 0,042′; für Wasser 0,0130′.

Es ist ausdrücklich hervorzuheben, daß der Drehungssinn ausschließlich von der Feldrichtung, nicht aber von der Lichtrichtung abhängt. Läßt man daher einen Strahl nahezu senkrecht auf die Platte oder die Schicht auffallen und an einer hinten angebrachten Silberschicht reflektiert werden, so erhält man die doppelte Drehung $\omega$ und somit, wenn $d$ die Dicke und $c$ die VERDETsche Konstante ist: $H = \omega / 2cd$.

Aus gut haltbarem Glase kann man sich leicht dauernde, mit Eichung versehene Etalons herstellen, die überdies bequem tragbar sind. H. DU BOIS[2] hat

---

[1] H. DU BOIS. Wied. Ann. **35**, 146. 1888. — [2] H. DU BOIS. **51**. 549. 1894.

solche Etalons aus schwerstem, stark drehendem Jenaer Flintglas herstellen lassen, und zwar schwach keilförmig, so daß die bei planparallelen Platten störenden falschen Reflexe wegfallen. Bei 1 mm Dicke eignen sich diese Etalons für Felder von der Ordnung 1000.

## Weitere Messungen.

Der Feldmessung wäre nun die Messung der in den Körpern induzierten Magnetisierung anzuschließen, mit allen ihren besonderen Ausgestaltungen: Magnetisierungskurven, Verteilung der Magnetisierung in den Körpern, Achsenrichtung, Polabstand, Messung der Tragkraft, besondere Einrichtungen für schwach induzierbare Körper, usw. Aus leicht ersichtlichen Gründen werden diese Methoden jedoch besser im Anschluß an die betreffenden Theorieen besprochen; es sei daher auf die folgenden Artikel, namentlich: „Magnetische Induktion“ und „Magnetismus der verschiedenen Körper“, verwiesen.

# Magnetische Induktion.

Von F. AUERBACH.

## Einleitung.

Die beiden ersten Artikel dieses Bandes betreffen das Verhalten von Körpern und Feldern, die sich im magnetischen Zustande befinden; die Wirkungen solcher Körper und Felder werden untersucht und gemessen. Und zwar handelt es sich dabei im wesentlichen um sogenannte ponderomotorische Wirkungen, d. h. um anziehende, abstoßende, ablenkende Kräfte, die Bewegungen im Raume zur Folge haben. Nun üben aber magnetische Kräfte noch eine andere Art von Wirkungen aus, die man magnetomotorische nennen kann, und die darin bestehen, daß Körper, die hisher unmagnetisch waren, nunmehr magnetisch werden, oder allgemeiner, daß der magnetische Zustand der Körper eine Änderung erfährt. Die hiernach noch auszufüllende Lücke fällt mit einer anderen offenbar zusammen. Wir haben nämlich zwar von Magneten gehandelt; wie aber die betreffenden Körper zu Magneten geworden sind, darüber ist lediglich das für die Praxis des Verfahrens notwendige kurz angegeben worden.

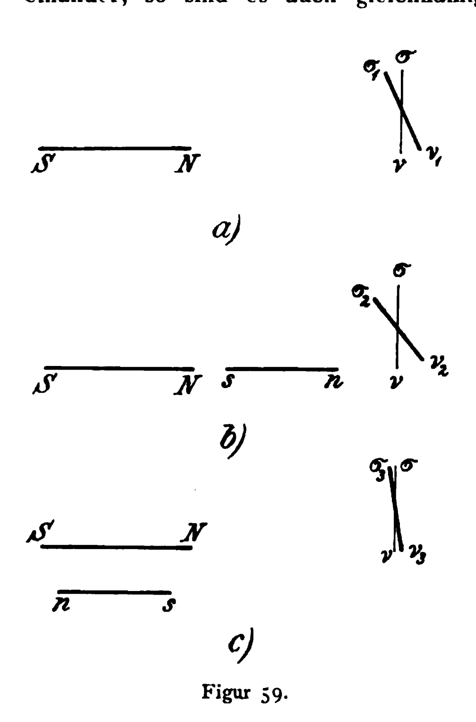
Es tritt daher nunmehr die Aufgabe an uns heran, ganz allgemein, theoretisch und empirisch, das Magnetischwerden der Körper unter dem Einflusse magnetisierender Kräfte zu untersuchen. Man nennt diesen Vorgang Magnetisierung oder magnetische Influenz oder magnetische Induktion; der letztere Ausdruck ist in neuerer Zeit allgemein üblich geworden. Von dem klangähnlichen Ausdruck „Magneto-Induktion", worunter die Induktion elektrischer Ströme durch Magnete verstanden wird, ist er natürlich ganz verschieden.

Zur Entwickelung der Lehre von der magnetischen Induktion ist man im Laufe der Zeiten von sehr verschiedenen Grundlagen und Vorstellungen ausgegangen; ihre äußersten Extreme sind folgende: einerseits die Vorstellung eines Stabes, der, wenn er magnetisiert wird, Pole erhält, in denen man sich seine Wirkungen nach außen mehr oder weniger konzentriert denken kann; andererseits die Vorstellung eines geschlossenen Ringes, der, eben, weil er geschlossen ist, bei der Magnetisierung gar keine Pole erhält, der somit als Ganzes genommen keine Wirkung in die Ferne ausübt. Die Stabform war die natürliche Grundlage in der älteren Zeit, in der der Schwerpunkt magnetischer Untersuchungen die fertigen Magnete, die permanenten Stahlmagnete oder die temporären Elektromagnete und ihre Wirkungen nach außen betraf; zugleich diejenige Körperform, an der sich die älteren Vorstellungen von der molekularen Natur des Magnetismus nach und nach entwickelten. Die Ringform andererseits erwies sich in neuerer Zeit, im Zusammenhang mit der Ausnutzung des Magnetismus in der Elektrotechnik, als die geradezu fundamentale und typische Form, und sie wurde der Ausgangspunkt einer ganz neuen Idee, der Idee des „magnetischen Kreises", der nunmehr in formell vollkommener Analogie mit dem elektrischen Stromkreise behandelt wird. In einer Zeit, wo die Vorstellung hauptsächlich an

elektrische und magnetische Fluida anknüpfte, konnte jene Analogie gar nicht aufkommen und sie wäre, wenn sie aufgekommen wäre, zurückgewiesen worden, weil sich die Träger der elektrischen Fluida, die Metalle, Salzlösungen usw. diesen Fluidis gegenüber als Leiter, das Eisen hingegen den magnetischen Fluidis gegenüber als Nichtleiter verhielt bzw. so angesehen werden mußte. Gegenwärtig aber denkt man bei den elektrischen und magnetischen Vorgängen weniger an diese Fluida als an Kraftströmungen: und diesen gegenüber ist die in Rede stehende Analogie, wie sich gezeigt hat, bis zu einem hohen Grade durchführbar; man gelangt dann zu einer für die technischen Anwendungen fruchtbaren und bequemen Darstellung der Vorgänge bei der magnetischen Induktion.

## Grundversuche.

Die Tatsache der magnetischen Induktion, d. h. die Erscheinung, daß jeder Eisenkörper im magnetischen Felde selbst ein Magnet wird, läßt sich in überaus mannigfaltiger Weise veranschaulichen. Ein Eisenstab z. B., welcher an einem Magneten, von diesem angezogen, hängt, erlangt dadurch die Fähigkeit, selbst wiederum ein zweites Eisenstäbchen zu tragen, und das geht in der Weise fort, daß man ganze Ketten bilden kann, von welchen nur das erste Glied von vornherein ein Magnet gewesen zu sein braucht. Dieselbe Erscheinung bietet sich bei dem schon wiederholt herbeigezogenen Experimente dar, bei welchem ein Magnet in Eisenspäne getaucht und wieder herausgezogen wird; die Eisenspäne haften nicht bloß am Magneten, sondern auch aneinander. Bringt man zwei Magnete mit ihren gleichnamigen Polen, an denen Feilspäne haften, nahe aneinander, so sind es auch gleichnamige Pole der Feilspäne, welche einander am nächsten kommen, die letzteren stellen sich daher möglichst quer; bei Annäherung ungleichnamiger Pole dagegen stellen sie sich möglichst in Richtung aufeinander ein. Natürlich wirken durch Induktion magnetisch gewordene Körper ablenkend auf Nadeln. Bringt man z. B. in die Nähe des einen Poles $\nu$ einer Nadel $\nu\sigma$ einen Magneten $SN$, so daß die Nadel bis zur Stellung $\nu_1\sigma_1$ abgelenkt wird (Fig. 59a) und stellt man nun einen Eisenstab $sn$ so auf, daß er mit dem Magneten eine Linie bildet, also hinter ihm oder vor ihm (besser letzteres wegen der stärkeren Wirkung), so wird die Ablenkung der Nadel auf $\nu_2\sigma_2$ vergrößert (Fig. 59b); stellt man den Stab dagegen neben dem Magneten auf, parallel mit ihm, so wird die Wirkung verkleinert (Fig. 59c). Im ersteren Falle wird nämlich, wie man ohne weiteres einsieht, der Stab durch Induktion in demselben Sinne magnetisch wie der Magnet, im letzteren dagegen in entgegengesetztem Sinne. Stellt man einen Eisenstab so auf, daß eines seiner Enden nach dem Nordpol der Erde, das andere nach ihrem Südpol weist und nähert man ihm jetzt eine bewegliche Magnetnadel, so wird deren Nordpol vom ersteren Pole abgestoßen, vom letzteren angezogen. Jener ist also, wie zu erwarten, ein Nord-



Figur 59.

pol, dieser ein Südpol. Man nennt den Magnetismus, der auf diese Art entstanden ist, Magnetismus der Lage, und es ist zu bemerken, daß es kaum ein Stück Eisen gibt, welches nicht einen, wenn auch geringfügigen Magnetismus der Lage besäße — eine Tatsache, welche in dem dynamoelektrischen Prozeß von ungeahnter Bedeutung geworden ist. Hängt man an zwei dicht nebeneinander herabhängenden Fäden je ein Eisenstäbchen auf und nähert man ihnen jetzt von unten den Pol eines Magneten, so weichen sie, die früher nebeneinander herabhingen, auseinander, und zwar in ganz gleicher Weise, ob man nun einen Nordpol oder einen Südpol nähert. Läßt man endlich an einem Magneten ein Eisenstück magnetisch hängen, befestigt an letzteres auf mechanischem Wege (z. B. durch Schrauben oder Klammern) ein zweites, das so gewählt ist, daß es vom Magneten noch mit getragen wird, und ersetzt man dieses zweite Eisenstück nunmehr durch ein gleich schweres Messingstück, so läßt der Magnet seine ganze Last fallen — was unverständlich wäre, wenn es sich um eine Wirkung des Magneten auf eine neutrale Eisenmasse handelte, was aber verständlich und einleuchtend ist bei einer Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Massen (das Messingstück wird eben nicht magnetisch).

**Übersicht der Erscheinungen.** Auf den Grundtatsachen bauen sich nun die Einzeltatsachen auf, die nacheinander zu behandeln sind. Bei ihrer Reichhaltigkeit erscheint es durchaus angezeigt, zunächst eine kurze Übersicht zu geben.

1. Die Grundtatsache: Magnetische Induktion. Alle Körper werden durch magnetische Kräfte magnetisch.

2. Magnetische oder magnetisierende Kräfte gehen von permanenten oder temporären Magneten, künstlichen oder natürlichen, aus; zu letzteren gehört namentlich auch die Erde; ferner von elektrischen Strömen, zu denen auch die Erdströme gehören; endlich auch von statischer Elektrizität, elastischen Deformationen und anderen Agentien.

3. Die verschiedenen Stoffe sind in sehr verschiedenem Grade magnetisierbar; sehr stark nur Eisen, einige verwandte Metalle und Verbindungen; alle anderen Stoffe nur schwach und zum Teil sogar scheinbar in entgegengesetztem Sinne.

4. Mit wachsender Kraft wächst auch die Magnetisierung.

5. Für sehr schwache Magnetisierungen sind diese den Kräften, ob diese nun schwach (bei Eisen usw.) oder stark sind, einfach proportional.

6. Bei weiter wachsender Kraft nimmt die Magnetisierung schneller zu, und zwar oft in kolossalem Maße schneller.

7. Magnetische Sättigung. Bei noch weiter wachsender Kraft nimmt die Magnetisierung wieder langsamer zu und nähert sich allmählich einem Maximum.

8. Remanenz und Koerzitivkraft. Nach dem Aufheben der Kraft wird der Körper nicht wieder unmagnetisch; es bleibt vielmehr ein mehr oder weniger kräftiger Magnetismus zurück, der, im Gegensatz zum temporären, remanenter Magnetismus heißt [die Differenz beider ist dann der verschwindende Magnetismus]. Soll der Körper unmagnetisch werden, so muß man vielmehr eine gewisse negative Kraft anwenden; die ihr gleiche, von ihr überwundene, in dem Körper vorzustellende positive Kraft nennt man Koerzitivkraft.

9. Hysteresis. Die Kurven der Magnetisierungen, die man bei aufsteigenden und bei absteigenden Kräften erhält, fallen nicht zusammen; letztere liegt vielmehr mehr oder weniger beträchtlich über der ersteren. Diese Erscheinung heißt magnetische Nachwirkung oder Hysteresis; sie enthält die Remanenz offenbar als Spezialfall in sich.

10. Wiederholung derselben Kraft bringt doch im allgemeinen nicht dieselbe Magnetisierung hervor; ebenso haben Geschwindigkeit, Zeitdauer und Verschiedenheiten ähnlicher Art bei der Kraftwirkung Verschiedenheiten der Magnetisierung zur Folge — alles Fälle von magnetischer Nachwirkung.



11. Bei gleichem Stoffe hängt die Stärke der Magnetisierung sehr wesentlich von der Form des Körpers ab; es gibt für die Magnetisierung besonders günstige und besonders ungünstige Formen.

12. Es findet im allgemeinen eine ungleichförmige Verteilung der Magnetisierung über die Teile des Körpers statt.

13. Dazu kommen noch zahlreiche Sondererscheinungen, von denen hier nur einige angeführt seien: Schirmwirkung, zeitlicher Verlauf, Verzögerung im Eindringen, Streuung, anomale Magnetisierung, Erwärmung des Stoffes, elastische Spannungen und Deformationen usw.

**Anordnung des Stoffes.** Aus mancherlei Gründen empfiehlt es sich zuerst die Theorie im Zusammenhange darzustellen und dann die Methoden und Ergebnisse der Versuche zu behandeln. Dabei sollen einige besonders umfangreiche Kapitel, namentlich die Magnetisierbarkeit der verschiedenen Stoffe sowie die Beziehungen zu anderen Naturkräften hier nur gestreift und in besonderen Artikeln ausführlich behandelt werden.

**Literatur.** Für eingehendere Information über die magnetische Induktion und die zu ihr gehörigen Spezialerscheinungen sei auf die unten verzeichneten Werke verwiesen.[1]) Die Literatur über die einzelnen Probleme usw. folgt an den betreffenden Stellen.

Erster Teil:

# Theorie.

**Anordnung.** Wir betrachten zunächst die allgemeine, von der Konstitution der Körper absehende Theorie; bei ihrer Entwickelung bietet sich zugleich Gelegenheit, die wichtigsten Begriffe, durch die die Größenverhältnisse der Erscheinungen bestimmt werden, festzulegen. Es folgt dann die Anwendung auf die einzelnen Körperformen, die Energetik des Gebietes und die Lehre vom magnetischen Kreise. Den Beschluß bildet die Molekulartheorie.

**Schwierigkeiten und Voraussetzungen der Untersuchung.** Die Theorie würde sehr einfach sein, wenn der Magnetismus, welcher in jedem Teile des induzierbaren Körpers entsteht, nur von äußeren induzierenden Kräften herrührte. Tatsächlich kommt aber noch eine andere Kraft hinzu, nämlich die, welche von den übrigen, ebenfalls magnetisch gewordenen Teilen des induzierten Körpers herrührt und sich aus entsprechend vielen einzelnen Kräften zusammensetzt. Ein Teil dieser einzelnen Kräfte wird die äußeren Kräfte unterstützen, ein anderer Teil ihnen entgegenwirken, und der Anteil der unterstützenden und der entgegenwirkenden Kräfte wird ganz wesentlich von der Gestalt des Körpers abhängen. Die Folge wird die sein, daß die Stärke des magnetischen Zustandes nicht nur von der Stärke der äußeren Kräfte, vom Material des induzierten Körpers und von der Zahl seiner Teilchen, also von seinem Volumen, abhängen wird, sondern auch von seiner Gestalt, daß also der Koeffizient, welcher den Magnetismus mit der äußeren Kraft verknüpft, nur die beschränkte Bedeutung eines Magnetisierungskoeffizienten des betreffenden Körpers (z. B. einer Eisenkugel) haben würde. Will man dem Vorgange auf den Grund gehen, so wird man den

[1] J. LAMONT, Handb. d. Magnetismus. Leipzig 1867. — J. C. MAXWELL, Lehrbuch d. Elektr. u. d. Magn. Berlin 1883, Bd. 2. — F. NEUMANN, Vorl. ü. d. Th. d. Magn. Leipzig 1881. — G. KIRCHHOFF, Vorl. ü. Elektr. u. Magn. Leipzig 1891. — MASCART u. JOUBERT, Lehrbuch d. Elektr. u. d. Magn. Berlin 1886. — P. DUHEM, Leçons s. l'Electr. et le Magn. Bd. 2. Paris 1892. — J. A. EWING, Magn. Induktion usw. Berlin 1892. — H. DU BOIS, Magn. Kreise usw. Berlin 1894. — G. WIEDEMANN, D. Lehre v. d. Elektrizität, 3. Aufl.



Einfluß der Gestalt eliminieren und die Wirkung, also das entstehende magnetische Moment, mit der Ursache, also der Kraft, durch einen Koeffizienten verknüpfen müssen, welcher von der Gestalt des Körpers unabhängig, also abgesehen von seiner Proportionalität mit dem Volumen nur noch vom Material desselben abhängig ist. Diesen Koeffizienten wird man als Magnetisierungs-Koeffizienten des betreffenden Stoffes (z. B. des Eisens) zu bezeichnen berechtigt sein.

Eine weitere Komplikation tritt dadurch ein, daß der in Rede stehende Koeffizient in verschiedenen Richtungen verschieden sein kann, ein Fall, der bei heterotropen Stoffen eintreten wird; solche Stoffe sollen jedoch im vorliegenden Artikel ausgeschlossen und später besonders behandelt werden. Es handelt sich also hier um isotrope Stoffe, und bei diesen darf man annehmen, daß der induzierte Magnetismus eine mit der Richtung der erzeugenden Kraft übereinstimmende Achse habe, daß also seine und ihre Komponenten proportional sind, d. h. durch einen und denselben Koeffizienten miteinander verknüpft sind.

Die dritte Schwierigkeit beruht darauf, daß der in Rede stehende Koeffizient im allgemeinen keine Konstante ist, sondern selbst wieder von der Größe der wirkenden Kraft abhängt, daß also sozusagen die Bedingungen der Induktion, während diese fortschreitet, sich fortwährend ändern. Konstant ist der Koeffizient nur bei Stoffen, die überhaupt nur einer sehr schwachen Induktion zugänglich sind, und bei denen, da hier auch die Mitwirkung der eignen Teile (Punkt 1, oben) sehr schwach ist, die Theorie ohnehin eine sehr viel einfachere Gestalt annimmt. Im vorliegenden Artikel soll es sich aber gerade um Stoffe handeln, die sehr stark magnetisch werden, und für diese ist der Koeffizient auch nicht annähernd konstant. Wenn wir ihn trotzdem zunächst konstant setzen, so dürfen wir die Theorie nur als eine erste, sehr rohe Annäherung betrachten.

Die vierte Schwierigkeit endlich beruht darauf, daß der Magnetismus des induzierten Körpers gar nicht ausschließlich von der augenblicklich wirkenden Kraft abhängt, sondern auch durch die vorhergegangenen Einwirkungen mitbestimmt wird; eine Erscheinung, die man (s. o.) als magnetische Nachwirkung oder Hysteresis bezeichnet. Sie äußert sich z. B. im remanenten Magnetismus, der vorhanden ist, wenn überhaupt keine Kraft mehr vorhanden ist; sie äußert sich aber auch während des Verlaufes der Magnetisierung; und man sieht ein, daß man auch den Punkt 3 — Mangel an Proportionalität zwischen Magnetisierung und Kraft — mit dieser Hysteresis in Verbindung bringen kann. Es wird natürlich Fälle geben, wo die Hysteresis sehr unbeträchtlich sein wird; diesen steht aber das andere Extrem gegenüber, wo der magnetische Zustand überhaupt nicht von der wirkenden Kraft beeinflußt wird, sondern, infolge vorangegangener Einwirkungen und der Natur des Materials, permanent geworden ist. In diesem extremen Fall findet also eine Induktion überhaupt nicht statt, und derartige Körper, also namentlich die Stahlmagnete, die ja in einem früheren Artikel eingehend behandelt wurden, werden in dem vorliegenden keine wesentliche Rolle spielen: aber auch in weichem Eisen ist die Hysteresis unter Umständen sehr stark. Wenn wir auch von ihr zunächst absehen, so ist das ein Grund mehr, die Theorie nur als eine rohe Annäherung zu betrachten.

**Literatur.** Der Erste, welcher die Theorie auf dieser vereinfachten Grundlage entwickelte, POISSON[1], ging dabei von einer Reihe bestimmter Vorstellungen über die Konstitution magnetisierbarer Körper aus, welche zum Teil willkürlich, zum Teil aber sogar unwahrscheinlich sind; es ist das Verdienst neuerer Forscher und zwar insbesondere von Lord KELVIN (Sir W. THOMSON[2]), F. NEUMANN[3],

[1] S. D. POISSON, Mém. de l'Acad. **5**. S. 248 u. 488. 1824; **6**. S. 441. 1827. — Ann. Chim. Phys. **25**, S. 113; **28**. S. 1. — [2] W. THOMSON, Phil. Mag. (4) **1**. S. 177. 1851. — Ges. Abh. üb. El. u. Mag. S. 449. — Außerdem gelegentlich an vielen anderen Stellen. — [3] F. NEUMANN, Crelles Journ. **37**. S. 44. 1848. — Vorl. üb. d. Th. d. Magn. Leipzig 1881.

KIRCHHOFF[1], STEFAN[2] und BELTRAMI[3] gezeigt zu haben, daß und in welcher Weise man die Theorie ganz unabhängig von jenen Vorstellungen darlegen kann. Abweichend und zum Teil von anderen Gesichtspunkten ausgehend sind ferner die Darstellungen der Theorie von C. NEUMANN[4], BEER[5], LEONH. WEBER[6], RIECKE[7], WASSMUTH[8] (Methode der successiven Annäherung), DUHEM[9] (auf Grund des thermodynamischen Potentials), DU BOIS[10] u. a. Auch die Verallgemeinerung der Theorie für induzierbare Körper von heterogenem Charakter verdankt man im wesentlichen THOMSON, wovon jedoch erst im folgenden Artikel die Rede sein wird.

Die Versuche, die beiden Grundannahmen der Theorie durch allgemeinere zu ersetzen, welche den Tatsachen besser entsprechen, sind bisher nur von beschränktem Erfolge gewesen. So gab zuerst W. WEBER der Nichtproportionalität zwischen Kraft und Magnetismus einen mathematischen Ausdruck, den KIRCHHOFF und von anderen Ausgangspunkten aus DUHEM später durch eine ganz allgemeine Funktionalbeziehung ersetzte; MAWXELL andererseits berücksichtigte zuerst die Mitwirkung des permanenten Magnetismus. In neuester Zeit sind dann von verschiedenen Seiten Erweiterungen der Theorie versucht worden; einen endgültigen Wert können aber die betreffenden Formeln nicht beanspruchen.

Seitdem die MAXWELL-HERTZsche elektromagnetische Theorie die herrschende geworden ist, hat man natürlich auch die magnetische Induktion aus ihren Grundgleichungen abgeleitet und dabei manche neue prinzipielle Einsicht gewonnen; diese Betrachtungen müssen jedoch im Anschluß an jene Theorie dargestellt werden, und es sei daher hier nur auf die beiden bezüglichen Darstellungen von HERTZ[11] und E. COHN[12] hingewiesen; von anderen ist namentlich die von HEAVISIDE zu nennen.

**Formulierung des Problems.** Die vom äußeren Felde (Erdmagnetismus, Stahlmagnete, elektrische Ströme usw.) herrührende Kraft, also die äußere Feldstärke, sei $\mathfrak{H}_a$; man nennt sie auch die induzierende Kraft. Im Gegensatz dazu sei $\mathfrak{H}_i$ die von den übrigen Teilen des induzierten Körpers auf einen kleinen Teil desselben ausgeübte Kraft; man kann sie als induzierte Kraft bezeichnen. Die Summe von $\mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{H}_i$, also die ganze Kraft, sei $\mathfrak{H}$. Die Größen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{H}_i$ sind Vektoren; alle Vektoren sind im folgenden mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet; die Gleichungen, in denen sie auftreten, gelten im allgemeinen nur im Vektorsinne. Die rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{H}_a$ seien $X_a$, $Y_a$, $Z_a$, die von $\mathfrak{H}_i$ seien $X_i$, $Y_i$, $Z_i$, die von $\mathfrak{H}$ seien $X$, $Y$, $Z$. Das Potential jener sei $V_a$, das Potential dieser $V_i$ — daß diese Potentiale existieren, folgt teils aus früherem, teils wird es sich sogleich bestätigen. Endlich sei $V$ das Potential der ganzen Kraft $\mathfrak{H}$. Es gelten dann, wenn $x$, $y$, $z$ die Koordinaten im Innern des induzierten Körpers sind, folgende Formeln:

$$\mathfrak{H}_a = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2}\ , \tag{1}$$

$$\mathfrak{H}_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}\ , \tag{1a}$$

$$X_a = -\frac{\partial V_a}{\partial x}\ , \quad Y_a = -\frac{\partial V_a}{\partial y}\ , \quad Z_a = -\frac{\partial V_a}{\partial z}\ , \tag{2}$$

$$X_i = -\frac{\partial V_i}{\partial x}\ , \quad Y_i = -\frac{\partial V_i}{\partial y}\ , \quad Z_i = -\frac{\partial V_i}{\partial z}\ , \tag{2a}$$

[1] G. KIRCHHOFF, Crelles Journ. **48**. S. 348. 1854. — Pogg. Ann. Erg.-Bd. **5**. S. 1. 1870. — Ges. Abh., S. 193 u. 223. — [2] J. STEFAN, Wien. Ber. (2) **69**. Febr. 1874. — [3] E. BELTRAMI, Mem. di Bologna (4) **5**. 1884; (5) **1**. S. 409. 1891. — [4] C. NEUMANN, Unters. üb. d. log. u. NEWTONsche Potential. Leipzig 1877. — [5] A. BEER, Einl. in die Elektrostatik usw. Braunschweig 1865. S. 145ff. — [6] LEONH. WEBER, Z. Th. d. magn. Induktion. Kiel 1877. — [7] E. RIECKE, Wied. Ann. **13**. S. 465. 1881. — [8] A. WASSMUTH, Wied. Ann. **51**. 367. 1894. — [9] P. DUHEM, De l'aimantation par influence. Paris 1888. — Leçons sur l'electr. et le magn. Bd. **2**. Paris 1891. — [10] H. E. J. G. DU BOIS, Wied. Ann. **46**. S. 485. 1892. — [11] H. HERTZ, Unt. üb. d. Ausbr. d. el. Kraft. Leipzig 1892. S. 208ff. — [12] E. COHN, Das elektromagn. Feld. Leipzig 1900. S. 185ff.

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_a + \mathfrak{H}_i\ , \quad V = V_a + V_i \\ X = X_a + X_i\ , \quad Y = Y_a + Y_i\ , \quad Z = Z_a + Z_i\ . \end{cases}$$

Wir setzen nun das in der Volumeneinheit erzeugte magnetische Moment, d. h. die **Intensität der Magnetisierung** oder kurz die **Magnetisierung**, $\mathfrak{J}$, mit der Gesamtkraft $\mathfrak{H}$ proportional und, da auch die Richtungen beider Vektoren zusammenfallen sollen, auch die Komponenten $A$, $B$, $C$ von $\mathfrak{J}$ mit $X$, $Y$, $Z$ proportional. Dann hat man, wenn $p$ der Proportionalitätsfaktor ist, die Gleichungen

$$(4)\qquad \mathfrak{J} = p\,\mathfrak{H} = p(\mathfrak{H}_a + \mathfrak{H}_i)\ ,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} A = pX = -p\dfrac{\partial(V_a + V_i)}{\partial x}\ , \quad B = pY = -p\dfrac{\partial(V_a + V_i)}{\partial y}\ , \\ C = pZ = -p\dfrac{\partial(V_a + V_i)}{\partial z}\ . \end{cases}$$

Unter $V_i$ kann man auch das Potential des ganzen induzierten Körpers auf einen seiner Punkte verstehen, da das Potential eines kleinen, diesen Punkt umschließenden Elementes von lauter Dimensionen gleicher Größenordnung, z. B. einer Kugel, unendlich klein ist, wie man leicht findet, wenn man Polarkoordinaten einführt, und wie auch schon früher gezeigt worden ist. In den obigen Gleichungen kommt nun aber die Kraft, bzw. die Differentialquotienten von $V_i$ vor, und für diese gilt das Gesagte nicht, die unendlich kleine Kugel übt vielmehr eine endliche Kraft in ihrem Inneren aus. Nimmt man an, daß die Magnetisierung dieser kleinen Kugel gleichförmig sei, was man bei ihrer Kleinheit in der Tat annehmen darf, so kann man (vgl. Art. Magnetismus S. 64) ihr magnetisches Potential $q$ aus dem Gravitationspotential $P$ ableiten und findet, wenn man den Radius der Kugel $R$, den Abstand des Punktes $xyz$ von ihrem Mittelpunkte $r$ und dessen Koordinaten $x_0$, $y_0$, $z_0$ nennt:

$$(6)\qquad P = \tfrac{2}{3}\pi(3R^2 - r^2) = \tfrac{2}{3}\pi[3R^2 - (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]\ ,$$

hieraus durch Differentiation nach $x$, $y$, $z$ und Multiplikation mit $ABC$

$$(6\text{a})\qquad q = \tfrac{4}{3}\pi[A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)]$$

und schließlich als Komponenten der von der kleinen Kugel herrührenden Kraft

$$(6\text{b})\qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \tfrac{4}{3}\pi A\ , \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \tfrac{4}{3}\pi B\ , \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \tfrac{4}{3}\pi C\ ,$$

also auch bei unbegrenzter Größenabnahme der gedachten Kugel endliche Werte, die mit $ABC$ proportional sind und mit diesen als konstant betrachtet werden können. Die erzeugten Magnetisierungskomponenten erhalten nun folgende Form:

$$(7)\qquad \begin{cases} A = p\left[\dfrac{4\pi}{3}A - \dfrac{\partial(V_a + V_i)}{\partial x}\right]\ , \quad B = p\left[\dfrac{4\pi}{3}B - \dfrac{\partial(V_a + V_i)}{\partial y}\right]\ , \\ C = p\left[\dfrac{4\pi}{3}C - \dfrac{\partial(V_a + V_i)}{\partial z}\right]\ , \end{cases}$$

oder, wenn

$$(8)\qquad \frac{p}{1 - \dfrac{4\pi}{3}p} = \varkappa$$

gesetzt wird:

$$(9)\qquad A = -\varkappa\frac{\partial V}{\partial x}\ , \quad B = -\varkappa\frac{\partial V}{\partial y}\ , \quad C = -\varkappa\frac{\partial V}{\partial z}\ ,$$

und die Resultante $\mathfrak{J}$ von $ABC$:

(10) $$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}$$

oder

(10a) $$\mathfrak{J} = \varkappa \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \quad .$$

Es hat sich also durch die Berücksichtigung der kleinen Kugel nichts weiter geändert, als daß an die Stelle von $p$ ein neuer Koeffizient $\varkappa$ getreten ist. Man kann daher auch die ganze obige, in dieser Form von KIRCHHOFF herrührende Umrechnung sparen und, wie das gegenwärtig meist geschieht, von vornherein die Gleichung (10) als Beziehung zwischen Magnetisierung und Kraft aufstellen.

Das Potential $V_i$ hat nach früherem [Gleichung (50a), S. 56] für einen Körper, dessen Raumelement $d\tau$ ist, den Wert:

(11) $$V_i = \int d\tau \left( A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \quad ,$$

läßt sich aber auf die Form

(12) $$V_i = \int \frac{\mathfrak{J} \cos \Theta}{r} ds - \int \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) d\tau$$

bringen, wo $ds$ ein Oberflächenelement und $\Theta$ der Winkel zwischen seiner inneren Normale und der Richtung von $\mathfrak{J}$ ist, d. h. $V_i$ setzt sich aus einem Oberflächen- und einem Raumpotential zusammen. Nun folgt aber aus den Gleichungen (9), wenn $n$ die innere Normale von $ds$ ist:

$$\mathfrak{J} \cos \Theta = \varkappa \frac{\partial V}{\partial n} \quad ,$$

(13) $$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\varkappa \Delta V \quad ;$$

die dem Raumpotential zugehörige Dichte ist also $\varkappa \Delta V$ und folglich nach der Potentialtheorie

$$\Delta V_i = -4\pi \varkappa \Delta V \quad .$$

Aus der zweiten Gleichung (3) folgt aber

$$\Delta V = \Delta V_i$$

(weil $\Delta V_a = 0$ ist), und diese beiden Gleichungen sind nur dann miteinander verträglich, wenn entweder $-4\pi\varkappa = 1$ ist, oder wenn gleichzeitig $\Delta V$ und $\Delta V_i$ verschwindet. Die erstere Eventualität tritt aber nie ein, da $\varkappa$ erfahrungsgemäß entweder positiv, oder, wenn negativ, sehr klein ist; es folgt also

$$\Delta V = 0$$

und folglich

(14) $$V_i = \varkappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V}{\partial n} = \varkappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial (V_a + V_i)}{\partial n} \quad .$$

Es ist also $V_i$ als ein reines Oberflächenpotential darstellbar; mit anderen Worten, es ist lediglich eine Oberflächendichte

$$\sigma = A \cos(nx) + B \cos(ny) + C \cos(nz)$$

vorhanden; dagegen ist die innere Dichte des Magnetismus

(15) $$\varrho = -\left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = 0 \quad ,$$

oder, wie man es kürzer schreiben kann, indem man den Ausdruck Divergenz von $\mathfrak{J}$ für den Klammerausdruck benutzt:

(15a) $$\operatorname{div}(\mathfrak{J}) = 0 \quad ;$$

der Körper ist also (S. 61) solenoidal magnetisiert. Daß er auch lamellar magnetisiert ist, sieht man ein, wenn man

(16) $$\varkappa V = \Phi$$

setzt, wo dann $\Phi$ das Magnetisierungspotential (S. 61) ist; es wird dann nämlich

(17) $$A = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \,, \quad B = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \,, \quad C = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \,,$$

und das sind nach früherem die für die lamellare Magnetisierung charakteristischen Gleichungen. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß bei beiden Schlüssen die Natur von $\varkappa$ als einer im ganzen Körper konstanten Größe benutzt worden ist; sie werden also hinfällig, wenn $\varkappa$ als Funktion der äußeren Kraft betrachtet wird, außer in speziellen Fällen, in denen eben die Gesamtkraft, also auch die Intensität der Magnetisierung, eine durch den ganzen Körper konstante wird (s. w. u.).

Durch die Gleichung (14) ist das induzierte Potential bestimmt und zwar, wie sich nach der Methode des indirekten Beweises leicht einsehen läßt, in eindeutiger Weise. Leider ist diese Gleichung gewissermaßen transzendent und daher mit Strenge nicht lösbar. Es stehen daher nur zwei Wege offen.

**Annäherungsverfahren.** Man bestimmt zunächst diejenige magnetische Verteilung, welche in dem Körper entsteht, wenn nur die gegebenen magnetisierenden Kräfte berücksichtigt werden. Nennt man die mit dieser Verteilung äquivalente Oberflächenbelegung eine Belegung erster Ordnung, so kann man nun die Kräfte bestimmen, welche von derselben auf das Innere des Eisenkörpers ausgeübt werden. Aus der alleinigen Berücksichtigung dieser Kräfte ergibt sich eine zweite Verteilung bzw. äquivalente Oberflächenbelegung zweiter Ordnung; die alleinige Berücksichtigung der von dieser herrührenden Kräfte führt zur Bestimmung einer Oberflächenbelegung dritter Ordnung usw. Der schließliche magnetische Zustand des Körpers wird durch Superposition der sukzessive berechneten Verteilungen erster, zweiter, dritter .. Ordnung gefunden. Diesen Gedanken haben zuerst BEER und C. NEUMANN, sodann LEONH. WEBER und RIECKE ausgeführt. Die Behandlungsweise von RIECKE unterscheidet sich von den anderen dadurch, daß bei der Ausrechnung der einzelnen Induktionen dort die gewöhnlichen Koordinaten zugrunde gelegt werden und die Formeln sich deshalb im einzelnen eng an die der gewöhnlichen Theorie anschließen, daß dagegen hier der Körper in Elemente von besonderer Gestalt zerlegt wird, woraus sich ein sehr anschaulicher Prozeß ergibt und die gedachten äquivalenten Oberflächenbelegungen ganz unmittelbar hergestellt werden können. Von einem Oberflächenelement des Körpers wird eine der äußeren Kraft $\mathfrak{H}_a$ entsprechende Kraftröhre durch den Körper gelegt und aus ihr durch zwei Niveauflächen ein Raumelement $d\tau$ herausgeschnitten. RIECKE entwickelt nun zwei verschiedene Methoden, die sich durch die Gestalt dieses Körperelements unterscheiden; bei der ersten wird es sehr gestreckt gewählt, bei der zweiten sehr platt, bei der ersten wird folglich nach der allgemeinen Theorie (s. w. u.) das in dem Element durch den ersten Induktionsakt induzierte Moment gleich $-\varkappa \mathfrak{H}_a d\tau$, bei der zweiten wird an die Stelle von $\varkappa$ der Faktor $-\varkappa/(1+4\pi\varkappa)$ treten, entsprechend dann bei den folgenden Gliedern; die zweite hat der ersten gegenüber den Vorzug, daß die Reihe stets konvergiert, während dies bei der ersten nur für gewisse Körperformen der Fall ist. Endlich hat WASSMUTH gezeigt, wie die Darstellungen der vorgenannten Autoren miteinander zusammenhängen, und wie man sie in einer einheitlichen Darstellung zusammenfassen kann.

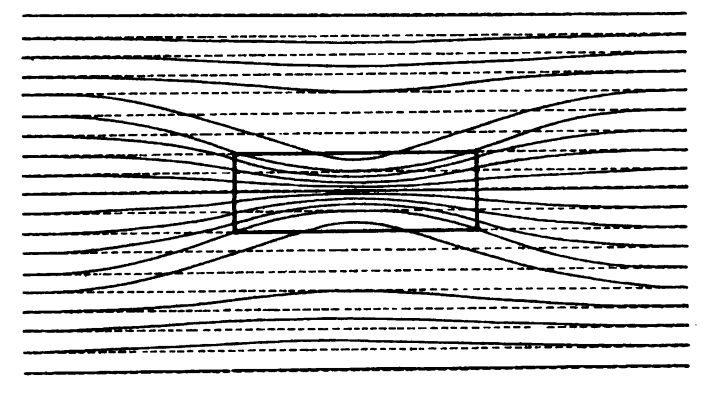
**Andere Methode.** Die Gleichung (14) ist, wie gesagt, direkt nicht verwendbar; da sie aber besagt, daß $V_i$ ein Oberflächenpotential ist, kann man sie durch die aus der Potentialtheorie bekannte, für Oberflächenpotentiale gültige Differentialgleichung ersetzen. Auf diese Weise erhält man eine der folgenden Gleichungen, die miteinander äquivalent sind, und von denen bald die eine, bald die andere sich besser zur Benutzung eignet:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} + \frac{\partial V_i}{\partial n_a} = -4\pi\varkappa \frac{\partial V}{\partial n_i} , \tag{18}$$

$$(1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial V_i}{\partial n_i} + \frac{\partial V_i}{\partial n_a} = -4\pi\varkappa \frac{\partial V_a}{\partial n_i} , \tag{18a}$$

$$(1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} = 0 . \tag{18b}$$

**Suszeptibilität und Permeabilität.** Wie man sieht, spielt in unserer Theorie eine gewisse Konstante eine große Rolle, nämlich die Größe $\varkappa$. Man



Figur 60a.

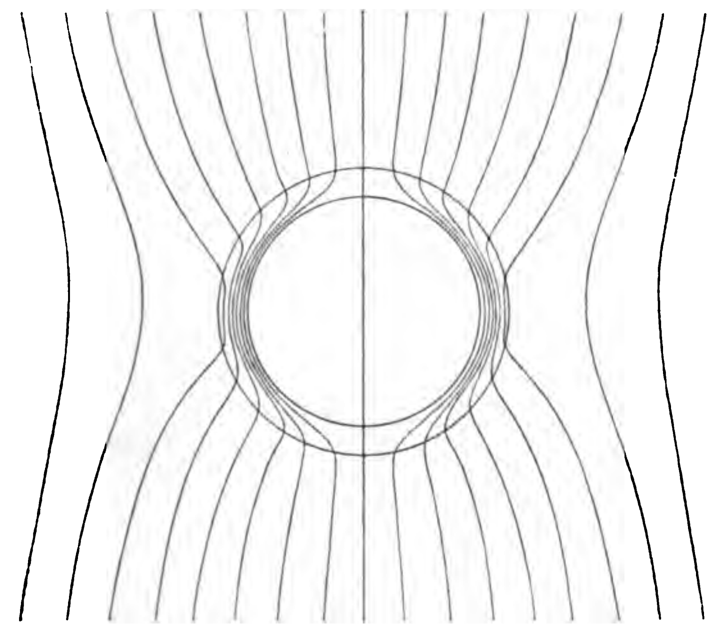
nennt sie Magnetisierungskonstante oder magnetische Suszeptibilität; der letztere Ausdruck ist dem ersteren vorzuziehen, weil die Größe tatsächlich gar keine Konstante ist, sondern oft in hohem Maße von der Feldstärke abhängt. Nach Gleichung (10) ist

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}} , \tag{19}$$

in Worten: die Suszeptibilität ist das Verhältnis der Intensität der Magnetisierung zur magnetischen Kraft. Für Stoffe, die sich überhaupt nicht magnetisieren lassen, ist also $\varkappa = 0$, für die meisten Stoffe ist es sehr klein, und nur für wenige Stoffe nimmt es große Werte an.

In den obigen Formeln kommt nun aber $\varkappa$ noch in einer anderen Verbindung vor, nämlich als der Ausdruck $1 + 4\pi\varkappa$, und diesem kommt eine so einfache und wichtige Bedeutung zu, daß man ihm eine besondere Bezeichnung gegeben hat. Die Gleichung (18a) zeigt nämlich, daß beim Übergang aus dem freien Felde in einen induzierbaren Körper die Kraft eine plötzliche Verstärkung im Verhältnis von $1 + 4\pi\varkappa : 1$ aufweist. Nun ist der anschauliche Ausdruck für die Größe der Kraft die Dichte der Kraftlinien; in dem Körper werden also die Kraftlinien dichter beieinander liegen, als außerhalb. Man kann sich den Vorgang geradezu so vorstellen, als ob der Körper die Kraftlinien aus ihrem vor seiner Einbringung in das Feld verfolgten Laufe ablenkte und in sich hineinzöge; man

wird dem Körper eine Anziehungskraft für magnetische Kraftlinien zuschreiben dürfen. In Figur 60a ist dieses Verhalten an dem Beispiele eines in ein gleichförmiges Feld gebrachten weichen Eisenstabes dargestellt; vorher hatten die Kraftlinien den gestrichelten, jetzt haben sie den ausgezogenen Verlauf. Die Figur könnte sich ebensogut einerseits auf elektrostatische Verteilung in einem Dielektrikum, andererseits auf elektrische Strömung in einem schwach leitenden Medium, in dem sich etwa ein Kupferstab befindet, beziehen; ein Fall, in dem ganz dieselbe Übergangsgleichung gilt. Der Unterschied ist aber der, daß alsdann die Linien auch die Bedeutung von Strömungslinien haben, eine Bedeutung, die hier wegfällt. In analoger Weise (nur sind hier die ursprünglichen, geradlinigen Kraftlinien weggelassen) stellt Figur 60b den Fall eines Hohlzylinders, dessen Achse auf der Papierebene senkrecht steht, oder auch eines kreisförmigen



Figur 60b.

Ringes aus weichem Eisen dar; man sieht, in wie hohem Maße er dem freien Felde Kraftlinien entzieht, und zwar ganz besonders stark dem inneren Hohlraume, worauf noch zurückzukommen sein wird. Der hier dargestellte Fall spielt bekanntlich bei den Dynamomaschinen eine wesentliche Rolle.

Unter diesen Umständen hat man sich, wie gesagt, veranlaßt gesehen, neben $\varkappa$ noch eine neue, mit $\varkappa$ eindeutig verknüpfte Größe $\mu$, die der Dielektrizitätskonstante analog ist, einzuführen. Man nennt sie Leitfähigkeit oder Aufnahmefähigkeit für magnetische Kraftlinien oder magnetische Induktionskapazität (Ausdrücke, die im wesentlichen von FARADAY herrühren) oder, nach dem Vorschlage von Lord KELVIN, der jetzt ziemlich allgemein angenommen ist, magnetische Permeabilität. Zwischen beiden Größen bestehen also die Beziehungen

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \,, \quad \varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi} \,. \tag{20}$$

Da, wie oben bemerkt, $\varkappa$ für die meisten Stoffe sehr klein ist, hat für diese Stoffe $\mu$ einen von 1 wenig abweichenden Wert; nur für Eisen und verwandte

Stoffe werden beide Größen erheblich, und hier unter Umständen so erheblich, daß man in $\mu$ das Glied 1 vernachlässigen kann; es ist alsdann einfach $\mu$ das $4\pi$-fache von $\varkappa$: da endlich, wie ebenfalls schon erwähnt, $\varkappa$ für solche Stoffe keine Konstante, sondern eine Funktion der Kraft ist, wird dasselbe auch von $\mu$ gelten.

Es ist aber hier noch ein anderer Zusatz zu machen: die Größe $\varkappa$ kann, wenigstens scheinbar, unter Umständen auch negative Werte haben, wenn auch nur sehr kleine; $\mu$ wird dann nicht größer, sondern, wenn auch nur wenig, kleiner als 1, der betreffende Stoff hat dann also eine geringere Aufnahmefähigkeit für Kraftlinien als das freie Feld, er scheint die Kraftlinien nicht anzuziehen, sondern abzustoßen, und man erhält zu der Figur 60a ein Gegenstück, nur daß hier die ausgezogenen Linien von den gestrichelten stets nur sehr wenig abweichen würden (und zwar nach außen). Stoffe, bei denen $\varkappa > 0$ ist, heißen paramagnetisch, Stoffe, bei denen $\varkappa < 0$ ist, diamagnetisch. Das weitere hierüber wird im folgenden Artikel zur Sprache kommen.

**Die „magnetische Induktion“.** Nachdem festgestellt ist, daß die Größe $\mu$ eine mindestens ebenso wichtige Bedeutung hat wie die ursprünglich eingeführte Größe $\varkappa$, liegt es nahe, der Beziehung

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}$$

eine analoge

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \quad , \tag{21}$$

nur mit $\mu$ statt $\varkappa$ als Koeffizient, an die Seite zu stellen und hierdurch eine neue Größe $\mathfrak{B}$ zu definieren. Man nennt diese Größe nach dem Vorgange von MAXWELL die magnetische Induktion oder kurz die Induktion. Ob die Übertragung des Namens des ganzen Erscheinungsgebietes auf einen einzelnen in ihm auftretenden Begriff glücklich gewesen ist, mag unerörtert bleiben, da der Name sich nun einmal eingebürgert hat. Die Induktion ist also ein Vektor, und zwar das $\mu$-fache des Kraftvektors. Umgekehrt wird jetzt die Permeabilität das Verhältnis der Induktion zur Kraft:

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \quad . \tag{22}$$

Für die hier wesentlich in Betracht kommenden Eisenkörper, für die $\mu$ eine große Zahl ist, ist also die Induktion ein sehr vielfaches der Kraft.

Nunmehr kann man auch die beiden Beziehungen zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits und zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ andererseits kombinieren und somit eine Beziehung zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}$ herstellen:

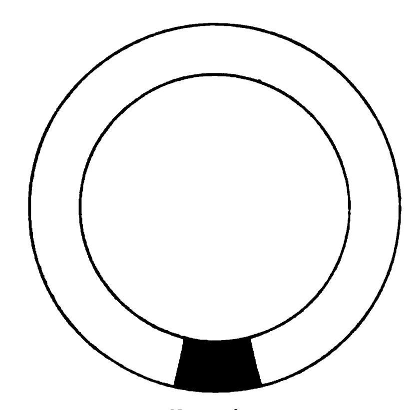
$$\mathfrak{B} = \frac{\mu}{\varkappa} \mathfrak{J} \quad . \tag{23}$$

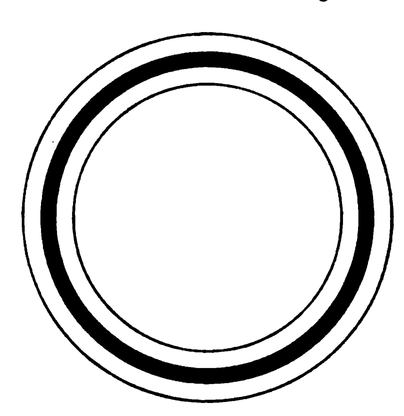
Andererseits kann man in der Gleichung (21) $\mu$ durch $1 + 4\pi\varkappa$ ersetzen und dann die beiden Glieder trennen, das erste wird dann $\mathfrak{H}$, im zweiten kann man $\varkappa\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{J}$ ersetzen und erhält dann:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J} \quad . \tag{24}$$

Diese Gleichung ist sehr merkwürdig und geeignet, uns über die Bedeutung der bisher rein formal eingeführten Größe $\mathfrak{B}$, der Induktion, Aufschluß zu geben. Denn sie erscheint hier als die Summe zweier uns wohl bekannten Größen; die erste dieser Größen ist die magnetische Kraft, wie wir bisher schlechthin sagten; die andere, ein Vielfaches der Magnetisierungsintensität, werden wir daher versuchen, ebenfalls als eine magnetische Kraft zu deuten, als eine gewisse Zusatzkraft zu $\mathfrak{H}$. Auch ist es nicht schwer einzusehen, von welcher Art diese Zusatzkraft ist, und welcher Unterschied dabei für die Kraft $\mathfrak{H}$ (ohne Zusatz)

und die Kraft 𝔅 (mit Zusatz) herauskommt. Denn wir wissen schon, daß die magnetische Kraft im Innern eines Eisenkörpers überhaupt nur dann einen bestimmten Wert und Sinn hat, wenn man sich den Punkt, in dem sie herrschen soll, von einer kleinen Höhlung umgeben denkt, und daß jede Form dieser Höhlung einen anderen Begriff und Wert der Kraft liefert. Dieser Wert wird davon abhängen, welche Kraft die magnetisch belegt zu denkende Oberfläche des Hohlraums zu der übrigen Kraft noch hinzufügt, und dieser Zusatz wird jedenfalls für eine gewisse Form der Höhlung am kleinsten, für eine andere am größten sein: dadurch erhält man zwei Kraftdefinitionen, die ein besonderes Interesse beanspruchen dürfen, weil sie die Extreme darstellen. Nun folgt aus den Angaben, die im Artikel Magnetismus gemacht wurden, daß der in Rede stehende Zusatz durch die scheinbare Größe des Hohlraumes, von dem untersuchten Punkte aus gesehen, bestimmt wird und außerdem mit der Intensität der Magnetisierung proportional ist; der Zusatz wird also null für einen sehr dünnen und vergleichsweise langen Zylinder in der Richtung der Magnetisierung, dagegen am größten, nämlich $4\pi\mathfrak{J}$, für ein sehr flaches und vergleichsweise


Figur 61 a.


Figur 61 b.

großes Scheibchen quer zur Magnetisierung (Figur 5 d, S. 10). Der Fall eines kugelförmigen Hohlraumes, der ja schon oben betrachtet wurde, liegt, wie beiläufig bemerkt sei, derart zwischen den beiden Extremen, daß für ihn der Zusatz $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{J}$ beträgt.

Man kann also nunmehr definieren: Magnetische Kraft ist die Kraft in einer kleinen Längshöhlung, magnetische Induktion ist die Kraft in einer kleinen Querhöhlung des Eisenkörpers; diese ist gleich jener vermehrt um das $4\pi$-fache der Magnetisierung.

Die Wichtigkeit des Begriffes der Induktion liegt wesentlich darin, daß ihr praktisch in sehr einfacher Weise beizukommen ist, nämlich indem man den Eisenkörper der Quere nach zerschneidet; eine Prodezur, die sich am einfachsten offenbar beim Ringe bewerkstelligen läßt; man spricht dann von einem „geschlitzten Ringe“ (Figur 61 a); es ist das ersichtlich der einfachste überhaupt denkbare Fall, und in ihm tritt eben die Induktion 𝔅 als maßgebende Größe auf. Der diesem gegenüberstehende, in der Idee ebenso einfache Fall wäre der eines Ringes mit durchbohrter Achse (Figur 61 b); hier würde die Kraft $\mathfrak{H}$ maßgebend sein; um aber zu dem Punkte, den man untersuchen will, gelangen zu können (die Höhlung tritt ja nirgends zu Tage), müßte man den Ring irgendwo der Quere nach zerschneiden oder lieber von vornherein einen zylindrischen Stab nehmen, dessen Hohlachse dann beiderseits heraustreten würde; in jedem Falle

kommt dann aber ein neues komplizierendes Moment in Gestalt der Schnitt- bzw. Endflächen hinzu, so daß eine prinzipiell einfache Bestimmung der Kraft nicht möglich ist.

Derartige und andere Erwägungen — die letzteren unter anderem auch allgemein elektromagnetischer Natur — haben manche Autoren in neuester Zeit veranlaßt, überhaupt den Begriff der Induktion von vornherein an die Spitze zu stellen und dann, statt $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ zusammenzusetzen, umgekehrt $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ zu definieren, gemäß der aus Gleichung (24) sich ergebenden Formel:

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} \quad . \tag{25}$$

Man gelangt dann natürlich zu einer ganz anderen Vorstellung von dem Prozeß; die Kraft $\mathfrak{H}$ ist nämlich jetzt, wie das negative Zeichen lehrt, für die Erzeugung der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ gar nicht mittätig, sondern im Gegenteil hinderlich; sie wird aber durch die Induktion an Stärke übertroffen, und eine Folge dieses Überschusses ist eben die Magnetisierung.

Unter Umständen kann man die charakteristischen Gleichungen für $\varkappa$ und $\mu$, statt mittels der Kräfte, auch mit Hilfe der Potentiale $V_a$, $V_i$, $V$ bilden und findet dann

$$\varkappa = -\frac{1}{4\pi}\frac{V_i}{V}, \quad \mu = \frac{V_a}{V} \tag{26}$$

Gleichungen, welche besonders wieder insofern lehrreich sind, als sie über die Vorzeichen und Größenverhältnisse der drei Größen $V_a$, $V_i$, $V$ Aufschluß geben. Da nämlich bei den eigentlich magnetischen Stoffen, wie dem Eisen, $\varkappa$ eine positive Größe ist, so folgt, daß $V_i$ das entgegengesetzte Zeichen wie $V$, also, da nach der zweiten Gleichung $V$ und $V_a$ dasselbe Vorzeichen haben, $V_i$ auch das entgegengesetzte Zeichen wie $V_a$ hat, d. h. das induzierte Potential ist dem gegebenen äußeren Potential dem Vorzeichen nach entgegengesetzt; und ferner, was hieraus, aber mit Rücksicht auf $\mu > 1$ auch aus der zweiten Gleichung direkt folgt: $V$ ist stets kleiner als $V_a$, das Gesamtpotential stets kleiner als das äußere für sich, eben weil es durch das Potential der Induktion geschwächt wird. Die Nichtbeachtung dieser Verhältnisse bildet gewöhnlich eine der wesentlichen Schwierigkeiten, denen der Anfänger in der Theorie der magnetischen Induktion begegnet. Bei Stoffen mit negativem $\varkappa$ (diamagnetischen Stoffen) sind natürlich die entgegengesetzten Schlüsse zu ziehen, hier wird zwar die ganze Magnetisierung negativ, dieser negative Wert wird aber durch die negative Mitwirkung des Induktionspotentials nicht geschwächt, sondern verstärkt.

Wie die Gleichung (24) zeigt, setzt sich die Induktion aus der Kraft und der ($4\pi$-fachen) Magnetisierung zusammen. Man erhält somit folgendes geometrische Bild: Es gibt erstens Kraftlinien, und zwar überall, im freien Felde ebenso wie im Eisen; es gibt zweitens, aber nur im Eisen, Linien, die man als Magnetisierungslinien wird bezeichnen können, und die, im Gegensatz zu den Kraftlinien, nicht die äußere, sondern die innere Wirkung charakterisieren; und es gibt drittens Induktionslinien, die im freien Felde mit den Kraftlinien identisch sind, im Innern des Eisens hingegen von ihnen verschieden sind, indem sie das Zusammenwirken beider Einflüsse charakterisieren. Jedes dieser Liniensysteme hat eine bestimmte, aus dem Vorausgegangenen ersichtliche Bedeutung.

**Induktionsröhren. Induktionsfluß.** Wie man nun von dem Begriff der Kraftlinien allgemein zu dem der Kraftfäden oder Kraftröhren übergeht, so kann man hier noch besonders den Begriff der Induktionsfäden oder Induktionsröhren einführen; und von solchen Röhren kann man sich den ganzen Körper erfüllt denken. Bildet man dann das Integral der Induktion über einen Querschnitt einer Induktionsröhre, so

erhält man, in Analogie mit dem Kraftfluß oder der Kraftströmung, den neuen Begriff des **Induktionsflusses** oder „**Fluxes**" (der andere Ausdruck ist wegen naheliegender Verwechselungen nicht empfehlenswert). Nach den früheren Entwickelungen ist der Induktionsfluß längs einer ganzen Röhre, — die entweder in sich zurückläuft oder in die Unendlichkeit geht, — der gleiche; ein Satz, den man als die Erhaltung des Induktionsflusses bezeichnen kann, und der sich mit der Tatsache der Solenoidalität der Induktion deckt. Dies und alles weitere braucht, da es ganz analog mit den allgemeinen Verhältnissen im Kraftfelde ist, nicht ausführlich behandelt zu werden; so, daß man der Einfachheit halber die Röhren so wählen wird, daß der Induktionsfluß gerade gleich eins wird — „Einheitsröhren" oder „Einheitssolenoide" —, daß die Zahl der Röhren, die durch den Querschnitt eins geht, gerade den Zahlenwert der Induktion angibt usw.

**Brechung der Induktionslinien.** Es fragt sich noch, wie sich die Induktionslinien an der Grenze zwischen Eisenkörper und freiem Raum verhalten. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß hier eine Brechung der Linien stattfindet, und zwar nach dem Gesetz

$$\operatorname{tg}\alpha' = \mu \operatorname{tg}\alpha \quad ,$$

wo $\alpha$ der Einfallswinkel, d. h. der Winkel der Linie mit der Normale im freien Raume und $\alpha'$ der Brechungswinkel, d. h. der entsprechende Winkel im Körper ist; eine analoge Gleichung gilt beim Übergang aus einem in einen anderen Körper von abweichendem $\mu$. Für Eisen usw. ist $\mu$ meist sehr groß, und folglich treten die Induktionslinien aus ihm so gut wie senkrecht ins Freie; wenn andererseits $\mu$ sehr nahe gleich eins ist, d. h. bei den meisten Stoffen sowie beim Eisen für sehr starke Magnetisierung, findet fast gar keine Brechung statt. Bekanntlich gilt dasselbe Brechungsgesetz für elektrische Stromlinien (Bd. 4, S. 251).

**Wahrer und freier Magnetismus.** Von dem Begriffe der magnetischen Kraft bzw. Induktion kann man nun schließlich wieder zurückgehen auf den Begriff der magnetischen Dichte, der Magnetismusmenge oder, kurz gesagt, des „Magnetismus"; und es leuchtet ohne weiteres ein, daß nunmehr auch hinsichtlich dieses Begriffes ein Dualismus auftritt. HERTZ hat dem Ausdruck gegeben durch eine besondere Nomenklatur: der durch die Divergenz der Induktion — bei HERTZ magnetische Polarisation genannt — definierte Dichtebegriff wird als wahre Dichte des Magnetismus, der durch die Divergenz der Kraft definierte als freie Dichte des Magnetismus bezeichnet; entsprechend ist dann überhaupt zwischem wahrem und freiem Magnetismus zu unterscheiden. Für manche Zwecke ist die Betrachtung des wahren, für andere die des freien Magnetismus angezeigt; für jeden von beiden gelten gewisse besondere Sätze und Konsequenzen, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.

Faßt man das Gesagte zusammen, so kann man sich dem Gefühl nicht entziehen, daß die ganze der Lehre von der magnetischen Induktion zu Grunde gelegte Begriffsbildung sehr künstlich und verwickelt ist, sie erschwert erfahrungsgemäß das Verständnis und — zumal bei der vielfach stark abweichenden Bezeichnungsweise der Autoren — die Verständigung. Zum Teil hängt diese Begriffsbildung mit der historischen Entwickelung der Lehre, zu einem anderen mit den Verschiedenheiten der wissenschaftlichen und der praktischen Vorstellungen und Bedürfnisse zusammen; in der Hauptsache aber liegt jener Dualismus eben doch in der Natur des Problems selbst begründet.

**Einfluß der Form.** Entmagnetisierende Kraft. Gestaltskoeffizient. Der Begriff der magnetischen Kraft ist, wie wir gesehen haben, für einen Punkt eines Eisenkörpers sehr unbestimmt, weil dieser Punkt als im Innern eines kleinen Hohlraumes liegend gedacht werden muß und die Gestalt der Oberfläche dieses

Hohlraumes mit ihrem freien Magnetismus von wesentlichem Einfluß ist. Wir führten deshalb verschiedene Begriffe und Namen ein und verstehen unter magnetischer Kraft nur noch die, welche im Innern eines Hohlfadens besteht. Dabei ist aber offenbar vorausgesetzt, daß der Eisenkörper, von dieser inneren Oberfläche abgesehen, keine wirkliche, äußere oder innere Oberfläche hat, was doch stets der Fall ist. Diese wirkliche Oberfläche, die durch die Gestalt des Körpers bedingt ist, wird nun aber ebenfalls infolge ihres freien Magnetismus einen Einfluß auf die Größe der Kraft, besonders für Punkte in ihrer Nähe, ausüben. Es zeigt sich also, daß der Begriff der Größe $\mathfrak{H}$ immer noch nicht völlig bestimmt ist, daß man ihn vielmehr nunmehr noch durch Berücksichtigung des Einflusses der Oberfläche festlegen muß. Man geht dabei am besten von einer Differenzform aus und gelangt dann leicht zu einer Schlußformel, die den Einfluß des Materials, charakterisiert durch $\varkappa$, und den Einfluß der Gestalt, charakterisiert durch $\varepsilon$, in gleich einfacher und übersichtlicher Form zur Darstellung bringt.

Nennt man nämlich die Kraft ohne Rücksicht auf den Einfluß der Gestalt, also das bisherige $\mathfrak{H}$, von jetzt ab $\mathfrak{H}_0$, die wirkliche Kraft aber $\mathfrak{H}$, so sieht man nach dem Vorausgegangenen unmittelbar ein, daß $\mathfrak{H}$ kleiner sein wird, als $\mathfrak{H}_0$, und zwar um einen Betrag, der jedenfalls mit $\mathfrak{J}$, der Intensität der Magnetisierung, proportional ist und somit in der Form $\varepsilon\mathfrak{J}$ eingeführt werden kann. Man erhält also die Formel:

(27) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \varepsilon\mathfrak{J} \quad ,$$

hieraus dann

$$\mathfrak{J} = \varkappa\mathfrak{H} = \varkappa\mathfrak{H}_0 - \varepsilon\varkappa\mathfrak{J} \quad ,$$

also ausgerechnet

(28) $$\mathfrak{J} = \frac{\varkappa}{1+\varepsilon\varkappa}\mathfrak{H}_0 \quad ,$$

womit die Intensität der Magnetisierung durch die Kraft ausgedrückt ist, die an dem Orte herrschen würde, wenn keine Oberflächenladung mitwirkte, die also wirklich herrscht in dem Falle eines von dem betrachteten Punkte aus nach allen Richtungen weit ausgedehnten Körpers, oder auch eines Körpers, dessen in endlicher Nähe liegende Oberflächen nirgends von Kraftlinien geschnitten werden.

Durch die Mitwirkung der Oberfläche wird, wie man sieht, die Magnetisierung auf einen Bruchteil des Wertes, den sie sonst annehmen würde, reduziert, und zwar, selbst wenn $\varepsilon$ ein sehr kleiner Bruch ist, in sehr erheblichem Maße, sobald nur $\varkappa$, was bei Eisen sehr oft der Fall ist, einen erheblichen Wert besitzt.

Man nennt, im Gegensatz zu dem Stoffkoeffizienten $\varkappa$, die Größe $\varepsilon$ den Gestaltskoeffizienten des betreffenden Körpers; eine andere Bezeichnung, die der schwächenden Wirkung Ausdruck geben soll, ist Entmagnetisierungsfaktor, wobei jedoch die verschiedenen Autoren nicht einheitlich verfahren, indem die einen den Ausdruck für den Induktionsprozeß als solchen, die anderen dagegen nur für den Vorgang der Remanenz (s. w. u.) benutzen.

Setzt man die Differenz

(28a) $$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}' \quad ,$$

so daß also $\mathfrak{H}'$ die „selbsterzeugte" Feldstärke bedeutet, so erhält man einfach:

(28b) $$-\varepsilon = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{J}} \quad ,$$

und diese Formel kann man geradezu als Definition des Entmagnetisierungsfaktors betrachten.

Von Interesse und häufiger Anwendbarkeit sind schließlich noch die Formeln, welche $\varkappa$ durch $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mu$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}_0$ ausdrücken:

(29) $$\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}_0 - \varepsilon \mathfrak{J}}\,, \qquad \mu = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{4\pi}\right)\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}_0 - \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{B}}$$

und umgekehrt:

(29a) $$\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}_0} = \frac{\varkappa}{\varepsilon\varkappa + 1}\,, \qquad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}_0} = \frac{4\pi\mu}{4\pi + (\mu - 1)\varepsilon}\,.$$

Zwischen $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ ihrerseits besteht dabei die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_0 + (4\pi - \varepsilon)\mathfrak{J}\,, \qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}_0}{4\pi - \varepsilon}\,.$$

Der Gestaltskoeffizient ist, wie die einfache Anschauung lehrt, im allgemeinen keine Konstante, sondern von Punkt zu Punkt innerhalb des Körpers veränderlich, je nach der Lage dieses Punktes zu der Gesamtkonfiguration der Oberfläche; in manchen Punkten wirkt die Oberfläche sehr stark, in anderen vielleicht ganz schwach oder gar nicht entmagnetisierend ein. Das hat nun wiederum zur Folge, daß auch die Magnetisierung von Ort zu Ort veränderlich wird; und das hat dann die weitere Konsequenz, daß man auch $\varkappa$ nicht, wie es unsere Theorie verlangt, als konstant betrachten darf. Es gibt aber bestimmte Körperformen, für die der Gestaltskoeffizient im ganzen Körper gleich groß ist, und es wird dann, wie Gleichung (28) zeigt, $\mathfrak{J}$ dieselbe Funktion des Raumes wie $\mathfrak{H}_0$, also z. B. konstant, wenn $\mathfrak{H}_0$ konstant ist, d. h. solche Körper haben die Eigenschaft, durch eine gleichförmige äußere Kraft gleichförmig magnesiert zu werden. Wie wichtig solche Körperformen für die Untersuchung sind, sieht man ein, wenn man bedenkt, daß dann mit $\mathfrak{H}_0$ auch $\mathfrak{H}$ im ganzen Körper konstant ist und daß folglich unsere Theorie für jeden einzelnen Fall, d. h. für einen bestimmt gegebenen Wert von $\mathfrak{H}_0$ auch gültig bleibt, wenn man die Grundhypothese fallen läßt und, der Wirklichkeit entsprechend, annimmt, daß $\varkappa$ für verschiedene $\mathfrak{H}$ verschiedene Werte hat — solche verschiedene Werte von $\mathfrak{H}$ kommen ja in Körpern der gedachten Form, wenn nur $\mathfrak{H}_0$ einen bestimmten Wert hat, gar nicht vor. Wenn man also einen solchen Körper nacheinander verschiedenen Kräften $\mathfrak{H}_0$ aussetzt und dabei verschiedene $\varkappa$ findet, so ist doch jedes dieser $\varkappa$ der dem betreffenden $\mathfrak{H}_0$ entsprechende wahre Wert, was bei einem Körper anderer Form nicht der Fall sein würde.

Es läßt sich leicht zeigen, welche Körperformen die in Rede stehende Eigenschaft haben. Daß der unendliche Kreiszylinder und der geschlossene Ring solche Formen sind, wenn die Kraft axial gerichtet ist, sieht man auch ohne Rechnung ein, da hier alle Achsenpunkte gleichberechtigt sind, die Größe $\varepsilon$ also nicht nur konstant, sondern sogar null sein muß; man kann dies auch aus der Erwägung schließen, daß die Pole, wie wir wissen, die Repräsentanten der Wirkung eines Magnetkörpers sind, daß aber diese Pole beim unendlichen Zylinder in unendlicher Entfernung liegen, beim Ringe aber überhaupt nicht existieren. Ein einfacher Ansatz zeigt aber, daß es noch weitere solche Körper gibt. Sind nämlich $X_a Y_a Z_a$ im Raume konstant, so ist $V_a$ eine lineare Funktion der Koordinaten $xyz$. Soll diese gleichförmige Kraft gleichförmige Magnetisierung hervorrufen, so muß wegen der Gleichung (9) auch $V$ linear in $xyz$ sein. Die zweite der Gleichungen (3) wird sich alsdann durch ein ebenfalls lineares $V_i$ befriedigen lassen. Bei gleichförmiger Magnetisierung ist aber nach Früherem und nach Gleichung (11) $V_i$ aus den ersten Differentialquotienten des NEWTONschen Potentials zusammengesetzt; letzteres muß also eine Funktion zweiten Grades der Koordinaten sein. Das ist nun bekanntlich bei den von Oberflächen zweiten Grades begrenzten Körpern, d. h. im wesentlichen beim Ellipsoid und seiner Spezialform, der Kugel,

der Fall. Diese Körper werden also ebenfalls durch gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisiert.

Bei Körpern dieser Art hängt es von dem Werte der Konstanten $\varepsilon$ ab, ob sie für die Magnetisierung günstige oder ungünstige Bedingungen darbieten, und es läßt sich schon aus einfachen Betrachtungen das allgemeine Gesetz dieses Einflusses erschließen: je gestreckter die Körperform in der Richtung der Magnetisierung im Vergleich zu den anderen Richtungen ist, desto günstiger, je platter, desto ungünstiger sind die Verhältnisse; am gestrecktesten ist der unendliche Zylinder und der geschlossene Ring, hier ist $\varepsilon = 0$, also

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}_0 \quad , \tag{30}$$

am plattesten ist eine dünne Scheibe, die in der Dickenrichtung magnetisiert wird, hier ist $\varepsilon = 4\pi$, und das ist sein überhaupt größtmöglicher Wert. Mit der Eigenschaft guter Magnetisierbarkeit vereinigen die gestreckten Formen zugleich einen anderen Vorteil, nämlich den, daß sie sich zur experimentellen Ermittelung von $\varkappa$ am meisten eignen, weil hier nach (30) $\varkappa$ einen proportionalen Einfluß auf $\mathfrak{J}$ ausübt, während nach (28) bei gedrungenen Formen das $\varkappa$ des Nenners den Einfluß des $\varkappa$ im Zähler mehr oder weniger aufhebt.

**Ähnlichkeitssatz** von THOMSON. Während die Größe $\varepsilon$ zur Vergleichung des Verhaltens verschieden gestalteter Körper dient, bezieht sich auf das Verhalten ähnlicher Körper der folgende unmittelbar einleuchtende Satz von THOMSON[1]. Einander ähnliche Körper gleichen Stoffes, die auf ähnliche Weise mit Drahtwindungen umwickelt sind, deren Längen den Quadraten der Körperdimensionen proportional sind, erhalten bei gleicher Stärke des magnetisierenden Stromes magnetische Momente, die sich wie ihre Volumina verhalten, und üben auf ähnlich gelegene äußere Punkte die gleiche Kraft aus.

Wenn nach H. MEYER[2] der Satz nur für Eisen, nicht aber für Stahl giltig ist, so hat dies jedenfalls in sekundären Umständen seinen Grund.

**Einfluß des Wertes von $\varkappa$.** Wie bei verschiedenen Werten von $\varepsilon$, so gestalten sich auch bei verschiedenen Werten von $\varkappa$ die Verhältnisse sehr verschieden. Zunächst, je nachdem $\varkappa$ positiv oder negativ ist, je nachdem es sich also um paramagnetische oder diamagnetische Körper handelt. Die in dieser Hinsicht an die Gleichung (28) zu knüpfenden Betrachtungen brauchen nicht wiederholt zu werden, da sie sich mit früheren decken. Wenn $\varkappa$ sehr groß oder sehr klein ist, vereinfachen sich die Formeln wesentlich, und gerade diese Grenzfälle sind insofern wichtig, als der erstere bei den weicheren Eisensorten, wenigstens für mittelstarke Magnetisierungen, der andere bei der großen Mehrzahl aller übrigen Stoffe erfüllt ist.

Für sehr kleines $\varkappa$ wird in Gleichung (14) $V_i$ ebenfalls sehr klein, also nach der zweiten Gleichung (3) annähernd $V = V_a$; und das kann man entweder ohne weiteres benutzen, so daß nach Gleichung (9) und (28)

$$A = -\varkappa \frac{\partial V_a}{\partial x} \text{ usw.}, \qquad \mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}_0$$

wird; bei sehr kleinem $\varkappa$ ist also $\mathfrak{J}$ für alle Körperformen durch dieselbe Gleichung bestimmt, wie nach (30) bei beliebigem $\varkappa$ für die unendlich gestreckten Körperformen. Oder man behält, wenn man erst unendlich kleine Größen dritter Ordnung vernachlässigen will, zwar $V_i$ bei, ersetzt aber in seinem Ausdrucke (14) $V$ durch $V_a$, so daß man erhält:

$$V_i = \varkappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V_a}{\partial n} \,, \qquad V = V_a + \varkappa \int \frac{ds}{r} \frac{\partial V_a}{\partial n} \quad , \tag{31}$$

---

[1] W. THOMSON, Trans. R. Soc. 1856. (1) S. 287. — [2] H. MEYER, Wied. Ann. 18. S. 233. 1883.

während die Gleichungen (9), (10), (10a) und (28) hier unverändert bleiben.

Für sehr großes $\varkappa$ andererseits wird nach Gleichung (10) $\mathfrak{J}$ groß gegen $\mathfrak{H}$, infolgedessen nach Gleichung (27) $\mathfrak{H}$ nur ein kleiner Bruchteil der ursprünglichen äußeren Kraft $\mathfrak{H}_0$, und nach Gleichung (28) trotz des unendlich großen $\varkappa$ für eine endliche äußere Kraft $\mathfrak{H}_0$ die Intensität der Magnetisierung ebenfalls nur endlich, nämlich

(32) $$\mathfrak{J} = \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{H}_0 \quad .$$

Es ist also dann $\mathfrak{J}$ von dem Werte von $\varkappa$ ganz unabhängig, mit anderen Worten: für größere und größere Werte der Suszeptibilität wird zwar die Magnetisierung ebenfalls immer stärker, aber allmählich in immer geringerem Maße, und schließlich hat eine weitere Zunahme von $\varkappa$ keinen merklichen Einfluß mehr; ausgenommen ist nur der Fall, in welchem $\varepsilon$ sehr klein oder null ist, was nach den obigen Bemerkungen bei sehr gestreckten Körperformen bzw. beim Ringe eintritt. Ob z. B. die Suszeptibilität des Materials 30 oder 300 sei — Werte, die sich wie 1 : 10 verhalten — ist bei einem Körper von der Form eines sehr langen Stabes sehr wesentlich, indem die Stärke seiner Magnetisierung in beiden Fällen sich ebenfalls etwa wie 1 : 10 verhält, bei einem kugelförmigen oder überhaupt gedrungenen Körper ist es so gut wie gleichgültig.

Ähnliche Betrachtungen wie für $\mathfrak{J}$ an die Gleichung (28) kann man nun für die „magnetische Induktion" $\mathfrak{B}$ an eine entsprechende Gleichung knüpfen, es wird aber genügen, diese Gleichung hinzuschreiben, wobei man sich, wie dort des $\varkappa$, so hier der Größe $\mu$ bedienen wird. Als allgemeine Gleichung zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}_0$ hat man dann die 2. Gleichung (29a); für Werte von $\mu$, die nur wenig von 1 verschieden sind, nimmt sie die Form an:

(33) $$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}_0$$

für stark magnetisierbare Stoffe andererseits, also sehr große $\mu$, wird [Analogon der Gleichung (32)]

(34) $$\mathfrak{B} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\mathfrak{H}_0 \quad ,$$

d. h. ein stark magnetisierbarer Körper verdichtet die Kraftlinien auf das $4\pi/\varepsilon$-fache, wo $\varepsilon$ von der Gestalt des Körpers abhängt; im ungünstigsten Falle, d. h. bei ganz platten Körpern ($\varepsilon = 4\pi$) ist hiernach die Verdichtung gleich eins, d. h. es findet gar keine Verdichtung statt, jeder anderen Körperform entspricht eine bestimmte Verdichtungszahl $4\pi/\varepsilon$, nur bei sehr gestreckten Körpern muß sie trotz sehr großen Wertes von $\mu$ aus der allgemeinen Formel (29a) berechnet werden, und beim Ringe ($\varepsilon = 0$) ergibt diese einfach $\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}_0$. Ebenso zeigt diese allgemeine Formel, daß bei Stoffen mit $\mu < 1$ (diamagnetische Stoffe) nicht Verdichtung, sondern Verdünnung der Kraftlinien eintritt. Es sei noch bemerkt, daß sich der Abstand benachbarter Kraftlinien innerhalb und außerhalb des induzierten Körpers hiernach wie $\sqrt{4\pi/\varepsilon} : 1$ verhält.

Kehren wir ferner noch einmal zur Grundgleichung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H}$$

zurück. Es sind hier drei Fälle denkbar: 1. das erste Glied stellt den Hauptteil von $\mathfrak{B}$ dar, oder 2. das zweite Glied tut dies, oder 3. beide Glieder sind von gleicher praktischer Größenordnung. Für die meisten Stoffe ist der 1. Fall erfüllt, $\varkappa$ ist sehr klein, also auch $\mathfrak{J}$, und $\mathfrak{B}$ unterscheidet sich von $\mathfrak{H}$ nur um einen kleinen Bruchteil. Bei Eisen usw. ist im allgemeinen der 2. Fall erfüllt, $4\pi\varkappa$ ist sehr groß gegen 1, und es ist somit

(35) $$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} = 4\pi\varkappa\mathfrak{H} \quad .$$

Der 3. Fall kommt sehr selten vor, nämlich bei der Magnetisierung gewisser Eisen-, Kobalt- und Nickelsorten in sehr starken Feldern (vgl. den nächsten Artikel.)

Endlich ist es noch von Interesse, den Einfluß der Größenordnung von $\varkappa$ auf die Oberflächengleichungen (18) zu untersuchen. Für sehr kleines $\varkappa$ wird

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} + \frac{\partial V_i}{\partial n_a} = 0 \quad ,$$

was nichts Neues darbietet, für sehr großes $\varkappa$ andererseits wird

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} + \frac{\partial V_a}{\partial n_i} = 0 \quad ,$$

also, wenn $V_i$ und $V_a$ die Oberflächenwerte sind:

$$\overline{V_i} + \overline{V_a} = \text{const.} \tag{35a}$$

Während also im allgemeinen für die magnetische Induktion die Gleichung (18a) gilt, reduziert sie sich für großes $\varkappa$ auf (35a), d. h. der sonst bestehende Unterschied zwischen den Verhältnissen bei der elektrostatischen Verteilung (Bd. 4, S. 23) und der magnetischen Induktion fällt in diesem Spezialfalle weg, beide Aufgaben werden hier identisch, nur daß die magnetische wegen der Bedingung: algebraische Summe aller Magnetismen gleich null, spezielleren Charakters ist. Die wichtigsten Sätze der Elektrostatik lassen sich dann auf unser Gebiet herübernehmen, insbesondere einige Sätze über Hohlkörper, die ihrer auch praktischen Wichtigkeit halber kurz angeführt werden mögen; sie gelten für beliebige Gestalt des Hohlkörpers, aber nur für endliche Dicke seiner Wandlungen. Ein solcher Hohlkörper wirkt auf äußere Pole genau so, als ob er voll wäre. Wird er durch äußere Pole magnetisiert, so hebt er deren Wirkung auf Pole, die in seiner Höhlung liegen, gerade auf, schützt diese also vor äußerer Beeinflussung (magnetische Schirmwirkung, vgl. w. u., sowie hinsichtlich ihrer Anwendung auf Galvanometer Bd. 4, S. 273). Ist der Hohlkörper durch innere Pole magnetisiert, so hebt er deren Wirkung auf äußere Pole gerade auf. Endlich ist die Wirkung des Hohlkörpers auf innere Pole unabhängig von seiner äußeren Oberfläche.

**Differential-Definition von $\varkappa$ und $\mu$.** Die Bedeutung dieser Größen für die Beziehung zwischen einem einzelnen, zusammengehörigen Wertepaare von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ ist an besondere Voraussetzungen nicht geknüpft. Anders liegt die Sache, sobald man den ganzen Verlauf der Größen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$, als Funktionen von $\mathfrak{H}$ verfolgen will. Eine einfache Bedeutung haben jene Koeffizienten dann nur noch in dem, in unserer Theorie freilich vorausgesetzten Falle, daß sie Konstanten sind. Sind sie dagegen, wie es bei Eisen usw. der Fall ist, Variable, so haben sie für jeden bestimmten Fall offenbar nur noch eine Durchschnittsbedeutung, sie bezeichnen das Endergebnis der Magnetisierung, ohne den Verlauf derselben zu berücksichtigen. Für diesen Fall gibt es offenbar zwei andere Größen, die dem Vorgang mehr auf den Grund gehen und deren Formel man unmittelbar erhält, indem man z. B. an die Analogie mit der konstanten und veränderlichen Geschwindigkeit in der Mechanik denkt; man muß die neuen Größen deffinieren durch die Formeln

$$\varkappa' = \frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}} \,, \qquad \mu' = \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \quad , \tag{36}$$

also in Differentialform; man kann sie nach dem Vorschlage von KNOTT als differentielle Suszeptibilität bzw. Permeabilität bezeichnen — der von STEINMETZ[1] vorgeschlagene Ausdruck „scheinbare“ Permeabilität wird der Bedeutung nicht gerecht. Wäre $\varkappa$ konstant, so wäre

[1] C. P. STEINMETZ, El. Z. 12. 573. 1891.

$$\varkappa' = \frac{d(\varkappa \mathfrak{H})}{d\mathfrak{H}} = \varkappa \quad ;$$

ist aber, wie das bei stark magnetisierbaren Stoffen der Fall ist, $\varkappa$ variabel, so hat man:

$$\varkappa' = \frac{d(\varkappa \mathfrak{H})}{d\mathfrak{H}} = \varkappa + \mathfrak{H}\frac{d\varkappa}{d\mathfrak{H}} \quad , \tag{36a}$$

es sind also die differentiellen Koeffizienten von den gewöhnlichen im allgemeinen sehr verschieden, und nur in einzelnen Phasen des Magnetisierungsprozesses fallen sie zusammen.

**Remanenz.** Eine von speziellen Voraussetzungen freie Theorie der Remanenz hat Föppl[1] entwickelt. Sie unterscheidet zwischen magnetisch weichen und harten Körpern; jene haben keine Koerzitivkraft und zeigen keine Remanenz, diese wohl. Jene sind durch die Grundgleichungen der allgemeinen Theorie, wie sie oben skizziert ist, exakt charakterisiert, d. h. die Induktion erfüllt die beiden Gleichungen

$$\text{quirl}\,\mathfrak{B} = 0 \ , \qquad \text{div}\,\mathfrak{B} = 0 \quad ,$$

oder in den Komponenten geschrieben

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \ , \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad .$$

Bei magnetisch harten Körpern dagegen ist zwar noch $\text{div}\,\mathfrak{B} = 0$, der quirl dagegen hat einen Wert $\mathfrak{A}$, es ist also

$$\text{quirl}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \quad ,$$

oder

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x \ , \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = A_y \ , \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = A_z \quad .$$

Der Vektor $\mathfrak{A}$ charakterisiert den magnetischen Härtegrad des Körpers. Er beschränkt das Eindringen der von der magnetisierenden Spule kommenden Kraftlinien in die Stahlmasse, erschwert also ihre Magnetisierung; aber umgekehrt erschwert er auch nach dem Aufhören der magnetisierenden Kraft den Rückfluß der Kraftlinien und erklärt so den remanenten Magnetismus. Gleichzeitig führt er zu der Tatsache der Schirmwirkung, ergibt aber eine solche nur für magnetisch harte Körper (s. w. u.). — Um zu quantitativen Ergebnissen hinsichtlich der Remanenz zu gelangen, muß man freilich über den Vektor $\mathfrak{A}$ besondere Annahmen machen, auch frägt es sich, ob er nicht seinerseits wieder von dem Werte von $\mathfrak{B}$ abhängt; qualitativ aber stellt die Theorie die Remanenz in den großen Zügen dar, und sie führt zu mancherlei bemerkenswerten Konsequenzen, so zu der, daß die Remanenz von der Oberfläche ins Innere eines Magneten nicht ab-, sondern zunehmen muß, ein Ergebnis, das, wie Föppl zeigt, mit den seinerzeit berühmt gewordenen, jetzt so ziemlich vergessenen Jaminschen Ätzversuchen[2] nur scheinbar im Widerspruch steht.

In bezug auf die Abhängigkeit der Remanenz von der Form läßt sich allgemein nur sagen, daß sie ganz entsprechend wie die Induktion selbst durch den

---

[1] A. Föppl, Wied. Ann. **48**. 252. 1893. — [2] P. Jamin hat in den Comptes rendus (von Bd. **77** an) eine Vorstellung über das Eindringen des Magnetismus in das Eisen entwickelt und auf zahlreiche Arten, z. B. durch Wegätzen der Oberflächenschicht, zu stützen versucht, welche viel des Interessanten bietet, sich aber doch nicht zu halten vermocht hat.

Entmagnetisierungsfaktor bestimmt wird; Formen, für die dieser klein ist, lassen sich also zwar stark magnetisieren, halten davon aber auch einen beträchtlichen Teil zurück und umgekehrt.

## Anwendung der Theorie auf einzelne Körperformen.

**Magnetisierung einer Kugel.** Für die Kugel läßt sich das Problem der magnetischen Induktion mit Hilfe der Kugelfunktionen lösen. Der Kugelradius sei 1, die Entwickelung des Oberflächenwertes $\bar{V}_a$ des gegebenen äußeren Potentials $V_a$ nach Kugelfunktionen sei

$$\bar{V}_a = (V_a)_0 + (V_a)_1 + (V_a)_2 + \cdots \quad ,$$

also für innere Punkte, wenn $\varrho$ der Abstand vom Mittelpunkte ist:

$$(V_a)_i = (V_a)_0 + \varrho (V_a)_1 + \varrho^2 (V_a)_2 + \cdots \quad .$$

Der Differentialquotient nach innen hat daher für die Oberfläche den Wert

$$\frac{\partial \bar{V}_a}{\partial n_i} = -(V_a)_1 - 2(V_a)_2 - \cdots \quad .$$

Bildet man nun für das unbekannte Induktionspotential $V_i$ formell dieselben Entwickelungen, aber nicht bloß für das Innere, sondern auch für das Äußere

$$\bar{V}_i = (V_i)_0 + (V_i)_2 + \cdots \quad ,$$

$$(V_i)_i = (V_i)_0 + \varrho (V_i)_1 + \varrho^2 (V_i)_2 + \cdots \quad ,$$

$$(V_i)_a = \frac{(V_i)_0}{\varrho} + \frac{(V_i)_1}{\varrho^2} + \frac{(V_i)_2}{\varrho^3} + \cdots \quad ,$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_i} = -(V_i)_1 - 2(V_i)_2 - \cdots \quad ,$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_a} = -(V_i)_0 - 2(V_i)_1 - 3(V_i)_2 - \cdots \quad ,$$

so kann man die Gleichung (18a) bilden und erhält dann durch Gleichsetzung der Glieder gleicher Ordnung:

$$\left\{\begin{aligned} &(V_i)_0 = 0 \ , \quad (V_i)_1 = -\frac{(V_a)_1}{1 + \frac{3}{4\pi\varkappa}} \ , \quad (V_i)_2 = -\frac{(V_a)_2}{1 + \frac{5}{8\pi\varkappa}} \ , \\ &\text{allgemein:} \quad (V_i)_n = -\frac{(V_a)_n}{1 + \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{1}{4\pi\varkappa}} \ . \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Damit ist das Problem gelöst, da man nun auch $ABC$ und $\mathfrak{J}$ hinschreiben kann. Für eine von zwei konzentrischen Kugelschalen begrenzte Schale erfolgt die Lösung in analoger Weise, und zwar auch dann, wenn die magnetisierenden Pole teils im äußeren Raume, teils in der Höhlung liegen; nur muß man dann $V_a$ und $V_i$ im Inneren des induzierten Körpers nach auf- und absteigenden, $V_i$ im äußeren Raume nach absteigenden, in der Höhlung nach aufsteigenden Potenzen von $\varrho$ entwickeln.

Wirkt auf die Kugel eine im Raume konstante magnetisierende Kraft, so ist

$$V_a = -X_a a - Y_a b - Z_a c$$

eine Kugelfunktion erster Ordnung, dasselbe gilt dann auch von $V_i$, und folglich erhält man:

$$V_i = -\frac{V_a}{1 + \frac{3}{4\pi\varkappa}} \quad ,$$

$$V = V_a + V_i = \frac{V_a}{1 + \frac{4\pi}{3}\varkappa} \quad .$$

$$(38)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4\pi}{3}\varkappa} X_a \ , \quad B = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4\pi}{3}\varkappa} Y_a \ , \quad C = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4\pi}{3}\varkappa} Z_a \ , \\ \mathfrak{J} = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4\pi}{3}\varkappa} \mathfrak{H}_a \ , \end{cases}$$

wofür man nach (8) auch kürzer

$$(38a)\quad A = p X_a \ , \quad B = p Y_a \ , \quad C = p Z_a \ , \quad \mathfrak{J} = p \mathfrak{H}_a$$

schreiben kann; der Koeffizient $p$ ist für die Kugel in der Tat nichts anderes als das Verhältnis der Magnetisierung zur äußeren Kraft. Die Kugel wird also durch die gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisiert, der Gestaltskoeffizient $\varepsilon$ ist für sie $4\pi/3$, und bei großer Suszeptibilität des Materials wird nach (34) die „magnetische Induktion"

$$(38b)\quad \mathfrak{B} = 3\,\mathfrak{H}_a \quad ,$$

d. h. die Kraftlinien werden auf das Dreifache verdichtet, oder anders ausgedrückt, der Abstand der Kraftlinien innerhalb und außerhalb der Kugel verhält sich wie $\sqrt{3} : 1$. Die letzte der Formeln (38) läßt erkennen, wie schwach eine Kugel selbst aus einem stark magnetischen Stoffe sich magnetisieren läßt; setzt man z. B. für Eisen $\varkappa = 30$, so würde die Intensität der Magnetisierung ohne Rücksicht auf die entmagnetisierende Kraft der Kugel $30\,\mathfrak{H}_a$ betragen, durch diese Gegenkraft aber wird sie auf etwa $\frac{1}{125}$ dieses Wertes herabgedrückt. Hieraus geht aber zugleich hervor, daß die Kugel sich zur Bestimmung der Materialkonstanten sehr schlecht eignet.

**Ellipsoid**[1]. Auch das Ellipsoid wird nach dem früher Gesagten durch eine gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisiert. Dabei treten dann die von dem NEWTONschen Potential des Ellipsoids her bekannten Konstanten

$$(39)\quad \begin{cases} L = 2\pi a_0 b_0 c_0 \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_0^2+\lambda)\sqrt{(a_0^2+\lambda)(b_0^2+\lambda)(c_0^2+\lambda)}} \ , \\ M = 2\pi a_0 b_0 c_0 \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b_0^2+\lambda)\sqrt{(a_0^2+\lambda)(b_0^2+\lambda)(c_0^2+\lambda)}} \ , \\ N = 2\pi a_0 b_0 c_0 \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_0^2+\lambda)\sqrt{(a_0^2+\lambda)(b_0^2+\lambda)(c_0^2+\lambda)}} \end{cases}$$

auf, und es werden die Komponenten der Magnetisierungsintensität

[1] Zur Literatur für Kugel und Ellipsoid ist, außer den schon angeführten Abhandlungen von POISSON, F. NEUMANN und Lord KELVIN noch zu nennen: R. LIPSCHITZ, In.-Diss. Berlin 1857.

$$(40)\qquad A=\frac{\varkappa}{1+L\varkappa}X_a\,,\qquad B=\frac{\varkappa}{1+M\varkappa}Y_a\,,\qquad C=\frac{\varkappa}{1+N\varkappa}Z_a\,.$$

An die Stelle des Faktors $4\pi/3$ sind also hier die Konstanten $LMN$ getreten, d. h. für jede Komponente eine andere Größe, und es hat folglich die Gleichung (28) hier im allgemeinen keine einfach algebraische Bedeutung; mit anderen Worten, eine magnetisierende Kraft von bestimmter Richtung ruft in dem Ellipsoid einen Magnetismus hervor, dessen Achse im allgemeinen eine andere Richtung hat. Übereinstimmend werden beide Richtungen nur dann, wenn die magnetisierende Kraft die Richtung einer der Achsen des Ellipsoids hat, z. B. die der $z(c_0)$-Achse, alsdann wird

$$(40\text{a})\qquad \mathfrak{J}=\frac{\varkappa}{1+N\varkappa}\mathfrak{H}_a\,,$$

d. h. das jetzige $N$ ist mit dem früheren $\varepsilon$ identisch. Der Wert von $N$ ist aus den Tafeln für die elliptischen Integrale zu entnehmen.

Hat man es, was in der Praxis fast stets der Fall ist, mit einem Rotationsellipsoid zu tun, so wird $a_0=b_0$, also $L=M$, und man kann alles durch die Exzentrizität $e$ der Meridianellipse ausdrücken, nämlich einerseits für das abgeplattete Rotationsellipsoid[1]:

$$(41)\qquad \begin{cases} a_0=b_0=\dfrac{c_0}{\sqrt{1-e^2}}\,,\\[2ex] N=\varepsilon=4\pi\left(\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e\right)\,, \end{cases}$$

andererseits für das verlängerte Rotationsellipsoid

$$(41\text{a})\qquad \begin{cases} a_0=b_0=c_0\sqrt{1-e^2}\,,\\[1ex] N=\varepsilon=4\pi\dfrac{1-e^2}{e^2}\left(\dfrac{1}{2e}\log\dfrac{1+e}{1-e}-1\right)\,. \end{cases}$$

Wird die Abplattung stärker und stärker, so nähert sich $N$ dem Werte

$$(41\text{b})\qquad N=4\pi\,,$$

den es für eine dünne Scheibe erreicht, ein Wert, der schon mehrfach benutzt wurde und der größtmögliche überhaupt ist. Wird andererseits die Streckung des Ellipsoids größer und größer, so kann man zunächst mit der Näherungsformel

$$(41\text{c})\qquad N=4\pi\frac{a_0^2}{c_0^2}\left(\log\frac{2c_0}{a_0}-1\right)$$

rechnen, und schließlich, also für den unbegrenzten Kreiszylinder wird, wie sich durch Entwickelung des lg ergibt,

$$(41\text{d})\qquad N=0\,.$$

Die folgende kleine Tabelle läßt erkennen, in welcher Weise der schwächende Gestaltskoeffizient $N$ beim Rotationsellipsoid abnimmt, wenn das Verhältnis $m=c_0:a_0$ der Rotationsachse zur anderen Achse mehr und mehr zunimmt; der außer $N$ noch beigefügte Wert $4\pi/N$, also $4\pi/\varepsilon$ läßt nach Gleichung (34) erkennen, in welchem Verhältnis in den verschiedenen Ellipsoiden die Kraftlinien verdichtet werden, falls die Suszeptibilität groß ist; $e$ hat natürlich in den sechs untersten Reihen die entgegengesetzte Bedeutung wie in den vier obersten; endlich ist noch das häufig gebrauchte Produkt $Nm^2$ hinzugefügt.

[1] Infolge mißverstandener englischer Schreibweise ist die Formel für $N$ vielfach falsch wiedergegeben worden.

Entmagnetisierungsfaktoren von Rotationsellipsoiden.

| $e$ | $c_0 : a_0 = m$ | $N$ | $\frac{4\pi}{N}$ | $Nm^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 12,59 | 1,00 | 0,00 |
| 0,866 | 0,5 | 6,60 | 1,90 | 1,65 |
| 0,661 | 0,75 | 5,16 | 2,43 | 2,90 |
| 0,436 | 0,9 | 4,77 | 2,63 | 3,87 |
| 0 | 1 | 4,19 | 3,00 | 4,19 |
| 0,866 | 2 | 2,18 | 5,78 | 8,72 |
| 0,968 | 4 | 0,95 | 13,3 | 15,2 |
| 0,980 | 5 | 0,702 | 17,9 | 17,5 |
| 0,995 | 10 | 0,255 | 49,3 | 25,5 |
| 0,998 | 15 | 0,135 | 93,1 | 30,4 |
| 0,999 | 20 | 0,0848 | 148 | 34,0 |
| | 25 | 0,0579 | 217 | 36,2 |
| fast 1 | 30 | 0,0432 | 291 | 38,8 |
| | 40 | 0,0266 | 472 | 42,5 |
| | 50 | 0,0181 | 694 | 45,3 |
| | 70 | 0,0101 | 1243 | 49,5 |
| | 100 | 0,0054 | 2330 | 54,0 |
| | 150 | 0,0026 | 4830 | 58,3 |
| | 200 | 0,0016 | 7850 | 64,0 |
| | 300 | 0,00075 | 16700 | 67,5 |
| | 500 | 0,0003 | 41700 | 75,0 |

Die vier obersten Reihen beziehen sich auf abgeplattete Ellipsoide, die fünfte auf die Kugel, die übrigen auf gestreckte Ellipsoide, die von einigen Autoren „Ovoide" genannt werden. Es mögen noch die Formeln für die Magnetisierung von Rotationsellipsoiden durch gleichförmige Kräfte senkrecht zur Figurachse, also, was hierfür offenbar genügt, die Werte von $L$ oder $M$ angeführt werden. Sie lauten für ein abgeplattetes Ellipsoid

$$L = M = 2\pi\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2}\right) , \tag{42}$$

also für starke Abplattung $\pi^2(c/a)$ und für eine ganz platte Scheibe null, so daß geradezu $\mathfrak{J} = \varkappa\mathfrak{H}_0$ wird; andererseits für das gestreckte Ellipsoid

$$L = M = 2\pi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3}\log\frac{1+e}{1-e}\right) , \tag{42a}$$

und für unendliche Streckung, also für einen unbegrenzten Zylinder oder für die zentralen Teile eines sehr langen Zylinders mit abgerundeten Enden

$$L = M = \varepsilon = 2\pi \quad . \tag{42b}$$

Bei einem solchen Zylinder ist also, wenn er quer gegen seine Achse magnetisiert wird, die entmagnetisierende Kraft sehr beträchtlich, aber doch nur halb so groß, wie in dem anderen extremen Falle einer ganz dünnen Scheibe, die senkrecht gegen ihre Fläche magnetisiert wird.

Seitliche Wirkung des Ellipsoids. Für gewisse wichtige Untersuchungen kommt die Wirkung gleichförmig magnetisierter Ellipsoide nach außen und insbesondere der Ort des Maximums dieser Wirkung in Frage; die bezügliche Theorie

hat NAGAOKA[1] übersichtlich entwickelt. Es sei $\varepsilon = c e$ die halbe Fokaldistanz, $m$ das Achsenverhältnis $c/a$, und $c'$ die halbe Rotationsachse eines konfokalen Ellipsoids; es wird nach dem Ort größter $x$-Komponente der Außenwirkung des nach der $z$-Richtung magnetisierten Körpers gefragt. Die Antwort lautet für das verlängerte Rotationsellipsoid:

$$c'^6 + (3\varepsilon^2 - 5c'^2)c'^2 z^2 + \varepsilon^2 z^4 = 0 \quad ,$$

für das abgeplattete:

$$c'^6 - (3\varepsilon^2 + 5c'^2)c'^2 z^2 - \varepsilon^2 z^4 = 0 \quad ,$$

oder in Koordinaten:

$$z^6 + \frac{7x^2 - 12\varepsilon^2}{4} z^4 + \frac{x^4 + 9\varepsilon^2 x^2 + 6\varepsilon^4}{2} z^2 - \frac{(x^2+\varepsilon^2)^2(x^2+4\varepsilon^2)}{4} = 0 \quad ,$$

bzw.

$$z^6 + \frac{7x^2 - 12\varepsilon^2}{4} z^4 + \frac{x^4 - 9\varepsilon^2 x^2 + 6\varepsilon^4}{2} z^2 - \frac{(x^2-\varepsilon^2)^2(x^2-4\varepsilon^2)}{4} = 0 \quad .$$

Setzt man in den Gleichungen für $c'$ geradezu $c' = c$, so erhält man offenbar den Ort stärkster Wirkung auf der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids selbst; er rückt, wie die Tabelle I und die Kurve I in Figur 62 zeigen, mit wachsender Länglichkeit der $z$-Achse immer näher. In der Figur sind dann des weiteren die Quadranten verschiedener Ellipsoide und für jedes von ihnen die Kurve stärkster Wirkung im äußeren und, der Vollständigkeit halber, auch im inneren verzeichnet; für die Kugel ist sie eine gerade Linie, unter $26\frac{1}{2}$ Grad gegen die $x$-Achse; alle diese Kurven, soweit sie verlängerte Ellipsoide betreffen, sind in Tabelle II einheitlich durch zusammengehörige Werte von $x/\varepsilon$ und $z/\varepsilon$ charakterisiert. Für größere $m$ liegen die Kurven sehr nahe beieinander, und es wird in der Praxis oft genügen, die Kurve für $m = \infty$ zu benutzen.

| | I | | | II | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $\pm\frac{x}{c}$ | $\pm\frac{z}{c}$ | Form | $\frac{x}{\varepsilon}$ | $\frac{z}{\varepsilon}$ |
| $\infty$ | 0 | 1,000 | Endlos | 0,000 | 1,000 |
| 100 | 0,0014 | 0,990 | Verlängertes Rotations-ellipsoid (Ovoid) | 0,050 | 0,896 |
| 50 | 0,0040 | 0,980 | | 0,100 | 0,842 |
| 30 | 0,0084 | 0,967 | | 0,200 | 0,787 |
| 20 | 0,0192 | 0,952 | | 0,300 | 0,746 |
| 15 | 0,0234 | 0,937 | | 0,400 | 0,742 |
| 10 | 0,0421 | 0,907 | | 0,515 | 0,736 |
| 8 | 0,0579 | 0,886 | | 0,600 | 0,739 |
| 6 | 0,0875 | 0,852 | | 0,800 | 0,765 |
| 4 | 0,1533 | 0,790 | | 1,000 | 0,811 |
| 2 | 0,3833 | 0,641 | | 1,500 | 0,972 |
| 1 | 0,894 | 0,447 | Kugel | 1,572 | 1,000 |
| $^2/_3$ | 1,413 | 0,335 | Abgeplattetes Rotat.-Ellipsoid | 2,000 | 1,171 |
| $^1/_2$ | 1,928 | 0,265 | | 3,000 | 1,616 |
| 0 | $\infty$ | 0 | Scheibe | | |

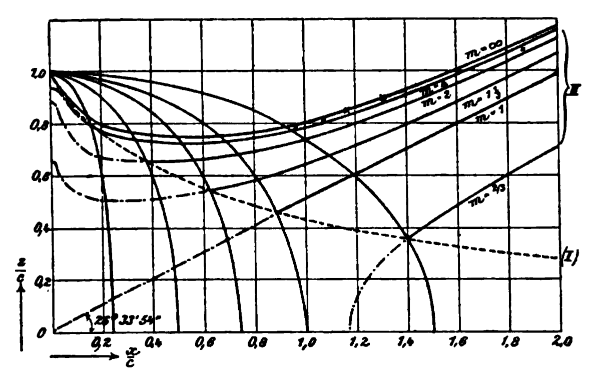
Für die Wirkung verlängerter Rotationsellipsoide in Punkten auf der verlängerten Figurachse gilt übrigens nach ROESSLER[2] der strenge und geschlossene

[1] H. NAGAOKA, Wied. Ann. **57**. S. 275. 1896. — [2] G. ROESSLER, Unterricht über die Magnetisierung des Eisens. Diss. Zürich 1892.

Ausdruck ($e$ Exzentrizität, $r$ Abstand des betreffenden Punktes vom Mittelpunkt, $f$ dessen Verhältnis zur Figur-Halbachse):

$$K = \frac{2\mathfrak{M}}{r^3}\left[\frac{3f^2}{2(f^2-e^2)} + \frac{3f^2}{2e^2} - \frac{3f^2}{4e^2}\lg\frac{f+e}{f-e}\right] .$$

Bisher war von der Einwirkung einer gleichförmigen magnetisierenden Kraft, wie es z. B. der Erdmagnetismus ist oder wie sie zwischen zwei breiten entgegengesetzten Polflächen oder im Innern einer langen Spirale wirksam ist, die Rede. Für das Rotationsellipsoid hat aber F. NEUMANN das Problem auch für den allgemeinen Fall ungleichförmiger Kraft, d. h. beliebig im Endlichen




Figur 62.

verteilt wirkender Pole gelöst. Die Methode ist der oben für die Kugel angegebenen ganz analog, nur werden statt der Polarkoordinaten elliptische Koordinaten eingeführt, d. h. es wird, wenn die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2+y^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{r_0^2-\lambda^2} = 1$$

ist,

$$x = r\sin\delta\cos\psi \ , \quad y = r\sin\delta\sin\psi \quad ,$$

$$z = \sqrt{r^2-\lambda^2}\cos\delta$$

gesetzt, und es lassen sich dann ähnliche Reihen wie bei der Kugel entwickeln. Die magnetischen Momente des ganzen Ellipsoids lassen sich aber, außer durch diese Rechnung, auch direkt angeben, und zwar für ein beliebiges Ellipsoid. Eine Methode hierfür hat F. NEUMANN selbst, eine andere KIRCHHOFF mitgeteilt, die letztere stützt sich auf den Satz, daß eine beliebige Eisenmasse, durch einen Pol $P_1$ magnetisiert, auf einen Pol $P_2$ dasselbe Potential hat, wie, durch $P_2$ magnetisiert, auf $P_1$. Verlegt man den einen dieser Pole in die Unendlichkeit, den anderen in die Endlichkeit, so kann man das allgemeine Problem auf das frühere spezielle zurückführen und erhält, wenn $\Omega$ das NEWTONsche Potential des Ellipsoids ist, für die magnetischen Momente $\alpha\beta\gamma$ des ganzen Ellipsoids die Formeln

$$(43) \qquad \alpha = \frac{\varkappa}{1+L\varkappa}\frac{\partial\Omega}{\partial a} \ , \quad \beta + \frac{\varkappa}{1+M\varkappa}\frac{\partial\Omega}{\partial b} \ , \quad \gamma = \frac{\varkappa}{1+N\varkappa}\frac{\partial\Omega}{\partial c} \ .$$

Nach dem Annäherungsverfahren (s. o.) hat RIECKE (a. a. O.) das Ellipsoid behandelt.

**Zylinder.** Das Problem der Magnetisierung eines Zylinders ist, wenn dieser unbegrenzt ist, in dem allgemeineren Problem des Ellipsoids enthalten. In der Tat haben wir für gleichförmige magnetisierende Kraft schon gefunden, daß für axiale Richtung dieser Kraft $\varepsilon = 0$, bei Quermagnetisierung $\varepsilon = 2\pi$ ist, für

schiefe Magnetisierung wird der Wert zwischen diesen beiden Grenzen liegen. In analoger Weise würde man aus den NEUMANNschen Formeln für die Magnetisierung eines Rotationsellipsoids durch beliebige Kräfte die Magnetisierung eines unbegrenzten Kreiszylinders durch beliebige Kräfte ableiten können, wenn nicht gerade in diesem Falle die NEUMANNschen Reihenentwickelungen ihre Anwendbarkeit verlören. KIRCHHOFF[1] hat aber dieses Problem auf einem anderen Wege in Angriff genommen und gelöst. Er ersetzt nach dem bekannten Satze von GAUSS die wirkenden äußeren Massen durch solche, die auf der Mantelfläche des Zylinders verbreitet sind; ihr Potential $V_a$ erfüllt dann nicht mehr die bei der Umformung der Oberflächengleichung (18) in (18a) benutzte Gleichung (18b), da deren rechte Seite nun nicht mehr null, sondern $4\pi$mal der Dichte der Oberflächenverteilung ist, und folglich ist die Gleichung (18b) durch die neue

$$\frac{\partial V_a}{\partial n_i} + \frac{\partial V_a}{\partial n_a} + (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} = 0$$

zu ersetzen. Gleichzeitig aber muß $\Delta V_a = 0$, d. h. in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_a}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_a}{\partial \vartheta^2} = 0$$

sein. Mit Hilfe der KUMMERschen Integrale und semikonvergenter Reihen wird nun eine Lösung der letzten Gleichung ermittelt, welche gleichzeitig für die Oberfläche dem gegebenen $V_a$ gleich wird, und hieraus dann mit Hilfe der ersten Gleichung $V$ gefunden.

Für einen begrenzten Zylinder existiert eine strenge Theorie nicht, GREEN[2] hat aber eine bei einigermaßen großer Suszeptibilität mit großer Annäherung gültige Formel abgeleitet, welche die Dichte $\lambda$ des freien Magnetismus an einer um $x$ von der Mitte des Stabes entfernten Stelle darstellt und auf welche schon S. 51 hingewiesen wurde; vollständiger als sie dort angegeben wurde, lautet sie

$$\lambda = \pi\varkappa X p \varrho \frac{e^{\frac{px}{\varrho}} - e^{-\frac{px}{\varrho}}}{e^{\frac{pl}{\varrho}} + e^{-\frac{pl}{\varrho}}}\,, \tag{42}$$

wo $X$ die Kraft, $2l$ die Länge, $2\varrho$ der Durchmesser des Zylinders und $p$ eine mit $\varkappa$ durch die Gleichung

$$0{,}231863 - 2\log p + 2p = \frac{1}{\pi\varkappa p^2}$$

verknüpfte Zahl ist und z. B. folgende Werte hat:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varkappa = \infty$ | 336,4 | 62 | 48,4 | 20,2 | 6,3 | 0,143 | 0,0002 | |
| $p = 0$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,1 | 1 | 10 | |

Auch den begrenzten Zylinder hat RIECKE (a. a. O.) nach dem Annäherungsverfahren (s. o.) behandelt; freilich werden nur die beiden ersten Glieder der Reihe berechnet.

**Ring.** Besonderes Interesse in theoretischer und experimenteller Hinsicht bietet der Fall dar, in welchem der zu induzierende Körper Ringform besitzt, d. h. durch Rotation eines ebenen Flächenstückes um eine außerhalb liegende, aber seiner erweiterten Ebene angehörige Achse entstanden gedacht werden kann; und zwar der Fall, wo die Richtung der magnetisierenden Kraft auf den gedachten Querschnittflächen überall senkrecht steht, ihre Größe aber überall dieselbe ist. Ein solcher Ring wird zwar magnetisiert, und zwar wird die durch die Mittel-

[1] G. KIRCHHOFF, Crelles Journ. **48**. S. 348. 1853; Ges. Abh., S. 193. — [2] G. GREEN, An essay on the appl. etc. Nottingham 1828, Crelles Journ. **47**, S. 238. — Vgl. auch A. BEER, Einl. i. d. Elektrostatik usw.

punkte seiner Querschnitte gebildete Linie zur Achse der Magnetisierung; da diese Achse aber eine in sich zurücklaufende Linie ist, erhält der Ring keine Pole, und er übt folglich auch keine Wirkung nach außen hin aus. Man kann also schon ohne Rechnung schließen, daß das Potential $V$ der magnetisierenden Kraft hier null sein und sich so die Theorie besonders einfach gestalten wird. Diese Theorie hat KIRCHHOFF[1] entwickelt, und zwar unter der bestimmten Annahme, daß die magnetisierende Wirkung von einem elektrischen Strome ausgeht, dessen Windungen den Ring gleichförmig umschlingen. Streng gleichförmig ist diese Kraft freilich nicht, da sie nach den Gesetzen des Elektromagnetismus von der Zahl der auf die Längeneinheit der Mittellinie entfallenden Windungen abhängt, die Windungen sich aber an der Innenseite dichter anhäufen als an der Außenseite; bei einem im Verhältnis zu seiner Größe dünnen Ringe wird diese Differenz jedoch unerheblich sein. Das Charakteristische des vorliegenden Falles besteht darin, daß das Potential $V_a$ der magnetisierenden Kraft eine vielwertige Funktion der Koordinaten ist, und zwar in der Weise, daß, wenn man zylindrische Koordinaten $r\,\vartheta\,z$ einführt, $\partial V_a/\partial \varrho$ und $\partial V_a/\partial z$ trotzdem stets null, $\partial V_a/\partial \vartheta$ hingegen — unter $n$ die Windungszahl, unter $i$ die Stromstärke verstanden — 0 oder $2\,n\,i$ ist, je nachdem der Punkt $(r\,\vartheta\,z)$ innerhalb oder außerhalb des Ringes liegt, den die Stromwindungen bilden. Es wird somit außerhalb $V_a = 0$, innerhalb $V_a = 2\,n\,i\,\vartheta$, und bei diesem Werte von $V_a$ genügt man den Grundgleichungen des Induktionsproblems, indem man $V_i = 0$, also $V = V_a$ setzt, wodurch die schon oben ausgesprochene Vermutung ihre Bestätigung erfährt. Gleichzeitig ergibt sich als Achse der Magnetisierung die Mittellinie des Ringes, als ihre Intensität

$$\mathfrak{J} = \varkappa\,\mathfrak{H} = \frac{2\,n\,\varkappa\,i}{r}\quad, \tag{43}$$

als Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{2\,n\,\mu\,i}{r} \tag{44}$$

und als Induktionsfluß durch den gesamten Querschnitt

$$\mathfrak{F} = 2\,n\,i\iint\frac{\mu\,dr\,dz}{r}\quad; \tag{45}$$

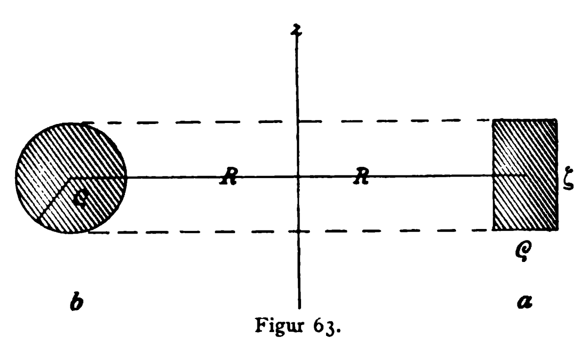
dabei ist $\mu$ streng genommen eine Funktion von $r$, für die man aber in den meisten Fällen mit genügender Annäherung einen Mittelwert einführen und vor das Integral setzen kann; die Integration wird dann in einer Reihe von Fällen ausführbar[2].

1. Rechteckiger Querschnitt, $\varrho$ Breite, $\zeta$ Höhe, $\varrho\,\zeta = q$ Querschnitt, $R$ Mittelwert der $r$ (vgl. Figur 63a); es wird

$$\mathfrak{F} = 2\,n\,\mu\,i\,\zeta\,lg\frac{2\,R+\varrho}{2\,R-\varrho} \tag{46}$$

und speziell, wenn $\varrho$ sehr klein gegen $R$ ist:

$$\mathfrak{F} = \frac{2\,n\,\mu\,i\,q}{R}\quad; \tag{47}$$



Figur 63.

je nachdem $\zeta$ oder $\varrho$ größer ist, spricht man von einem Reifring oder Flachring.

2. Kreisförmiger Querschnitt (Figur 63b), $\varrho$ dessen Radius, $R$ der Mittelwert der $r$, $q$ der Querschnitt; es wird

[1] G. KIRCHHOFF, Pogg. Ann. Ergzbd. 5. S. 1. 1870; Ges. Abh., S. 223. — [2] H. DU BOIS, Magnetische Kreise. S. 110ff.

$$(46) \qquad \mathfrak{F} = 2\,n\,\mu\,i \cdot 2\,\pi\left(R - \sqrt{R^2 - \varrho^2}\right)$$

und, wenn wieder $\varrho$ klein gegen $R$ ist,

$$(49) \qquad \mathfrak{F} = \frac{2\,n\,\mu\,i\,q}{R},$$

also ganz so wie für rechteckigen Querschnitt. Einen Ring mit kreisförmigem Querschnitt nennt man, wenn er gegen seine Größe dünn ist, ein „Toroid." Für den Fall eines ringförmigen Querschnitts, also für eine ringförmige Röhre läßt sich dieser Fall leicht modifizieren.

Verwickelter werden die Verhältnisse, wenn die Windungen des magnetisierenden Stromes den Ring nicht gleichförmig umgeben, so daß auch die Magnetisierung ungleichförmig wird. Den extremen Fall dieser Art, wo nämlich nur eine einzelne Windung oder eine kurze Spule an einer einzigen Ringstelle sitzt, hat BOLTZMANN behandelt und SAUTER[1] systematisch durchgeführt. Er stellt die axiale Magnetisierung $M$ als Funktion des laufenden Ringwinkels durch eine FOURIERsche Reihe mit konstantem Anfangsglied dar und fügt für den hier neu auftretenden radialen Magnetismus eine zweite solche Reihe, natürlich ohne Anfangsglied, hinzu und vereinfacht die Rechnung durch einige annähernd erlaubte Annahmen; das Ergebnis wird dann für verschiedene Fälle diskutiert, und es werden einige interessante Beziehungen dargestellt. Die immerhin recht komplizierten Formeln können hier nicht wiedergegeben werden. Ebensowenig diejenigen für den nächsteinfachen Fall, wo der Ring zwei diametral gegenüberliegende, gleiche Spulen trägt; ein Fall, der von MUES[2] behandelt worden ist, und der eine sinusartige Verteilung des Magnetismus sowie eine Fernwirkung nach der reziproken vierten Potenz der Entfernung ergibt.

Vom allgemeinsten Gesichtspunkte aus hat schließlich I. SCHÜTZ[3] das Ringproblem behandelt; er bedient sich dabei der von C. NEUMANN[4] eingeführten Ringkoordinaten und der von ihm aufgestellten Ausdrücke für das Ringpotential. Er löst das Problem zunächst für den einfacheren Fall, daß die magnetisierenden Kräfte ein eindeutiges Potential haben, zu welchem Behufe die sie erzeugenden magnetischen Massen bekanntlich außerhalb des Ringkörpers liegen müssen bzw. die sie erzeugenden elektrischen Ströme die Ringmasse weder durchfließen noch umkreisen dürfen; es läßt sich dann das DIRICHLETsche Prinzip benutzen. Um nun die Lösung für den weitaus wichtigeren Fall magnetisierender Ströme, die den Ring umkreisen, zu erweitern, wendet SCHÜTZ den Kunstgriff an, daß er zu diesen Strömen willkürlich einen durch die Achse des Ringes fließenden unendlich langen Strom von gleicher Stärke und bestimmten Richtungssinne hinzufügt, hierdurch das Potential wieder eindeutig macht und zuletzt die Magnetisierung des Ringes durch den Axialstrom abzieht, was mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes und auf Grund einer elementaren Überlegung möglich ist. Die Formeln werden naturgemäß sehr verwickelt; sie enthalten vier Funktionen, die je nach der Konfiguration in bestimmten Spezialfällen zu bestimmen sind. Als einfachsten Fall wählt SCHÜTZ den einer einzigen Kreiswindung. Schließlich zeigt er, wie man durch eine sinnreiche Betrachtung ganz ohne Rechnung zu dem KIRCHHOFFschen Resultat (s. o.) für den gleichmäßig mit Windungen bedeckten Ring gelangen kann.

**Geschlitzter Ring. Streuung[5].** Von besonderem Interesse in wissenschaftlicher und technischer Hinsicht ist in neuerer Zeit der geschlitzte Ring

[1] L. BOLTZMANN, Anz. d. Wien. Akad. 1878. S. 203. — J. SAUTER, Wied. Ann. **62**. 85. 1897. — [2] L. MUES, Über d. Magn. v. Eisenringen usw. Inaug.-Diss. Greifswald 1893. — [3] IGNAZ SCHÜTZ, Journ. f. Math. **113**. S. 161. 1894. — [4] CARL NEUMANN, Über Ringpotentiale. Halle 1864. — [5] Vgl. H. DU BOIS, Wied. Ann. **46**. 493. 1892. — Derselbe, Magn. Kreise. Berl. 1894. S. 114. — Durch Reihenentwickelung (s. o.) wurde das Problem von A. WASSMUTH, Wien. Berl. **102** (2), **81**. 1893, behandelt.

geworden, d. h. der Ring, der an einer Stelle unterbrochen ist, so daß sich zu beiden Seiten der Unterbrechungsstelle Polflächen bilden. Der Querschnitt sei kreisförmig, die Dicke klein gegen den Ringradius, das Feld werde, obwohl die Bewickelung praktisch an einer Stelle unterbrochen ist, doch als peripherisch gleichförmig angesehen. $R$ sei der mittlere Ringradius, $r$ der des Querschnittes, $d$ die Schlitzbreite (überall als gleich angenommen), $N$ der Entmagnetisierungsfaktor, der hier, im Gegensatze zum geschlossenen Ringe, natürlich auftritt; dann erhält man für die Zunahme des „selbsterzeugten" magnetischen Potentials von der einen zur andern Stirnfläche:

$$(V_i)_2 - (V_i)_1 = N\mathfrak{J}(2\pi R - d) \quad . \tag{50}$$

Nimmt man nun in erster Annäherung an, daß die Magnetisierung über den ganzen Ring konstant und überall peripherisch gerichtet ist, was bei starken Feldern der Fall sein wird, so braucht man sich lediglich die beiden Stirnflächen mit der Dichte $\pm\mathfrak{J}$ belegt zu denken, und findet dann;

$$(V_i)_2 - (V_i)_1 = 4\pi\mathfrak{J}\left(d + r - \sqrt{d^2 + r^2}\right) \tag{51}$$

und durch Kombination der beiden letzten Gleichungen für den Entmagnetisierungsfaktor:

$$N = \frac{2\left(d + r - \sqrt{d^2 + r^2}\right)}{R - \dfrac{d}{2\pi}} \quad . \tag{52}$$

In zweiter Annäherung muß man berücksichtigen, daß auch die Ringfläche, namentlich in der Nähe der Stirnflächen, mit Magnetismus belegt zu denken ist. Die Berechnung ist hier schwierig; man kann jedoch behaupten, daß, wenn $f$ eine Funktion des Verhältnisses $d:r$ (sozusagen der relativen Schlitzbreite) ist, die Potentialdifferenz und der Entmagnetisierungsfaktor die Werte haben:

$$(V_i)_2 = (V_i)_1 = 4\pi\mathfrak{J}df \;, \quad N = \frac{2df}{R - \dfrac{d}{2\pi}} \quad . \tag{53}$$

Für unendlich engen Schlitz liefern beide Annäherungen übereinstimmend [der Wert von $f$ wird dann eins] die einfache Formel:

$$N = \frac{2d}{R} \tag{54}$$

wofür man auch, wenn man die Schlitzbreite in Prozenten des Umfanges ($p$) oder in Winkelgraden ($\alpha$) ausdrückt:

$$N = {}^1/_8\, p \quad \text{oder} \quad N = 0{,}035\,\alpha \tag{55}$$

schreiben kann[1].

Hiernach hat H. du Bois eine kleine Tabelle berechnet, welche zeigt, wie groß die, verschiedenen Achsenverhältnissen beim Ellipsoid äquivalenten, d. h. die gleiche Entmagnetisierung ergebenden Schlitzbreiten beim kreisförmigen Ringe sind:

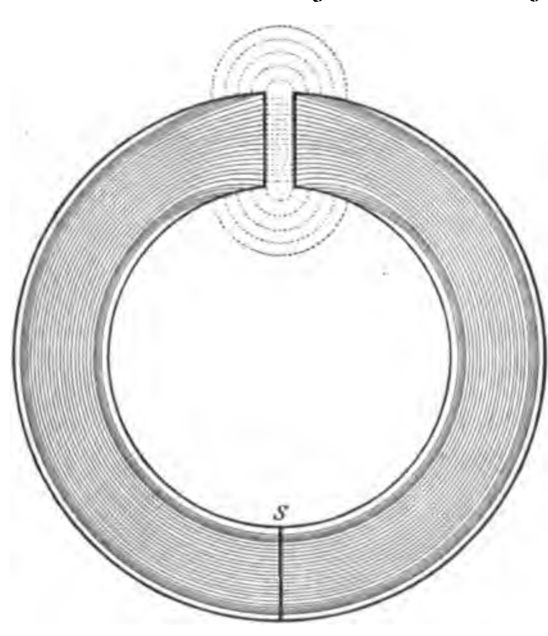
| Ellipsoid Achsenverhältnis | Entmagnetisierungs-faktor | Ring-Schlitzbreite |
|---|---|---|
| 20 | 0,0848 | 2,41° |
| 30 | 0,0432 | 1,22° |
| 40 | 0,0266 | 0,76° |
| 50 | 0,0181 | 0,52° |
| 100 | 0,0054 | 0,15° |

[1] H. du Bois, Verh. Phys. Ges. Berl. 9. 84. 1890.

Zunächst ist also die Entmagnetisierung mit $d$ direkt, mit $r$ umgekehrt proportional; bei weiter werdendem Schlitz wird aber die Zunahme von $N$ langsamer.

In dem meist vorliegenden Falle, daß $\mathfrak{H}$ gegen $4\pi\mathfrak{J}$ zu vernachlässigen und somit $\mathfrak{J} = \mathfrak{B}/4\pi$ ist, kann man sich von dem Zustande des Ringes leicht ein anschauliches Bild entwerfen. Die im übrigen mit der Ringachse konzentrischen, unter einander parallelen Induktionslinien werden nach den Stirnflächen zu divergieren, die Mantelfläche unter spitzen Winkeln treffen und nahezu senkrecht ins Freie austreten (vgl. o. wegen der Brechung): Figur 64 gibt ein schematisches Bild dieser Verhältnisse.

Die Divergenz und namentlich das Austreten der Induktionslinien ins Freie, das in der Nähe von Unterbrechungen im Zusammenhange eines Eisenkörpers auftritt, nennt man die magnetische Streuung, und man sieht ohne weiteres ein, wie man diesen Begriff auch als quantitative Größe definieren kann: man braucht nur das Verhältnis des Induktionsflusses $\mathfrak{F}$ im Eisen zu dem im Schlitz $\mathfrak{F}_0$ zu betrachten; es ist dann



Figur 64.

$$\sigma = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}_0} \tag{56}$$

der „Streuungskoeffizient"; ob man dabei unter $\mathfrak{F}$ den stärksten Induktionsfluß (gerade gegenüber dem Schlitz) oder seinen Mittelwert im ganzen Ring versteht, wird meist keinen merklichen Unterschied machen. Der Streuungskoeffizient ist naturgemäß immer größer als eins; in der Praxis ist es häufig eine der wichtigsten Aufgaben, ihn dem idealen Werte 1 möglichst nahe zu bringen, was gelingen wird, je mehr man den Körper der geschlossenen Form nähert. Es sei noch bemerkt, daß die obige Funktion $f$ annähernd das Reziproke des Streuungskoeffizienten ist. Übrigens wird der Begriff Streuung häufig auch allgemeiner, nämlich auf geschlossene Ringe angewandt, bei denen infolge ungleichförmiger Bewickelung oder dgl. (s. o.) die Induktionslinien divergieren und stellenweise austreten.

Auf die verwickelten Fälle mehrfach geschlitzter Ringe kann hier nicht eingegangen werden.

**Hohlkörper. Schirmwirkung.** Schon POISSON hatte die Folgerung aus der Theorie gezogen, daß eine nicht gar zu dünne Hohlkugel durch äußere Kräfte derart magnetisiert wird, daß sie die Wirkung jener äußeren Kräfte im inneren Hohlraume aufhebt; und dasselbe gilt für die Wirkung im äußeren Raume von seiten der im Hohlraume vorhandenen Kräfte. Für diese Erscheinung hat STEFAN[1] den Ausdruck „Schirmwirkung" vorgeschlagen, und er ist allgemein angenommen worden.

Der elementarste Fall von Schirmwirkung ist schon in der Figur 59 enthalten,

[1] J. STEFAN, Wied. Ann. **17**. 928. 1882.

wo ein Eisenstab einem Magneten zur Seite gestellt wird. Diese Wirkung wird natürlich erhöht, wenn ein ganzer Kranz von Stäben den Magneten umgibt, und noch weiter, wenn dieser Kranz durch einen einheitlichen Mantel ersetzt wird, in dessen Achse der Magnet sich befindet; man gelangt so zu dem einen typischen Falle, dem des Hohlzylinders; der andere typische Fall wird eben der der Hohlkugel sein. Bei der bisher gedachten Anordnung, wo der wirkende Magnet im Innern ist, hat man den Fall der „inneren Schirmwirkung"; ihm steht der der „äußeren" reziprok gegenüber.

Eine Theorie hat zuerst STEFAN selbst entwickelt, und zwar für den Fall eines langen, zum Felde senkrechten Hohlzylinders. In neuester Zeit hat dann H. DU BOIS[1] das Problem für Hohlkugel und Hohlzylinder behandelt, und zwar für den allgemeineren Fall „bilamellarer" Schutzhülle; allerdings unter der Annahme konstanter Permeabilität $\mu$. Die innere Lamelle reiche von $r_1$ bis $R_1$, die äußere von $r_2$ bis $R_2$; ferner gelten folgende Abkürzungen:

| | Hohlkugeln | | Hohlzylinder | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $\mathfrak{p}_1 = \frac{r_1^3}{R_1^3}$ | $\mathfrak{m}_1 = 1 - \frac{r_1^3}{R_1^3}$ | $\mathfrak{q}_1 = \frac{r_1^2}{R_1^2}$ | $\mathfrak{n}_1 = 1 - \frac{r_1^2}{R_1^2}$ |
| (2) | $\mathfrak{p}_2 = \frac{r_2^3}{R_2^3}$ | $\mathfrak{m}_2 = 1 - \frac{r_2^3}{R_2^3}$ | $\mathfrak{q}_2 = \frac{r_2^2}{R_2^2}$ | $\mathfrak{n}_2 = 1 - \frac{r_2^2}{R_2^2}$ |
| (1,2) | $\mathfrak{p}_{12} = \frac{R_1^3}{r_2^3}$ | $\mathfrak{m}_{12} = 1 - \frac{R_1^3}{r_2^3}$ | $\mathfrak{q}_{12} = \frac{R_1^2}{r_2^2}$ | $\mathfrak{n}_{12} = 1 - \frac{R_1^2}{r_2^2}$ |

Die Schirmwirkung selbst endlich wird gemessen durch das Verhältnis

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{H}_e}{(\mathfrak{H})} ,$$

wo $\mathfrak{H}_e$ das äußere und $(\mathfrak{H})$ das innere Feld ist; ohne Schirmwirkung ist $\mathfrak{g} = 1$, mit vollkommener Schirmwirkung ist $\mathfrak{g} = \infty$. Die Endformeln sind schließlich die folgenden:

für kugeligen Doppelpanzer:

$$\mathfrak{g} - 1 = \frac{2}{9} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} \left[ (1 - \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) + \frac{2\mu^2 + 5\mu + 2}{9\mu} \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_{12} \right] ,$$

für zylindrischen Doppelpanzer:

$$\mathfrak{g} - 1 = \frac{1}{4} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} \left[ (1 - \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2) + \frac{(\mu + 1)^2}{4\mu} \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_{12} \right] .$$

Für eine einzige Hohlkugel wird einfacher

$$\mathfrak{g}_1 - 1 = \frac{2}{9} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} (1 - \mathfrak{p}_1) ,$$

für einen einzelnen Hohlzylinder, wie schon STEFAN gezeigt hatte,

$$\mathfrak{g}_1 - 1 = \frac{1}{4} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} (1 - \mathfrak{q}_1) .$$

In erster Annäherung multiplizieren sich die Schirmwirkungen einfach, d. h. es ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{g}_2$; in zweiter Annäherung ist $\mathfrak{g}$ etwas kleiner. Für große $\mu$ und

[1] H. DU BOIS, Wied. Ann. **63**. 348. 1897; **65**. 1. 1898. Später hat dann DU BOIS mit A. P. WILLS zusammen auch den dreiteiligen Panzer berechnet: Drude Ann. **2**. 78. 1900; A. P. WILLS, Phys. Review **9**. 193. 1899.

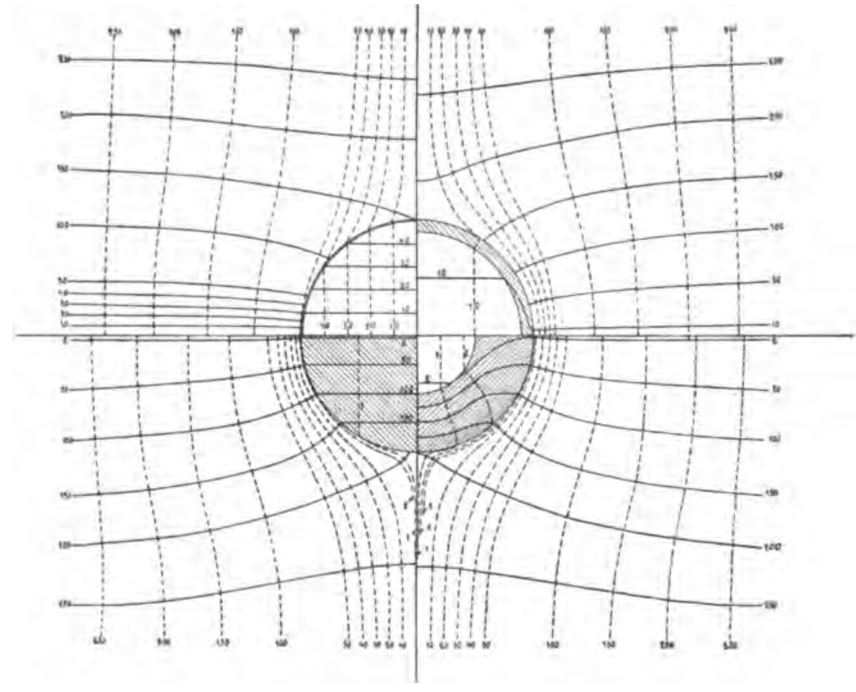
für dünne Schalen lassen sich Vereinfachungen vornehmen, und man erhält dann, wenn $d_1$ und $d_2$ die Dicken sind:

für kugeligen Doppelpanzer:

$$\mathfrak{g} - 1 = \frac{2}{9}(\mu - 2)\left[\frac{3\,d_1}{R_1} + \frac{3\,d_2}{R_2} + 2\left(\mu + \frac{5}{2}\right)\mathfrak{m}_{12}\frac{d_1}{R_1}\frac{d_2}{R_2}\right] \quad ,$$

für zylindrischen Doppelpanzer:

$$\mathfrak{g} - 1 = \frac{1}{4}(\mu - 2)\left[\frac{2\,d_1}{R_1} + \frac{2\,d_2}{R_2} + (\mu + 2)\,\mathfrak{n}_{12}\frac{d_1}{R_1}\frac{d_2}{R_2}\right] \quad ;$$



Figur 65.

für einfachen Kugelpanzer

$$\mathfrak{g} - 1 = \frac{2}{3}\frac{d}{R}(\mu - 2) = \frac{8\pi\varkappa}{3}\frac{d}{R} \quad ,$$

für einfachen Zylinderpanzer

$$\mathfrak{g} - 1 = \frac{1}{2}\frac{d}{R}(\mu - 2) = 2\pi\varkappa\frac{d}{R} \quad ;$$

die Kugel ist also knapp um die Hälfte günstiger als der Zylinder.

In Figur 65 sind Zylinderpanzer von verschiedener Dicke mit je einem Quadranten dargestellt (links unten der volle, links oben der ganz dünnwandige); Kraftlinien ausgezogen, Niveaulinien gestrichelt. Eine ganz andere Schirmwirkungstheorie hat FOEPPL[1] im Zusammenhange mit seiner Theorie der Remanenz (S. 139) entwickelt. Nach dieser Theorie wäre die Schirmwirkung auf magnetisch „harte“ Körper beschränkt (vgl. oben).

[1] A. FOEPPL, Wied. Ann. **48**. 252. 1893.

**THOMSON sches Problem.** Es möge hier noch eine von THOMSON herrührende Untersuchung erwähnt werden, die sich auf den in einer Platte induzierten Magnetismus bezieht. Hiernach kann man die Wirkung, die auf einen vor der Platte befindlichen Punkt durch die Platte und den sie erregenden, hinter ihr gedachten Magneten ausgeübt wird, ersetzen durch die Wirkung einer Reihe von Magneten, die mit dem gegebenen anfängt und sich nach hinten derart fortsetzt, daß die Abstände der doppelten Plattendicke gleich sind, die magnetischen Intensitäten aber, wenn die des gegebenen Pols 1 ist, in geometrischer Progression mit dem von $\varkappa$ abhängigen Faktor $m^2$ (von THOMSON induktive Kapazität der Platte genannt) abnehmen und mit $1 - m^2$ beginnen; für eine unendlich dünne Platte fallen alle „Bilder", wie man die folgenden Magnete nennen kann, mit dem gegebenen Magneten zusammen, ihre Gesamtintensität ist 1, und man muß folglich schließen, daß die Platte gar keinen Einfluß hat.

**Mehrere Körper.** Bisher wurde angenommen, daß nur ein einziger magnetisierbarer Körper, im übrigen aber nur starre magnetische und magnetisierende Ströme vorhanden seien. Sind mehrere magnetisierbare Körper vorhanden, so wird das Problem weit komplizierter; denn es ist alsdann jeder dieser Körper zugleich aktiv und passiv im Spiel, und es sind folglich die Größen $V_a$ und $V_i$ beide unbekannt — genau wie in dem entsprechenden elektrostatischen Problem. Relativ am einfachsten wird die Rechnung, wenn nur zwei Körper vorhanden, diese kugelförmig und die äußeren Kräfte symmetrisch zur Zentrallinie der Kugeln verteilt sind. Diesen Fall hat CHWOLSON[1] berechnet, wobei sich ergibt, welchen vergrößernden Einfluß die eine Kugel auf das Moment der anderen ausübt; es muß jedoch an diesem Hinweis genügen.

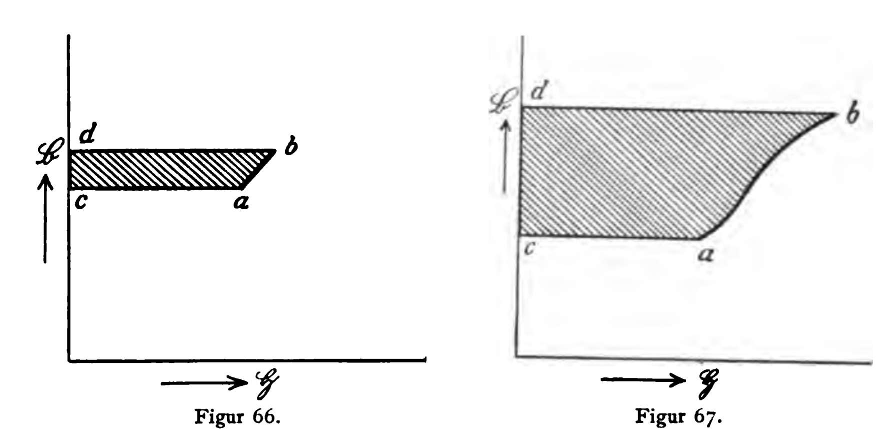
## Energetik der magnetischen Induktion.

**Arbeit beim Magnetisieren und Entmagnetisieren.** Der Prozeß der Magnetisierung erfordert Arbeitsaufwand, sei dies nun Aufwand von magnetischer, in den permanenten Magneten, die man zum Magnetisieren von Eisenkörpern benutzt, aufgespeicherter Energie, eventuell, wie beim Streichen und ähnlichen Methoden, unterstützt durch mechanische Energie, oder sei es elektrische Energie, wenn man Ströme zum Magnetisieren benutzt. Bei der Entmagnetisierung wird, so könnte man zunächst vermuten, diese Energie wiedergewonnen, und zwar vollständig bei völliger, teilweise bei unvollständiger Entmagnetisierung; es würde dies, so lange man überhaupt nur an magnetische Energie denkt, einfach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie entsprechen. Diesem Prinzip steht aber, wie man weiß, stets als zweites das Prinzip von der Zerstreuung der Energie, d. h. von ihrer teilweisen Umwandlung in minderwertige Formen zur Seite; insbesondere geht kein Naturprozeß ohne Bildung von Wärme von statten, und da diese Wärme nicht nur unbrauchbar, sondern sogar praktisch fast immer schädlich ist, kann man den Vorgang auch als Vergeudung von Energie bezeichnen. Auch in dem hier in Rede stehenden Falle wird diese Vermutung vollauf durch die Erfahrung bestätigt. Die Frage ist theoretisch und experimentell zuerst von WARBURG[2], bald darauf in allgemeinerer Weise von EWING[3] und HOPKINSON[4] behandelt worden.

**Offener Prozeß.** Betrachten wir zunächst eine ganz kleine Steigerung der Kraft, von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H} + d\mathfrak{H}$ und die entsprechende Steigerung der Magnetisierung

[1] O. CHWOLSON, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **24**. 40. 1878. — [2] E. WARBURG, Wied. Ann. **13**. 141. 181. — [3] J. A. EWING, Proc. R. Soc. 1882. 39; Trans. R. Soc. 1885, 549. — [4] J. HOPKINSON, Trans. R. Soc. 1885, 446; vgl. auch Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **22**. 175. 1886.

von $\mathfrak{J}$ bis auf $\mathfrak{J} + d\mathfrak{J}$, bezw. der magnetischen Induktion von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B} + d\mathfrak{B}$; die $\mathfrak{H}$ seien Abszissen, die $\mathfrak{B}$ Ordinaten; $ab$ sei die Kurve dieses differentiellen Prozesses (Figur 66). Es läßt sich dann leicht zeigen, daß, wenn man zur Abszissenachse die Parallelen $ac$ und $bd$ zieht, die Fläche $acdb$ die bei der Magnetisierung pro ccm des Körpers verbrauchte Arbeit $dA$ darstellt. Am ein-




Figur 66. Figur 67.

fachsten gestaltet sich der Beweis, wenn man sich nach EWING die Magnetisierung durch eine Stromspule hervorgebracht denkt. Nun ist aber jene Fläche gleich einem Rechteck aus der mittleren Kraft $\mathfrak{H}$ und dem kleinen Zuwachs $d\mathfrak{B}$ der Induktion; man erhält also die Gleichung

$$dA = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} \quad . \tag{57}$$

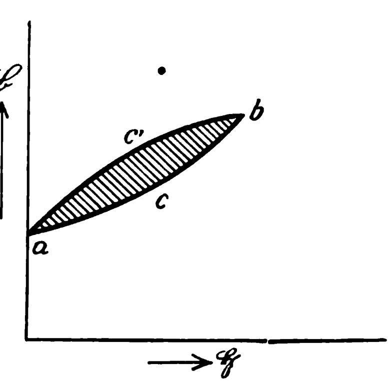
Figur 68. Figur 69.

Ist der Anstieg der Kraft und folglich auch derjenige der Induktion endlich, so erhält man einen ganz analogen, aber breiten Streifen $acdb$ (Fig. 67), und als Formel für die Arbeit

$$A = \frac{1}{4\pi}\int_c^d \mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} \quad . \tag{58}$$

Geht man insbesondere vom Nullwerte der Kraft und vom unmagnetischen Zustande des Körpers aus, so erhält man die Fläche $adb$ (Figur 68), und die Integration ist von $a$ (d. h. null) bis $d$ zu erstrecken. Wenn man jetzt, von

dem Zustande $b$ in Figur 68 ausgehend, die Kraft abnehmen läßt, so erhält man erfahrungsgemäß eine zwar von rechts nach links fallende, aber immerhin beträchtlich über der Hinwegskurve sich haltende Kurve $b\,a'$ (Figur 69); der Körper hat nach dem Aufhören der Kraft noch einen „remanenten" Magnetismus, richtiger, bei unserer Darstellung, die diesem Magnetismus entsprechende Induktion $a\,a'$. Nun ist auf dem Hinwege die Arbeit Fläche $(a\,d\,b)/4\pi$ verbraucht, auf dem Rückwege die Arbeit Fläche $(a'\,d\,b)/4\pi$ wiedergewonnen worden; der Rest, so kann man immer noch annehmen, entspricht der Energie der remanenten Induktion, und es wäre diese gleich Fläche $(a\,a'\,b)/4\pi$, in Formel

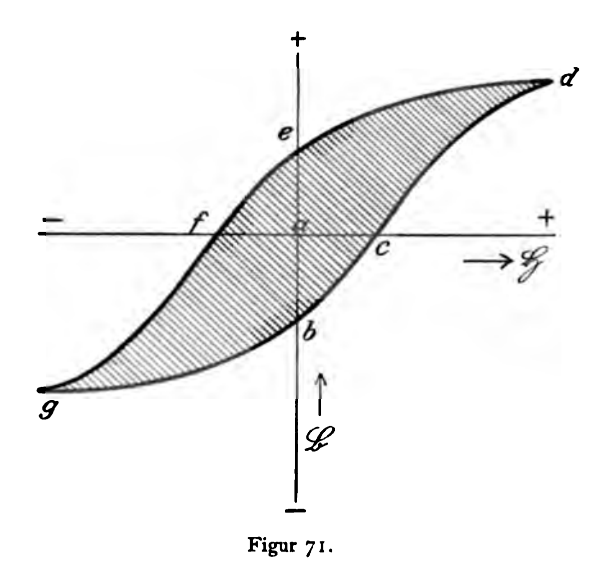


Figur 70.

(59) $$A = \frac{1}{4\pi}\left(\int_a^b \mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} - \int_{a'}^b \mathfrak{H}\,d\mathfrak{B}\right) \quad .$$

In Wahrheit steckt in dem remanenten Magnetismus nur ein Teil der Arbeitsdifferenz, der Rest ist vergeudet; um das einzusehen, betrachten wir nun einen anderen Fall.

**Kreisprozeß.** Wir wollen jetzt den Körper in der Weise behandeln, daß er zum Schluß wieder in seinem Anfangszustande ist; man spricht dann bekanntlich von einem Kreisprozeß. Nehmen wir zunächst einen einseitigen Kreisprozeß, d. h. die Kraft soll mit null beginnen und zum Schluß wieder null werden; um dann einen Kreisprozeß zu erhalten, d. h. damit der magnetische Zustand des Körpers am Schlusse ebenfalls wieder derselbe wie zu Anfang sei, muß, was hier nicht weiter interessiert, der Körper eine gewisse Vorbehandlung erfahren haben; übrigens braucht dieser identische Anfangs- und Endzustand nicht der unmagnetische zu sein, sondern es kann eine gewisse, aber beide Male die gleiche Remanenz bestehen. Der Prozeß wird dann dargestellt durch die Hinkurve $a\,c\,b$ und die Rückkurve $a\,c'\,b$ (Figur 70); die Differenz der verbrauchten und der wiedergewonnenen Arbeit pro ccm wird, wie im vorigen Falle, durch die von der Hin- und Rückkurve eingeschlossene Fläche dargestellt, nur daß diese hier, Fläche $(a\,c\,b\,c'\,a)$, sich ohne Zuhilfenahme der Ordinatenachse schließt. Die Integration ist jetzt über eine geschlossene Kurve zu erstrecken, man hat also zu schreiben:



Figur 71.

(60) $$A = \frac{1}{4\pi}\int_a^a \mathfrak{H}\,d\mathfrak{B} \quad .$$

Wäre die Größe unter dem Integral ein vollständiges Differential, so wäre jetzt das Integral notwendig null; daß es das nicht ist, liegt eben daran, daß zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ keine eindeutige, sondern eine zweideutige Funktionalbeziehung besteht. In unserem Falle ist nun, da der Anfangszustand und der Endzustand in magnetischer Hinsicht identisch sind, einleuchtend, daß die Energiedifferenz nicht magnetischen Charakters sein kann; sie ist vielmehr zerstreut, vergeudet, in Wärme verwandelt worden.

Ebenso verhält es sich nun auch bei einem sogenannten doppelseitigen magnetischen Kreisprozeß. Unterwirft man nämlich einen Eisenkörper, der bereits in geeigneter Weise behandelt worden ist und einen gewissen remanenten Magnetismus besitzt — in Figur 71 einen negativen, die entsprechende remanente Induktion ist $ab$ —, einem Zyklus von Kräften, die von null bis zu einem positiven Maximum ansteigen, dann wieder auf null fallen, dann weiter fallen bis zu dem gleichen negativen Maximum, um schließlich wieder auf null anzusteigen, so erhält man die Induktionskurve $bcdefgb$; und auch hier stellt, wie man leicht einsieht, die von ihr eingeschlossene Fläche die mehr verbrauchte als wiedergewonnene Energie dar, und auch hier ist diese Energie, da der Endzustand in magnetischer Hinsicht mit dem Anfangszustande identisch ist, vergeudet, zur Erwärmung des Eisenkörpers verwandt worden.

Bei einem Kreisprozeß kann man nun die umgesetzte Energie noch durch mehrere andere Formeln ausdrücken, die mit (60) gleichwertig sind, aber manche Vorteile ihr gegenüber haben. Zunächst kann man $\mathfrak{B}$ nach Gleichung (24) zerlegen; der dabei auftretende Ausdruck

$$\int_a^a \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H}$$

ist aber, da die zu integrierende Größe ein vollständiges Differential und die Grenzen identisch sind, gleich null; es bleibt also nur das andere Glied übrig, und man erhält

$$A = \int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{J} \quad , \tag{61}$$

eine Formel, die hiernach für Kreisprozesse allgemein gültig ist, während sie für offene Prozesse offenbar nur eine Annäherung darstellt, die um so besser wird, je mehr $\mathfrak{H}$ gegen $\mathfrak{J}$ zurücktritt.

Ferner kann man in Gleichung (60) partiell integrieren, wobei wieder wegen des geschlossenen Weges das erste Glied wegfällt und nur das andere übrig bleibt; ein Verfahren, das man ebensogut auch auf die Gleichung (61) anwenden kann; auf diese Weise erhält man die beiden weiteren Formeln

$$A = -\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{H} = -\int \mathfrak{J}\, d\mathfrak{H} \quad ; \tag{62}$$

die zweite dieser Formeln ist die zuerst von WARBURG aufgestellte; es ist aber zu beachten, daß zwar dieses Integral ebenfalls die umschlossene Fläche darstellt, daß aber die beiden dem Hinwege und dem Rückwege einzeln entsprechenden Flächen, deren Differenz jene ist, und die sich jetzt nicht mehr an die Ordinatenachse, sondern an die Abszissenachse anlehnen, im allgemeinen keine einfache magnetische Bedeutung haben; eine solche kommt eben jetzt nur noch der umschlossenen Fläche zu.

Übrigens sei erwähnt, daß unsere Gleichung streng genommen nur unter bestimmten Voraussetzungen über den Wärmeaustausch zwischen Körper und Umgebung gilt, z. B. für isothermische oder für adiabatische Prozesse[1]; aber

[1] WARBURG und HÖNIG, Wied. Ann. **20**. 814. 1883; J. A. EWING, Proc. R. Soc. **23**. 22. 1881 und **24**. 39. 1882.

gerade der Umstand, daß er in diesen beiden extremen Fällen streng richtig ist, läßt den Schluß zu, daß er in allen anderen mindestens annähernd erfüllt sein wird.

Den Betrag der ganzen bei einem Kreisprozeß in Wärme umgesetzten Energie erhält man aus obigen Formeln durch Multiplikation mit dem Volumen des Eisenkörpers; die entsprechende Leistung oder den Effekt, indem man außerdem noch mit der Zeitdauer des Kreisprozesses dividiert; besser, da es sich meist um viele, schnell ablaufende Kreisprozesse handelt, indem man noch mit der Zahl der in der Sekunde ablaufenden Kreisprozesse multipliziert.

Von den zahlreichen Autoren, die nach WARBURG und EWING sich mit der Energetik des Magnetisierungsprozesses beschäftigt haben, sei nur noch G. ADLER[1] erwähnt. Der Ausdruck, zu dem er durch einfache Betrachtungen für den Energiewert magnetisierten Eisens gelangt, lautet:

$$E = -\int\left[\frac{1}{2}\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{H}_1\cos(\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{H}_1) + \mathfrak{J}_1^2\left(\frac{1}{2\varkappa_1} - \int\limits_0^1\frac{\Theta\,d\Theta}{\varkappa}\right)\right]dv \quad ; \tag{63}$$

hierin bedeutet $dv$ das Volumenelement des Körpers, $\Theta$ ist der während des Magnetisierungsprozesses von 0 auf 1 anwachsende Bruchteil der schließlichen Magnetisierungsintensität, $\varkappa$ die als Funktion von $\Theta$ aufgefaßte Suszeptibilität, die Indices 1 die betreffenden Endwerte; dabei ist $\mathfrak{J}$ als unabhängige Variable gedacht. Wie man sieht, ist hiermit die potentielle Energie eines magnetisierten Körpers als quadratische Funktion von $\mathfrak{J}$ dargestellt, also, wenn man die Magnetisierung mit einer verallgemeinerten Geschwindigkeit vergleicht, in ganz entsprechender Form wie nach den HAMILTONschen Gleichungen der Dynamik sich die kinetische Energie darstellt — eine Analogie, die schon J. J. THOMSON[2] veranlaßt hatte, ganz direkt eine Formel

$$E = A\,\mathfrak{J}_1^2 + B\,\mathfrak{J}_1 \tag{64}$$

aufzustellen, in der dann die Koeffizienten $A$ und $B$ zu bestimmen wären. — Haben $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ gleiche Richtung, so fällt der cos-Faktor weg; ist $\varkappa$ konstant, so fällt das ganze quadratische Glied weg; dasselbe stellt somit den Einfluß der Veränderlichkeit der Suszeptibilität auf den Arbeitswert dar, ein Einfluß, der an der Hand der Magnetisierungskurve leicht zu verfolgen ist.

Da die ADLERsche Formel $\varkappa$ lediglich als Funktion von $\mathfrak{J}$, nicht aber als solche der Temperatur hinstellt, gilt die Formel prinzipiell nur für isothermische Magnetisierung, d. h. sie stellt nach HELMHOLTZ die freie magnetische Energie dar. Unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Temperatur kann man aber leicht auch die ganze Energie berechnen, d. h. die Größe $E - TS$, wo $T$ die absolute Temperatur und $S$ die Entropie ist. Man findet für die ganze Energie pro Volumeneinheit (sonst ist noch weiter über $dv$ zu integrieren):

$$G = -\int\limits_0^{\mathfrak{H}_1}\mathfrak{J}\cos(\mathfrak{J}\,\mathfrak{H})\,d\mathfrak{H} + \int\limits_0^{\mathfrak{H}_1}T\frac{\partial(\mathfrak{J}_1\cos(\mathfrak{J},\mathfrak{H}))}{\partial T}\,d\mathfrak{H} \quad . \tag{65}$$

In nahem Zusammenhang hiermit stehen übrigens auch Untersuchungen von STEFAN[3], auf die indessen später eingegangen werden wird.

**Thermodynamische Theorie von DUHEM.** Von den allgemeinsten Gesichtspunkten ist die Thermodynamik der magnetischen Induktion und der magnetischen Erscheinungen überhaupt von DUHEM[4] entwickelt worden. DUHEM geht

[1] G. ADLER, Wied. Ann. **46**. 503. 1892. — [2] J. J. THOMSON, Anw. d. Dynamik auf Physik u. Ch. Leipzig 1890. § 33 u. 34. — [3] J. STEFAN, Wien. Ber. 2. Abt. **69**. 185. 1874. — [4] P. DUHEM, Th. nouv. de l'Aimantation par influence, fondée s. la Thermodynamique. Paris 1888. — Leçons s. l'Eléctr. et le Magn. T. 2. Paris 1892.

aus von den KIRCHHOFFschen, die Veränderlichkeit der Suszeptibilität berücksichtigenden Formeln und zeigt, daß man dieselben aus der Thermodynamik begründen kann. Zu diesem Zwecke stellt er das thermodynamische Potential magnetisierter Körper auf; dasselbe besteht aus drei Gliedern, nämlich der freien Energie im unmagnetischen Zustande, dem magnetischen Potential und einem von $\mathfrak{J}$ und der Beschaffenheit der Körper abhängigen Integrale. Da das thermodynamische Potential für das Gleichgewicht ein Minimum oder Maximum sein muß, braucht man es nur zu differenzieren, um die Gleichungen der magnetischen Induktion zu erhalten, wobei die Suszeptibilität als veränderlich auftritt; nochmalige Differentiation läßt dann den stabilen oder labilen Charakter des Gleichgewichts erkennen.

So interessant auch die DUHEMsche Theorie ist, so kann hier, da sie sich abgekürzt nicht wiedergeben läßt, nicht näher auf sie eingegangen werden; übrigens wird sich noch später Gelegenheit finden, auf sie zurückzukommen.

## Magnetische Strömung und magnetischer Kreis.

**Verschiedene Strömungen.** Die Erscheinung der Strömung materieller Flüssigkeiten ist bekanntlich auf den verschiedensten Gebieten zu bildlichen Vorstellungen benutzt worden; so namentlich bei der Wärme und bei der Elektrizität; man spricht von Wärme- und Elektrizitätsströmung oder -leitung. Diese bildliche Vorstellung hat, wie man weiß, in den genannten Fällen reiche Früchte bei der Fortentwickelung der betreffenden Lehren gespielt und ist auch heute noch, wo man das sachliche Schwergewicht auf die Energetik und Feldtheorie legt, formal immer noch wertvoll. Kein Wunder, daß man auch im Gebiete der magnetischen Vorgänge schon frühzeitig dieses Bild herbeigezogen hat; mit dem Unterschiede jedoch, daß die Wissenschaft sich nie damit befreunden mochte, und erst die moderne Elektrotechnik zeigte, wie fruchtbar, wenigstens für ihre Zwecke, der Gedanke ist.

**Geschichtliches.** H. DU BOIS[1] hat die Entwickelung des in Rede stehenden Gedankens sehr interessant geschildert; das Wichtigste davon sei hier wiedergegeben. Zuerst taucht die Idee bei EULER[2] auf, und zwar in einer so auffallend an den heutigen Sprachgebrauch erinnernden Weise, daß man über die Vorahnung von Anschauungen, die erst mehr als ein Jahrhundert später zur Geltung gelangen sollten, erstaunen muß. Die ersten Versuche im Sinne unserer Auffassung, und zwar über magnetische Leitfähigkeit, stellte CUMMING[3] an. Dann ist JOULE[4] zu nennen, der schon von einem Widerstande gegen Induktion spricht und ihn mit Querschnitt und Länge des Magneten in Verbindung bringt. Der erste, der die Analogie mit dem elektrischen Stromkreise auf Grund der neueren Anschauung aussprach, war MAXWELL[5]; seine Sätze bilden den Kern der neueren Entwickelung dieser Frage. Diese letztere aber wurde dann von Lord KELVIN, ROWLAND, BOSANQUET, WERNER V. SIEMENS[6] u. a. angebahnt. Die Analogie mit der Wärmeleitung ist insbesondere von PISATI[7], die mit Flüssigkeits-, Wärme- und elektrischer Strömung überhaupt von Lord KELVIN[8] studiert worden.

**Grundgesetz des geschlossenen magnetischen Kreises.** Das Grundgesetz des geschlossenen elektrischen Stromkreises und damit das einfachste Gesetz elektrischer Ströme überhaupt ist bekanntlich das OHMsche Gesetz

[1] H. DU BOIS, Magnetische Kreise. Berlin 1894. S. 177ff. — [2] L. EULER, Briefe an e. d. Prinzessin. Leipzig 1780. S. 95ff. — [3] CUMMING, Phil. Trans. Cambr. Soc. 1821. — [4] J. P. JOULE, Scient. Papers. 1. 34. London 1884. — [5] J. C. MAXWELL, Lehrb. d. Elektr. u. d. Magn. 2. 62. Berlin 1883. — [6] W. THOMSON, Reprint of Pap. on El. a. Magn. — H. ROWLAND, The Electrician. 13. 536. 1884. — R. H. M. BOSANQUET, Phil. Mag. (5) 15. 205. 1883; 19. 73. 1885. — W. v. SIEMENS, Berl. Sitz.-Ber. 1884; Wied. Ann. 24. 93. 1885. — [7] G. PISATI, Rend. Acc. Lincei 6. 82. 168. 487. 1890. — [8] W. THOMSON, a. a. O.

(Bd. 4, S. 219ff.): $i = e/w$. Will man hier ein analoges Gesetz aufstellen, so muß man die Stromstärke $i$ durch den magnetischen Induktionsfluß $\mathfrak{F}$ (s. o.) ersetzen, und zwar ist, wenn $Q$ der Querschnitt ist, entweder (bei überall gleichem $Q$) exakt oder ($Q$ ein Mittelwert) symbolisch:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{B} Q \quad .$$

Ferner muß man, in Analogie mit der elektromotorischen Kraft $e$ eine „magnetomotorische Kraft" $M$ einführen; sie ist aus der magnetisierenden Kraft $\mathfrak{H}$ durch Integration über die ganze Länge $L$ des geschlossenen Kreises zu bilden, kann also entweder exakt oder, indem $\mathfrak{H}$ einen Mittelwert bedeutet, symbolisch in der Form

$$M = \mathfrak{H} \cdot L \tag{66}$$

geschrieben werden. Der Quotient beider Größen endlich wird das Analogon zum elektrischen Widerstande $w$ werden; man wird ihn also, zunächst rein formal, als **magnetischen Widerstand** bezeichnen können; dieser Widerstand $W$ wird offenbar mit der Permeabilität $\mu$, außerdem aber mit Länge $L$ und Querschnitt $Q$ des Kreises im Zusammenhange stehen. Und zwar erhält man hierfür folgendes Schema:

$$W = \frac{M}{\mathfrak{F}} = \frac{\mathfrak{H} L}{\mathfrak{B} Q} = \frac{L}{\mu Q} \quad . \tag{67}$$

Dies vorausgeschickt, erhält man also das dem Ohmschen entsprechende, magnetische Grundgesetz in der Form:

$$\mathfrak{F} = \frac{M}{W} \quad , \tag{68}$$

und als einfachsten Fall desselben in einem homogenen Kreise von überall gleichem Querschnitte:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{H}}{s} \quad , \tag{69}$$

wo an die Stelle von $\mu$ die reziproke Größe

$$s = \frac{1}{\mu} \tag{70}$$

gesetzt ist, die man, in Analogie mit dem elektrischen, den **spezifischen magnetischen Widerstand** nennen kann, während $\mu$ selbst als **spezifische magnetische Leitfähigkeit** zu bezeichnen ist. Häufig wird auch ein besonderer Ausdruck gebraucht; es wird nämlich $W$ als **Reluktanz**, $s$ als **spezifische Reluktanz** oder **Reluktivität** bezeichnet. In allgemeineren Fällen, d. h. wenn Querschnitt und Material längs des Kreises verschiedenartig sind, muß man sowohl den Zähler wie den Nenner des Grundgesetzes als Summen bzw. Integrale darstellen, gerade wie beim Ohmschen Gesetze. Alsdann hat man

$$W = \int \frac{dl}{\mu q} \quad .$$

Auch hat man das Gesetz für unterbrochene Kreise, z. B. für geschlitzte Ringe zu modifizieren gesucht und es zu guterletzt auch auf Verzweigungen und Brückenschlüsse, nach Analogie mit den Kirchhoffschen Formeln und der Wheatstoneschen Brücke, angewandt.

**Kritik.** So weit die Theorie; fragen wir jetzt nach ihrer Bedeutung und Berechtigung. Daß man, wie in anderen Gebieten, so auch hier eine Formel von dem Charakter des Ohmschen Gesetzes aufstellen kann, ist nicht merkwürdig; es wird dadurch eben eine neue Größe, der Widerstand, definiert. Eine mehr

als rein formale Bedeutung wird aber diese Formel nur dann gewinnen, wenn die neue Größe sich als ein einfaches Charakteristikum der Konfiguration erweist. Das ist bei dem Grundgesetz der elektrischen Ströme der Fall, weil der elektrische Widerstand eine Konstante der Leitungsbahn ist, und man kann dieses Gesetz geradezu aussprechen als das Gesetz von der Existenz eines konstanten Widerstandsbegriffes. Für den magnetischen Kreis trifft das aber, wie wir wissen, durchaus nicht zu, hier ist der Widerstand, da er die Permeabilität in sich enthält, eine Funktion der Kraft, d. h. der Nenner im Grundgesetz ist eine Funktion des Zählers, und das Gesetz sagt sachlich überhaupt nichts aus. Dazu kommen aber noch andere Erwägungen: das OHMsche Gesetz gilt doch in dieser Form nur für annähernd lineare Leiter, d. h. für kleine Querschnitte, was bei magnetischen Kreisen meist auch nicht annähernd zutrifft; ferner ist der Anteil der Luft an der Kraftleitung zwar sehr klein, aber doch wesentlich größer als bei der elektrischen Leitung, und namentlich für starke Magnetisierungen wird die Permeabilität des Eisens vergleichsweise klein genug, um derjenigen der Luft eine Rolle zuzuweisen; mit anderen Worten, die Streuung im weiteren Sinne (s. o.) kommt in Betracht, und man müßte also den Kreis mit dem eines hochgespannten oder mit dem eines Kabelstroms vergleichen, für die bekanntlich das OHMsche Gesetz gar nicht mehr unverändert gilt. Eine der magnetischen Sättigung analoge Erscheinung gibt es bei den Strömen gar nicht; man müßte ev. zu der Analogie mit Wechselströmen, ihrer Impedanz usw. seine Zuflucht nehmen. Die KIRCHHOFFschen Verzweigungsgleichungen werden bei veränderlicher Leitfähigkeit, wie z. B. HANAUER[1] gezeigt hat, direkt unauflösbar, und man muß ein graphisches Verfahren anwenden, das übrigens auch wieder nur unter gewissen Bedingungen zuverlässige Ergebnisse liefern wird.

Aus alledem ersieht man, daß das dem OHMschen Gesetze nachgebildete sogenannte magnetische Grundgesetz keine wissenschaftliche Bedeutung hat, und daß, wenn man es zu rein praktischen Zwecken verwenden will, man selbst dann sehr vorsichtig sein muß und seine Konsequenzen von Fall zu Fall an der Hand der Erfahrung prüfen muß.

Für die in unserem Gesetze vorkommenden Größen sind zahlreiche Formeln von den Elektrotechnikern aufgestellt worden; wir werden auf die wichtigsten von ihnen, da sie mehr oder weniger empirischen Charakters sind, im zweiten Abschnitte zurückkommen.

**Veränderlicher magnetischer Kreis.** In neuester Zeit hat ZENNECK[2] die Theorie des geschlossenen oszillatorischen Kreises in Analogie mit dem Problem induzierter elektrischer Stromkreise ausgearbeitet. Auf Grund dieser Analogie kann man die Gleichung (68) durch die neue

$$\mathfrak{F} W = M - P \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} \tag{71}$$

ersetzen, in der $P$ den „magnetischen Selbstinduktionskoeffizienten“ für Felder einer bestimmten Wechselzahl bedeutet. Nimmt man ferner an, daß die Streuung der „magnetischen Spannung“ an der betreffenden Stelle des Kreises proportional sei, sieht man von Hysteresis u. dgl. ab, und setzt man den Proportionalitätsfaktor gleich $C$ ($C$ ist dann eine der elektrischen Kapazität analoge Konstante), so erhält man die Differentialgleichung

$$C P \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + C W \mathfrak{F} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} \tag{72}$$

und als ihr Integral

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \cdot e^{-\beta x} \cdot e^{i(\pi n t - \gamma x)} \quad , \tag{73}$$

[1] E. HANAUER, Elektrotechn. Ztg. **14**. 527. 1893. — [2] J. ZENNECK, Drude Ann. **10**. 844. 1903. — Vgl. auch ZENNECK, Drude Ann. **9**. 497. 1902.

wo $n$ die Wechselzahl ist und zwischen $\beta$ und $\gamma$ die Beziehungen

$$\beta^2 - \gamma^2 = CW, \quad 2\beta\gamma = \pi n C P \tag{74}$$

bestehen; $\beta$ ist der Absorptionskoeffizient, $v = \pi n/\gamma$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der magnetischen, den Kreis entlang laufenden Welle. Dieses Resultat läßt sich nun leicht auf einzelne Fälle anwenden, worauf indessen hier nicht eingegangen werden kann.

## Druck- und Zugkräfte; Tragkraft der Magnete.

Infolge der im magnetischen Felde wirksamen Kräfte herrscht an jeder Stelle desselben, also auch im Innern und an den Grenzflächen der Eisenkörper ein Zwangszustand, der sich in bestimmten, nach bestimmten Richtungen wirksamen Druck- und Zugkräften geltend macht, und der bei der Feldtheorie FARADAYS und MAXWELLS an die Stelle der Fernkräfte tritt, um die Anziehungs- und Abstoß-Bewegungen ursächlich darzustellen. Die Theorie dieser Zwangszustände ist, von ihrer Bedeutung an sich abgesehen, auch von praktischer Wichtigkeit im Hinblick auf die Frage der Tragkraft der Magnete und Elektromagnete.

Die zugleich erste und allgemeinste Theorie rührt von MAXWELL[1] her; sie überträgt die Grundformeln, welche in der Elastizitätstheorie für die neun Druckkomponenten, nämlich die drei normalen $X_x$, $Y_y$, $Z_z$, und die sechs tangentialen $Y_z$, $Z_x$, $X_y$, $Z_y$, $X_z$, $Y_x$ aufgestellt werden, durch Verknüpfung mit den Fundamentalgrößen der magnetischen Induktion auf unseren Fall. Bezeichnet man wie oben die Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit $X$, $Y$, $Z$, die Komponenten der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ mit $A$, $B$, $C$, die Komponenten der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ mit $B_x$, $B_y$, $B_z$, so erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\tag{75}\left\{\begin{array}{l|ll}
X_x = \frac{1}{4\pi}\left[XB_x - \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\right] & Y_z = \frac{1}{4\pi}YB_z\,, & Z_y = \frac{1}{4\pi}ZB_y \\
Y_y = \frac{1}{4\pi}\left[YB_y - \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\right] & Z_x = \frac{1}{4\pi}ZB_x\,, & X_z = \frac{1}{4\pi}XB_z \\
Z_z = \frac{1}{4\pi}\left[ZB_z - \frac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\right] & X_x = \frac{1}{4\pi}XB_y\,, & Y_x = \frac{1}{4\pi}YB_x\,.
\end{array}\right.$$

Sie nehmen eine anschaulichere Form an, wenn man ein besonderes Koordinatensystem einführt, indem man die $x$-Achse den Winkel $2\varepsilon$ zwischen den Richtungen der Kraft und der Induktion — die der Allgemeinheit halber als verschieden einzusetzen sind — halbieren läßt. Man hat alsdann:

$$X = \mathfrak{H}\cos\varepsilon\,, \quad Y = \mathfrak{H}\sin\varepsilon\,, \quad Z = 0\,,$$
$$B_x = \mathfrak{B}\cos\varepsilon\,, \quad B_y = \mathfrak{B}\sin\varepsilon\,, \quad B_z = 0\,,$$

und infolgedessen gehen obige Gleichungen in die neuen

$$\tag{76}\left\{\begin{array}{l|l}
X_x = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right) & Y_z = 0\,, \quad Z_y = 0 \\
 & Z_x = 0\,, \quad X_z = 0 \\
Y_y = \frac{1}{4\pi}\left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right) & X_y = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon\,, \\
Z_z = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right) & Y_x = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon
\end{array}\right.$$

[1] J. C. MAXWELL, Treatise on El. a. Magn. 1873. — Lehrb. d. El. u. d. Magn. Berl. 1883. Bd. 2. S. 333.

über. Der Zwang besteht also: 1. in einem allseitig gleichen Drucke $\mathfrak{P}$, 2. in einem Zuge $\mathfrak{Z}$ in der Richtung der Mittellinie zwischen Kraft und Induktion, 3. in einem Drucke $\mathfrak{P}'$ senkrecht zu dem ebengenannten Zuge und 4. in einem Kräftepaar, das jedes Element des Körpers in der Ebene der Kraft und Induktion von jener nach dieser hin mit dem Moment $D$ zu drehen strebt; und zwar ist:

$$(77)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P} = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 , \quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon , \quad \mathfrak{P}' = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon , \\ D = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin 2\varepsilon \quad . \end{array} \right.$$

Wenn, wie das in den meisten praktisch vorkommenden Fällen der Fall ist, Kraft und Induktion dieselbe Richtung haben, bleibt nur der allseitige Druck und der Längszug übrig; die beiden anderen Kräfte werden null. Was uns hauptsächlich interessiert, ist der resultierende Zug in der Richtung der Induktionslinien; durch Kombination erhält man für ihn den Ausdruck

$$(78)\qquad \mathfrak{Z} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H} - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \quad .$$

Will man nun die Anwendung auf die Tragkraft machen, so muß man sich die Grenzfläche zwischen tragender und getragener Masse als einen Schnitt im Eisen denken, und zwar als einen so eng schließenden Schlitz, daß man von seiner entmagnetisierenden und streuenden Wirkung wird absehen dürfen. Es wird dann $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ identisch, und zwar werden beide gleich dem Werte von $\mathfrak{B}$ innerhalb der Eisenmasse; von nun ab habe also $\mathfrak{B}$ diese Bedeutung, und man erhält die einfache Endformel:

$$(79)\qquad \mathfrak{Z} = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2 \quad ,$$

wofür man durch Zerlegung von $\mathfrak{B}$ in seine Teile auch schreiben kann:

$$(80)\qquad \mathfrak{Z} = 2\pi\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}\mathfrak{H} + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \quad .$$

Die Tragkraft $T$ selbst ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit der tragenden Fläche $f$; es wird also in absolutem Maße:

$$(81)\qquad T = \frac{f}{8\pi}\mathfrak{B}^2 \quad ,$$

oder in praktischem Maße (Kilogramm-Gewicht):

$$(82)\qquad T' = \frac{f}{8000\,\pi g}\mathfrak{B}^2 = \frac{f}{24\,700\,000}\mathfrak{B}^2 = f \cdot \left(\frac{\mathfrak{B}}{5000}\right)^2 \quad ,$$

letzteres angenähert, aber meist genau genug.

Komplizierter werden die Formeln, wenn die aneinander zu pressenden Teile durch Gebiete verschiedener Feld- und Induktionsstärke hindurchreichen, so daß man Integrationen vornehmen muß. Solche Fälle sind von ADLER, H. DU BOIS und E. T. JONES[1] behandelt worden, namentlich im Hinblick auf Messungen der Zugkraft zwischen den Polen des DU BOISschen Ringmagneten; für diesen Fall findet sich schließlich:

$$(83)\qquad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{H}^2}{8\pi} - \int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{J} \quad .$$

[1] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. 146. 1888. — G. ADLER, Wien. Ber. **100** (2). 897. 1891. — E. T. JONES, Wied. Ann. **57**. 261. 1896.

In etwas anderer Weise hat J. STEFAN[1] das Problem behandelt, nämlich ausgehend von der besonderen geometrischen Konfiguration bestimmter Fälle, von denen hier drei erwähnt seien. Für den Fall, daß Magnet und Anker zusammen eine Kugel vom Radius $r$ bilden, die ebene Trennungsfläche auf der Achse der Magnetisierungsrichtung senkrecht steht, und die vom Kugelzentrum nach Mittelpunkt und Rand der Trennungsebene gezogenen Linien den Winkel $\alpha$ bilden, fand er, indem er die Wirkung der Grenzschichten mit der Fernwirkung der übrigen magnetischen Massen kombinierte:

$$T = \pi^2 r^2 \sin^4 \alpha \cdot \mathfrak{J}^2 \quad ,$$

und wenn beide Körper Halbkugeln sind, $T = \pi^2 r^2 \mathfrak{J}^2$; hieraus kann man dann die Tragkraft für die Einheit der Grenzfläche und für die Volumen- (Gewichts-) Einheit ableiten. Ein zweiter Fall ist der zweier Kugeln, den man mit dem vorigen vergleichen kann; für zwei gleich große Kugeln mit punktförmiger Berührung wird $T$ das $^2/_3$fache des Wertes für die Halbkugeln, für eine große und eine kleine Kugel sogar doppelt so groß, wie für ein großes und ein kleines Kugelsegment. Man ersieht daraus, daß die Fernwirkung ebenso wichtig wie die Grenzwirkung ist und sie sogar zuweilen übertrifft. Drittens sollen Magnet und Anker die beiden Teile eines Ringes bilden, und zwar so, daß der Mittelfaden die Trennungsflächen $q$ unter dem Winkel $\varepsilon$ trifft; dann ist bei gewissen Voraussetzungen

$$T = 2\pi q \sin\varepsilon \cdot \mathfrak{J}^2 \quad ;$$

für zwei Halbkreise wird also

$$T = 2\pi q \mathfrak{J}^2 \quad , \qquad T_1 = 2\pi \mathfrak{J}^2 \quad ,$$

letzteres für die Flächeneinheit. Maßgebend ist also in allen diesen Fällen das Quadrat der Magnetisierungs-Intensität, nicht, wie bei MAXWELL, $\mathfrak{B}^2$; indessen zeigt die Formel (80) im Zusammenhang mit der Erfahrungstatsache, wonach $\mathfrak{J}$ meist groß gegen $\mathfrak{H}$ ist, daß beide Theorien praktisch meist dasselbe geben werden.

Auf die allgemeinen Untersuchungen über mechanische Kräfte im Felde wird später (Bez. d. Magn. z. Mech.) eingegangen werden.

## Molekulartheorie.

Die bisher angeführten Theorien der magnetischen Induktion haben, wenn sie auch positiv recht verschiedenartig sind, doch das negativ gemeinsame, daß sie sich nicht auf irgend welche molekulare Vorstellungen über den Aufbau der zu magnetisierenden Körper oder etwaiger magnetischer Elemente stützen. Da nun die Theorie bei dieser Beschränkung auch nur recht unvollkommene Erfolge aufzuweisen hat, kann es nicht Wunder nehmen, daß man, um Erscheinungen wie Sättigung, Remanenz usw. näher zu kommen, Molekulartheorien des Magnetismus entwickelt hat; diese müssen wir jetzt, im Anschluß an das, was hierüber schon im ersten Artikel gesagt worden ist, ins Auge fassen.

**Scheidungshypothese.** POISSON ist zwar der Urheber der Theorie der magnetischen Induktion, er hat sie aber nicht mit dem in der obigen Darlegung benutzten Minimum von Voraussetzungen entwickelt, sondern er ist dabei von bestimmten Vorstellungen über die molekulare Natur des Magnetismus ausgegangen, und zwar von der schon früher (S. 48) erwähnten Scheidungshypothese. Hiernach besteht ein Körper aus Molekularmagneten, d. h. aus Teilchen, deren jedes gleichviel positiven wie negativen Magnetismus und unendliche magnetische Leitungsfähigkeit besitzt, während die Leitungsfähigkeit des Mediums, in das die

[1] J. STEFAN, Wien. Ber. **81** (2). S. 89. 1880.

Teilchen eingebettet sind, null ist. Die Magnetisierung besteht nun darin, daß die im unmagnetischen Zustande durcheinandergemischten entgegengesetzten Magnetismen innerhalb des Teilchens geschieden werden. Wie stark dabei der Körper magnetisiert wird, wird von der Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Teilchen $k$ (POISSONsche Konstante) abhängen, und zwar wird die magnetische Leitungsfähigkeit des Gesamtkörpers $\mu$, wie man leicht findet, zunächst allgemein, wenn $\mu_1$ und $\mu_2$ die Zahlen für Zwischenmedium und Teilchen sind,

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)} ,$$

also, da POISSON $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \infty$ setzt,

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k} , \quad k = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} .$$

Entsprechend dieser Beziehung zwischen den Koeffizienten $k$ und $\mu$ wird die zwischen $k$ und der Suszeptibilität $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{3k}{4\pi(1 - k)} , \quad k = \frac{4\pi\varkappa}{4\pi\varkappa + 3} .$$

Da nun für Eisen $\varkappa$ eine ziemlich große Zahl ist, so wird nahezu $k = 1$, d. h. man muß sich so ziemlich den ganzen Raum mit Molekeln erfüllt denken: für kugelförmige Teilchen, wie sie POISSON sich denkt, ist dies geometrisch unmöglich, aber auch für andere ist es sehr unwahrscheinlich[1]. Überhaupt führt die Annahme, daß die Größe $k$ die für den Magnetismus verschiedener Stoffe charakteristische Größe sein solle, zu wenig befriedigenden Konsequenzen[2]. Nach den obigen Gleichungen müßte ferner, da $k$ eine Konstante ist, auch $\varkappa$ resp. $\mu$ konstant sein, was, wie schon mehrfach erwähnt wurde, durchaus nicht der Fall ist. Endlich ist auf eine Reihe instruktiver von BEETZ[3] angestellter Versuche hinzuweisen, die sich auf im Magnetfelde elektrolytisch niedergeschlagenes Eisen beziehen und mit der Scheidungshypothese kaum vereinbar sind.

**Richtungs- oder Drehungshypothese; magnetische Sättigung.** Die erörterten Nachteile der Scheidungshypothese sind gleichzeitig Vorzüge der besonders von W. WEBER[4] (vgl. S. 48) ausgebildeten Richtungs- oder Drehungshypothese, nach welcher die Teilchen schon im unmagnetischen Zustande des Körpers Magnete, jedoch mit den verschiedensten Achsenrichtungen sind, bei der Magnetisierung aber gleichgerichtet werden. Diese Gleichrichtung würde im Widerspruch mit der Erfahrung schon bei Einwirkung der kleinsten Kraft eine vollständige sein, wenn man nicht annähme, daß ihr ein Widerstand entgegentritt, und es ist auch sofort einzusehen, daß ein solcher Widerstand in Gestalt der von den umgebenden Teilchen ausgeübten Kräfte, die unserem Teilchen ja auch seine natürliche Lage vorgeschrieben haben, vorhanden ist. Auf die Ausführung dieses Gedankens geht jedoch WEBER nicht ein, er nimmt einfach an, daß dem Teilchen eine Richtkraft $D$ innewohnt, die es, der äußeren Kraft $X$ entgegen, in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen sucht. Nennt man $\alpha$ den ursprünglichen, $\vartheta$ den schließlichen Winkel der Molekelachse gegen die $X$-Richtung, so liefert die Gleichsetzung der von den beiden Kräften ausgeübten Drehungsmomente die Gleichgewichtsbedingung

---

[1] Mehrfach hat man deshalb die POISSONsche Hypothese zu modifizieren versucht, und es sei hier z. B. auf die Entwickelung von BETTI verwiesen, welche für Eisen etwa $k = \frac{1}{3}$ liefert. — [2] Man vergleiche z. B. die interessanten Ausführungen von G. ADLER, Wied. Ann. **44**. S. 173. — [3] W. BEETZ, Pogg. Ann. **111**. 107. 1860. — [4] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen. Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. **1**. S. 485. 1852. — Werke **3**. S. 475.

(75) $$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{D\sin\alpha}{X + D\cos\alpha} \quad .$$

Ist ferner $m$ das magnetische Moment der Molekel und sind deren in der Volumeneinheit $n$ vorhanden, so würde die bei völliger Gleichrichtung eintretende, also maximale Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}_{max} = mn$ sein, bei unvollständiger Gleichrichtung dagegen wird allgemein:

$$\mathfrak{J} = \int_0^\pi \frac{mn}{2}\cos\vartheta\sin\alpha\, d\alpha = -\int \frac{mn}{4}\,\frac{R^2 + X^2 - D^2}{X^2 D}\,dR \quad ,$$

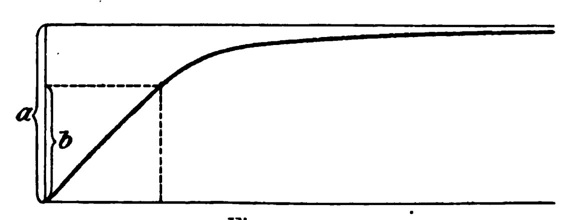
wo $R$ die Resultante von $D$ und $X$ ist, und die Grenzen der Integration für $X < D$ und für $X > D$ verschieden sind, da man in jenem Falle offenbar von $D - X$ bis $D + X$, in diesem von $X - D$ bis $X + D$ zu integrieren hat. Da nun unbestimmt

(76) $$\mathfrak{J} = -\frac{mn}{12}\,\frac{R}{X^2 D}(R^2 + 3X^2 - D^2) + \text{const}$$

ist, so erhält man folgende zusammengehörige Werte von $X$ und $\mathfrak{J}$:

| $X =$ | 0 | $< D$ | $D$ | $> D$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{J} =$ | 0 | $\frac{2}{3}\frac{mn}{D}X$ | $\frac{2}{3}mn$ | $mn\left(1 - \frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right)$ | $mn$ |

Die entsprechende Kurve (Figur 72) ist also zwar stetig, zerfällt aber in zwei Teile von verschiedenem Charakter; der erste Teil ist geradlinig ansteigend, der zweite nach unten konkav, d. h. allmählich immer weniger ansteigend und sich schließlich einem Grenzwert nähernd. Dieser Grenzwert $a$ entspricht der magnetischen Sättigung, der geradlinige Teil reicht bis zu einem Ordinatenwerte $b$, der $^2/_3$ des Sättigungswertes ausmacht. Die Sättigung spielt namentlich auch in der Technik eine wichtige Rolle; will man mit gegebenen Mitteln einen möglichst starken Effekt erzielen, so muß man sie zu erreichen suchen; will man jedoch ökonomisch arbeiten, worauf es viel häufiger ankommt, so muß man in angemessener Entfernung von der Sättigung arbeiten, oder, wie man mit erweiterter Bedeutung des Ausdruckes Sättigung sagt, mit mäßiger Sättigung; nach der WEBERschen, in der Praxis freilich zu modifizierenden Formel würde der höchste für ökonomischen Betrieb geeignete Sättigungswert $^2/_3$ sein.




Figur 72.

**Berücksichtigung der Koerzitivkraft; remanenter Magnetismus.** Die WEBERsche Theorie wird bereits der einen von den beiden Differenzen (wenigstens in großen Zügen) gerecht, welche zwischen den Annahmen der POISSONschen Theorie und der Wirklichkeit bestehen, nämlich dem Umstande, daß die Magnetisierung zwar anfangs der magnetisierenden Kraft proportional ist, später aber langsamer wächst und den Sättigungswert erreicht. Dagegen bleibt noch die Differenz bestehen, daß nach Aufhören jener Kraft der Magnetismus nach der Theorie vollständig, in Wahrheit aber nur teilweise verschwindet, während ein anderer Teil, der remanente Magnetismus (vgl. S. 121) bestehen bleibt; eine Erscheinung, mit der, wie man schon von vornherein vermuten kann, eine zweite

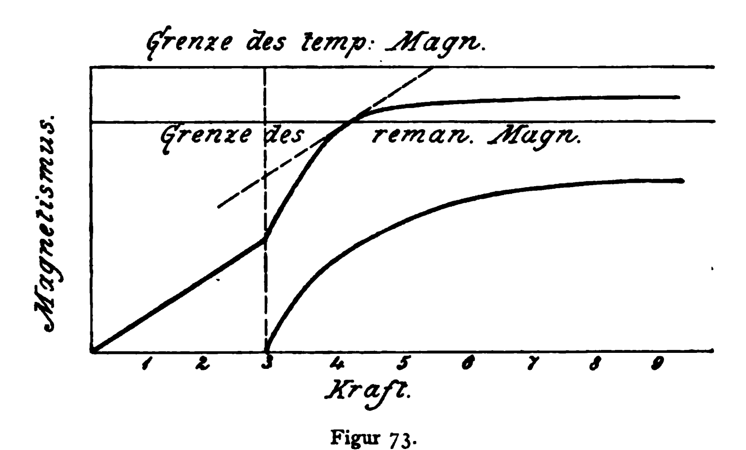
im Zusammenhange steht, wonach die Kurve des temporären Magnetismus auch durch die WEBERsche Formel noch nicht richtig dargestellt wird, indem sie nämlich außer dem ersten, proportional und dem letzten, langsamer steigenden Stück noch ein mittleres, rascher steigendes aufweist. Beiden Forderungen wird die MAXWELLsche Theorie gerecht[1]. Nimmt man nämlich an, daß eine Molekel bei Ablenkungen $\beta$ (d. h. $\alpha - \vartheta$), die kleiner als ein gewisser Wert $\beta_0$ sind, nach Aufhören der ablenkenden Kraft in die ursprüngliche Lage zurückkehrt bei größeren Ablenkungen dagegen nach dem Aufhören der Kraft nur um $\beta_0$ zurückgeht, dagegen die Ablenkung $\beta - \beta_0$ vermöge der Koerzitivkraft (S. 121) behält, und wenn man $D \sin\beta_0 = L$ setzt, so erhält man folgende Tafel der zusammengehörigen Werte der magnetisierenden Kraft $X$, des temporären Magnetismus $\mathfrak{J}$ und des remanenten $\mathfrak{J}'$.

| $X$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{J}'$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $< L$ | $\frac{2}{3} m n \frac{X}{D}$ | 0 |
| $L$ | $\frac{2}{3} m n \frac{L}{D}$ | 0 |
| $> L,\ < D$ | $\frac{2}{3} m n \frac{X}{D} + m n \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right) \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}}\right)$ | $m n \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)\left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)$ |
| $> L,\ = D$ | $\frac{2}{3} m n + \frac{1}{3} m n \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ | $m n \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2$ |
| $> L,\ > D$ | $m n \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right) + m n \left[\frac{D^2}{6 X^2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right) + \frac{X}{3 D}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right) - \frac{L}{6 X}\left(\frac{L}{X}\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right.\right.$ $\left.\left. + \frac{L}{D}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right)\right]$ | $\frac{m n}{4}\left[1 - \frac{L^2}{X D} + \sqrt{\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)\left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)}\right]^2$ |
| $\infty$ | $m n$ | $\frac{m n}{4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2$ |

In Figur 73 sind die Kurven der temporären und der remanenten Magnetisierung, sowie die Asymptoten, denen sich beide Kurven nähern, dargestellt, und zwar für $m n = \mathfrak{J}_{max} = 1000$, $L = 3$, $D = 5$. Die Kurve des temporären Magnetismus hat zwei ausgezeichnete Punkte; in dem einen, bei $X = L$, hat die Kurve ein scharfes Knie, das sich in der Wirklichkeit nicht wiederfindet, und das man, wie die Erfahrung fordert, in eine sanfte Einbuchtung verwandeln kann, wenn man annimmt, daß $\beta_0$, also auch $L$ für verschiedene Molekeln verschiedene Werte hat, wobei sich dann gleichzeitig der plötzliche Anstieg der Kurve des remanenten Magnetismus in einen sanfteren verwandelt; der zweite kritische Punkt

[1] J. C. MAXWELL, Lehrb. d. El. u. d. Mag. 2. S. 99.

der temporären Kurve ist der, in welchem die Tangente an die Kurve dem ersten, geradlinigen Kurvenstück parallel verläuft, jenseits dieses Punktes wächst die Magnetisierung langsamer, als der Proportionalität entsprechen würde. Die Ordinate dieses Punktes ist hier nicht, wie bei WEBER, $^2/_3$ der Sättigungsordinate, sondern größer; ihr Wert hängt ebenso wie der für das Knie von dem Größenverhältnis von $L$ und $D$ ab. Das letztere gilt auch hinsichtlich des Bruchteils, den das Maximum des remanenten Magnetismus von dem Maximum des temporären ausmacht; nur ergibt sich das Paradoxon, daß jenes mindestens ein Viertel von diesem ausmachen muß, was bekanntlich nicht richtig ist.



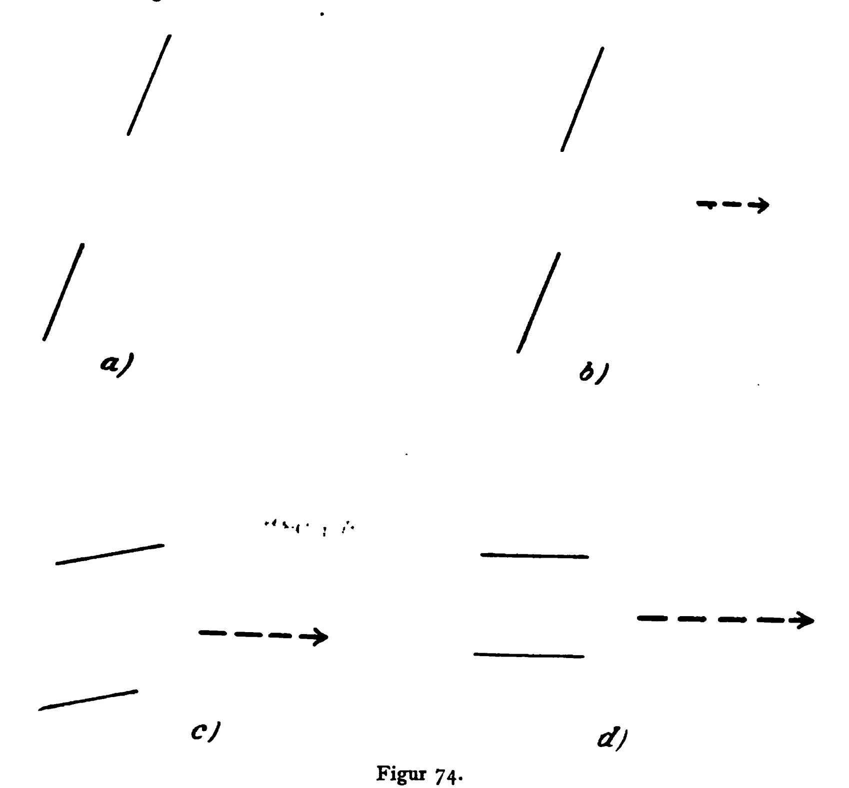

Figur 73.

**Weiterentwickelung der Molekulartheorie.** Von verschiedenen Forschern ist in der neueren Zeit die Molekulartheorie des Magnetismus weiter ausgebildet worden. Auf die Theorie von CHWOLSON[1] kann hier nur hingewiesen werden. Viel des Interessanten bietet die Theorie von RIGHI[2], die sich an die WEBERsche anschließt und durch zahlreiche Versuchsreihen gestützt wird. Eigenartig und in mancher Hinsicht erfolgreich ist die Hypothese von STEFAN[3] und W. SIEMENS[4], daß jede Eisenmolekel aus zwei entgegengesetzt gepaarten Elementarmagneten besteht, die zusammen frei drehbar sind, durch äußere Kräfte aber auch auseinander gedreht werden können. Bis in viele Einzelheiten ausgebildet sind ferner die Theorien von LAMONT[5], G. WIEDEMANN[6] und EWING[7], die (wie übrigens auch schon die von CHWOLSON) auf dem von WEBER nicht weiter verfolgten Gedanken (S. 164) beruhen, die Beeinflussung jedes Elementarmagneten durch alle benachbarten zu ermitteln, wobei dann zugleich manche willkürliche Annahmen über Richtkraft, Reibungswiderstand usw. wegfallen. Man untersucht nach EWING zunächst eine Gruppe von zwei Molekularmagneten, die in einer Linie liegen (Figur 74a); durch eine kleine Kraft werden sie nur wenig abgelenkt (b); dann erfolgt ein ziemlich plötzlicher Umschlag in eine Lage, wo sie, bei stärker gewordener Kraft, einander und der Kraft nahezu parallel sind (c); endlich hat weitere Steigerung der Kraft zur Folge, daß der Parallelismus immer vollständiger wird (d). Man erkennt also schon bei dieser einfachsten Vorstellung die drei Phasen der Magnetisierungskurve, ihr erst langsames, dann rasches und zuletzt wieder langsames Steigen. Nimmt man nun Gruppen von vier oder mehr Molekeln, so wird die Darstellung des Verhaltens immer besser. EWING hat diese

[1] O. CHWOLSON, Pogg. Ann. Ergzb. 7. S. 53 u. 535. 1876. — [2] A. RIGHI, Mem. di Bologna. (4) 1. S. 433. 1880. — [3] J. STEFAN, Wien. Ber. 69 (2). S. 165. 1874. — [4] W. SIEMENS, Ber. Berl. Ac. 1881 u. 1884; Wiss. Abh., S. 334 u. 380. — [5] J. LAMONT, Handb. d. Magn., Lpz. 1867. S. 181. — [6] G. WIEDEMANN, D. Lehre v. d. Elektrizität, Bd. 3 u. 4 (3. Aufl.). — [7] J. A. EWING, Magn. Induktion, S. 277 ff. u. a. a. O.

Gedanken auch rechnerisch verfolgt, und er[1] hat sie außerdem experimentell mit Hilfe zahlreicher drehbarer Magnetnädelchen geprüft; es ist sehr instruktiv, sich hiernach Modelle zur Darstellung des Vorganges anzufertigen. Immerhin darf man die Bedeutung derartiger grob sinnlicher Theorien nicht überschätzen.

**AMPÈREsche Theorie des Magnetismus.** Alle bisher erwähnten Theorien betrachten, welche elementare Vorstellung sie auch benutzen, den Magnetismus als eine selbständige, primäre Erscheinung. Die AMPÈREsche Theorie hingegen führt den Magnetismus auf etwas anderes, nämlich auf elektrische Ströme, zurück, und zwar auf Molekularströme, die also hier an die Stelle der Molekularmagnete treten. Auf diese, die Molekeln umkreisenden Ströme




Figur 74.

kann man dann wieder zwei verschiedene Vorstellungen anwenden: entweder man faßt das Magnetischwerden als eine Entstehung solcher Ströme auf, oder man nimmt an, daß sie stets, auch in unmagnetischen Körpern, existieren, daß aber ihre zunächst ganz verschieden gelegenen Ebenen durch den Magnetisierungsprozeß mehr und mehr parallelisiert werden. Es ist leicht einzusehen, daß die zweite Annahme, die man die Hypothese der Drehung der Molekularströme nennen kann, vorzuziehen ist. Die meisten Betrachtungen der WEBERschen, MAXWELLschen und anderer Theorien lassen sich ohne Schwierigkeiten von den Molekularmagneten auf die Molekularströme übertragen; im Artikel „Elektromagnetismus“ wird hierauf noch zurückgekommen werden. Nur auf eines sei noch hingewiesen: die Molekularströme sind Dauerströme, d. h. sie bestehen immerfort; man muß also annehmen, daß der Widerstand in dem Medium null sei, oder daß zu ihrer Erhaltung eine uns unbekannte molekulare Energiequelle verwandt werde.

[1] J. A. EWING, Phil. mag. (5) **30**. S. 205. 1890.

Hier setzen nun die neueren Ausarbeitungen der AMPÈREschen Theorie ein. Schon W. WEBER[1] hatte sich vorgestellt, daß ein positives Elektrizitätsteilchen um einen negativen Kern kreise. Neuere Autoren, namentlich RICHARZ[2], identifizieren nun diese Teilchen mit den Ionenladungen, fassen also den Magnetismus als Konvektionsströme rotierender Ionenladungen auf. Man kann dann mit Hilfe der kinetischen Theorie einerseits und der Ionentheorie andererseits die Vorstellung sogar bis zu einem gewissen Grade rechnerisch durchführen und z. B. den maximalen spezifischen Magnetismus, dessen ein Stoff fähig ist, aus Ladung, umkreister Fläche und Rotationsdauer berechnen; ein Verfahren, das zu Werten für Eisen und schwach magnetisierbare Stoffe[3] führt, die der Größenordnung nach einigermaßen mit den tatsächlichen übereinstimmen.

**Elektronentheorie.** Nachdem sich die Elektronentheorie auf anderen Gebieten, namentlich auch in der elektromagnetischen Optik, bewährt hatte, lag es nahe, auch die magnetischen Erscheinungen aus ihr abzuleiten, zumal das auf den ersten Blick gar keine Schwierigkeit zu haben schien. Als nun aber W. VOIGT[4] die Arbeit rechnerisch durchzuführen unternahm, zeigte sich, daß die Sachlage doch eine wesentlich andere ist. VOIGT betrachtet zunächst das Elementargesetz der magnetischen Wirkung bewegter elektrischer Ladungen, wobei er die Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ansetzt; sodann betrachtet er die Kräfte, die ein Elektron im Magnetfelde erfährt, und zwar sowohl die durch die Feldstärke als auch die durch deren zeitliche Änderung bestimmten. Nunmehr lassen sich die Bewegungsgleichungen eines Elektrons aufstellen und für den Fall behandeln, daß ein Elektron infolge der Felderregung seine Bewegung ändert; denn so erhält man das, was die Elektronentheorie bei alleiniger Berücksichtigung der fortschreitenden Bewegung an die Stelle der alten Annahme einer Induktion und einer Richtung von Molekularströmen setzt. Setzt man nun hierbei die der Bewegung sich entgegenstellenden Widerstandskräfte gleich null, so kommt man zu dem überraschenden Ergebnisse, daß eine magnetische Erregung überhaupt nicht stattfindet. Man muß also Widerstände und damit auch immer wieder erneute Anstöße einführen, die die Bewegung auf einer konstanten mittleren Energie erhalten; und je nachdem die Elektronen nach solchen — regellos und in gewissen Pausen erfolgenden — Anstößen im Mittel einen Überschuß an potentieller oder an kinetischer Energie besitzen, verhält sich der Körper para- oder diamagnetisch. Soweit die auf reiner Fortschreitung basierte Theorie. Geht man nun zu Rotationen über, so findet man ein neues Resultat. Auch ohne Annahme von Widerständen gelangt man hier zu einem Effekt, aber nur zu Diamagnetismus; erst durch Einführung von Widerständen und Bewegungsantrieben erhält man die Möglichkeit sowohl von Para- wie von Diamagnetismus.

**Magnetokinetik.** Schließlich sei auf eine von H. DU BOIS[5] entwickelte Theorie hingewiesen, obgleich sie nur zu einem Teile ihrer prinzipiellen Bedeutung hierher gehört. Der eigentliche Gegenstand der Untersuchung ist nämlich die Kreiselbewegung in einem orientierten Kraftfelde; als geeignetste Exemplifikation bietet sich aber das magnetische Feld dar; und schließlich läßt sich die Anwendung auf Molekularkreisel machen, aus denen man sich die Körper aufgebaut denken kann.

---

[1] W. WEBER, Elektrodynam. Maßbestimm. Lpz. 1871. S. 41. — [2] F. RICHARZ, Wied. Ann. **52**. 410. 1894. — Andere einschlägige Arbeiten von CHATTOCK, Phil. Mag. (5) **34**. 480. 1892; — H. EBERT, Wied. Ann. **48**. 19. 1893. — [3] R. LANG, Drude Ann. **2**. 483. 1900. — [4] W. VOIGT, Nachr. Ges. Wiss. Gött. 1901. 179. — [5] H. DU BOIS, Drude Ann. **13**. 289; **14**. 209. BOLTZMANN-Festschrift 1904.

Zweiter Teil:

# Beobachtungen.

## Beobachtungs- und Meß-Methoden.

**Übersicht über die Aufgabe.** Im Artikel „Magnetische Messungen" haben wir, als letzten Abschnitt, die Messung der Feldstärke, d. h. der magnetisierenden Kraft behandelt, die ihr parallel laufende Messung der Magnetisierungsintensität aber auf später verschoben; diese Lücke müssen wir nun ausfüllen.

Die zu bestimmende Größe ist also $\mathfrak{J}$. Statt dessen kann man offenbar, wo dies bequemer ist, auch die Induktion $\mathfrak{B}$ bestimmen; beide hängen ja miteinander und mit der Kraft in einfacher Weise zusammen, und man kann die eine aus der anderen nachträglich berechnen. Dabei handelt es sich meist nicht um die Gewinnung eines einzelnen Wertes dieser Größen, sondern um ihre Ermittelung als Funktionen der Kraft, also, graphisch gesprochen, um die Feststellung der ganzen Magnetisierungs- oder Induktionskurve. Diese Kurve fällt nun aber verschieden aus, je nach der Art, wie man die Kraft wirken, ansteigen, oder fallen läßt: und insbesondere wird es sich auch um die Messung der dabei auftretenden Hysteresis handeln.

Andererseits kommen dann örtliche und zeitliche Probleme in Betracht, nämlich in jener Hinsicht die Verteilung des Magnetismus in einem Eisenkörper, in dieser Hinsicht die zeitlichen Änderungen.

Die Aufgabe ist verschieden, je nachdem ein bestimmter Körper vorliegt oder lediglich nach den Eigenschaften des Materials, z. B. einer bestimmten Eisensorte, gefragt wird; im letzteren Falle wird man dem Material die geeignetste Form geben, d. h. diejenige, bei der die Theorie sichere Rückschlüsse aus dem ganzen Moment des Körpers auf die „Magnetisierung" zuläßt; solche Formen sind die Kugel, das Ellipsoid, insbesondere das langgestreckte Rotationsellipsoid, der lange dünne Draht, endlich der Ring; für andere Körper ist man mehr oder weniger auf unstrenge Rechnungen angewiesen; so namentlich für die praktisch wichtigste Form zylindrischer Stäbe mit Endflächen. Aber auch zwischen den erstgenannten Formen besteht ein Unterschied insofern, als nicht dieselben Formen zur Prüfung der Theorie (Kugel, gedrungenes Ellipsoid) und zur Messung (gestrecktes Ellipsoid, Ring) geeignet sind.

Das die Magnetisierung erzeugende Feld kann vom Erdmagnetismus, von Stahlmagneten, von Elektromagneten oder von Stromspulen herrühren; da dieses Feld eine Wirkung von derselben Art ausübt, wie der zu untersuchende Körper, muß man diese Wirkung in Rechnung ziehen oder kompensieren; beides ist am besten erreichbar bei Spulen, die man daher meist anwendet; ihre magnetisierende Wirkung, d. h. ihr $\mathfrak{H}$ ist leicht zu berechnen, und ihre störende Nebenwirkung auf den Meßapparat ist mit Hilfe einer „Kompensationsspule" leicht zu beseitigen, ev. bis auf einen kleinen Rest, der dann anderweitig berücksichtigt werden kann.

Das zu prüfende Material muß möglichst rein, homogen und von vornherein unmagnetisch sein: bei der Herstellung der Körper sind bestimmte Gesichtspunkte zu beachten, über die man in der technischen Literatur Einzelheiten findet.

Die Methoden selbst sind im Prinzip dieselben wie die zur Feldmessung dienenden; unsere Betrachtungen werden daher denen des letzten Abschnittes des vorigen Artikels ganz parallel gehen[1].

[1] Näheres über die Methoden u. a. bei H. DU BOIS, Magnetische Kreise, Berlin 1894. — J. A. EWING, Magn. Induktion, Berlin 1892. — MASCART und JOUBERT, Lehrb. d. El. u. d. Magn. Bd. 2.

**1. Die magnetometrische Methode.** Man läßt den Körper auf die Nadel eines Magnetometers wirken und vergleicht diese Wirkung mit der vom Erdmagnetismus oder einer anderen bekannten Kraft auf die Nadel ausgeübten Wirkung. Im Artikel „Magnetische Messungen" ist diese Methode bereits dargestellt worden; während es sich aber dort um das magnetische Moment des Körpers handelte, soll hier $\mathfrak{J}$ (und daraus dann $\varkappa$ usw.) ermittelt werden, und zwar nicht nur, wie dort, für Stäbe, sondern auch für andere Körperformen; die Formeln werden also im allgemeinen andere. Da Ringe nach außen nicht wirken, wird es sich bei dieser Methode meist um Ellipsoide handeln, und man wird der Einfachheit halber Rotationsellipsoide nehmen. Sind $a$ und $c$ die Halbachsen in der äquatorialen und polaren Richtung, so ist das Volumen $\frac{4}{3}\pi a^2 c$, durch diesen Betrag muß man also — bei gleichförmiger Magnetisierung — das ganze Moment $M$ dividieren, um $\mathfrak{J}$ zu erhalten. Ferner sei $\mathfrak{H}$ die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus und $r$ die einigermaßen große Entfernung des Körpers von der Nadel; endlich $\vartheta$ die Ablenkung der Nadel; dann ist für die 1. resp. 2. Hauptlage

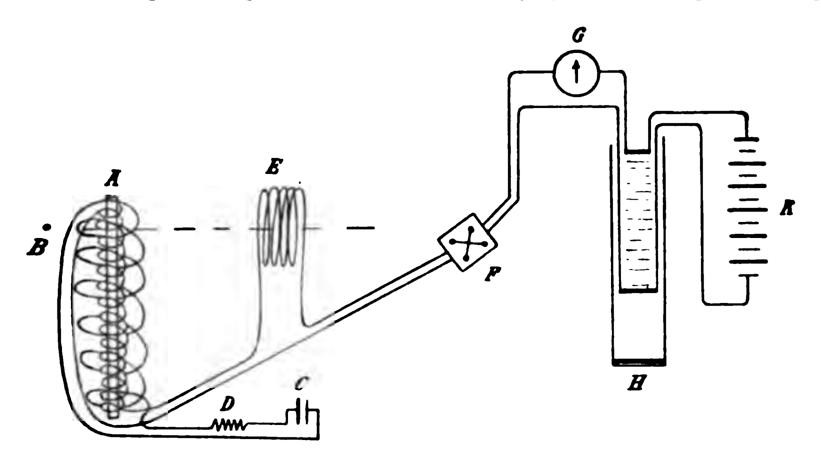
$$\mathfrak{J} = \frac{3 r^3 \mathfrak{H} \operatorname{tang} \vartheta}{8 \pi a^2 c} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{J} = \frac{3 r^3 \mathfrak{H} \operatorname{tang} \vartheta}{4 \pi a^2 c} \; .$$

Man kann in manchen Fällen, nämlich bei sehr gestreckten Körpern, wie es lange Stäbe mit ellipsoidisch abgerundeten Enden sind, mit Vorteil eine andere Lage des Körpers benutzen, die zu der sogenannten unipolaren Methode[1] führt; man stellt den Körper östlich oder westlich vom Magnetometer vertikal auf und bringt einen seiner Pole in die horizontale Nadelebene; es ist dann, wenn $r$ die Entfernung dieses, $r'$ die des anderen Poles von der Nadel ist:

$$\mathfrak{J} = \frac{r^2 \mathfrak{H} \operatorname{tang} \vartheta}{\pi a^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^3\right]} = \frac{r^2}{\pi a^2} \mathfrak{H} \operatorname{tang} \vartheta \quad ,$$

letzteres angenähert, wenn $r$ gegen $r'$ vernachlässigt werden kann.

Die wirkliche Anordnung der Messungen gibt Figur 75 schematisch an. $A$ ist der Stab, ganz eingeschlossen in die Hauptspule zur Magnetisierung und




Figur 75.

eine zweite zur Kompensation der Vertikalkomponente des Erdmagnetismus (letztere durchflossen von einem konstanten, von $C$ gelieferten und durch $D$ regulierten Strom); $B$ ist das Magnetometer, $E$ eine Spule zur Kompensation der direkten

[1] J. A. Ewing, Magnet. Induktion. S. 42 ff.

Wirkung der Hauptspule; $K$ ist die Batterie für den Hauptstrom, $F$ ein Kommutator, $G$ das Galvanometer und $H$ ein Flüssigkeitsrheostat zur stetigen Steigerung der Stromstärke und damit der Magnetisierung.

Über die in den Formeln vorkommenden Größen $\mathfrak{H}$ und $r$ ist noch folgendes zu bemerken. Die Horizontalintensität des Erdmagnetismus wird für konstante Räume ein für allemal bestimmt; anderenfalls muß sie mit einem Lokalvariometer (vgl. S. 110) von Fall zu Fall auf eine bekannte Intensität bezogen werden. Man kann das auch umgehen, indem man die zu messenden Momente bezieht auf das bekannte Moment eines Stahlmagneten oder einer Spule von bekannter Stromstärke und Windungsfläche.

Was andererseits die Entfernung $r$ betrifft, so muß man für alle genaueren Zwecke bedenken, daß die Wirkung des Körpers von seinen Polen ausgeht, und daß man folglich, wenn man unter $r$ den Abstand von der Mitte des Körpers versteht, Korrektionsfaktoren hinzufügen muß, die bereits in den früheren Artikeln angegeben worden sind. Für verlängerte Rotationsellipsoide, bei denen (vgl. S. 67) die Pole in 2/3 der langen Halbachsen liegen, erhält man als Korrektionsfaktor der Wirkung nach außen

$$1 + \frac{8}{9}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{16}{27}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \cdots ,$$

oder noch etwas genauer durch Entwickelung der RÖSSLERschen Formel (S. 145)

$$1 + \frac{6}{5}\left(\frac{e}{f}\right)^2 + \frac{9}{7}\left(\frac{e}{f}\right)^4 + \frac{4}{3}\left(\frac{e}{f}\right)^6 + \frac{15}{11}\left(\frac{e}{f}\right)^8 + \cdots ,$$

wo $a$ die große Halbachse, $e$ die Exzentrizität und $f$ das Verhältnis $r : a$ ist. Für zylindrische Stäbe wird, wenn man nach KOHLRAUSCH (vgl. S. 72) den Polabstand rund zu 5/6 der Länge $2l$ ansetzt, angenähert:

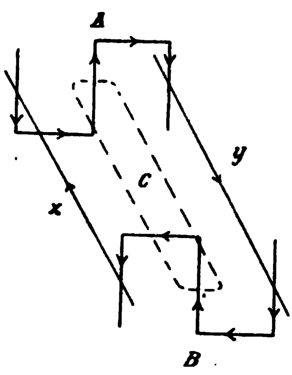
$$1 + \frac{4}{3}\left(\frac{l}{r}\right)^2 + \frac{16}{11}\left(\frac{l}{r}\right)^4 + \cdots .$$

Handelt es sich um Eisenkörper, die durch Einlegen in eine Magnetisierungsspule magnetisiert werden, so muß man deren eigene Wirkung entweder für sich bestimmen und in Abzug bringen, oder aber, was bequemer ist, ihre Wirkung durch die entgegengesetzte einer regulierbaren Kompensationsspule aufheben. Damit die Aufhebung eine vollkommene sei, muß man auf verschiedene Punkte achten, namentlich darauf, daß die Hin- und Herleitungsdrähte um einander geschlungen seien; auch muß man wegen der Temperaturänderungen usw. häufig kontrollieren, ob die Kompensation noch gut ist. Aber noch ein anderes ist in Fällen, wo es auf größere Genauigkeit ankommt, wohl zu beachten. Es hat nämlich ERHARDT[1] darauf aufmerksam gemacht, daß man bei magnetometrischen Messungen mit Benutzung einer Kompensationsspule häufig den Fehler macht, daß man die, neben der Hauptwirkung — Kompensation der Ablenkung — auftretende Nebenwirkung — Änderung der Feldstärke — unbeachtet läßt; bei stärkeren Feldern kann das leicht einen Fehler von einigen Prozent erzeugen. Die Prüfung, ob ein solcher Fehler z. B. infolge nicht exakt gerichteter Kompensationsspule vorhanden ist, nimmt man sehr einfach dadurch vor, daß man eine passende Kraft, etwa einen Galvanometerstrom, zuerst auf die beiden stromlosen, dann auf die von einem bekannten Strom durchflossenen Spulen wirken läßt; den gefundenen Fehler kann man entweder durch Drehung beseitigen oder in Rechnung ziehen.

Differentialmethoden. Es liegt nahe, die Magnetisierung eines unbekannten Stabes mit der eines bekannten zu vergleichen; auf diesem Gedanken beruhen verschiedene Apparate. So das Differentialmagnetometer von EICKEMEYER[2]; in

[1] TH. ERHARDT, Drude Ann. **9**. 724. 1902. — [2] EICKEMEYER, vgl. CH. PR. STEINMETZ El. Z. **12**. 381. 1891.

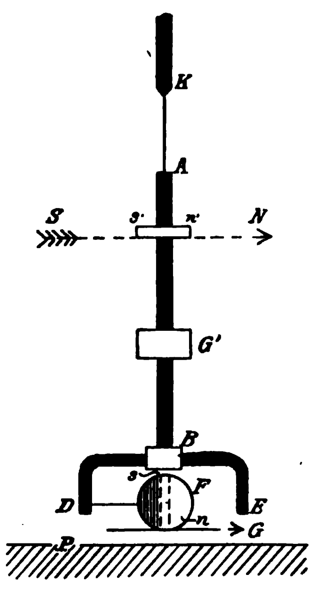
der schematischen Figur 76 sind $x$ und $y$ die beiden Stäbe, die mit den Eisenblöcken $A$ und $B$ einen magnetischen Kreis — vgl. die Pfeile — bilden. In den horizontalen Spulenwindungen $C$ schwebt die vertikal drehbare Nadel; sie wird sich vertikal einstellen, falls $x$ und $y$ gleich stark sind, dagegen wird sie bei Ungleichheit ausschlagen, und man kann das Gleichgewicht durch einseitige Zufügung von magnetischen Widerständen wieder herstellen. — Ferner die nach Analogie mit der WHEATSTONEschen Brücke gebauten Permeabilitätsbrücken, wie sie zuerst wohl EDISON, später EWING[1] angegeben hat. Bei EWING befinden sich die zu vergleichenden Stäbe in parallelen Magnetisierungsspiralen, und ihre Enden sind durch zwei kurze Joche aus weichem Eisen verbunden; zwischen den sich nahe gegenüber endenden Ausläufern der Joche schwebt die Nadel; die Zahl der Amperewindungen des Probestabes kann geändert und so die abgelenkte Nadel wieder ins Gleichgewicht gebracht werden. W. SCHMIDT[2] ersetzt den Kompensationsstab durch einen stromdurchflossenen Ring, seine Methode hat sich für ganz schwache Felder gut bewährt.



Figur 76.

Die Nachfolger von EWING haben sich dann von dem Vergleichsstab unabhängig gemacht, indem sie den zu prüfenden Stab mit einer Luftstrecke zum Vergleich bringen. Hierher gehören die Apparate von CHATTOCK[3], LAMB und WALKER[4] und BAILY[5]; sie sind einander ziemlich ähnlich, es genügt daher einen von ihnen zu skizzieren. Es sei dazu der BAILYsche gewählt, weil er den Induktionsfluß direkt als Funktion der magnetisierenden Kraft anzeigt. Das Probestück wird in einen magnetischen Kreis gebracht, der eine bekannte Luftstrecke enthält; über dem Luftspalt schwingt ein Nadelpaar, das einerseits durch das Streufeld des Spaltes, andererseits durch eine drehbare, hinter der Magnetisierungsspule liegende Spule abgelenkt wird; jenes gibt ein Maß für den Induktionsfluß, diese für die Kraft; man stellt nun die Spule so ein, daß die Nadel ohne Ablenkung ist; dann ergibt eine einfache Beziehung die Permeabilität $\mu$.

Endlich ist noch der Kurvenprojektor von SEARLE[6] zu erwähnen, ein Instrument, das ebenfalls Kraft und Induktion zugleich liefert, und zwar in zwei zueinander senkrechten Richtungen, so daß man direkt die Magnetisierungskurve erhält. An einem Seidenfaden $KA$ (Figur 77) hängt eine Aluminiumgabel $ABDE$; diese trägt eine horizontale Nadel $s'n'$; zwischen $D$ und $E$ ist ein zweiter Seidenfaden ausgespannt, der einen Spiegel $F$ mit hinten aufgekitteter vertikaler Nadel $sn$ trägt. In einiger Entfernung östlich von $F$, also über der Bildebene, wird das obere Ende des zu untersuchenden Körpers aufgestellt; die hierdurch erzeugte Drehung des Spiegels um die Achse $DE$ ergibt ein Maß für das Moment $M$. Der magnetisierende Strom geht noch durch eine westlich aufgestellte

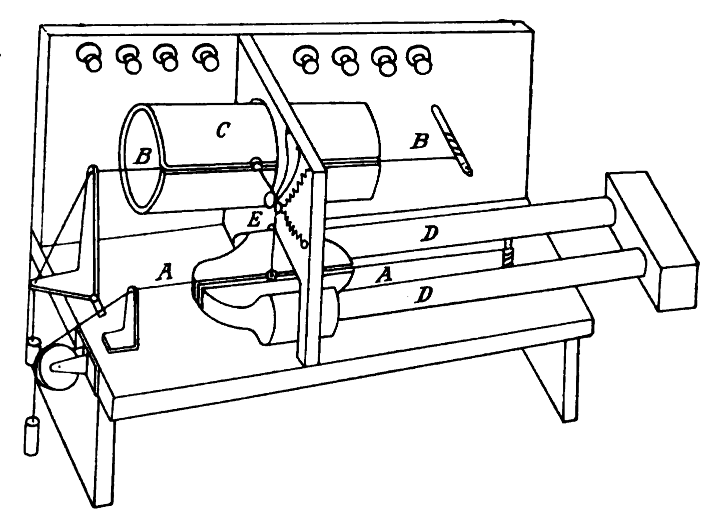


Figur 77.

[1] J. A. EWING, Electrician. **37**. 41. 1896. — [2] W. SCHMIDT, Wied. Ann. **54**. 655. 1895. — [3] CHATTOCK, Electrician. **37**. 94. 1896. — [4] LAMB und WALKER, ebenda. **47**. 263. 1901. — [5] BAILY, ebenda. **48**. 172. 1901. — [6] SEARLE, Proc. Phil. Soc. Cambr. **7**. 330. 1892.

Kompensationsspule, sowie durch eine dritte Spule, die östlich von der oberen Nadel $s'n'$ steht, also das ganze System um die Vertikalachse dreht und damit ein Maß der Feldstärke liefert. $P$ ist die Grundplatte, $G$ und $G'$ sind Dämpfer. Ein von dem Spiegel reflektierter Lichtpunkt erhält daher $\mathfrak{H}$ als Abszisse, $M$ als Ordinate; und bei nach und nach gesteigertem magnetisierenden Strome erhält man die Magnetisierungskurve, sei es subjektiv, sei es photographisch. Auch Hysteresisschleifen usw. kann man so erhalten.

**2. Die elektrodynamische Methode.** Die Wirkung des Magnetismus auf Stromleiter ist in verschiedener Weise benutzt worden, ganz im Anschluß an die entsprechenden Feldmeßmethoden (S. 112). So ist der Kurvenprojektor von EWING[1] dem Apparat von Lord KELVIN verwandt, indem er ausgespannte Drähte benutzt, nur daß diese hier Ausbuchtungen erfahren; und andererseits gleicht er dem Apparate von SEARLE, indem er die Drehungen eines Spiegels in zwei auf-




Figur 78.

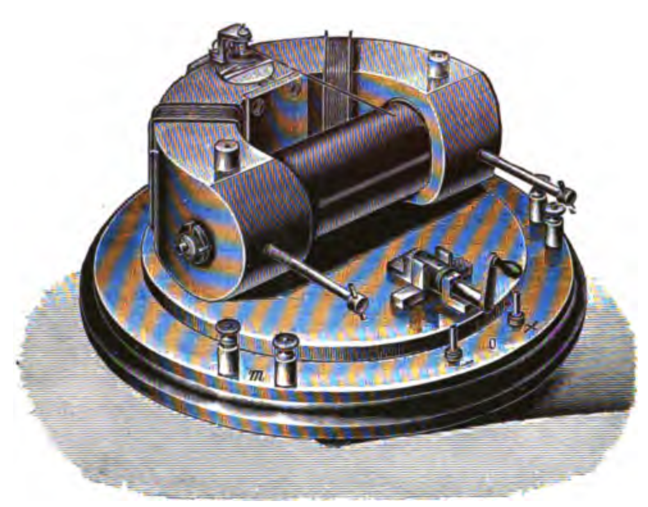
einander senkrechten Richtungen registriert. In der schematischen Figur 78 sind $DD$ zwei Proben des zu prüfenden Materials, zwischen ihren Polschuhen geht der Draht $AA$ hindurch; $C$ ist ein geschlitztes Eisenrohr, in ihm schwebt der Draht $BB$; der magnetisierende, um die Stäbe kreisende Strom geht auch durch $BB$ und mißt die Feldstärke; ein konstanter Strom andererseits, der in einer um das Eisenrohr längsgewickelten Spule läuft und dieses vertikal magnetisiert, geht auch durch $AA$ und mißt die Induktion; in dem Spiegel $E$ kombinieren sich die Ausbuchtungen beider Drähte.

Am nächsten liegt es ja, als Stromleiter eine drehbare Spule zu benutzen; man erhält dann gewissermaßen die Umkehr des DARSONVALschen Galvanometers (4, 293). Diese Idee ist gleichzeitig von ROBINSON[2] und KÖPSEL[3] verwirklicht worden; der KÖPSELsche Apparat ist dann noch mehrfach untersucht und verbessert worden[4] und wird von SIEMENS & HALSKE gebaut. In der letzten, von KATH beschriebenen Form (Figur 79) besteht er aus einem die Enden verbindenden halbkreisförmigen Joche, in dessen herausgeschnittener Mitte sich eine Spule aus einigen Windungen feinen Drahtes drehen kann; die Hilfsteile und die Abmessungen sind so gewählt, daß man möglichst direkt ein fehlerfreies Resultat erhält.

[1] J. A. EWING, El. Z. **13**. 516 u. 712. 1892. — **14**. 451. 1893. — [2] ROBINSON, Lum. électr. **51**. 588. 1894. — [3] A. KÖPSEL, El. Z. **15**. 214. 1894. — Verh. phys. Ges. 1894. — [4] E. ORLICH, Z. f. Instr.-Kunde. **18**. 39. 1898. — H. KATH, El. Z. **19**. 411. 1898.

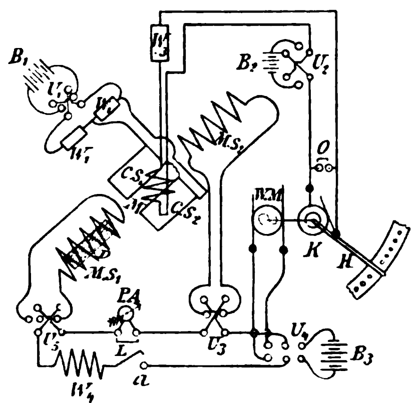
Ein **Differentialapparat** zur Vergleichung zweier Proben ist von KENNELLY[1] angegeben worden; das Joch hat einen Mittel- und zwei Seitenschenkel, zwischen deren obere Enden die Proben gebracht werden; in einer Aushöhlung des mittleren Schenkels schwebt eine radial durchflossene Scheibe, die abgelenkt wird, außer wenn Symmetrie erreicht ist.

Sehr geeignet ist die elektrodynamische Methode zur Bestimmung der **Momentanwerte der Magnetisierung** bei schnell wechselnden Kräften; gewöhnlich verfährt man hier indirekt, indem man $dB/dt$ bestimmt und dann integriert; die Methode von W. KAUFMANN[2] liefert demgegenüber direkt $B$, ganz wie bei Gleichstrom. Der Gedanke besteht darin, daß man in den Stromkreis der drehbar aufgehängten Spule einen auf der Achse des Wechselstromerzeugers angebrachten Unterbrecher einschaltet, der den Strom nur in einer bestimmten Phase schließt; die erzeugten, dem momentanen Magnetismus proportionalen Stöße summieren sich und ergeben eine Ablenkung, die man entweder messen oder durch ein Kompensationsverfahren wieder aufheben kann. In der schematischen Figur 80



Figur 79.

ist $M$ die drehbare, $MS_1$ die magnetisierende Spule mit dem Stabe, $MS_2$ sowie $CS_1$ und $CS_2$ sind Kompentationsspulen; $M$ steht senkrecht, die anderen Spulen stehen unter 45° zum magnetischen Meridian; die $B$ sind Batterien, die $U$ Umschalter, die $W$ Widerstände, $PA$ ist ein Amperemeter, endlich ist $K$ der rotierende Kontakt, der mittels des Hebels $H$ auf jede beliebige Phase des von $WM$ herrührenden Wechselstromes eingestellt werden kann.



Figur 80.

Offenbar stellt dieser Apparat zugleich einen **Hysteresismesser** dar; derartige Apparate sind noch mehrfach, z. B. von BLONDEL[3] angegeben worden; es kann aber nicht näher darauf eingegangen werden.

Ein Hysteresismesser anderer Art ist der von EWING[4]. Das zu prüfende Material wird in die Form eines Bleches gebracht und zwischen den Polen eines drehbaren permanenten Magneten in Rotation versetzt; der Magnet wird abgelenkt, mit der Ablenkung ist die Hysteresis unter gewissen Voraussetzungen annähernd proportional.

---

1 KENNELLY, El. Z. **14**. 727. 1893. — 2 W. KAUFMANN, Verh. phys. Ges. 1899. 42. — 3 BLONDEL, C. R. **127**. 957. 1898. — 4 J. A. EWING, Inst. El. Eng. **24**. 398. 1895.

**3. Methode der Induktionsströme oder ballistische Methode.** Der Körper wird, außer mit der zur Magnetisierung dienenden Spule, überall oder an einer Stelle noch mit einer zweiten, zum Unterschied als sekundäre bezeichneten Spule umgeben, letztere ist mit einem Galvanometer mit langsam schwingender Nadel verbunden. Zieht man den Körper heraus oder steckt man ihn herein, oder schließt oder öffnet oder kommutiert man den Strom in der magnetisierenden Spule, oder ändert man auch nur die Lage des Körpers oder die Stärke des magnetisierenden Stromes, kurzum bei jeder Änderung des magnetischen Zustandes des Körpers tritt (s. Art. Elektrische Induktion) in der sekundären Spule ein Induktionsstrom und im Galvanometer ein Nadelausschlag auf, die dem Magnetismus oder seiner Änderung proportional sind. Erforderlich ist dabei die Beobachtung einiger Vorsichtsmaßregeln, besonders die Verhinderung der z. B. beim plötzlichen Schließen oder Öffnen des Stromes in der Spule sowohl wie im Eisen entstehenden Induktionsströme; man tut also gut, alle Strom- und Ortsänderungen allmählich vorzunehmen. Um statt des proportionalen ein absolutes Maß zu erhalten, muß man sich Kenntnis von dem Ausschlage verschaffen, den eine bekannte magnetische Kraft erzeugt, z. B. der Erdmagnetismus. Zu diesem Zwecke schaltet man in den Kreis der sekundären Spule einen Erdinduktor ein und dreht ihn rasch um eine z. B. vertikale Achse (vgl. Art. Magnetische Messungen, S. 100). Sind die Ausschläge bei dem Hauptversuch und bei der Drehung des Erdinduktors $\delta$ und $\delta_0$, die Windungszahlen der sekundären Spule und des Erdinduktors $n$ und $n_0$, $\mathfrak{H}$ die Komponente des Erdmagnetismus, welche benutzt wurde, und $f$ die Windungsfläche des Erdinduktors, so hat man zunächst

$$\mathfrak{F} = \frac{2\,n_0 f H \delta}{n\,\delta_0} \quad ,$$

wo $\mathfrak{F}$ den Induktionsfluß, d. h. die magnetische Induktion für den ganzen Querschnitt, jedoch für 1 cm der Länge des Körpers, bedeutet; um hieraus die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ pro ccm zu finden, braucht man, wenn die sekundäre Spule dicht auf dem Körper sitzt, nur mit dessen Querschnitt $q$ zu dividieren, anderenfalls muß man an $\mathfrak{F}$, ehe man durch $q$ dividiert, eine Korrektion anbringen, die aber meist klein ist. Aus $\mathfrak{B}$ ergibt sich dann $\mu$ und, rückwärts berechnet, $\mathfrak{J}$ und $\varkappa$.

Statt des Erdmagnetismus kann man auch einen elektrischen Strom zum Vergleichsobjekt wählen und hat alsdann

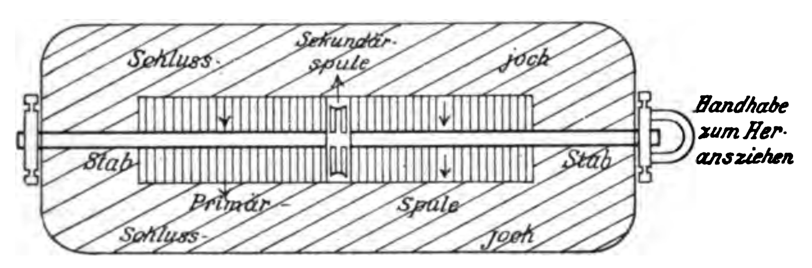
$$\mathfrak{F} = 4\pi i n' q' \cdot \frac{\delta}{\delta'} \quad ,$$

wo $i$ der Strom in einer Spule ist, dessen plötzliche Schließung oder Öffnung den Ausschlag $\delta'$ erzeugt, $q'$ der Querschnitt und $n'$ die Windungszahl pro qcm für diese Spule ist. Die Methode hat vor der erdmagnetischen erstens den Vorteil, daß sie die Kenntnis des augenblicklichen und lokalen Wertes des Erdmagnetismus erspart. Zweitens aber ist sie einfacher und macht einen eigenen Versuch überhaupt unnötig, wenn man als Spule, die den Vergleichsstrom erhalten soll, die Magnetisierungsspule nach Entfernung des Eisenkörpers benutzt: den betreffenden Versuch muß man dann nämlich ohnehin anstellen, um die Wirkung des zur Magnetisierung erforderlichen Stromschlusses abziehen zu können. Im übrigen sei auf das im Artikel „Magnetische Messungen“, S. 114 Gesagte verwiesen. Nur sei noch bemerkt, daß die Methode auf Ringe nicht anwendbar ist, weil sich hier der Eisenkörper nicht abziehen läßt; man ist also hier auf die Vergleichung mit dem Erdmagnetismus angewiesen.

Die Induktionsmethode ist wegen ihrer Anwendbarkeit auf die verschiedensten Fälle physikalisch die beliebteste von allen; ganz besonders wichtig ist sie für Ringe, weil hier die magnetometrische und die elektrodynamische Methode ver-

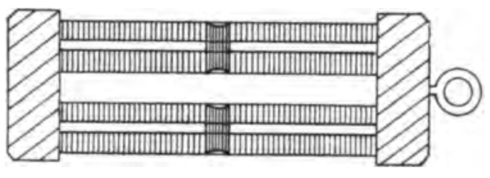
sagen; schon KIRCHHOFF (s. o.) hat auf die Bedeutung der Methode hingewiesen, und STOLETOW[1] und ROWLAND[2] haben sie zuerst angewandt. Bei Stäben macht sich die entmagnetisierende Kraft der Enden störend geltend, und es sind deshalb für solche Fälle verschiedene Anordnungen getroffen worden, unter denen die wichtigsten die folgenden sind.

Schlußjoch-Methode. Sie ist zuerst von J. HOPKINSON[3] angegeben worden und besteht darin, daß man den Stab durch ein einfaches oder doppeltes Schlußjoch, d. h. einen seine Enden verbindenden Rahmen aus recht weichem, also hoch permeablen Eisen und von großem Querschnitt schließt; am besten nimmt man gut ausgeglühtes Schmiedeeisen dazu. Durch dieses Joch werden die von




Figur 81.

den Enden ausgehenden Kraftlinien aufgenommen, so daß man die einfachen Formeln ohne Rücksicht auf die Enden benutzen kann; und zwar desto exakter, je länger das Stück ist, auf dem die Magnetisierungsspirale den Stab umgibt. Natürlich ist die Methode desto empfindlicher, je mehr der Versuchsstab hinsichtlich seiner Permeabilität hinter dem Joch zurücksteht. Man kann entweder mit fester, die Mitte des Stabes umgebender Induktionsspule arbeiten, indem man die Stromstärke in geeigneter Weise ändert, oder aber die Induktionsspule herausziehen und den betreffenden Induktionsimpuls messen; hierfür kann man dann auch automatische Vorrichtungen anbringen. Noch günstiger liegen die Verhältnisse bei der EWINGschen[4] Modifikation, bei der man zwei Stäbe aus dem zu prüfenden Material benutzt und ihre Enden paarweise durch Anker schließt; die Sekundärspulen bringt man wieder in den Stabmitten an; einen der Anker kann man so einrichten, daß, wenn man ihn abzieht, die Sekundärspulen automatisch mitgenommen werden. In den Figuren 81 und 82 sind die Anordnungen von HOPKINSON und EWING schematisch abgebildet. Andere Anordnungen bzw. Apparate rühren von CORSEPIUS[5], BEHN-ESCHENBURG[6], KAPP[7] und DRYSDALE[8] her; bei letzterem braucht man von dem Material kein Probestück abzutrennen; es wird nur ein kleiner Stift in einer Höhlung freigelegt und durch einen genau passenden Stöpsel aus Schmiedeeisen geschlossen, der beide Spulen enthält; der ganze übrige Teil des Kreises ist dann zu vernachlässigen, und man erhält direkt die Konstanten für den Stift.



Figur 82.

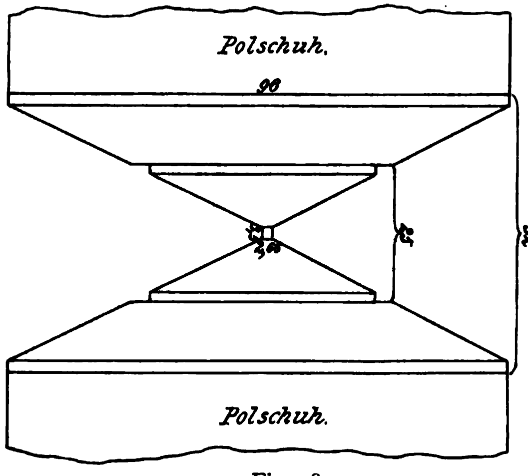
Eine wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit des ballistischen Verfahrens ist, daß die Periode der Galvanometernadel groß sei gegen die Zeitdauer

---

1 STOLETOW, Pogg. Ann. **146**. 442. 1872. — 2 H. ROWLAND, Phil. Mag. (4) **46**. 140. 1878. — 3 J. HOPKINSON, Phil. Trans. **176**. 455. 1885. — 4 J. A. EWING, Magn. Induktion. S. 69 ff. 1892. — 5 CORSEPIUS, Unters. z. Konstr. magn. Maschinen, S. 46 ff. 1891. — 6 H. BEHN-ESCHENBURG, El. Z. **14**. 330. 1893. — 7 G. KAPP, Electr. Engin. **23**. 199. 1894. — 8 DRYSDALE, Electrician. **28**. 267. 1901.

der Änderung des Induktionsflusses, die man zu messen hat; bei größeren Elektromagneten mit hoher Selbstinduktion ist das aber nicht mehr zu erreichen. Man hat dann drei Mittel, um sich zu helfen: 1. man schaltet in den Stromkreis der Magnetisierungsspule einen großen induktionslosen Widerstand ein, braucht dann aber natürlich starke elektromotorische Kräfte; 2. man bestimmt die Selbstinduktion, wofür u. a. SWINBURNE und BOURNE[1] ein sinnreiches Nullverfahren angegeben haben, und zieht dann den Rückschluß auf die magnetischen Konstanten; 3. man mißt — und das ist prinzipiell das gegebene — nach THORNTON[2] nicht den induzierten Strom, sondern die induzierte Spannung, wofür es eben gerade gut ist, wenn die Zeit der Entladung so lang wie möglich ist; die Methode ist von THORNTON nach allen Richtungen ausgebildet und namentlich auch für die Registrierung aller einschlägigen Kurven eingerichtet worden.

Von besonderen Hysteresismessern seien noch die Apparate von CROOK[3] (Schlußjoch) und von SEARLE und BEDFORD[4] (ballistisches Elektrodynamometer, die feste Spule vom magnetisierenden, die bewegliche vom induzierten Strome durchflossen, Eichung mittels Erdinduktor) angeführt.



Figur 83.

Wenn es sich um rasch verlaufende Kreisprozesse, also um Hysteresis bei Magnetisierung durch Wechselströme und ähnliches handelt, müssen die Methoden in besonderer Weise ausgebildet werden; es kann aber in dieser Hinsicht nur auf die Literatur verwiesen werden: J. und B. HOPKINSON[5], SUMPNER[6], TH. GRAY[7] u. a.

Isthmusmethode. Diese Methode eignet sich für Fälle, wo man in der Lage ist, dem Material eine bestimmte, komplizierte Form zu geben. STEFAN[8] hat gezeigt, daß man die Kraft, welche zwischen den zugekehrten Polen eines ⊏⊐-förmigen RUHMKORFFschen Elektromagneten (vgl. S. 7) herrscht, beträchtlich steigern kann, wenn man statt ebener Endflächen gestutzte Kegel benutzt, und zwar am besten von einem Leitlinienwinkel von $54^0\,44'$ $\left(\mathrm{arc\,tang}\sqrt{2}\right)$; diese Kegel wirken, wie man leicht einsieht, wie Linsen in der Optik. Im Mittelpunkte des Feldes wird nämlich, wenn $a$ der Abstand, $r$ der Radius der Endflächen ist, im ersten Falle

$$\mathfrak{H} = 4\pi\mu\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right) ,$$

also höchstens $4\pi\mu$, im zweiten dagegen

$$\mathfrak{H} = 4\pi\mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\log\frac{r}{a\sqrt{2}}\right) ,$$

[1] SWINBURNE und BOURNE, Phil. Mag. (5) **24**. 85. 1887. — [2] W. M. THORNTON, Electrician. **49**. 229. 1902. — [3] Z. CROOK, Sill. J. (4) **11**. 365. 1901. — [4] SEARLE und BEDFORD, Proc. Roy. Soc. **68**. 348. 1901. — Vgl. auch SEARLE (Theorie der Methode), Electrician. **49**. 100 u. 219. 1902. — [5] J. und B. HOPKINSON, Electrician. **29**. 510. 1892. — [6] W. E. SUMPNER, Phil. Mag. (5) **25**. 470. 1888. — [7] TH. GRAY, Phil. Trans. **184** (A). 531. 1893. — [8] J. STEFAN, Wied. Ann. **38**. 440. 1889. Siehe daselbst auch den Einfluß von Durchbohrungen. — Versuche hierüber haben u. a. CZERMAK und HAUSMANINGER angestellt: Wien. Ber. **98** (2). 1142. 1889.

also mit abnehmendem $a/r$ beliebig groß, und z. B. für $a = r/20$ schon $1{,}442\ 4\pi\mu$.

Hierauf beruht die von EWING und LOW in die Praxis eingeführte Isthmusmethode[1]. Um dabei den doppelten Zweck zu erreichen, daß in der Mitte des Feldes die Magnetisierung sehr kräftig und doch auch möglichst gleichförmig ausfalle, setzt man an die breiten Polflächen konische Stücke an und verbindet ihre möglichst kleinen Endquerstücke durch das zu untersuchende Stäbchen; oder noch besser, man gibt dem zu untersuchenden Körper selbst die Form einer Spule, d. h. eines Doppelkegels mit möglichst schlankem und kurzem Mittelstück. In Figur 83 ist ein solches von EWING konstruiertes System in $^2/_3$ der natürlichen Größe und mit Angabe der wahren Dimensionen in Millimetern dargestellt. Die Einzelheiten und die Anpassung an die ballistische Methode findet man in EWINGs Buch.

Die Isthmusmethode hat vor allen anderen den Vorzug, daß man bis zu den höchsten Feldstärken hinaufgehen kann, wobei man zugleich auch die Gleichförmigkeit des Feldes sehr annähernd erreichen kann. Die Feldstärke selbst läßt sich, bei geeigneter Anordnung, auch hier zugleich mit der Induktion bestimmen, so daß man Abszissen und Ordinaten der Kurve erhält.

**4. Zugkraftmethode.** Diese Methode kann man als eine wissenschaftliche Gestaltung der altbekannten Tragkraftmethoden bezeichnen. Diese alten Versuche hatten keinen wissenschaftlichen Wert, weil bei den meisten Magnetformen die Beziehung zwischen Kraft, Magnetisierung und Zugkraft außerordentlich verwickelt, in jedem Falle eine andere ist und deshalb auch nicht zwei Fälle miteinander vergleichbar waren. Es mußte also erst eine feste Grundlage geschaffen werden; das COULOMBsche Gesetz reicht hierzu nur in besonderen Fällen aus. Diese Grundlage bildet das MAXWELLsche Gesetz (s. w. u.), und am einfachsten gestaltet sich seine Anwendung auf geschlossene magnetische Kreise, im möglichst gleichförmigen Felde. Denkt man sich den Kreis an einer Stelle zerschnitten und die Schnittflächen sich berührend, so hat man für die Zugkraft $Z$ einfach

$$Z = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} \quad .$$

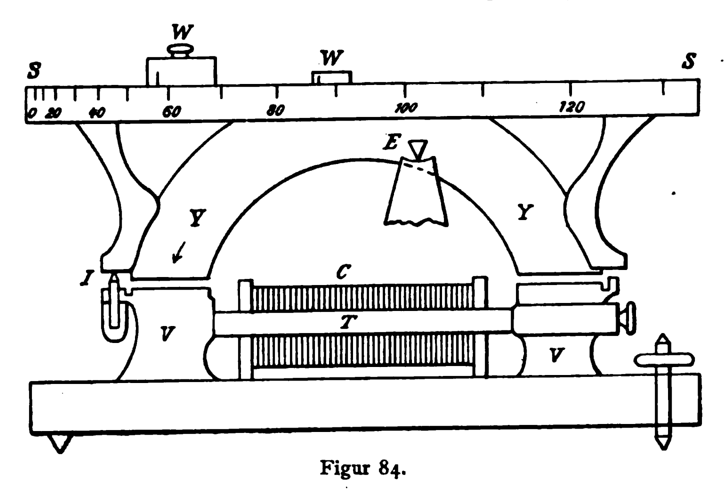
Immerhin sind die Schwierigkeiten im einzelnen nicht gering; es ist das Verdienst von H. DU BOIS, sie durch langjährige Studien überwunden zu haben. Seine erste „Magnetische Wage" vom Jahre 1890[2] ließ an Empfindlichkeit und Exaktheit noch zu wünschen übrig; sie wurde dann verbessert; und die 1900 bekannt gegebene „Präzisionswage"[3] erfüllt jene Anforderungen in solchem Maße, daß sie auch für wissenschaftliche Zwecke ausgezeichnetes leistet, während sie gleichzeitig handlich genug geblieben ist, um nach wie vor als technisches Instrument zu gelten. Sie dürfte somit, etwa von der magnetometrischen Untersuchung von Ellipsoiden abgesehen, allen anderen Apparaten zur Messung der Induktion überlegen sein.

Magnetische Wage von H. DU BOIS. Die ältere Form ist in Figur 84 schematisch, die neueste in Figur 85 perspektivisch dargestellt. $T$ ist der zwischen den Backen $V$ eingeklemmte, zu untersuchende Stab, $C$ die Magnetisierungsspule; $Y$ ist das frei über den Backen schwebende, auf der Schneide $E$ wie ein Wagebalken ruhende Schlußjoch; $E$ sitzt exzentrisch, die Wagebalken sind also ungleich, und infolgedessen wird das Joch durch das links stärkere Zugmoment in der Pfeilrichtung heruntergezogen. Durch eines der Laufgewichte $W$ kann nun er-

---

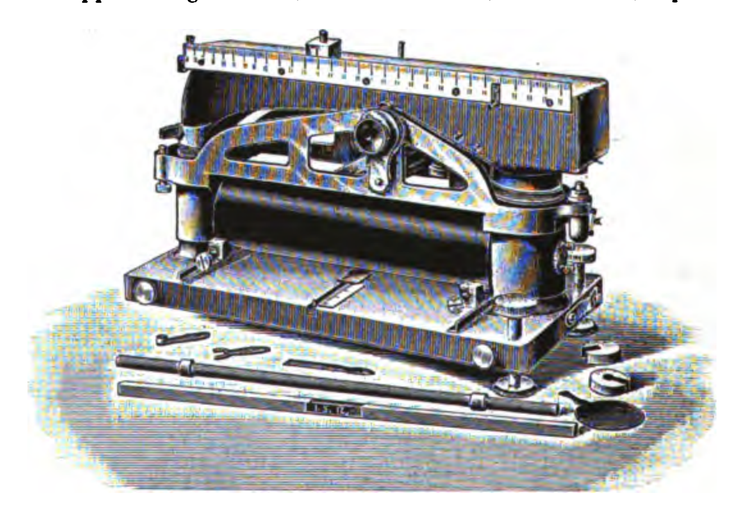
[1] J. A. EWING und W. LOW, Phil. Trans. 1889 (A). 221. — [2] H. DU BOIS, El. Z. 1892. 579. — Z. f. Instr.-K. **12**. 404. 1892. — [3] H. DU BOIS, Verh. phys. Ges. 1898. 97. — Drude Ann. **2**. 317. 1900. — Z. f. Instr.-K. **20**. 113 u. 129. 1900. Vgl. auch die auf die DU BOISsche Wage bezüglichen Arbeiten von EBELING und SCHMIDT, El. Z. **16**. 359. 1896 und **18**. 210. 1897.

reicht werden, daß das Joch gerade von der Justierschraube $I$ abgerissen wird. Da die Dimensionen geeignet gewählt sind und die Skale $S$ nach quadratischem Gesetze graduiert ist, liest man auf ihr unmittelbar die Magnetisierung ab, während sich die Feldstärke aus der angewandten Stromstärke ergibt. Bei der neuesten Form läßt sich, von anderen Verbesserungen abgesehen, der mit kuge-




Figur 84.

ligen Enden versehene Stab zwischen die hohlkugeligen Backen bringen, und es sind alle Dimensionen, namentlich die Luftspalte, so abgeglichen, daß die Theorie möglichst exakt gilt. Als normale Stablänge gilt die von 25,2 (nämlich $8\pi$) cm, die halben Kuppen mitgerechnet, als normaler Querschnitt 0,5 qcm; die Luft-



Figur 85.

spalte sind 0,025 cm hoch und von 18 qcm großen Kreisflächen begrenzt; die Spule ist $4\pi$ cm lang und mit einer Art von Kompensationswickelung versehen (1200 Windungen minus 200 kompensierenden, also 1000); die Laufgewichte betragen 65 bzw. 2,6 g, jedes hat seine eigene Skale. Die hundertfache Ablesung an einem Amperemeter ergibt direkt die Feldstärke, d. h. die Abszisse, die hundertfache Ablesung an der Skale des Joches unmittelbar die magnetische Induktion, d. h. die Ordinate der Kurve. Von den Zusatzteilen seien noch die

vorn liegenden, mittels eines Schiebers auf die Grundplatte aufsetzbaren Kompensationsmagnete erwähnt. Kürzere Stäbe wählt man passend $^1/_4$ so lang, entsprechend dann auch Länge und Windungszahl der Spule. Die Justierung des Apparates erfolgt mit Hilfe der Justierschraube unter Benutzung eines Stabes, dessen bekannte Konstante man mit der Skalenablesung in Einklang bringt. Der Apparat wird von SIEMENS & HALSKE gebaut und von der physikalisch-technischen Reichsanstalt auf Wunsch geprüft bzw. geeicht.

Von anderen hierher gehörigen Methoden und Apparaten seien noch erwähnt das „Permeameter" von SILVANUS THOMPSON[1], das eine Federwage benutzt, die Modifikation desselben von KAPP[2] und die magnetische Wage von W. S. FRANKLIN[3]. Endlich läßt sich auch QUINKES[4] Steighöhenmethode (S. 116) zur Messung der Magnetisierung benutzen, allerdings zunächst nur für Flüssigkeiten. Indessen hindert nichts, auf das Prinzip der Methode, die Zugkraft im Felde, zurückzugehen und so auch feste Körper in Form von Drähten, die mit einem Ende in das Feld hineinragen, zu untersuchen; ein Verfahren, das nicht nur die Charakteristik der betreffenden Körper ‖, sondern auch ⊥ zu den Kraftlinien liefert, da diese Drähte nicht nur einem Längs-, sondern auch einem Querzuge unterliegen. In diesem Sinne hat namentlich P. MEYER[5] die Methode ausgebildet.

**5. Wismuthmethode** (vgl. o. S. 115). Auf ihr beruht ein Apparat von BRUGER[6], bestehend aus dem Stab, einem Schlußjoch und einem Luftspalt, in den man die Wismutspirale bringt; die auf den Stab entfallende magnetomotorische Kraft kann durch eine Formel als Funktion des Induktionsflusses ermittelt werden.

**6. Optische Methode** (vgl. o. S. 117). Das KUNDTsche Phänomen, d. h. die Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang durch eine dünne elektrolytische Schicht des Materials kommt zur Messung kaum in Betracht. Dagegen ist die Drehung bei der Reflexion, also das KERRsche Phänomen, von H. DU BOIS[7] zu einer Meßvorrichtung benutzt worden, bei der eine spiegelnde Platte aus dem zu prüfenden Material auf dem einen Polschuh befestigt ist, während der andere durchbohrt ist und den Lichtstrahl durchläßt; um gleichzeitig mit der Intensität der Magnetisierung (mit der die Drehung proportional ist) auch die Feldstärke zu erhalten, dient eine hinten versilberte Etalonglasplatte; die Formel ist schließlich sehr einfach. Das Verfahren eignet sich für hohe Feldstärken vortrefflich.

**Darstellung der Ergebnisse.** Die nach den obigen Methoden ausgeführten Messungen sind so überaus zahlreich und haben eine so große Menge von Ergebnissen geliefert, daß hier nur das wichtigste angeführt werden kann, wobei die wissenschaftliche Seite der betreffenden Fragen besonders zu berücksichtigen, die praktische aber auch nicht ganz zu vernachlässigen sein wird. Die Ergebnisse bestehen teils in Zahlenwerten für die Intensität der Magnetisierung, die Induktion, die Suszeptibilität, die Permeabilität und die Spezialgrößen, teils in der Darstellung dieser Größen als Funktionen der Kraft oder voneinander, teils in besonderen Erscheinungen und Beziehungen, die der Verlauf dieser Funktionen je nach den Umständen darbietet. Dabei tritt eine weitere Mannigfaltigkeit dadurch ein, daß zu den temporären Werten von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ noch deren remanente Werte $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{B}'$ hinzukommen, die ihrerseits wieder zu jenen und zu den „verschwindenden" Werten, d. h. den Differenzen $\mathfrak{J} - \mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$ in interessanten Beziehungen stehen.

**Verschiedene Funktionsdarstellungen.** Das unmittelbare Beobachtungsmaterial besteht in Tabellen, deren erste Spalte die äußere Kraft $\mathfrak{H}_0$ enthält,

---

[1] SILV. THOMPSON, Dynamo-electric Machinery. 4. Aufl. S. 138. 1892. — [2] G. KAPP, Electr. Engin. **23**. 199. 1894. — [3] W. S. FRANKLIN, Phys. Review. **2**. 466. 1895. — [4] G. QUINCKE, Tgbl. d. Naturf. Ges. zu Heidelberg 1889. S. 210. — [5] P. MEYER, Inaug.-Diss. Heid. 1889; El. Z. 1889. 582. — [6] BRUGER, vgl. H. DU BOIS, Magn. Kreise. S. 364. — Ursprünglich vorgeführt auf dem Frankfurter elektrotechn. Kongreß 1891. — [7] H. DU BOIS, Phil. Mag. (5) **29**. 293. 1890.

während auf die übrigen Spalten sich die zugehörigen Werte der wirklichen Kraft $\mathfrak{H}$, der Magnetisierung $\mathfrak{J}$, der Induktion $\mathfrak{B}$, der Suszeptibilität $\varkappa$, der Permeabilität $\mu$, der Remanenz- und Verschwindungswerte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ und ev. noch anderer Größen, verteilen. Anschaulicher als diese Tabellen sind aber die aus ihnen konstruierten graphischen Darstellungen, die denn auch in der Wissenschaft wie in der Praxis vorwiegend benutzt werden. Es fragt sich nur, was man dabei als Abszisse und was als Ordinate wählen solle, und diese Wahl ist von verschiedenen Forschern, z. B. von W. WEBER, MAXWELL, ROWLAND, EWING, DU BOIS usw. in verschiedenem Sinne getroffen worden. Das folgende Tableau gibt hiervon eine Übersicht:

| Abszisse | Ordinate | Abszisse | Ordinate |
|---|---|---|---|
| I. $\mathfrak{H}_0$ | 1) $\mathfrak{H}$ | II. $\mathfrak{H}$ | 6) $\mathfrak{J}$ |
| | 2) $\mathfrak{J}$ | | 7) $\mathfrak{B}$ |
| | 3) $\mathfrak{B}$ | | 8) $\varkappa$ |
| | 4) $\varkappa$ | | 9) $\mu$ |
| | 5) $\mu$ | III. $\mathfrak{J}$ | 10) $\varkappa$ |
| | | IV. $\mathfrak{B}$ | 11) $\mu$ |

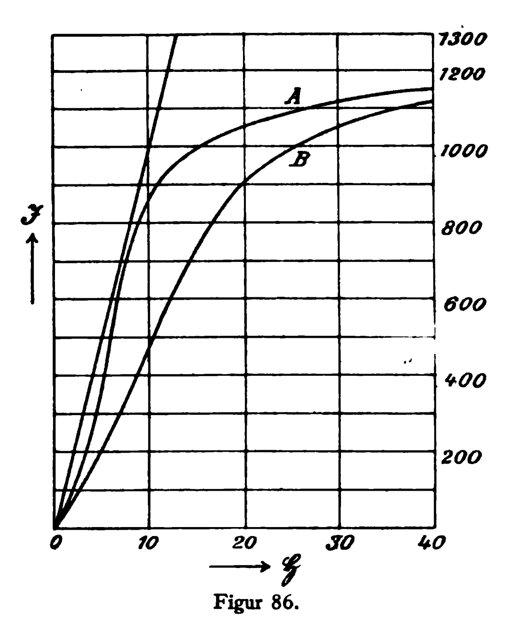
Die Darstellung I. ist die nächstliegende, II. ist aber dem inneren Zusammenhange entsprechender (in vielen Fällen, z. B. bei Ringen und langen Stäben fallen offenbar die Darstellungen I. und II. zusammen), in noch höherem Maße vielleicht ist das bei III. und IV. der Fall. Rechnet man nun noch die Kurven für $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{B}'$ sowie für $\mathfrak{J} - \mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$ hinzu, so sieht man, welche Mannigfaltigkeit sich hier ergibt. Und doch ist sie hiermit noch nicht erschöpft; es sei namentlich auf folgendes aufmerksam gemacht. Die Magnetisierungskurve wird verschieden ausfallen, je nach der Art und Weise, wie man die Kraft abändert; je nachdem man sie steigen oder fallen, kontinuierlich oder sprungweise, rasch oder langsam, mit gleichbleibendem oder wechselndem Vorzeichen variiert. Man erhält auf diese Weise z. B. folgende Kurventypen:

die aufsteigende Kurve
die absteigende Kurve
die mittlere Kurve (das Mittel aus jenen beiden)
die aufsteigende Kommutierungskurve
die absteigende Kommutierungskurve
die mittlere Kommutierungskurve
die obere und untere Grenzkurve und noch andere mehr.

**Graphische Scherung.** Ob man als Abszisse $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{H}_0$ wählt, ist nur bei unendlich langen, dünnen Drähten und bei geschlossenen Ringen dasselbe: bei allen anderen Körperformen erhält man verschiedene Kurven. Diejenige Kurve, welche sich auf die wirkliche Kraft $\mathfrak{H}$ als Abszisse bezieht, bei der also die entmagnetisierende Kraft der Enden oder Unterbrechungsstellen schon berücksichtigt ist, nennt man Normalkurve; sie ist von der Form des Körpers nicht mehr abhängig und somit für das Material charakteristisch; die andere Kurve kann man Spezialkurve nennen. Um nun diese letztere in die erstere überzuführen, kann man ein von Lord RAYLEIGH[1] angegebenes direkt graphisches Verfahren anwenden. Man zieht vom Anfangspunkte $O$ (Figur 86) eine gerade Linie nach rechts oben derart, daß das Verhältnis ihrer Abszissen $\mathfrak{H}$ zu ihren Ordinaten $\mathfrak{J}$ gleich dem Gestalts- oder Entmagnetisierungsfaktor des Körpers $\varepsilon$ ist; nunmehr rückt man jeden Punkt der Spezialkurve $B$ um so viel nach links, als in der betreffenden Ordinatenhöhe die $\mathfrak{J}$-Achse links von jener schrägen Linie liegt; das Ergebnis ist die Normalkurve $A$. In der Figur ist das besagte Steigungsverhältnis, d. h. der Entmagnetisierungsfaktor gerade 1/100 (bei $\mathfrak{J}$ gleich

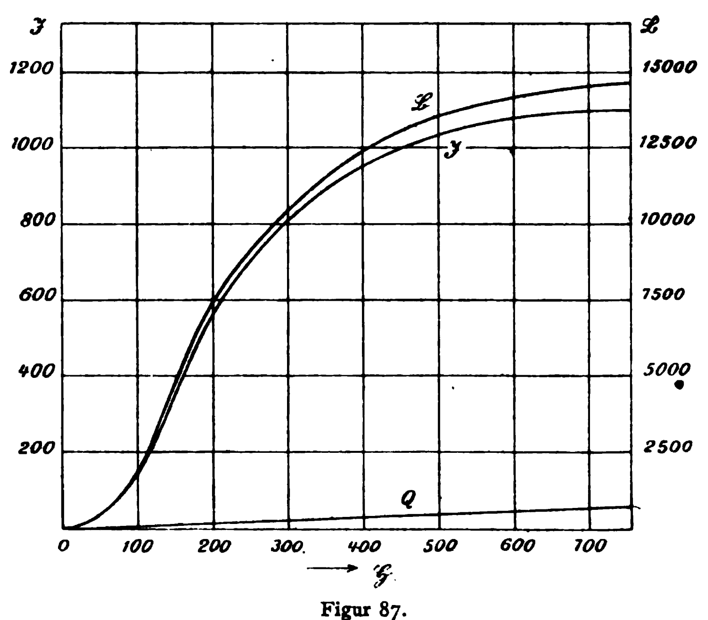
[1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **22**. 175. 1886.

1000 ist $\mathfrak{H}$ gleich 10); das würde also bei einem Rotationsellipsoid (vgl. die Tabelle auf S. 143) dem Achsenverhältnis 70 : 1, bei einem geschlitzten Ringe einer bestimmten Schlitzweite entsprechen. Ebenso kann man aus einer Normalkurve die Spezialkurve durch Scherung nach rechts erhalten. Der Beweis folgt unmittelbar aus den Formeln (27), (28a), (28b).




Figur 86.

Eine Scherung anderer Art ist von EWING[1] angegeben worden. Sie hat den Zweck, von einer $\mathfrak{J}$-Kurve zu der entsprechenden $\mathfrak{B}$-Kurve überzugehen; sie betrifft also nicht die Abszissen, sondern die Ordinaten. Da in der Formel $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}$ das erste Glied rechts meist klein gegen das zweite ist, braucht man, um jenen Übergang zu machen, nur alle Ordinaten zu ver-$4\pi$-fachen bzw. den Ordinatenmaßstab in diesem Verhältnis zu ändern (rechte Zahlen statt der linken in Fig. 87); ist aber $\mathfrak{H}$ nicht zu vernachlässigen, so zieht man vom Anfangspunkt eine Linie $Q$ schräg nach rechts oben, für deren Punkte die Ordinaten $\mathfrak{B}$ gleich den Abszissen $\mathfrak{H}$ sind, und rückt dann alle Kurvenpunkte um so viel nach oben als für die betreffende Abszisse die $Q$-Linie über der Abszissenachse liegt. Umgekehrt verfährt man, wenn man von einer $\mathfrak{B}$-Kurve




Figur 87.

zu einer $\mathfrak{J}$-Kurve übergehen will. — Änliche Scherungsmethoden sind noch mehrfach vorgeschlagen worden.

[1] J. A. EWING, Magnet. Induktion usw.



**Besondere Messungen.** Die skizzierten Methoden zur Messung des Magnetismus der Körper finden naturgemäße Anwendung auch auf die Messung spezieller Größen und Beziehungen, die damit im Zusammenhange stehen. Dahin gehören einerseits zeitliche Veränderungen des Magnetismus, seien es so langsame, daß obige Methoden ohne weiteres Anwendung finden können, seien es so schnelle, daß man auf indirektem Wege Schlüsse zu ziehen versuchen muß, worüber sich indessen allgemein nichts sagen läßt (s. w. u.); andererseits örtliche Verteilungen des Magnetismus, die Anteile, die von ihm auf die einzelnen Teile des Körpers entfallen — Aufgaben, für die man obige Methoden zweckmäßig, namentlich durch räumliche Beschränkung der Meßteile, modifizieren müssen wird, z. B. indem man dem betreffenden Teile eine kleine Nadel oder eine kleine Induktionsspule möglichst nahe bringt. Über zwei hierher gehörige Probleme ist indessen etwas eingehender zu sprechen, um die hierüber in den früheren Artikeln gelassenen Lücken auszufüllen: über die Ermittelung der Achse und des Polabstandes von Magneten.

**Ermittelung der Achse eines Magneten.** Die Richtung der magnetischen Achse eines stabförmigen Magneten fällt meist nicht genau mit seiner geometrischen Achse zusammen, eine Asymmetrie, welche bei den magnetometrischen Methoden durch Umlegung des Stabes — so daß seine obere Seite zur unteren wird — eliminiert werden mußte (vgl. S. 74). Durch dieses Verfahren ergibt sich nun auch zugleich die Richtung der Achse, nämlich als die mittlere Richtung zwischen den beiden Richtungen, welche die geometrische Achse des horizontal beweglichen Stabes in beiden Fällen annimmt. Weniger einfach ist die Ermittelung bei einem nichtstabförmigen Magneten, z. B. einer Kugel, einem Ellipsoid oder einem unregelmäßig geformten magnetischen Mineral. Man hängt einen solchen Magneten an irgend einem seiner Punkte auf, markiert auf seiner Oberfläche die Schnittlinie der Meridianebene, hängt nun den Körper umgekehrt auf, d. h. an dem Punkte, an welchem die erste Aufhängelinie die Oberfläche zum zweiten Male schneidet, bestimmt wieder den Meridianschnitt und markiert die Halbierungsebene dieser beiden Schnitte; verfährt man nun ebenso mit zwei anderen gegenüberliegenden Oberflächenpunkten, so erhält man eine neue Halbierungsebene; die Schnittlinie der beiden Halbierungsebenen ist die magnetische Achse.

Diesem Verfahren liegt die Auffassung der Achse als Symmetrieachse zugrunde. Man kann sie aber auch als diejenige Richtung definieren, in welcher das als Richtungsgröße aufgefaßte magnetische Moment seinen größten Wert erreicht. Man läßt alsdann den Körper auf eine kleine Nadel ablenkend wirken und dreht ihn so lange, bis diese Ablenkung ein Maximum wird; es ist dann die Achse die Verbindungslinie der Mittelpunkte von Magnet und Nadel oder die darauf senkrechte Richtung, je nachdem sich der Magnet in der ersten oder in der zweiten Hauptlage befindet. Statt der magnetometrischen kann man in geeigneten Fällen auch die ballistische Methode anwenden, indem man das Maximum des Induktionsstromes ermittelt.

Das Ablenkungsverfahren liefert zugleich auch die Werte des Momentes nach irgend einer Richtung, also insbesondere die Komponenten des magnetischen Moments nach den drei aufeinander senkrechten Achsen eines beliebig gewählten Koordinatensystems, und aus diesen Größen $M_1$, $M_2$, $M_3$ ergeben sich dann wiederum rückwärts die Größe des Hauptmoments, nämlich $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ und die Richtung, in welcher dieses Moment stattfindet, d. h. die magnetische Achse, nämlich als diejenige Richtung, welche mit den Koordinaten Winkel bildet, deren Kosinus $M_1/M$, $M_2/M$, $M_3/M$ sind; man braucht also zur Ermittelung der Achsenrichtung nicht lange herumzuprobieren, sondern kommt mit Beobachtungen in drei aufeinander senkrechten Richtungen aus.

Bisher war stillschweigend von gleichförmig magnetisierten Körpern die Rede,

die eine einzige durchgehende Achse haben. Bei ungleichförmig magnetisierten Körpern muß die Achsenrichtung von Ort zu Ort verfolgt werden; das Problem kompliziert sich also ganz wesentlich und läuft schließlich darauf hinaus, die Richtung des maximalen Induktionsflusses durch den Körper hindurch zu verfolgen, worüber sich allgemeines nicht sagen läßt.

**Messung des Polabstandes.** Die Wichtigkeit dieser Messung liegt, wie sich aus früherem ergibt, nicht bloß in ihrer Bedeutung an sich, sondern auch darin, daß der Polabstand für viele praktische Fälle genügt, um die magnetische Verteilung im übrigen ignorieren zu können; freilich muß man sich in jedem Falle darüber Klarheit verschaffen, ob die betreffende Methode die magnetischen Schwerpunkte oder die äquivalenten Pole in dem oben (S. 66) charakterisierten Sinne liefert — daß das nicht ganz einfach ist, geht am besten daraus hervor, daß bis in die neueste Zeit hierüber Differenzen obgewaltet haben, die wohl endgültig erst durch die Arbeiten von MASCART[1] und BENEDICKS[2] erledigt worden sind.

Zunächst kommen die magnetometrischen Methoden in Betracht; sie liefern fast durchweg, wenn nicht besondere Abänderungen eingeführt werden, die äquivalenten Pole. Es können hier nur die wichtigeren dieser Methoden erwähnt werden. Die von SCHNEEBELI[3] (angeregt durch F. KOHLRAUSCH) besteht in der Messung der Ablenkung, die der betreffende Magnet aus einer bestimmten Entfernung auf irgend eine Nadel ausübt, und Vergleichung des Resultates mit der diese Ablenkung darstellenden, außer der Entfernung und dem Moment des Stabes auch seinen Polabstand enthaltenden theoretischen Formel; den Polabstand der sehr kurz zu wählenden Nadel, der ebenfalls auftritt, kann man einmal gleich null, ein zweites Mal gleich ihrer Länge setzen und findet dann zwei Grenzwerte für den Polabstand des Stabes. Beobachtet man aus zwei Entfernungen, so erlangt man den Vorteil, die Berechnung des Polabstandes ohne Kenntnis des magnetischen Momentes ausführen zu können. Auch kann man nach F. KOHLRAUSCH[4] den Magneten auf zwei Magnetometer, zwischen denen er aufgestellt ist, aus zwei Lagen wirken lassen, wodurch man von den bekannten störenden Einflüssen unabhängiger wird. Eine fernere Methode besteht darin, daß man den Magneten zur Nadel einer Tangentenbussole macht und die Abweichung vom Tangentengesetz ermittelt (vgl. **4**, S. 260 ff.); wendet man dabei nach KOHLRAUSCH zwei verschiedene konzentrische Stromspulen an und gibt ihnen ihren Radien umgekehrt proportionale Windungszahlen, so kann man diesem Verfahren eine Gestalt geben, in welcher es besonders genau, bequem und von äußeren Störungen unabhängig ist.

Der magnetometrischen steht die ballistische Methode gegenüber. Sie beruht auf der Erkenntnis, daß sich der Polabstand zur ganzen Länge des Magneten verhält wie die mittlere Intensität der Magnetisierung zu der maximalen, in der Mitte stattfindenden, oder auch wie die betreffenden Induktionen; in Formel:

$$p : l = \mathfrak{J}\,(\text{med.}) : \mathfrak{J}\,(\text{max.}) = \mathfrak{B}\,(\text{med.}) : \mathfrak{B}\,(\text{max.}) \quad .$$

Benutzt man demgemäß zwei verschiedene Induktionsspulen, eine kurze, nur die Mitte des Stabes, und eine lange, den ganzen Stab bedeckende, und zieht sie — bei permanenten Magneten — rasch ab, oder erregt sie — bei temporären Magneten — durch Erregung oder Vernichtung des Magnetismus, so kann man $p$ bestimmen. Diese Methode ist schon von VAN REES[5] vorgeschlagen, aber erst neuerdings durch MASCART und BENEDICKS (a. a. O.) ausgebildet worden.

---

[1] E. MASCART, C. R. **104**. 635. 1887; Ann. Chim. Phys. (6) **18**. 1. 1889; Traité de Magn. terr. 1900. S. 82. — [2] C. BENEDICKS, Bihang Svenska Vet. Akad. Handl. 1902; J. de Phys. 1902. 302. — [3] H. SCHNEEBELI, Progr. d. Polytechn. Zürich 1871/72. — [4] F. KOHLRAUSCH u. W. HALLOCK, Wied. Ann. **22**. 411. 1884. — Vgl. auch F. u. W. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **27**. 45. 1886. — [5] R. VAN REES, siehe WIEDEMANN, Elektr. **3**. S. 404.

Bei beiden Methoden muß man, wie gesagt, sich klar darüber werden, ob man wirklich die eigentlichen Pole erhält; bei der ballistischen Methode ist hierzu erforderlich, daß die lange Spule nicht über den Magneten hinausrage, und daß sie ihn in geeigneter Weise umschließe; andernfalls wird, wie bei HOLBORN[1], $p$ zu groß oder auch zu klein. Auch die Methode von F. KOHLRAUSCH liefert zu große Werte.

Von anderen Verfahren, die meist nur historisches oder speziell praktisches Interesse haben, seien hier die von PETRUSCHEWSKY, BÖRGEN und C. SCHÜRR[2] erwähnt.

Als neueste Arbeit sei schließlich die von HEIMANN[3] hervorgehoben, in der man eine eingehende Kritik sowohl der theoretischen als auch der experimentellen Seite des Problems findet.

## Untersuchungen über einzelne Körperformen.

1. **Kugel.** Diese Form eignet sich, wie wir wissen, nicht zu Konstantenbestimmungen, wohl aber sehr gut zur Prüfung der Theorie, da die Kugel durch eine gleichförmige Kraft gleichförmig magnetisiert wird. Es sind hier die Arbeiten von v. QUINTUS ICILIUS, STOLETOW, RIECKE, FROMME u. a.[4] sowie aus neuester Zeit die von GROTRIAN[5] zu nennen. GROTRIAN benutzte zwei gleich große Kugeln aus Schweißeisen bzw. Flußeisen, die Messung geschah nach der ballistischen Methode mittels Drahtschleifen, die um die Kugeln an verschiedenen Stellen sorgfältig herumgelegt wurden. Das übereinstimmende Resultat aller Arbeiten, soweit sie einwurfsfrei sind, ist die Bestätigung der Theorie. Insbesondere ergibt sich das Verhältnis $\mathfrak{J}/\mathfrak{H}_0$ in weitem $\mathfrak{H}_0$-Bereiche als konstant und im Mittel zu 0,22 bis 0,24; andererseits das Verhältnis $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}_0$ als konstant, nämlich gleich 2,90 bis 2,98, d. h. nahezu gleich 3, wie es bei einigermaßen großem $\mu$ sein muß, da die Formel (29a), wenn man den für die Kugel gültigen Wert $4\pi/3$ des Entmagnetisierungsfaktors $\varepsilon$ (vgl. S. 133) einführt, die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}_0} = \frac{3\mu}{\mu + 2}$$

liefert, also für große $\mu$ den Wert 3, wie schon durch Gleichung (38b) gezeigt wurde.

2. **Ellipsoid.** Die experimentellen Arbeiten betreffen meist verlängerte Rotationsellipsoide, und zwar von sehr gestreckter Form, da diese sich zur Bestimmung der Konstanten am besten eignet. Hervorzuheben sind die Untersuchungen von OBERBECK, RIECKE, A. L. HOLZ, RÖSSLER und NAGAOKA[6]. Gewöhnlich wurde das magnetometrische Verfahren angewandt. RÖSSLER benutzte Ellipsoide von 50 cm Länge und 0,5 cm größter Dicke; das Achsenverhältnis (vgl. S. 143) war also 100; bei NAGAOKA waren die Dimensionen 18 und 0,6, also das Verhältnis 30. RÖSSLER fand, daß schon bei kleinen Kräften die Permeabilität des Eisens mit wachsender Kraft zunimmt, und daß bei $\mathfrak{H} = 950$ absoluten Einheiten die Sättigung fast erreicht war. NAGAOKA hat seine oben besprochene Theorie geprüft und sehr befriedigende Übereinstimmung gefunden; er machte dann vergleichende Messungen an einem 200mal so langen wie dicken Drahte und fand zwar eine gewisse Ähnlichkeit

[1] L. HOLBORN, Berl. Sitz.-Ber. 1898. 1. S. 159. — [2] TH. PETRUSCHEWSKY, Pogg. Ann. **152**. 42. 1874. — C. BÖRGEN, Ann. Hydrographie 1891. — C. SCHÜRR, J. de Phys. (3) **7**. 282. 1898. — [3] H. HEIMANN, Inaug.-Diss. Rostock 1902. — [4] v. QUINTUS ICILIUS, Pogg. Ann. **121**. 125. 1864. — A. STOLETOW, Pogg. Ann. **146**. 439. 1872. — E. RIECKE, Pogg. Ann. **149**. 433. 1873. — C. FROMME, Inaug.-Diss. Kassel 1874; Pogg. Ann. **152**. 627. 1874. — [5] O. GROTRIAN, Wied. Ann. **57**. 751. 1896. — [6] E. RIECKE, Pogg. Ann. **141**. 453. 1870; Pogg. Ann. **149**. 433. 1873. — L. A. HOLZ, Pogg. Ann. Erg.-Bd. **8**. 353. 1876. — G. RÖSSLER, Unt. üb. d. Magnetisierung durch kleine und große Kräfte. In.-Diss. Zürich 1892. — H. NAGAOKA, Wied. Ann. **57**. 275. 1896.

der Kurve maximaler Ablenkung, aber doch wesentlich andere Zahlenverhältnisse, so daß also selbst ein so gestreckter Draht nicht als Ellipsoid betrachtet werden darf (vgl. w. u.). Ganz neuerdings hat BENEDICKS[1] eine Prüfung der Theorie betreffend die gleichförmige Magnetisierung des Ellipsoids vorgenommen und, wie die kleine Tabelle zeigt, genügende Übereinstimmung erhalten; es war $l = 18$ cm, $d = 0{,}6$, also $d/l = 1/30$.

| $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{B}$ in einer Entfernung von der Mitte von 0 | 2,5 | 0 | 7,5 | $\mathfrak{B}$ im Mittel |
|---|---|---|---|---|---|
| 22,9 | 3820 | 4060 | 3800 | 3780 | 3865 |
| 68,7 | 12100 | 12500 | 12000 | 12500 | 12270 |
| 114,6 | 14800 | 14800 | 15000 | 15300 | 14970 |
| 206,2 | 16500 | 17300 | 16900 | 17000 | 16920 |

Die folgende Tabelle gibt eine Auswahl der für das Ellipsoid von RÖSSLER gefundenen Zahlen, von sehr schwachen bis zu sehr starken Feldern.

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mu$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0014 | 0,0246 | 222 | 6,749 | 1056 | 1966 |
| 0,0139 | 0,285 | 258 | 8,343 | 1104 | 1664 |
| 0,066 | 1,457 | 278 | 11,60 | 1173 | 1267 |
| 0,148 | 3,733 | 318 | 14,89 | 1214 | 1021 |
| 0,357 | 10,89 | 385 | 18,06 | 1238 | 859 |
| 0,694 | 26,75 | 486 | 21,52 | 1261 | 735 |
| 1,009 | 46,54 | 581 | 24,84 | 1279 | 646 |
| 1,210 | 65,46 | 681 | 35,08 | 1325 | 475 |
| 1,333 | 85,04 | 803 | 42,10 | 1344 | 402 |
| 1,474 | 113,2 | 966 | 52,67 | 1369 | 328 |
| 1,606 | 153,6 | 1202 | 73,55 | 1405 | 226 |
| 1,763 | 225,1 | 1605 | 115,6 | 1462 | 159 |
| 1,929 | 316,5 | 2063 | 204,1 | 1549 | 95 |
| 2,215 | 457,9 | 2599 | 307,8 | 1616 | 66 |
| 2,733 | 631,3 | 2904 | 480 | 1669 | 44 |
| 3,414 | 760,6 | 2807 | 690 | 1688 | 31 |
| 4,501 | 894,2 | 2497 | 1000 | 1693 | 24 |
| | | | 1300 | 1700 | 16 |

**3. Scheibe.** Von verschiedenen Experimentatoren sind plattenförmige Körper untersucht worden; am eingehendsten wohl von C. LA ROCHE[2], der an elliptischen und zum Vergleich herangezogenen rechteckigen Platten interessante Beziehungen zwischen Kraft, Magnetisierung und Dimensionen gefunden hat; der Gedanke, die scharfkantigen Platten auch nur annähernd mit Ellipsoiden zu identifizieren und die Theorie auf sie anzuwenden, muß jedoch als verfehlt bezeichnet werden; zu diesem Zwecke müßte man die Platten sorgfältig ellipsoidisch abschleifen.

**4. Langer dünner Draht.** Diese Form ist sehr vielfach untersucht worden, aus dem doppelten Grunde, weil sie leicht zu haben ist und wegen der fehlenden oder sehr geringfügigen Entmagnetisierung prinzipiell einfache Verhältnisse dar-

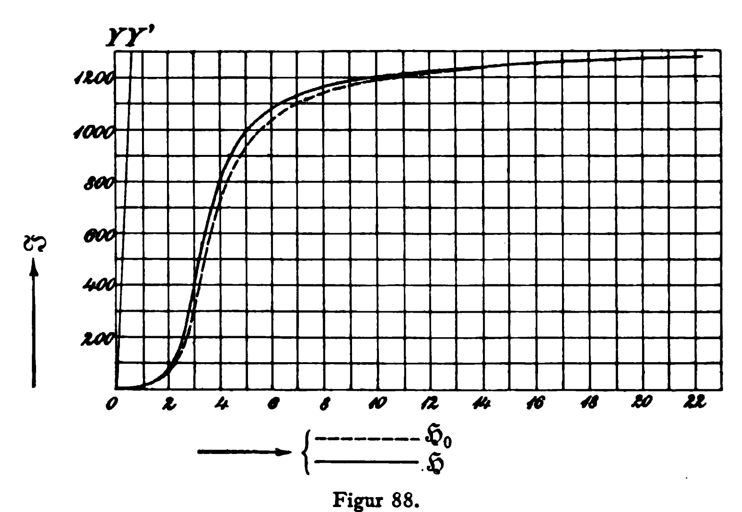
[1] C. BENEDICKS, Drude Ann. **6**. 726. 1901. — [2] C. LA ROCHE, Wied. Ann. **35**. 168. 1888

bietet. Wir wollen diese Form deshalb benutzen, um an ihr die tatsächlichen Beziehungen etwas näher kennen zu lernen.

Zunächst betrachten wir einen von EWING untersuchten weichen Eisendraht. Seine Länge betrug 30,5 cm, die Dicke 0,077 cm, jene also das 400fache dieser, und folglich der Entmagnetisierungsfaktor $\varepsilon$, wenn man die Verhältnisse bei Rotationsellipsoiden (S. 143) anwendet, gleich 0,00045; der Draht wurde vor dem Versuche ausgeglüht und langsam gekühlt; benutzt wurde die magnetometrische Unipolar-Methode, die magnetisierende Kraft wurde langsam von null an gesteigert.

| $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\varkappa$ | $\mu$ | $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\varkappa$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | — | — | 5,63 | 5,17 | 1009 | 12680 | 195 | 2450 |
| 0,32 | 0,32 | 3 | 40 | 9 | 120 | 6,69 | 6,20 | 1086 | 13640 | 175 | 2200 |
| 0,85 | 0,84 | 13 | 170 | 15 | 200 | 8,46 | 7,94 | 1155 | 14510 | 145 | 1830 |
| 1,38 | 1,37 | 33 | 420 | 24 | 310 | 10,23 | 9,79 | 1192 | 14980 | 122 | 1530 |
| 2,18 | 2,14 | 93 | 1170 | 43 | 550 | 12,11 | 11,57 | 1212 | 15230 | 105 | 1320 |
| 2,80 | 2,67 | 295 | 3710 | 110 | 1390 | 15,61 | 15,06 | 1238 | 15570 | 82 | 1030 |
| 3,50 | 3,24 | 581 | 7300 | 179 | 2250 | 20,32 | 19,76 | 1255 | 15780 | 64 | 800 |
| 4,21 | 3,89 | 793 | 9970 | 204 | 2560 | 22,27 | 21,70 | 1262 | 15870 | 58 | 730 |
| 4,92 | 4,50 | 926 | 11640 | 206 | 2590 | | | | | | |

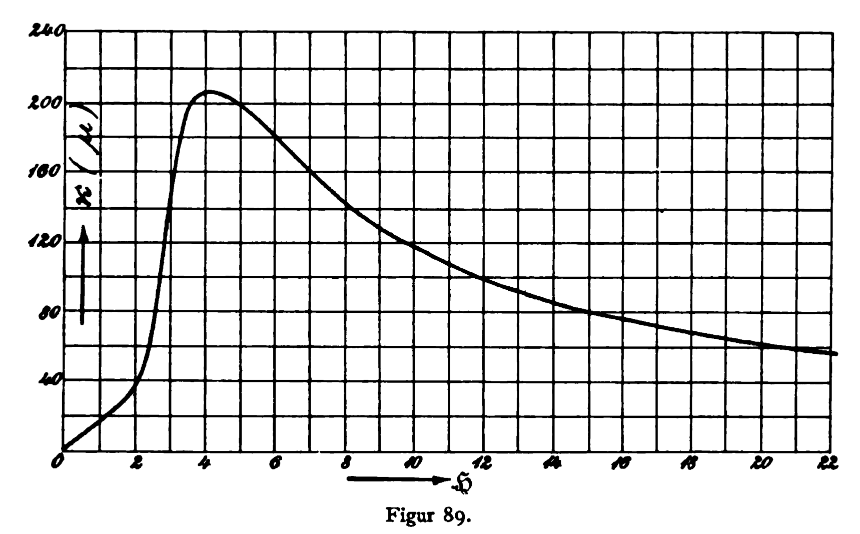
Wie man sieht, wachsen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ erst langsam, dann schneller und schließlich wieder immer langsamer, entsprechend ist der Verlauf der gestrichelten Kurve in Figur 88, die $\mathfrak{J}$ als Funktion von $\mathfrak{H}_0$ darstellt, die Kurve für $\mathfrak{B}$ würde vom Maßstab abgesehen fast genau dieselbe sein, da für, gegenüber $\mathfrak{H}_0$, große $\mathfrak{J}$-Werte, wie sie hier auftreten, nach Gleichung (35) $\mathfrak{B}$ das $4\pi$-fache von $\mathfrak{J}$ ist. Wichtiger ist es, $\mathfrak{J}$ auch als Funktion der wahren Kraft $\mathfrak{H}$ darzustellen, also die oben (S. 183) besprochene Scherungskonstruktion auszuführen; zieht man also durch den Anfangspunkt eine gerade Linie $Y'$, welche die Ordinate $\mathfrak{J} = 1000$ bei der Abszisse 0,45 schneidet und denkt man an die Beziehung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - 0{,}00045\,\mathfrak{J}$,




Figur 88.

so sieht man ein, daß die alte Kurve bei Rechnung der Abszissen von der neuen $Y'$-Achse die neue Beziehung darstellt; will man von der alten $Y$-Achse rechnen, so muß man also jeden Punkt der Kurve um das 0,00045fache seiner Ordinate nach links rücken und erhält so die ausgezogene Kurve; sie weicht, wie man sieht, in diesem Falle nur wenig von der gestrichelten ab.

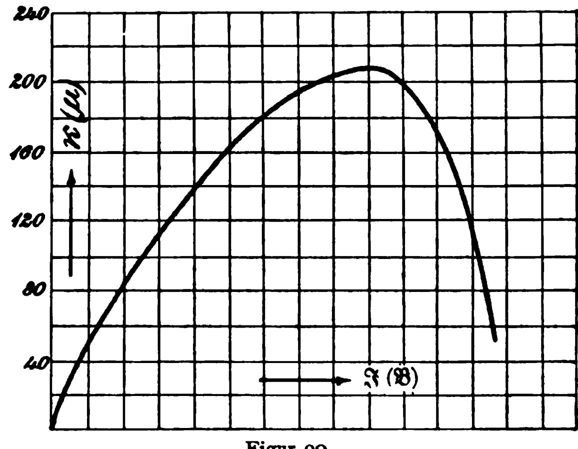
Die **Magnetisierungskurve** oder „**Charakteristik**“ besteht, wie man sieht, aus drei Teilen; im ersten steigt sie langsam, im zweiten rasch, im dritten wieder langsam. Als Grenzen zwischen diesen Teilen kann man die beiden Punkte stärkster Krümmung betrachten (in unserem Falle etwa bei $\mathfrak{H} = 1{,}7$




Figur 89.

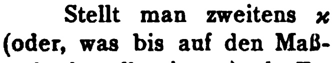
und 5,0 gelegen); zwischen ihnen, in der Mitte des mittelsten Teiles, liegt ein dritter ausgezeichneter Punkt, der Inflexionspunkt, d. h. der Punkt, wo die Kurve keine Krümmung hat (in unserem Falle etwa bei $\mathfrak{H} = 3{,}2$ gelegen); bis zu ihm kehrt sie die konvexe, von da ab die konkave Seite nach unten. Die Abnahme der Steigung im letzten Teil ist wohl zuerst von Joule, ihre Zunahme im ersten Teil von Lenz, G. Wiedemann, Dub u. a. erkannt worden.

In einfacher und demonstrativer Weise kann man die anfangs schnellere und schließlich langsamere Zunahme des Magnetismus in Vervollständigung einer Angabe von Koosen[1] nachweisen, indem man den Strom außer der magnetisierenden, den Eisenkörper enthaltenden Spirale noch die Rolle einer Bussole durchlaufen läßt und Spirale mit Kern so aufstellt, daß bei geringer Stromstärke die Bussolennadel auf null steht; bei wachsender Stromstärke wird dann die Nadel abgelenkt, bei weiter wachsender kehrt sie auf null zurück und bei großen Stromstärken geht sie auf die entgegengesetzte Seite.




Figur 90.

Stellt man zweitens $\varkappa$ (oder, was bis auf den Maßstab dasselbe ist, $\mu$) als Funktion von $\mathfrak{H}$ dar, so erhält man Figur 89, also eine Kurve, die anfangs sanft, dann nach einem ziemlich scharfen Knie steil ansteigt,

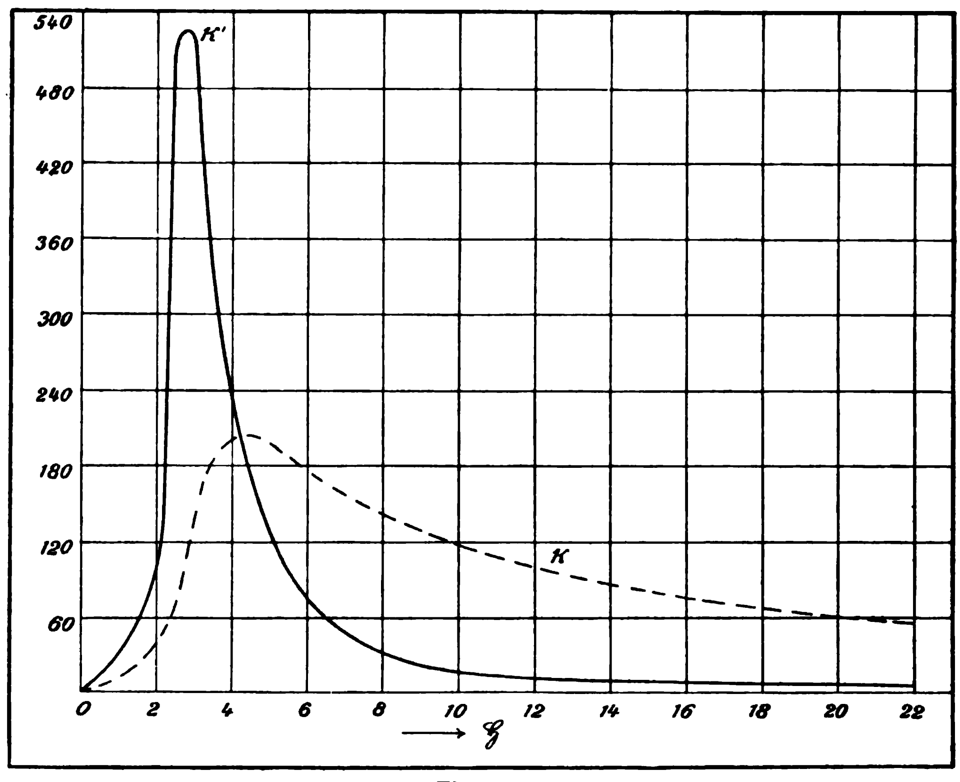


[1] J. H. Koosen, Pogg. Ann. 85. S. 159. 1852.



ein Maximum erreicht, dann abfällt und sich allmählich immer langsamer der Abszissenachse nähert.

Noch anders ist der Verlauf der Kurve in Figur 90, welche $\varkappa$ als Funktion von $\mathfrak{J}$ (ev. auch $\mu$ als Funktion von $\mathfrak{B}$) darstellt; sie steigt steil an, wird allmählich sanfter, erreicht ein Maximum und fällt dann sehr steil ab, so daß man versucht ist, sie bis zur Abszissenachse fortzusetzen; da aber unmöglich $\varkappa$ geradezu null werden kann, so muß man vermuten, daß die Kurve für größere $\mathfrak{J}$ ähnlich wie die Kurve in Figur 89 umbiegt, die konkave Seite nach oben kehrt und nur asymptotisch der Achse sich nähert — eine zuerst von FROMME[1] ausgesprochene Vermutung, die durch Versuche in starken Feldern (s. w. u.) bestätigt worden ist.




Figur 91.

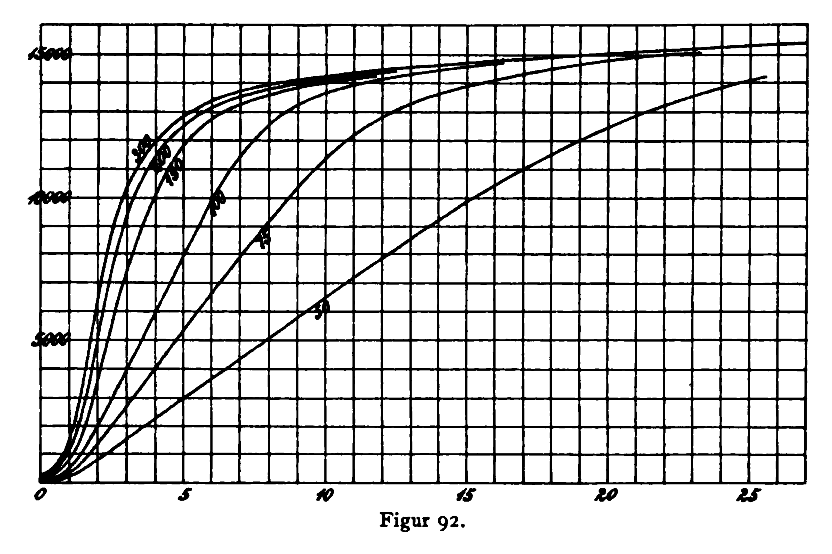
Endlich ist in Figur 91 noch eine weitere Kurve dargestellt, nämlich die durch Gleichung (36) definierte differentielle Suszeptibilität $\varkappa'$; zum Vergleich ist die $\varkappa$-Kurve nochmals reproduziert, der Ordinatenmaßstab ist hier anders gewählt. Wie man sieht und wie die Gleichung (36a) es erfordert, liegt die differentielle Kurve anfangs über der anderen, schneidet sie in deren Gipfel und sinkt dann stark unter sie hinab; der Gipfel der neuen Kurve, der außerordentlich steil ist, liegt an einer nicht in einfacher Weise zu charakterisierenden Stelle, man müßte hierzu die beiden Glieder $\varkappa$ und $\mathfrak{H}\,(d\varkappa/d\mathfrak{H})$ trennen und in letzterem wieder die beiden Faktoren einzeln betrachten.

Die Zahl der Spezialuntersuchungen über Drähte ist, wie gesagt, so groß, daß auf Literaturangaben verzichtet werden muß; auf diejenigen unter ihnen, die ein prinzipielles Interesse haben, wird noch zurückgekommen werden.

[1] C. FROMME, Gött. Nachr. 1875. 500.



Kurvensystem für Drähte verschiedener Länge. Der Einfluß der bei verschieden langen Körpern verschieden starken entmagnetisierenden Kraft läßt sich sehr anschaulich in folgender Weise darstellen. Es ist nämlich einleuchtend, daß, wenn man $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ darstellt, man für Körper, z. B. Drähte der verschiedensten Länge die nämliche Kurve erhält (weil eben $\mathfrak{H}$ bereits die mit Rücksicht auf die entmagnetisierende Kraft der Enden berechnete wahre magnetisierende Kraft ist), daß dagegen die Darstellung von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{B}$ als Funktion von $\mathfrak{H}_0$ zu verschiedenen Kurven führen muß, und zwar zu Kurven, die sich der erstgedachten Kurve mehr und mehr nähern, je länger der Draht ist. In Figur 92 ist nun ein System von $\mathfrak{B} : \mathfrak{H}_0$ Kurven nach Versuchen von EWING wiedergegeben, sie entsprechen einem und demselben Draht, der durch Abschneiden allmählich die beigesetzten Längen in Vielfachen des Durchmessers erhielt; das Interessante dabei ist, daß, je stärker die Kraft ist, desto weniger die Gegenwirkung hervortritt, so daß also die Kurven zwar derselben Grenze zu-




Figur 92.

streben, aber sehr verschieden stark gewölbt sind, die für den längsten Draht am meisten, die für den kürzesten fast gar nicht. Hieran wird weiter unten angeknüpft werden.

Eine besondere Stellung nimmt eine Reihe von Messungen an Drähten ein, die von QUINCKE angeregt und von seinen Schülern nach der Zugkraftmethode (vgl. S. 181) ausgeführt worden sind; namentlich sind hier LENARD und HOWARD, P. MEYER, M. WEBER und SECKELSON[1] zu nennen. Die in diesen Arbeiten bestimmte „Dimagnetisierungskonstante" ist nichts anderes wie die halbe Suszeptibilität; und zwar wird sie sowohl für Parallel- als auch für Querstellung des Drahtes zu dem Felde ermittelt; als Material dienten teils Eisendrähte, teils galvanische Niederschläge von metallischem Eisen auf Kupferdraht; außerdem zahlreiche andere Stoffe, worauf im nächsten Artikel zurückgekommen werden wird. Von allgemeinen Resultaten sei angeführt, daß die Suszeptibilität senkrecht zu den Kraftlinien bei wachsenden Feldstärken nahezu konstant ist, parallel zu ihnen dagegen erst steigt und dann fällt, und daß mit zunehmendem Querschnitt jene fällt, diese erst steigt und dann ebenfalls fällt. Das Verhältnis beider endlich nimmt je nach den Umständen sehr verschiedene Werte von 1,3 bis 46,2 an.

[1] P. LENARD und HOWARD, Verhdl. 62. Nat.-Vers. Heidelb. 1889. 210. — P. MEYER, El. Z. **10.** 582. 1889. — M. WEBER, Wied. Ann. **54.** 30. 1895. — E. SECKELSON, Wied. Ann. **67.** 37. 1899.

5. **Ring.** Dieser Fall ist, wie wir wissen, wegen des gänzlichen Fehlens einer entmagnetisierenden Kraft für die Theorie besonders wichtig. Er ist daher recht oft zum Gegenstande experimenteller Bearbeitung gemacht worden: am wichtigsten sind die Untersuchungen und Messungen von STOLETOW[1], ROWLAND[2], BAUR[3], EWING[4], v. HOFE[5], H. LEHMANN[6]. Dabei hat v. HOFE den Einfluß der Form des Ringquerschnittes studiert (Quadrat, flaches Rechteck, hohes Rechteck) und, zumal die Differenz des äußeren und inneren Ringradius recht groß, die Abweichung von den Voraussetzungen der KIRCHHOFFschen Theorie (S. 147) also beträchtlich war, naturgemäß Verschiedenheiten in den Werten von $\varkappa$ gefunden — Verschiedenheiten, die jedoch ziemlich geringfügig sind.

Als Beispiele der Messungen seien folgende angeführt: a) Ring aus ausgeglühtem Schmiedeeisen. Es wurde die ballistische Methode angewandt, der Eisenquerschnitt betrug 0,0483 qcm, der Durchmesser des Ringes 10 cm, die Magnetisierungsspule hatte 474, die sekundäre Spule 167 Windungen, verglichen wurde mit dem Erdmagnetismus; $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}$ sind hier identisch.

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\varkappa$ | $\mu$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\varkappa$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,13 | 2 | 26 | 15 | 200 | 4,01 | 509 | 6400 | 127 | 1600 |
| 0,40 | 7 | 84 | 17 | 210 | 5,86 | 791 | 9940 | 135 | 1700 |
| 1,31 | 25 | 320 | 19 | 245 | 7,20 | 899 | 11300 | 125 | 1570 |
| 1,89 | 56 | 705 | 30 | 370 | 9,14 | 989 | 12440 | 108 | 1360 |
| 2,78 | 203 | 2560 | 73 | 920 | | | | | |

b) Ring aus ausgeglühtem schwedischen Eisen (H. LEHMANN); Radius des Leitkreises 7,96 cm, Radius des Querschnittes 0,895 cm, seine Fläche also 2,52 qcm; die primäre Spule bestand aus drei Lagen 0,15 cm starken Kupferdrahtes in zusammen 695 Windungen, die sekundäre, zur ballistischen Messung dienende Spule hatte 613 Windungen dünnen Drahtes.

Aufsteigende Kommutierungskurve.

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,6 | 93 | 8,7 | 1020 | 55,1 | 1310 |
| 1,1 | 278 | 9,7 | 1051 | 76,5 | 1348 |
| 1,8 | 440 | 10,8 | 1076 | 104,5 | 1388 |
| 2,2 | 520 | 13,8 | 1118 | 151,0 | 1440 |
| 3,2 | 690 | 18,1 | 1165 | 200,0 | 1489 |
| 4,4 | 801 | 21,8 | 1192 | 240,0 | 1520 |
| 5,3 | 871 | 27,5 | 1225 | 315,0 | 1564 |
| 6,5 | 932 | 41,0 | 1275 | 385,0 | 1600 |
| 7,5 | 985 | | | | |

Die Kurven, durch die man diese Tabellen darstellen kann, stimmen im Charakter mit den obigen für lange Drähte überein, nur ist der erste Kurventeil, namentlich im letztbetrachteten Falle, kürzer.

[1] A. STOLETOW, Pogg. Ann. **146**. S. 442. 1872. — [2] H. ROWLAND, Phil. Mag. (4) **46**. S. 140. 1878. — [3] C. BAUR, Wied. Ann. **11**. S. 394. 1880. — [4] J. A. EWING, a. a. O. — [5] G. v. HOFE, Wied. Ann. **37**. S. 482. 1889. — [6] H. LEHMANN, Wied. Ann. **38**. S. 406. 1893. (Versuche mit dem geschlossenen und dem geschlitzten Ringe, vgl. über letzteren o. S. 148 u. w. u.)

Ferner haben OBERBECK[1] und später v. ETTINGSHAUSEN[2] Ringe ungleichmäßig, d. h. durch eine nur einen Teil desselben bedeckende Spirale magnetisiert. Jener fand dabei zwischen den Werten der Magnetisierung der verschiedenen Stellen des Ringes nur sehr kleine Differenzen (wenige Prozent), dieser beträchtlich größere (Verhältnis der Extreme bei kleinen Kräften 15, bei größeren bis 2 abnehmend), so daß hier ein noch aufzuklärender Widerspruch bestehen bleibt; letzterer prüfte auch die BOLTZMANNsche Theorie (s. o.) und fand wenigstens qualitative Übereinstimmung. Auch auf Arbeiten von HAMMERL[3] ist hier hinzuweisen. Endlich hat SAUTER[4] die Frage systematisch verfolgt, indem er den Ring im ganzen oder halben oder viertel oder achtel Umfang bewickelte und in jedem Falle den maximalen Kraftfluß in der Mitte des bewickelten Stückes und den minimalen an der gegenüberliegenden Stelle maß, beides natürlich bei verschiedenen Feldstärken; außerdem aber den Kraftfluß längs des ganzen Ringes als Funktion des Bogens. Die Ergebnisse lassen sich sehr gut in FOURIERschen Reihen (vgl. o. S. 148) darstellen, die Einzelheiten lassen sich aber auszugsweise nicht wiedergeben.

**6. Geschlitzter Ring.** Von ganz besonderem Interesse ist es nun, zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn man statt eines überall geschlossenen Ringes einen geschlitzten nimmt; am besten wird man dabei derart verfahren, daß man den schon im geschlossenen Zustande geprüften Ring zunächst mit einem schmalen Schlitz versieht und diesen dann nach und nach erweitert. Dadurch wird, gerade wie beim Abschneiden von Drähten oder beim Übergange von gestreckteren zu gedrungeneren Ellipsoiden der Entmagnetisierungsfaktor immer größer werden.

Eine derartige systematische Untersuchung hat H. LEHMANN durchgeführt. An dem Vollringe war ein kleiner Sektor von Spulenwindungen freigelassen worden, und hier wurde nun ein Schlitz von allmählich gesteigerter Weite herausgesägt; die engsten Schlitze wurden mit Hilfe einer Messingbandage und eingesetzter Messingscheibchen, so daß sich der Ring zu völligem Schluß zusammenbiegen ließ, erzielt. Die fünf Schlitzweiten, bei denen beobachtet wurde, waren folgende:

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,040 | 0,063 | 0,103 | 0,202 | 0,357 cm. |

Zu der großen Sekundärspule wurde jetzt noch eine kleine, zweite hinzugefügt, die um den ganzen Ring herumgeschoben werden konnte, sowie eine dritte, den Schlitz bzw. das Messingscheibchen umgebende; die große lieferte den mittleren totalen Induktionsfluß, die zweite den lokalen Induktionsfluß durch den betreffenden Eisenquerschnitt, die dritte den Induktionsfluß durch den Schlitz; endlich ergibt die erste Größe, dividiert durch die letzte, den Streuungskoeffizienten [Gleichung (56), S. 150].

Von den Tabellen, in denen der Verfasser seine Resultate zusammenstellt, ist die für den geschlossenen Ring schon oben wiedergegeben; von den anderen, für die fünf Schlitze gültigen, muß es genügen, hier zwei zu reproduzieren, es seien Nr. 2 und 5. Dabei ist $\mathfrak{H}_0$ das äußere Feld, $\mathfrak{J}$ die Magnetisierung, $\mathfrak{F}$ der Fluß im Eisen, $\mathfrak{F}_0$ der im Schlitz und $\sigma = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$ die Streuung (vgl. S. 150).

---

[1] A. OBERBECK, Üb. d. Fortpflanzung d. magn. Induktion im weichen Eisen. Halle 1878. — [2] A. v. ETTINGSHAUSEN, Wied. Ann. 8. S. 554. 1879. — [3] H. HAMMERL, El. Zeitschr. 1885. S. 378 u. 474. — [4] J. SAUTER, Wied. Ann. 62. 85. 1897.

Zweiter Schlitz (0,63 mm).

| $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B}'$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 44,6 | 1412 | — | — |
| 2,63 | 170,5 | 5405 | 3540 | 1,528 |
| 4,01 | 279,0 | 8843 | 5805 | 1,524 |
| 5,85 | 415,0 | 13140 | 8720 | 1,508 |
| 7,93 | 554,0 | 17540 | 11490 | 1,528 |
| 11,0 | 712,5 | 22590 | 15040 | 1,502 |
| 14,0 | 837,5 | 26580 | 17700 | 1,500 |
| 17,1 | 935,0 | 29620 | 19800 | 1,495 |
| 20,0 | 1020,0 | 32320 | 21790 | 1,484 |
| 26,6 | 1095,0 | 34710 | 23850 | 1,456 |
| 33,7 | 1162,0 | 36840 | 25600 | 1,437 |
| 45,4 | 1228,0 | 38970 | 27400 | 1,420 |
| 59,2 | 1270,0 | 40350 | 29000 | 1,390 |
| 71,6 | 1305,0 | 41340 | 29880 | 1,385 |
| 84,8 | 1316,0 | 41900 | 30650 | 1,368 |
| 164,0 | 1420,0 | 45420 | 34150 | 1,330 |
| 250,0 | 1493,0 | 47900 | 36400 | 1,316 |
| 337,0 | 1545,0 | 49620 | 38300 | 1,296 |

Fünfter Schlitz (3,57 mm).

| $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B}_0$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| 4,01 | 131 | 4150 | 1086 | 3,82 |
| 7,5 | 260 | 8220 | 2140 | 3,84 |
| 11,0 | 384 | 12140 | 3160 | 3,85 |
| 14,5 | 503 | 15900 | 4160 | 3,82 |
| 19,0 | 634 | 20000 | 5300 | 3,78 |
| 25,0 | 785 | 24850 | 6600 | 3,77 |
| 32,0 | 923 | 29200 | 7750 | 3,77 |
| 40,0 | 1015 | 32100 | 8800 | 3,66 |
| 65,1 | 1170 | 37000 | 10930 | 3,39 |
| 101,0 | 1265 | 40100 | 13750 | 3,15 |
| 140,0 | 1335 | 42400 | 14100 | 3,01 |
| 245,0 | 1455 | 46500 | 16800 | 2,77 |

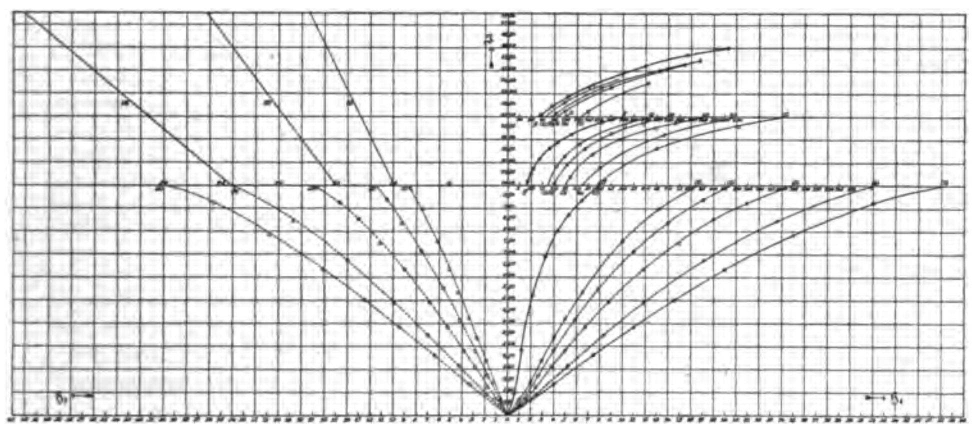
In Figur 93 sind rechterseits alle sechs Magnetisierungskurven (die Kurve 0 für geschlossenen und die Kurven 1 bis 5 für geschlitzten Ring) dargestellt, wobei allerdings der Raumverhältnisse halber für die Abszissen drei verschiedene Maßstäbe benutzt werden mußten, nämlich bis $\mathfrak{J} = 1000$ der unterste, von da bis 1300 ein 5 mal, darüber hinaus ein 20 mal so kleiner. Wie man sieht, liegen die Verhältnisse ganz analog wie in Figur 92 für verschieden lange Drähte: je weiter der Schlitz, desto flacher die Kurve; am größten sind also die Unterschiede in mittelstarken Feldern. Um nun die Kurven 1 bis 5 in die Normalkurve 0 überzuführen, muß man die oben angegebene Scherung, in diesem Falle eine Scherung nach links, vornehmen; die hierfür maßgebenden Linien sind linkerseits dargestellt; man kann sie auch „Entmagnetisierungslinien“ nennen. Sie müßten, nach der Theorie, gerade Linien sein, sind es aber, wie man sieht, nur bis zur halben Höhe, dann biegen sie nach links um. Es ist einleuchtend, was

das bedeutet: der Entmagnetisierungsfaktor ist eben für starke Kräfte nicht mehr konstant, sondern er nimmt zu. Dies spricht sich aber in den Tabellen dadurch aus, daß der Streuungskoeffizient $\sigma$, der sich als Funktion der Feldstärke zu $N$ reziprok verhält, mit wachsender Kraft abnimmt. Verfolgt man dies weiter, so gelangt man zu einer vollkommenen Übereinstimmung der Versuche mit der Theorie. In der Figur sind links noch Stücke der idealen geradlinigen Entmagnetisierungslinien für die Fälle 1 bis 3 angedeutet.

Was nun Entmagnetisierung und Streuung an sich betrifft, so erhält man in dem Bereiche, wo sie noch konstant sind, folgende Zahlen:

| Nr. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ ($\varepsilon$) | 0 | 0,0079 | 0,0102 | 0,0140 | 0,0203 | 0,0246 |
| $\sigma$ | 1 | 1,31 | 1,52 | 1,79 | 2,48 | 3,81 |

Man sieht, daß die Streuung schon bei dem engsten Schlitze recht beträchtlich ist und daß sie dann sehr stark zunimmt. Auch die Vergleichung mit der theo-



Figur 93.

retischen Tabelle auf S. 149 führt zu genügender Übereinstimmung. Auf die übrigen Folgerungen, die man aus den Messungen ziehen kann, kann hier nicht eingegangen werden.

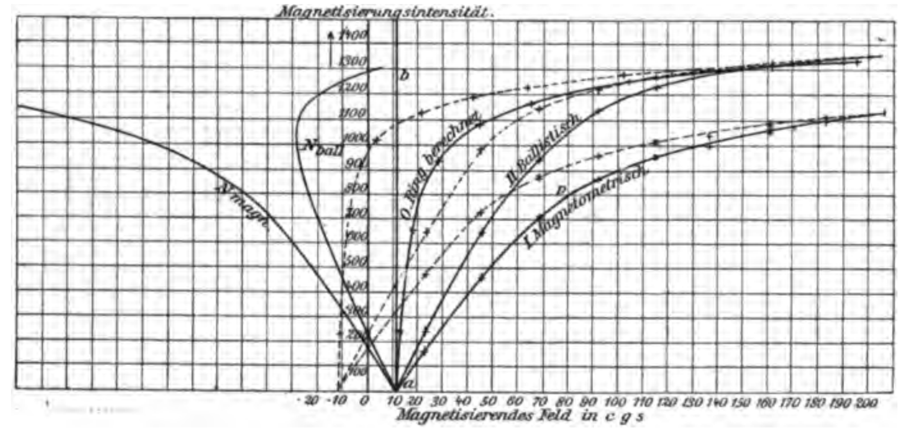
7. **Zylindrischer Stab.** Wir knüpfen nun nochmals an die Versuche mit Drähten an, präzisieren aber jetzt die Gestalt der Versuchskörper als die von Zylindern mit ebenen Endflächen und beliebigem Dimensionenverhältnis $\mathfrak{m}$ (Länge : Dicke). Hierzu liegt eine große Reihe von Arbeiten vor, von denen die von ASCOLI, RIBORG MANN, C. G. LAMB und BENEDICKS[1] besonders hervorzuheben sind. Es handelt sich dabei einerseits um die Magnetisierungskurven und andererseits um die aus ihnen zu entnehmenden Entmagnetisierungsfaktoren; die letzteren kann man hier nicht, wie beim Ellipsoid, berechnen, sondern muß sie empirisch durch Vergleich der Kurven mit der Normalkurve ableiten. Es liegt dabei die Frage nahe, ob dieser Faktor $N$ für Zylinder und Ellipsoid von gleichem $\mathfrak{m}$ gleich

[1] M. ASCOLI, Rend. Acc. Lincei **3**. 190. 1894. — RIBORG MANN, Inaug.-Diss. Berlin 1895. — Phys. Review **3**. 359. 1896. — C. G. LAMB, Phil. Mag. (5) **48**. 262. 1899. — BENEDICKS, Drude Ann. **6**. 726. 1901. — Vgl. auch die Bemerkungen von H. DU BOIS, Drude Ann. **7**. 942. 1902. — Die überaus zahlreiche ältere Literatur über den Gegenstand ist durch die obigen Arbeiten in dem hier interessierenden Betrachte im wesentlichen überholt. Zusammenstellungen findet man z. B. in G. WIEDEMANNs Handbuch.

groß oder verschieden ist; und wenn das letztere, wie er sich hier verhält. Die älteren Untersuchungen an Zylindern haben nun völlig widersprechende Resultate geliefert, und erst neuerdings hat man die Gründe hierfür aufgefunden.

Erstens ist es durchaus erforderlich, die ganze Versuchsreihe mit Zylindern von verschiedenem $\mathfrak{m}$ an demselben Material durchzuführen; man kann dies in zweierlei Weise tun, nämlich indem man entweder, wie das schon EWING u. a. (s. o.) getan haben, den Zylinder durch Abschneiden immer mehr kürzt, oder indem man ihn, bei unveränderter Länge, durch Abdrehen immer dünner macht: letzteres Verfahren verdient aus gewissen Gründen den Vorzug. Schließlich muß man dann auch die Normalkurve an demselben Material feststellen; und zu diesem Zwecke kann man entweder den Zylinder, wie schon vor langer Zeit OBERBECK[1] getan hat, zu einem Rotationsellipsoid abdrehen, für das man den Wert von $N$ theoretisch kennt, oder ihn zu einem Ringe zusammenbiegen und -schweißen, für den dann $N$ null ist, so daß man direkt die Normalkurve erhält.

Zweitens ist zu beachten, daß ein Zylinder nicht, wie ein Ring oder Ellipsoid, gleichförmig, sondern ungleichförmig magnetisiert wird, und daß folglich je nach




Figur 94.

der Konfiguration und der Stärke des Feldes Verschiedenheiten in der Verteilung und somit auch in der zur Beobachtung kommenden Magnetisierung auftreten werden.

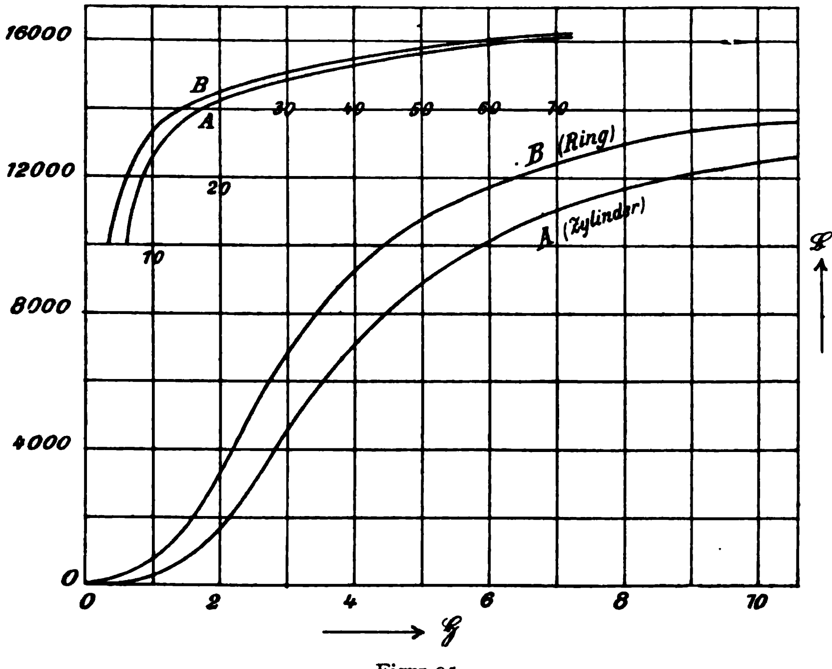
Drittens aber — und das ist, wie es scheint, der allerwesentlichste Punkt — muß bei einem Zylinder die ballistische Methode andere Werte liefern als die magnetometrische; denn jene ergibt die in der Mitte herrschende maximale, diese die mittlere Magnetisierung des Ganzen; und beide sind nicht nur verschieden, sondern ihr Verhältnis ändert sich auch mit der Feldstärke. Es ist das Verdienst von MANN und ganz besonders von BENEDICKS, hierauf aufmerksam gemacht zu haben; nach ihm ist $\mathfrak{J}_b$ um 10 bis 30% größer als $\mathfrak{J}_m$. Man sieht, daß man nie Versuche, die nach verschiedenen Methoden angestellt wurden, ohne weiteres vergleichen darf.

Mit Rücksicht auf diese Erkenntnisse kann man nun sagen, daß die Frage im großen ganzen gelöst ist, und zwar im folgenden Sinne: Bei Zylindern läuft die ballistische Magnetisierungskurve über der magnetometrischen. Folglich sind auch die Entmagnetisierungslinien verschieden, und überdies sind sie von ganz verschiedenem Charakter; sie sind nämlich nicht, wie bei gleichförmig magnetisierten Körpern, annähernd geradlinig, sondern sie sind das nur im ersten Teile,

[1] A. OBERBECK, Pogg. Ann. **135**. 84. 1868.

dann aber biegen sie nach entgegengesetzten Seiten um. Mit anderen Worten: $N_b$ ist erst konstant und nimmt dann auf null ab, $N_m$ ist auch erst konstant (und zwar größer als $N_b$) und nimmt dann zu. In sehr starken Feldern liefert hiernach die ballistische Methode die Normalwerte der Magnetisierung, unabhängig von der Länge der Zylinder. Will man endlich den Entmagnetisierungsfaktor von Zylindern mit denen entsprechend gestreckter Ellipsoide vergleichen, so kann sich dieser Vergleich nur auf einen Mittelwert des ersteren beziehen; es scheint, daß sich alsdann eine rohe Übereinstimmung zwischen beiden ergibt bzw. eine Reduktionsrechnung möglich ist (vgl. auch oben die Arbeit von NAGAOKA). Immerhin ist für alle strengeren Untersuchungen das Ellipsoid (oder der Ring) dem Zylinder vorzuziehen.

Unter diesen Umständen kann auf die Wiedergabe von Einzelheiten der Versuche an Stäben verzichtet werden; sie haben, so interessant sie auch sein




Figur 95.

mögen, doch immer nur sehr beschränkten Geltungsbereich. Dagegen seien zur Veranschaulichung der skizzierten Verhältnisse zwei graphische Originaldarstellungen reproduziert.

Die Figur 94 gibt eine Anschauung von den Verhältnissen bei Zylindern; sie bezieht sich auf den von BENEDICKS untersuchten Stab aus schwedischem Stahl vom Dimensionsverhältnis 25; I und II sind die $\mathfrak{J}$-Kurven, 0 die Normalkurve, berechnet aus Messungen an dem Ellipsoid, zu dem der Stab abgedreht wurde; die $N$ sind die Entmagnetisierungskurven; die gestrichelten Kurven beziehen sich auf den Rückweg bei wieder abnehmenden Kräften.

Figur 95 stellt nach den Versuchen von C. G. LAMB (a. a. O.) die ballistische Induktionskurve $A$ für einen 123,4 cm langen, 0,485 cm dicken Stab aus Low-Moor-Eisen dar; nachdem dieser zu einem Ringe zusammengeschweißt war, ergab sich Kurve $B$; beides sind aufsteigende Umkehrkurven, ihre letzten Stücke sind mit zehnmal verkleinertem Abszissenmaßstab dargestellt. Wie man sieht,

gehen die Kurven anfangs auseinander, um sich schließlich wieder stark zu nähern; $N_b$ nimmt also anfangs etwas zu, um dann stark abzunehmen.

8. **Hohlzylinder.** Hierauf wird in anderem Zusammenhange zurückgekommen werden; ebenso auf den Fall des Hohlringes.

## Besondere Erscheinungen.

**Verhalten gegen sehr kleine Kräfte.** Ein besonderes Interesse darf die Frage beanspruchen, wie sich Eisenkörper in sehr schwachen Feldern verhalten. Nach den oben mitgeteilten Kurven könnte man meinen, daß für genügend kleine Kräfte die Suszeptibilität $\varkappa$ null würde; denn die Magnetisierungskurve scheint, soweit der dortige Maßstab Schlüsse zuläßt, anfangs die Abszissenachse zu berühren. Zahlreiche Untersuchungen, besonders von BAUR[1], Lord RAYLEIGH[2], WERNER SCHMIDT[3] u. a. haben jedoch das Gegenteil erwiesen, d. h. es gibt einen Grenzwert von $\varkappa$ für $\mathfrak{H} = 0$. Schon aus der obigen Tabelle für den Ring (S. 192) geht hervor, daß dort dieser Grenzwert nicht weit unter 15 liegt; auf noch kleinere Kräfte bezieht sich die folgende, den Versuchen BAURS entnommene Tabelle:

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\varkappa$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0158 | 0,263 | 16,5 | 0,1319 | 3,815 | 28,9 |
| 0,0308 | 0,547 | 17,6 | 0,230 | 9,156 | 39,8 |
| 0,0708 | 1,633 | 23,0 | 0,384 | 22,487 | 58,6 |

Hiernach ist $\varkappa$ sehr gut als lineare, $\mathfrak{J}$ als quadratische Funktion von $\mathfrak{H}$ darzustellen,

$$\varkappa = a + b\,\mathfrak{H} \quad ,$$
$$\mathfrak{J} = a\,\mathfrak{H} + b\,\mathfrak{H}^2 \quad ,$$

und zwar wird bei BAUR

$$\varkappa = 14{,}5 + 110\,\mathfrak{H} \quad ,$$
$$\mathfrak{J} = 14{,}5\,\mathfrak{H} + 110\,\mathfrak{H}^2 \quad .$$

Diese Formeln, nur mit anderen Konstanten für andere Eisensorten, sind von anderen Beobachtern wiedergefunden worden, Lord RAYLEIGH z. B. erhielt für einen (wesentlich härteren) Draht

$$\varkappa = 6{,}4 + 5{,}1\,\mathfrak{H} \quad ,$$
$$\mathfrak{J} = 6{,}4\,\mathfrak{H} + 5{,}1\,\mathfrak{H}^2 \quad ;$$

natürlich darf man sie nur bis zu einem gewissen, immer noch ziemlich kleinen Werte von $\mathfrak{H}$ (bei Lord RAYLEIGH z. B. bis zu $\mathfrak{H} = 1{,}2$) anwenden. Entsprechend ist dann die Beziehung zwischen $\mu$ und $\mathfrak{B}$ einerseits und $\mathfrak{H}$ andererseits die folgende:

$$\mu = (1 + 4\,\pi\,\varkappa) = (1 + 4\,\pi\,a) + 4\,\pi\,b\,\mathfrak{H} = a' + b'\,\mathfrak{H} \quad ,$$
$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} = (1 + 4\,\pi\,a)\,\mathfrak{H} + 4\,\pi\,b\,\mathfrak{H}^2 = a'\,\mathfrak{H} + b'\,\mathfrak{H}^2 \quad ,$$

wo $a'$ und $b'$ neue Konstanten sind.

Für Kräfte, die so klein sind, daß in diesen Gleichungen das zweite Glied gegen das erste vernachlässigt werden darf, müßte hiernach $\varkappa$ konstant, seine Kurve also eine Horizontale, und es müßte $\mathfrak{J}$ einfach mit $\mathfrak{H}$ proportional, seine Kurve also eine aufsteigende Gerade sein; entsprechendes, nur mit anderen

[1] C. BAUR, Wied. Ann. **11**. S. 399. 1880. — [2] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **23**. S. 225. 1887. — Scientif. Papers **2**. 579. — [3] WERNER SCHMIDT, Wied. Ann. **54**. 655. 1895.

Zahlenwerten bzw. anderer Steigung müßte für $\mu$ und $\mathfrak{B}$ gelten. Hierüber hat sich nun eine Diskussion zwischen verschiedenen Physikern, namentlich zwischen RÖSSLER, CULMAN und WERNER SCHMIDT[1] entwickelt, die zwar noch nicht völlige Klärung der ganzen Frage, aber doch im wesentlichen eine Übereinstimmung herbeigeführt hat. Daß die Zahlen von BAUR und Lord RAYLEIGH in dieser Hinsicht nicht befriedigen, leuchtet ein; denn das Verhältnis der beiden Koeffizienten $a$ und $b$ ist bei ihnen gar zu verschieden, also auch die Grenze, bis zu der das zweite Glied zu vernachlässigen ist. In ähnlichem Gegensatze stehen nun auch die Ergebnisse, zu denen SCHMIDT und RÖSSLER gelangen; bei jenem würde nämlich $b$ verhältnismäßig klein, bei diesem groß ausfallen. Mit anderen Worten: SCHMIDT findet bei seinen Ellipsoiden aus Eisen und Stahl bis zur Feldstärke 0,05 völlige Proportionalität, d. h. Konstanz von $\varkappa$, an dieser Stelle aber biegt seine Kurve „ziemlich plötzlich" um, um nun zu steigen. Dagegen glaubt RÖSSLER von vornherein ein Steigen von $\varkappa$ bzw. $\mu$ zu finden:

| $\mathfrak{H}$ = 0,00140 | 0,00269 | 0,00450 | 0,00668 | 0,01102 | 0,0139 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ = 222 | 236 | 252 | 249 | 264 | 258 |

| $\mathfrak{H}$ = 0,0177 | 0,0220 | 0,0261 | 0,0303 | 0,0350 | 0,0397 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ = 263 | 260 | 267 | 266 | 270 | 273 |

Ob diese Zahlenreihe aber wirklich ein Steigen von $\mu$ erkennen läßt, ist doch sehr zweifelhaft; denn gerade in der zweiten Zeile, wo doch die Zunahme mindestens ebenso deutlich wie in der ersten sein müßte, findet beinahe Konstanz statt. Sieht man von den beiden ersten, sehr kleinen Kräften und deshalb sehr unsicheren Beobachtungen ab, so kann man sagen, daß bis $\mathfrak{H} = 0,05$ nahezu Konstanz stattfindet und dann erst das Steigen wesentlich beginnt (vgl. die Tabelle auf S. 187, die die Fortsetzung der vorliegenden ist). Immerhin kann man mit CULMAN, der die Frage kritisch prüft, der Meinung sein, daß eine weitere ganz exakte Entscheidung erwünscht ist[2].

**Verhalten bei mittleren Kräften.** Das nächste Gebiet ist dasjenige, wo die Magnetisierungskurve ihren Inflexionspunkt hat. Hier erhebt sich nun eine Reihe von Fragen: Wo liegt der Inflexionspunkt? Wo haben die Kurven für $\varkappa$ (bzw. $\mu$) und $\varkappa'$ (bzw. $\mu'$) ihre Gipfel?

Diese Fragen sind weiter dahin zn spezialisieren, daß man frägt: 1. bei welchem $\mathfrak{H}$? und 2. bei welchem $\mathfrak{J}$? Der Wert von $\mathfrak{H}$, bei dem der Inflexionspunkt liegt, ist sehr verschieden, je nachdem es sich um eine Spezialkurve oder um die Normalkurve handelt; ein Blick auf Figur 92 lehrt das zur Genüge; die Normalkurve hat ihren Inflexionspunkt etwa bei $\mathfrak{H} = 2$ bis 3; bei den Spezialkurven rückt er, je größer die entmagnetisierende Kraft ist, desto mehr nach rechts, das entsprechende $\mathfrak{H}$ kann bis auf 10 und selbst noch mehr steigen. Anders liegt die Sache, wenn man den Wert von $\mathfrak{J}$ betrachtet, der dem Inflexionspunkt entspricht: dieser ist für die sehr verschieden gewölbten Kurven nahezu der gleiche, und zwar rund 400; der entsprechende Wert der Induktion $\mathfrak{B}$ ist dann also rund 5000. Im einzelnen hängen alle diese Werte freilich vom Material ab, ganz besonders aber auch davon, ob man die auf- oder absteigende, die stetige oder Kommutierungskurve usw. betrachtet. Ungefähr in derselben Gegend wie der Inflexionspunkt, liegen schließlich auch die Maxima von $\varkappa$ und $\varkappa'$;

[1] G. RÖSSLER, Unters. üb. d. Magnetisierung d. Eisens usw. Inaug.-Diss. Zürich 1892. — Derselbe, Elektrot. Zeitschr. 1893. 134. — WERNER SCHMIDT, Unters. üb. d. Magnetisierung d. Eisens durch sehr kleine Kräfte. Inaug.-Diss. Elberfeld 1894. — Wied. Ann. **54**. 655. 1895. — P. CULMAN, Wied. Ann. **56**. 602. 1895. — [2] Auf eine Arbeit von HOLBORN, die das Verhalten verschiedener Sorten gegen schwache Kräfte behandelt, wird im nächsten Artikel eingegangen werden.

es finden aber gewisse Abweichungen statt, die schon oben angedeutet wurden. Was endlich die Maximalwerte dieser Größen selbst betrifft, so sind auch diese je nach dem Material verschieden; ferner bei demselben Material je nach der Form und der Magnetisierungsweise. Der größte gemessene Wert von $\varkappa$ scheint

$$\text{bei Ellipsoiden (RÖSSLER)}\ \varkappa = 230 \quad (\text{bei}\ \mathfrak{H} = 2{,}8\,,\ \mathfrak{J} = 640)\ ,$$
$$\text{bei Ringen (H. LEHMANN)}\ \varkappa = 260 \quad (\text{bei}\ \mathfrak{H} = 1{,}5\,,\ \mathfrak{J} = 390)$$

zu sein. Die entsprechenden Werte der Permeabilität sind

$$\mu = 2900 \quad \text{bzw.} \quad 3250 \quad (\text{bei}\ \mathfrak{B} = 8000 \quad \text{bzw.} \quad 5000)\ .$$

Für reines Eisen hat freilich in einem besonderen Falle WILSON[1] einen noch wesentlich höheren Wert, nämlich

$$\mu = 5500 \quad (\text{bei}\ \mathfrak{B} = 9000)$$

gefunden.

Noch größer sind dann die Maximalwerte der differentiellen Suszeptibilität bzw. Permeabilität.

**Verhalten gegen große Kräfte. Sättigung.** Wir kommen nunmehr zu dem drittenTeil der Magnetisierungskurve. Hier wird ihr Anstieg immer schwächer, und es fragt sich, wie weit sie überhaupt steigen kann, und welches ihre Grenzhöhe ist. Die Antwort ist für die Induktionskurve zweifellos; denn da die Induktion $\mathfrak{B}$ die Kraft $\mathfrak{H}$ als Glied enthält, muß sie so lange wie diese wachsen; eine Grenze ist ihr also nur dadurch gesetzt, daß unsere Hilfsmittel, um die magnetisierende Kraft zu steigern, begrenzt sind. Diese Grenze kann sich also mit den Fortschritten der Technik erhöhen. Anders liegt die Sache bei der Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}$. Diese Größe kann sehr wohl einen in den Vorgängen bzw. in der Natur des Materials beruhenden Grenzwert haben, wenn nur in Gleichung (10) bei immer weiterer Steigerung von $\mathfrak{H}$ die Größe $\varkappa$ in gleichem Verhältnis abnimmt. Versuche mit der Isthmusmethode haben dies in der Tat ergeben, wie z. B. folgende Zahlen beweisen:

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\varkappa$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|
| 3630 | 1680 | 24700 | 0,46 | 6,80 |
| 6680 | 1670 | 27610 | 0,25 | 4,13 |
| 9500 | 1650 | 30200 | 0,17 | 3,18 |
| 10360 | 1630 | 30830 | 0,16 | 2,98 |
| 11180 | 1620 | 31560 | 0,15 | 2,82 |

Man sieht also, daß zwar $\mathfrak{B}$ noch weiter wächst, $\mathfrak{J}$ hingegen konstant geworden ist (die kleine Abnahme rührt davon her, daß bei der Isthmusmethode nicht genau das wahre $\mathfrak{H}$ gemessen wird); ferner daß $\varkappa$ und $\mu$, die für sehr kleine Kräfte etwa 15 resp. 200, für mittlere aber im günstigsten Falle 250 resp. 3000 betragen, für die hier vorliegenden kolossalen Kräfte bis auf 0,15 resp. 3 heruntergegangen sind. Für das Maximum von $\mathfrak{J}$ kommt in Betracht, daß die betreffende Kurve (vgl. o. S. 189) zuletzt nach unten konvex wird.

Als äußerste Werte galten lange Zeit die von EWING und LOW[2] erzielten:

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\varkappa$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|
| 24500 | 1660 | 45350 | 0,07 | 1,85 . |

Indessen ist seitdem $\mathfrak{J}$ von RÖSSLER, H. DU BOIS, E. T. JONES u. a. bis 1850 getrieben worden, und es kann daher

$$\mathfrak{J} = 1850$$

[1] E. WILSON, Proc. R. Soc. **62**. 369. 1898. [2] J. A. EWING u. LOW, Trans. R. Soc. **180**. 221. 1889.

als Grenzwert gelten. Was andererseits $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ betrifft, so bietet zu ihrer Steigerung DU BOIS' Ringmagnet ein ausgezeichnetes Mittel, und es kommt schließlich nur darauf an, wie klein man den Isthmus-Querschnitt im Vergleich zum Schenkel-Querschnitt machen kann. Mit Hilfe von $^1/_4$ mm starkem, in die Bohrung eingeführten Drahte erreichte so JONES[1] die aus der Zugkraft berechneten Werte

$$\mathfrak{H} = 51600 \ , \quad \mathfrak{B} = 74200 \ , \quad \mu = 1{,}44 \quad ,$$

die hiernach als direkt festgestellte Maxima gelten können; natürlich wird bei dieser Steigerung zugleich die Ausdehnung des so starken Feldes immer kleiner und beträgt schließlich kaum noch 1 cbmm. Der spezifische Magnetismus endlich, d. h. das Moment der Gewichtseinheit, hat hiernach das Maximum

$$s = 250 \quad .$$

Im Anschluß hieran sei nochmals auf die STEFANsche Theorie starker Felder hingewiesen, die ganz neuerdings von WALTER[2] eingehend studiert worden ist, namentlich im Hinblick auf die Frage der Sättigung.

**Empirische Magnetisierungsformeln.** In Anbetracht des Umstandes, daß die allgemeine Theorie zur völlig richtigen Darstellung des Verlaufes der Magnetisierung versagt, kann es nicht wundernehmen, daß man seine Zuflucht zu mehr oder weniger empirischen Formeln genommen hat. Die Zahl derselben ist so groß und ihre Geltung zum Teil so beschränkt, daß hier nur die historisch oder praktisch wichtigsten angeführt werden können; die weitere Literatur findet man hauptsächlich in den elektrotechnischen Zeitschriften. Unter Magnetisierung $\mathfrak{J}$ ist im folgenden meist das ganze Moment des Körpers verstanden; die Kraft $\mathfrak{H}$ geht meist von einem Strome in einer den Körper umgebenden Spule aus und ist dann bis auf einen Faktor durch das Produkt aus Stromstärke und Windungszahl bzw. Windungsdichte bestimmt; $a$, $b$, $c$, $d$ sind Konstanten.

Die älteste Formel ist wohl die von LENZ und JACOBI[3],

$$\mathfrak{J} = a\mathfrak{H} \quad ,$$

sie stimmt, wie man sieht, mit der KIRCHHOFFschen theoretischen überein ($a = \varkappa$), stellt aber nur das mittelste Kurvenstück annähernd dar. Um der Erscheinung der Sättigung gerecht zu werden, kann man verschieden verfahren. J. MÜLLER[4], v. WALTENHOFEN[5], DUB, CAZIN, BREGUET u. a. setzen

$$\mathfrak{J} = a \operatorname{arctg} b\mathfrak{H} \quad ;$$

der Maximalwert von $\mathfrak{J}$ ist hier $\pi a/2$, die Sättigung ist gut dargestellt; für geringere Kräfte ist jedoch die Formel, wie v. WALTENHOFEN gezeigt hat, nicht brauchbar. LAMONT[6] setzt

$$\mathfrak{J} = a(1 - e^{-b\mathfrak{H}}) \quad ,$$

wo $a$ offenbar das Maximum von $\mathfrak{J}$ ist. Eine Kombination der LENZschen und der LAMONTschen Formel stellt gewissermaßen die Formel von SOHNCKE[7]

$$\mathfrak{J} = a\mathfrak{H} e^{-b\mathfrak{H}} \quad .$$

dar. Indessen sind diese zyklometrischen und Exponentialformeln für die Praxis sehr unbequem; algebraische Beziehungen wären weit vorzuziehen. Eine solche hat wohl zuerst RUTHS[8] aufgestellt, nämlich, wenn $s$ die Magnetisierung pro Gewichtseinheit, also der spezifische Magnetismus (s. o.) ist:

---

[1] E. T. JONES, Wied. Ann. **57**. 273. 1896. — [2] B. WALTER, Drude Ann. **14**. 106. 1904. Daselbst auch die älere Literatur. Ein näheres Eingehen auf die Arbeit ist bei der Korrektur nicht angängig. — [3] LENZ und JACOBI, Pogg. Ann. **47**. 225. 1839. — [4] J. MÜLLER, Pogg. Ann. **79**. 340. 1850. — [5] A. v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. **52**. 87. 1865; Wied. Ann. **27**. 630. 1886; **32**. 133. 1887. — [6] J. LAMONT, Handb. d. Magn. S. 41. — [7] L. SOHNCKE, Elektr. Z. 1883. 160. — [8] CH. RUTHS, Über d. Magn. weicher Eisenzylinder. Dortm. 1876.

$$s = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (b\mathfrak{H})^2}}\right) \quad ;$$

von den beiden Konstanten $a$ und $b$ wächst die letztere von 0,0145 bis 0,052, wenn das Verhältnis der Länge zur Dicke der Stäbe von 40 auf 150 wächst; man kann diese Formel daher mit der Figur 33 in einen gewissen Zusammenhang bringen. Indessen ist auch die Wurzel, die hier vorkommt, noch unbequem. In dieser Hinsicht noch einfacher ist die erste Formel von FRÖLICH[1]

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{H}}{a + b\mathfrak{H}} \quad ,$$

die aus dem Jahre 1881 stammt und das Verhalten der Dynamomaschine charakterisieren sollte. Später hat dann FRÖLICH[2] die kompliziertere Formel

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{H}}{a + b\mathfrak{H} + c\dfrac{\mathfrak{H}}{d + \mathfrak{H}}}$$

aufgestellt, die schon vier Konstanten enthält. Dasselbe gilt von den neuesten, von MÜLLENDORF[3] vorgeschlagenen Formeln für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, von denen hier eine genügen möge:

$$\mathfrak{B} = a\left[1 - \frac{1}{(1 + b\mathfrak{H}^{m})^{n}}\right]^{q} + \mathfrak{H} \quad .$$

Schließlich sei noch eine Formel von KAPP[4]

$$\mathfrak{J} = a\mathfrak{H}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\pi u}{\frac{1}{2}\pi u}$$

angeführt, in der $u$ das Verhältnis der bei Wirkung der Kraft $\mathfrak{H}$ im Eisen verlaufenden Kraftlinienzahl zu ihrem Maximum ist; für große $\mathfrak{H}$ ist die Formel unbrauchbar, dagegen gibt sie — und das ist für sie charakteristisch — das im mittleren Teile stattfindende raschere Wachsen von $\mathfrak{J}$ wieder.

**Verteilung der Magnetisierung der Länge nach.** Über die Verteilung des Magnetismus über die einzelnen Längenteile eines Körpers ist schon im Artikel „Magnetismus" einiges gesagt worden; und im vorliegenden Artikel sind dann einige theoretische Bemerkungen gemacht und namentlich die GREENsche Formel wiedergegeben worden. Vom allgemeinen Standpunkte aus sind zwei Fragen zu unterscheiden, je nachdem es sich um Magnetisierung im gleichförmigen oder im ungleichförmigen Felde handelt.

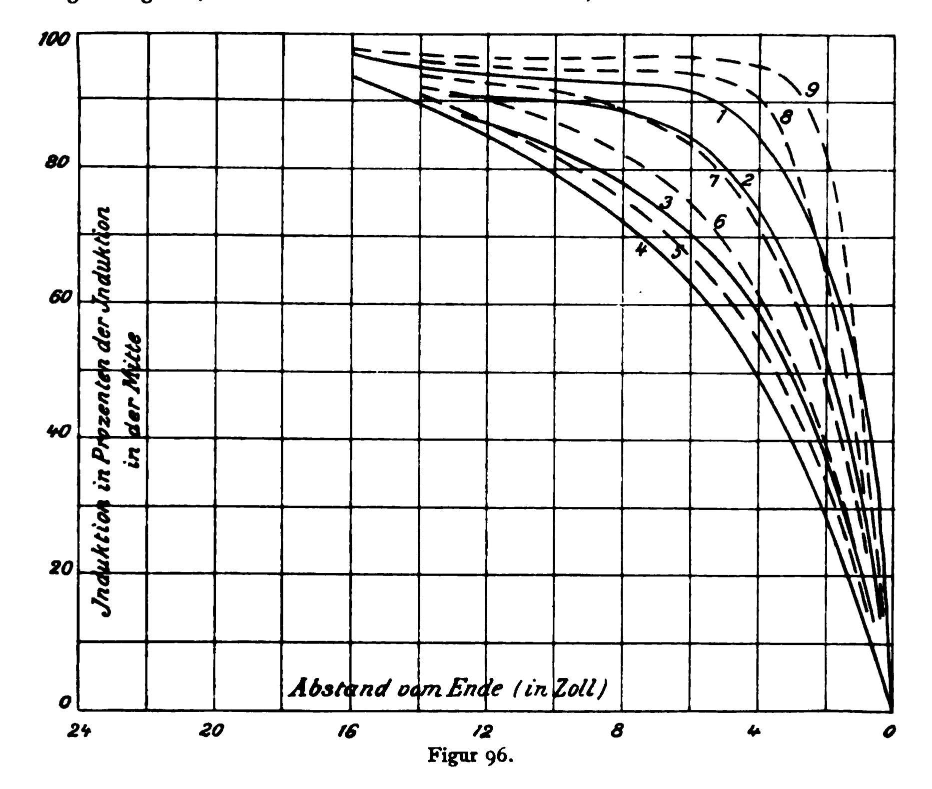
Im gleichförmigen Felde kann es sich nicht um Kugel, Ellipsoid und Ring handeln; denn diese Formen werden ja gleichförmig magnetisiert. Es wird sich also hauptsächlich um zylindrische Stäbe handeln; auf solche bezieht sich ja auch die GREENsche Formel (S. 146) und ihr für dünne Drähte gültiger Spezialfall der BIOTschen Formel (vgl. S. 51). Experimentell ist die Frage sehr oft behandelt worden, und ganz neuerdings noch in sehr zuverlässiger Weise von C. G. LAMB[5], so daß es genügen wird, dessen Ergebnisse kurz anzuführen; seine Versuche beziehen sich auf den schon einmal (vgl. S. 197 und Figur 95) zitierten geglühten Stab aus Low-Moor-Eisen, 123,4 cm (48' engl. Zoll) lang und 0,485 cm dick.

[1] O. FRÖLICH, Elektrot. Z. 1881. 141 u. 170; 1882. 73. — [2] O. FRÖLICH, Elektrot. Z. 1894. 368. Hieran hat sich dann eine längere Diskussion geknüpft, über die in den folgenden Bänden dieser Zeitschrift nachzusehen ist. — In nahem Zusammenhange hiermit steht auch die Formel von KENNELLY (Trans. Am. Inst. El. Eng. **8**, Nr. 11) für das, was er „metallischen magnetischen Widerstand" nennt, was aber einfach $1/4\pi\varkappa$ ist; eine nur in engem Bereich gültige Formel, die dann STEINMETZ (El. Z. **13**. 203. 1892) zu verbessern versucht hat. — [3] E. MÜLLENDORF, Elektrot. Z. **22**. 925. 1901; **23**. 25. 1902. [4] G. KAPP, Electician **18**. 21. 1886. — [5] C. G. LAMB, Phil. Mag. (5) **48**. 262. 1899.

Die sekundäre Spule war so schmal wie möglich gewählt und wurde über die einzelnen Stücke des Stabes geschoben; dieses Verfahren wurde bei neun verschiedenen Feldstärken wiederholt. In der Tabelle bedeutet $\mathfrak{H}$ die unkorrigierte Feldstärke (die für die Normalkurve korrigierte läßt sich aus Figur 95 leicht entnehmen), $\mathfrak{B}_c$ die Induktion im Mittelpunkt, $\mathfrak{B}_m$ die durchschnittliche, berechnet aus den Kurven, indem die Fläche durch die Basis dividiert wurde; die weiteren Spalten geben, in Prozenten von $\mathfrak{B}_c$, die Induktion in den darüber angegebenen Abständen vom Ende in Zollen (im Mittel aus beiden Stabhälften).

| Nr. | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{B}_c$ | $\mathfrak{B}_m$ | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,74 | 162 | 146 | 99,9 | 96 | 95 | 93 | 86 | 64 | 52 |
| 2 | 1,49 | 572 | 477 | 99,8 | 95 | 90 | 90 | 74 | 53 | 34 |
| 3 | 2,23 | 2350 | 1880 | 99,7 | 97 | 88 | 78 | 68 | 37 | 23 |
| 4 | 3,35 | 5500 | 4070 | 99,5 | 94 | 85 | 73 | 50 | 32 | 14 |
| 5 | 4,47 | 8000 | 6160 | 99,4 | 93 | 87 | 76 | 54 | 34 | 21 |
| 6 | 6,70 | 10700 | 8680 | 98,8 | 94 | 90 | 82 | 61 | 40 | 25 |
| 7 | 11,6 | 13500 | 11900 | 98,5 | 94 | 93 | 89 | 72 | 49 | 31 |
| 8 | 20,0 | 14300 | 12900 | 99,0 | 97 | 96 | 95 | 92 | 64 | 42 |
| 9 | 35,0 | 15200 | 14100 | 99,8 | 98 | 97 | 96 | 96 | 80 | 43 |

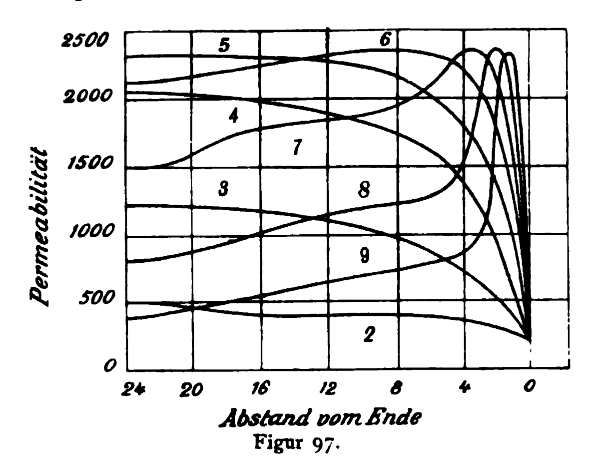
Man sieht, wie stark die Magnetisierung von der Mitte nach den Enden, anfangs langsam, dann immer schneller abnimmt, und daß diese Abnahme für




Figur 96.

mittlere Kräfte stärker ist als für kleine oder große Kräfte. Stellt man daher die Zahlen graphisch dar, wie das in Figur 96 geschehen ist, so muß man, um das Bild nicht zu verwirren, die nahe beieinander verlaufenden ersten und letzten

Kurven durch verschiedene Darstellung unterscheiden. Daß trotzdem diese Kurven von ganz verschiedenem Charakter sind, ersieht man aus Figur 97, wo die Werte von $\mu$ für die verschiedenen Kräfte (mit Ausnahme der kleinsten) als Funktion des Abstandes vom Ende dargestellt sind. Wie man sieht, hat $\mu$ für kleine und mittlere Kräfte in der Mitte ein Maximum, von dem es erst langsam, dann rascher nach den Enden abfällt; bei großen Kräften dagegen hat es in der Mitte ein Minimum, steigt dann, erreicht kurz vor den Enden ein Maximum und fällt dann rasch zum Hauptminimum an den Enden ab.

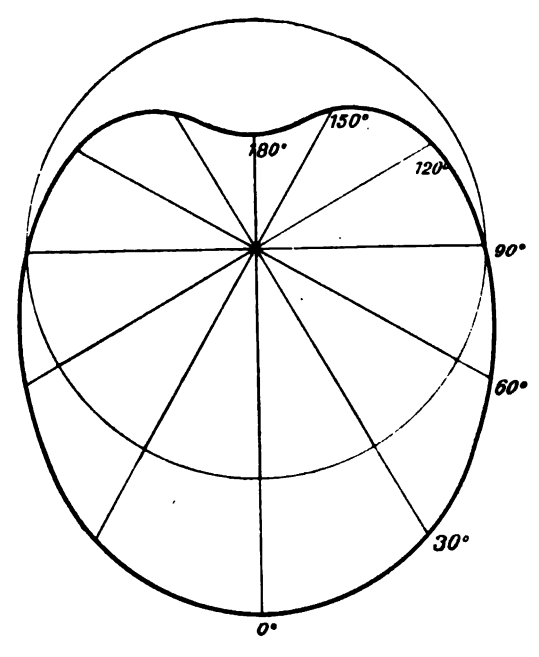


Figur 97.

Im ungleichförmigen Felde kommt natürlich auch bei Kugel, Ring usw. das Verteilungsgesetz in Frage. Für den Ring (vgl. die Theorie von SCHÜTZ, S. 148) hat u. a. PISATI[1] Versuche angestellt, indem er die Induktion an verschiedenen, von der Erregungsstelle verschieden weit entfernten Stellen maß. Dabei konnte für die Magnetisierung an drei untereinander äquidistanten Stellen das Gesetz

$$\frac{\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_3}{\mathfrak{J}_2} = \text{konst.}$$

aufgestellt werden, so daß hier eine vollständige Analogie mit der Wärmeleitung besteht.



Figur 98.

Die Verteilung der Induktion in einem lokal erregten Ringe kann man sehr anschaulich durch ein Zirkular-Diagramm darstellen von der Art der Figur 98; bei 0° sitzt die erregende Spule, die Radienvektoren stellen die Induktion in den betreffenden Richtungen in relativem Maße dar. Statt dessen kann man auch den Ringumlauf als gerade Abszissenachse nehmen und die Induktionsflüsse als Ordinaten auftragen; hierfür gibt Figur 99 ein von NIETHAMMER[2] herrührendes Beispiel, dessen obere Kurve sich auf einen geschlossenen, dessen untere sich auf einen Ring mit einem Schlitz an der Oppositionsstelle (180°) bezieht; man sieht, daß sich die Ungleichförmigkeit des Feldes im ersten und die Streuung im zweiten Falle in gleichem Sinne geltend

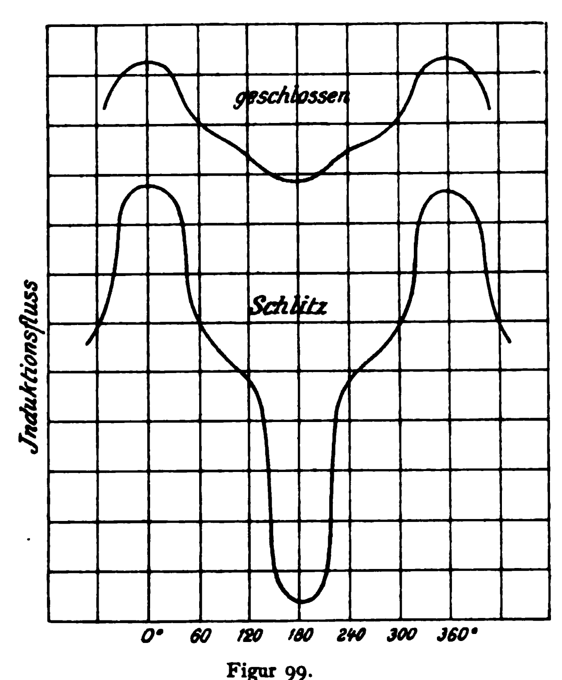
[1] G. PISATI, N. Cim. (3) **31**. 58. 1892. — Vgl. auch die Arbeit von J. SAUTER, Wied. Ann. **62**. 85. 1897. — [2] NIETHAMMER, Magnetismus, Stuttg. 1901. S. 20.

machen, daß aber der Hinzutritt der Streuung die Kurve quantitativ gewaltig beeinflußt.

**Polabstand.** Mit der Längsverteilung des Magnetismus hängt das Problem der Lage der Pole, also des Polabstandes, eng zusammen. Von älteren Versuchen abgesehen, kommen hier die Messungen von F. KOHLRAUSCH, SCHNEEBELI, v. HELMHOLTZ, S. CURIE, L. HOLBORN, C. G. LAMB, C. BENEDICKS[1] in Betracht. Die meisten von ihnen liefern die äquivalenten Pole RIECKES (vgl. S. 66), ihr Abstand ist gleich 0,81 bis 0,86 der Länge, und man macht meist keinen für die Praxis in Betracht kommenden Fehler, wenn man nach KOHLRAUSCH

$$p' = \tfrac{5}{6}\, l = 0{,}83\, l$$

setzt. Andererseits liefern die nach der MASCARTschen Methode (S. 185) angestellten Versuche von LAMB, CURIE und BENEDICKS die wirklichen Schwerpunkte der magnetischen Verteilung und deren Abstand. Dieser Abstand hängt nun, wie sich zeigt, sehr wesentlich von der magnetisierenden Kraft ab; so fand LAMB folgende Polabstände (in Prozenten der Länge) für seine schon oben besprochenen Stäbe:



Figur 99.

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{H}$ | 0,74 | 1,49 | 2,23 | 3,35 | 4,47 | 6,70 | 11,6 | 20,0 | 35,0 |
| $p$ | 90 | 84 | 80 | 74 | 77 | 81 | 88 | 90 | 92 |

Wie man sieht, ist der Polabstand in mittleren Feldern am kleinsten, nämlich etwa $^3/_4$ der Länge; in sehr kleinen oder sehr starken Feldern hingegen dürfte er sich nicht sehr von der Länge unterscheiden. Auch Frau CURIE fand für Stäbe mit quadratischem Querschnitt ($20 \times 1 \times 1$) Werte zwischen 0,72 und 0,84. Endlich hat BENEDICKS verschiedene Stäbe in weitem Bereiche von Kräften geprüft. Für einen Stab $20 \times 0{,}8$ fand er

| $\mathfrak{H}$ | 22,9 | 68,7 | 114,5 | 206,2 |
|---|---|---|---|---|
| $p/l$ | 0,712 | 0,740 | 0,794 | 0,849 |

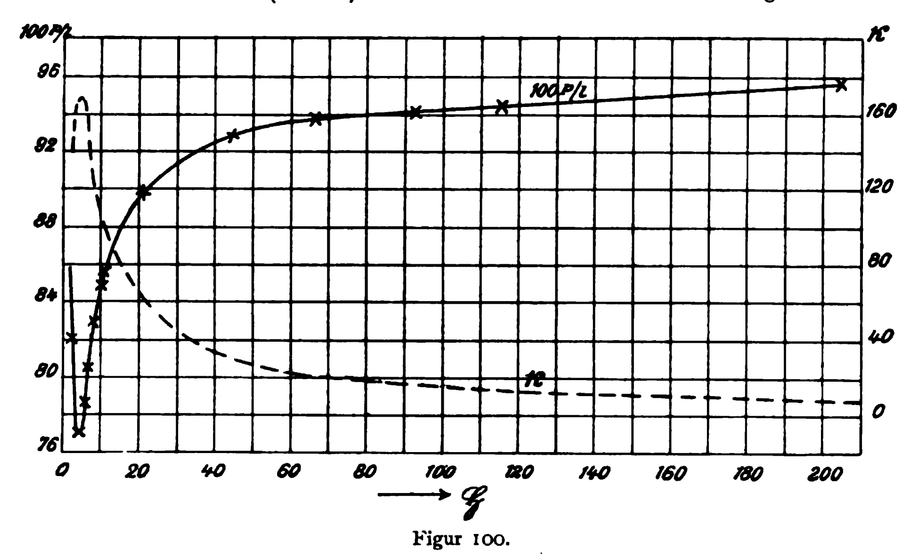
Und für einen Zylinder, dessen Länge das 300fache seiner Dicke war, dessen äquivalente Pole also jedenfalls dicht an seinen Enden liegen, erhielt er die in Figur 100 dargestellte Kurve der Polabstände (in Prozenten der Länge), als Funktion der Feldstärke; man sieht, wie auch hier der Wert stark abnimmt,

[1] F. KOHLRAUSCH und W. HALLOCK, Wied. Ann. **22**. 411, 1884. — SCHNEEBELI, Progr. Polyt. Zür. 1871/2. — H. v. HELMHOLTZ, Berl. Sitz. Ber. 1883. 405. — Frau S. CURIE, Bull. Soc. d'Encour. **3**. 36. 1898. — L. HOLBORN, Berl. Sitz. Ber. 1898. 159. — C. G. LAMB, Phil. Mag. (5) **48**. 252. 1899. — C. BENEDICKS, J. de Phys. 1902. 302.

dann stark und allmählich langsamer zunimmt; zugleich sieht man, daß der Verlauf dem ebenfalls dargestellten Verlaufe der Suszeptibilität gerade entgegengesetzt ist. Diese schon von HOLBORN erkannte Beziehung besagt offenbar, daß der Entmagnetisierungsfaktor, der doch für den Polabstand bestimmend ist, mit wachsender Suszeptibilität ebenfalls wächst.

Schließlich ist noch, auch nachträglich zur Theorie und Methodik, eine Abhandlung von HEIMANN[1] anzuführen, in der der Polabstand verschiedener Körper aus der RIECKEschen Theorie berechnet, eine Kritik der Methoden zu seiner experimentellen Bestimmung gegeben und eine eigene Bestimmung mitgeteilt wird.

**Schirmwirkung. Massive und Hohlkörper. Massive Stäbe und Drahtbündel.** Wir kommen jetzt zu einer Frage, über die eine sehr ausgedehnte Literatur aus neuester Zeit existiert, und die in sehr verschiedener Weise in Angriff genommen worden ist. Es ist das die Frage der Schirmwirkung, die theoretisch schon oben (S. 150) behandelt wurde. Der älteste bezügliche Versuch




Figur 100.

scheint der von BARLOW[2] zu sein, der sich auf die Hohlkugel bezieht. Dann hat STEFAN[3] einige Versuche an quer zum Feld gestellten Hohlzylindern mitgeteilt. Endlich ist die Frage neuerdings von verschiedenen Seiten wieder aufgenommen und namentlich auch von H. DU BOIS[4] experimentell gefördert worden.

Während diese Autoren sich direkt mit der Schirmwirkung beschäftigten, gingen andere von anderen Problemen aus und wurden durch diese zur Schirmwirkung geführt. Dabei sind besonders folgende Probleme hervorzuheben:

Welche Magnetisierung nehmen Hohlzylinder im Vergleich zu Vollzylindern an? Wie hängt die Intensität der Magnetisierung bei Rohren von der Wandstärke und bei Vollzylindern von der Dicke ab? Wie verhält es sich mit mehreren, in einander gesteckten Rohren? Diese und analoge Fragen sind, nach dem Vorgange von v. FEILITSCH[5], von VOM KOLKE, v. WALTENHOFEN, JAMIN, W. v. SIEMENS, LEDUC, GEROSA, GROTRIAN, H. DU BOIS[6] und ASCOLI für eiserne, von FÖPPL, BECK

[1] H. HEIMANN, Inaug.-Diss. Rost. 1902. — [2] P. BARLOW, Gilb. Ann. **73**. 1. 1823. — [3] J. STEFAN, Wien. Ber. **85** (2). 613; Wied. Ann. **17**. 928. 1882. — [4] H. DU BOIS, Wied. Ann. **65**. 1. 1898. — [5] v. FEILITSCH, Pogg. Ann. **80**. 321. 1850. — [6] H. vom KOLKE, Pogg. Ann. **81**. 321. 1850. — v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. **62** (2). 438. 1870. — P. JAMIN, J. de Phys. (1) **5**. 73. 1876. — W. v. SIEMENS, Wied. Ann. **14**. 653. 1881; Ges. Abh. 2. Aufl. **1**. 334. 1889. — A. LEDUC, J. de Phys. (2) **6**. 239. 1887. — G. C. GEROSA, Rend. Acc. Linc. **7**. 151. 1891. — O. GROTRIAN, Wied. Ann. **50**. 705. 1893; **52**. 735; **54**. 452. 1894. — H. DU BOIS, Wied. Ann. **51**. 529. 1894. — M. ASCOLI, N. Cim. **41**. 5; **108**. 1895.

und A. KOHN[1] für eiserne und stählerne Rohre, zur Prüfung der FÖPPLschen Theorie, behandelt worden; von KIRSTÄDTER[2] für den Hohl- und Vollring; endlich von ASCOLI[3] u. a. für Drahtbündel im Vergleich mit massiven Zylindern.

Auf die Einzelheiten aller dieser Versuche kann hier nicht eingegangen werden; es muß genügen, das prinzipielle Hauptergebnis zu betrachten. Da ist denn zu konstatieren, daß noch bis vor kurzem unlösbare Widersprüche vorhanden zu sein schienen; und erst durch die Arbeiten von DU BOIS[4] ist Klarheit in die Angelegenheit gebracht worden. Hiernach muß vor allem zwischen zwei ganz verschiedenen Fällen von Schirmwirkung unterschieden werden, je nachdem durch einen mehr oder weniger ausgedehnten Teil der Begrenzungsfläche des betreffenden Körpers Kraftlinien hindurch treten oder nicht. Im ersten Falle verlaufen die Kraftlinien in der Luft, zumal bei etwas dickeren Panzern, nach dem Brechungsgesetz (S. 133) fast normal zur Grenzfläche, es entspricht dem das Auftreten von freiem Magnetismus, und dieses ist für diese Art von Schirmwirkung, die man als „radiale" bezeichnen kann, charakteristisch. Hierher gehören namentlich die Fälle von BARLOW, STEFAN und DU BOIS. Dem gegenüber steht der Fall der „tangentialen" Schirmwirkung, bei dem die Kraftlinien in den Grenzflächen verlaufen. Das ist der in den meisten übrigen Untersuchungen verwirklichte Fall; und hier wird eine Schirmwirkung teils allgemein, teils nur für die Stahlkörper behauptet, teils überhaupt bestritten. Da ist nun wieder eine Unterscheidung zu machen: ob es sich nämlich um eine wirkliche Schirmwirkung handelt, oder ob eine solche etwa nur durch die entmagnetisierende Wirkung von Endflächen und deren verschiedenen Einfluß bei Voll- und Hohlkörpern usw. vorgespiegelt wird. Will man die angebliche reine Schirmwirkung herausschälen, so muß man wieder den bekannten Weg einschlagen, nämlich nicht den Zylinder, sondern den geschlossenen Ring als Versuchskörper wählen, also in unserem Falle Hohlring und Vollring einer vergleichenden Prüfung unterwerfen. Das ist die Bedeutung der von DU BOIS angeregten Arbeit von KIRSTÄDTER (vgl. ob.). Hier wurde ein Ring aus Eisen mit kreisförmigem Querschnitt axial ausgebohrt, und es wurde die Magnetisierungskurve bestimmt 1. für den Hohlring, 2. für den herausgenommenen dünnen Vollring, 3. für den durch Wiedereinlegen des letzteren in den ersteren entstandenen dicken Vollring. Das Hauptergebnis ist, daß die Magnetisierungskurven nahe zusammenfallen, daß also eine tangentiale Schirmwirkung nicht existiert. Bleibt noch die Möglichkeit bei Stahl, also der FÖPPLsche Spezialfall; aber auch hier ist nach den Arbeiten von BECK und nach theoretischen Erwägungen eine wirkliche Schirmwirkung sehr unwahrscheinlich.

Was nun die radiale Schirmwirkung betrifft, so ist dieselbe reicher Anwendungen fähig; es kann hier nur auf das Problem der Schiffskompasse (Lord KELVIN) und der Pantergalvanometer (vgl. Art. Strommessung, **4**, S. 274, 290 bis 291, Fig. 84) hingewiesen werden. Sehr anschauliche Darstellungen hat H. DU BOIS[5] von der Schirmwirkung geliefert; die folgende ist eine Probe davon. Figur 101 zeigt den Schutz der äußeren Umgebung vor der Wirkung eines Polpaares durch eine dünne Zylinderschale; wie man sieht, bleibt das äußere Feld so gut wie unberührt.

Nach WILLS[6] beträgt die Schirmwirkung, wenn sie bei einfachem Panzer 150 ist, bei dreifachem 6400 und dabei braucht man $^1/_8$ Eisen weniger.

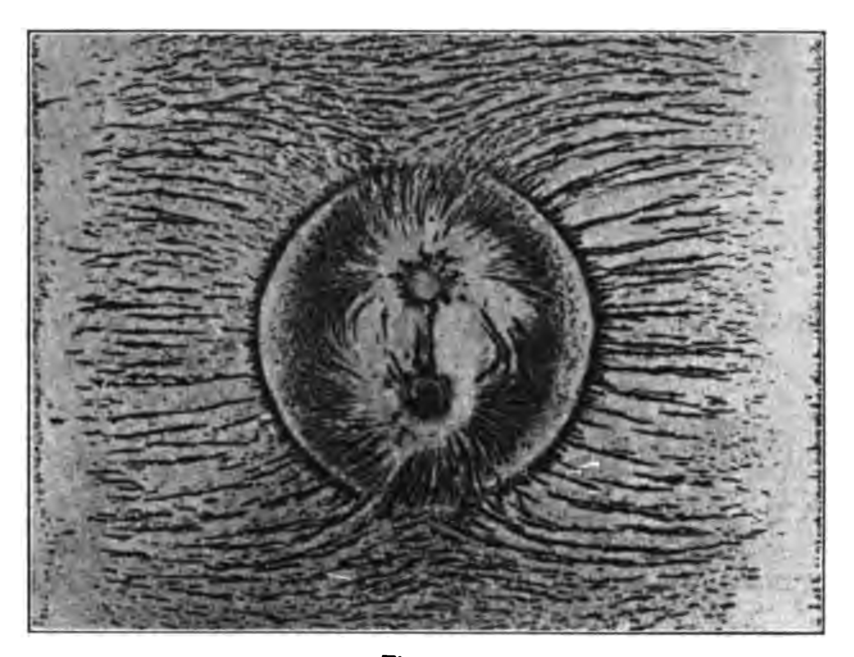
Die neueste Untersuchung über Schirmwirkung rührt von J. RUSSELL[7] her; sie behandelt das Schirmwirkungsverhältnis bei transversalem, longitudinalem und

---

[1] A. FÖPPL, Wied. Ann. **48**. 252. 1893. (Theorie). — P. BECK, Wied. Ann. **57**. 464; **59**. 84. 1896. — A. KOHN, Wied. Ann. **58**. 527. 1896. — [2] F. KIRSTÄDTER, Zur Magnetisierung eiserner Hohl- und Vollringe, In.-Diss. Leipz. 1896; Wied. Ann. **65**. 72. 1898. — [3] M. ASCOLI, N. Cim. (4) **3**. 5. 1896. — [4] H. DU BOIS, Wied. Ann. **65**. 403. 1898. — [5] H. DU BOIS, Wied. Ann. **65**. 1. 1898. — [6] C. P. WILLS, Phys. Review. **9**. 193. 1899. — [7] J. RUSSELL, Trans. Edinb. Soc. **40**. 631. 1903.

zirkularem Felde und verwandte Fragen; jedoch kann darauf nicht näher eingegangen werden.

**Schirmwirkung im Wechselfelde.** Eine besondere Art von Schirmwirkung wäre die, welche sich geltend machte, wenn die Erregung des Magnetismus durch sehr rasch wechselnde Kräfte, also z. B. durch Wechselströme erfolgte; sie müßte dann eine Funktion der Wechselzahl sein. Hierüber hat E. WILSON[1]



Figur 101.

an einem 12 Zoll dicken massiven Eisenzylinder mittels eingebohrter Löcher Beobachtungen angestellt und in der Tat eine sehr deutliche Gesetzmäßigkeit gefunden. In der folgenden Tabelle ist für verschiedene Wechselzahlen $n$ die

| $n$ | $\mathfrak{B}$ | % in der Achse | % im Mittel |
|---|---|---|---|
| 50 | 1000 | 95 | 93 |
| | 5000 | 84 | 80 |
| | 10000 | 88 | 81 |
| | 15000 | 96 | 89 |
| 150 | 1000 | 86 | 80 |
| | 5000 | 54 | 65 |
| | 10000 | 72 | 67 |
| | 15000 | 92 | 76 |
| 600 | 1000 | 50 | 65 |
| | 5000 | 10 | 53 |
| | 13000 | 10 | 58 |
| | 18000 | 70 | 79 |

[1] E. WILSON, Proc. R. Soc. 68. 218. 1901. — Andere Untersuchungen von STEINMETZ, J. J. THOMSON u. a. Vgl. die elektrotechn. Literatur.

maximale Induktion an der Oberfläche, ihr Minimalwert in der Achse und ihr Durchschnittswert für alle Tiefen, letztere beiden in Prozenten der ersten, angegeben. Wie man sieht, ist die Schirmwirkung für mittlere Felder am stärksten, und mit der Wechselzahl nimmt sie gewaltig zu.

**Abhängigkeit der Magnetisierung von den Dimensionen.** Die Betrachtungen der letzten Abschnitte zeigen, wie verwickelt die Verhältnisse sind, von denen die Verteilung der Magnetisierung über die Länge und über den Querschnitt eines Körpers abhängen. Man wird daher auch verstehen, warum die in früherer Zeit vielfach gepflegten Bemühungen, Formeln für die Abhängigkeit des magnetischen Momentes der Stäbe von ihren Dimensionen aufzustellen, ohne exaktes und allgemein bedeutsames Ergebnis bleiben mußten; denn diese Abhängigkeit ist doch eine unmittelbare Folge jener Verteilung. Immerhin haben die gedachten Formeln ein gewisses praktisches Interesse, und es seien deshalb einige von ihnen kurz aufgeführt.

Für den Einfluß der Länge liefert die schon oben (S. 146) angegebene GREENsche Formel durch Integration folgende Formel für das Gesamtmoment des Stabes

$$M = \pi \varkappa \varrho^2 \mathfrak{H}_0 \left( 2l - 2\frac{\varrho}{p} \frac{e^{\frac{p}{\varrho}l} - e^{-\frac{p}{\varrho}l}}{e^{\frac{p}{\varrho}l} + e^{-\frac{p}{\varrho}l}} \right) ,$$

wo $2l$ die Länge des Stabes ist (wegen $\varrho$ und $p$ s. o.); eine Formel, die zwar ihrerseits für nicht sehr dünne Stäbe nur eine Annäherung gibt, aus deren Gestalt man aber andererseits sofort erkennt, daß die hier folgenden empirischen Proportionalitätsformeln ebenfalls nur beschränkte Gültigkeit besitzen werden. Aus den Versuchen von LENZ und JACOBI, DUB u. a. folgt, daß die Potenz der Länge, mit welcher $M$ proportional ist, zwischen der 2. und $2^1/_2$., also für den Magnetismus $\mathfrak{J}$ der Volumeneinheit zwischen der 1. und $1^1/_2$. Potenz liegt, so daß man, wenn $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ist,

$$M \sim l^{2+\alpha} \ , \quad \mathfrak{J} \sim l^{1+\alpha}$$

setzen kann. Im Mittel dürfte etwa $\alpha = 0,3$ sein. Analog folgt für den Einfluß der Dicke $d$ aus den Versuchen von LENZ und JACOBI, MÜLLER, DUB, v. WALTENHOFEN, WIEDEMANN u. a., daß $M$ einer zwischen $^1/_2$ und 1 liegenden Potenz von $d$, also $\mathfrak{J}$ einer zwischen $-1$ und $-1\frac{1}{2}$ liegenden Potenz von $d$ proportional ist, so daß man, wenn wieder $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ist,

$$M \sim d^{1-\beta} \ , \quad \mathfrak{J} \sim d^{-(1+\beta)}$$

setzen kann. Da auch hier im Mittel etwa $\beta = 0,3$ ist, kann man $\alpha = \beta$ setzen und erhält durch Verknüpfung der für $l$ und $d$ gefundenen Formeln

$$M \sim l d^2 \left(\frac{l}{d}\right)^{1+\alpha} \qquad \mathfrak{J} \sim \left(\frac{l}{d}\right)^{1+\alpha} ,$$

d. h. die Magnetisierung der Volumeneinheit hängt nur von dem Verhältnis der Länge zur Dicke, d. h. nur von der Gestalt ab. Das Ergebnis genügt also, wie man sofort einsieht, dem THOMSONschen Ähnlichkeitssatze (S. 136)[1].

**Verschieden gerichtete Magnetisierungen und ihr Zusammenwirken.** Bei den meisten Untersuchungen über Magnetisierung handelt es sich um solche

[1] LENZ und JACOBI, Pogg. Ann. **47**. S. 235. 1839; **61**. S. 255. 1844. — v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. **52**. S. 87. 1865. — J. DUB, Pogg. Ann. **90**. S. 250. 1853; **94**. S. 580. 1855; **102**. S. 208. 1857; **120**. S. 557. 1863. — Der Elektromagnetismus, Berlin 1861. — JOH. MÜLLER, Pogg. Ann. **79**. S. 337. 1850; **82**. S. 181. 1851; G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **117**. S. 236. 1862. — D. Lehre v. d. Elektr. (3) **3**. S. 484 ff. — O. v. FEILITZSCH, Pogg. Ann. **80**. S. 321. 1850. — CH. RUTHS, a. a. O. — F. AUERBACH, Wied. Ann. **11**. S. 353. 1880. — A. v. WALTENHOFEN, Wied. Ann. **27**. S. 630. 1886; **32**. S. 133. 1887.

longitudinalen Charakters; es gibt aber, wie schon früher (S. 9) bemerkt wurde, auch andere Arten, namentlich die transversale und die zirkulare; letztere tritt z. B. auf bei einem Drahte, durch den ein Strom geführt wird, oder bei einem Stabe, Rohr oder Ringe, durch dessen Achse ein Strom geführt wird. Das betreffende Problem ist ein elektromagnetisches (s. Art. Elektromagnetismus); die Ergebnisse sind aber von rein magnetischem Interesse. Hierüber und ganz besonders über die Frage, wie derartig verschieden gerichtete Magnetisierungen zusammenwirken, existiert nun eine reiche Literatur. Hervorzuheben sind die Arbeiten von VILLARI, G. WIEDEMANN, W. v. SIEMENS, JANET, DECHARME, TOMLINSON, KNOTT, KLEMENCIC, HONDA, TROWBRIDGE und ADAMS[1]. Im allgemeinen hat sich dabei ergeben, erstens daß der Charakter der Kurven bei den verschiedenen Arten ebenfalls etwas verschieden ausfällt, und daß bei dem Zusammenwirken verschieden gerichteter Magnetisierungen eine gewisse Interferenz eintritt; es wird nämlich, was nach der Drehungshypothese auch ganz verständlich ist, Magnetismus der einen Art durch gleichzeitige oder nachträgliche andersartige Magnetisierung geschwächt; unter bestimmten Umständen, z. B. nach VILLARI und G. WIEDEMANN bei dicken Stäben kann aber auch eine Verstärkung eintreten, was offenbar mit der in solchen Fällen starken Ungleichförmigkeit der Magnetisierung nach Richtung und Stärke und der Superposition einzelner Komponenten der beiden Arten zusammenhängt. Am stärksten scheint die Interferenz bei Röhren einerseits und bei Ringen andererseits zu sein; man vergleiche z. B. die Versuche von W. H. SCHULTZE[2].

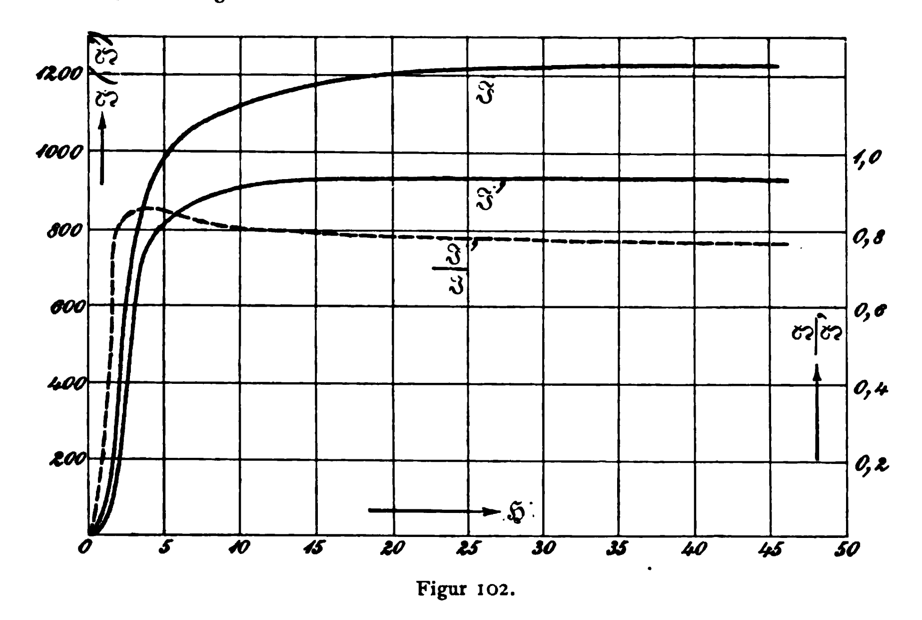
## Remanenz, Hysteresis und anderes.

**Remanenz.** Wenn man bei einer Versuchsreihe, bei der man, wie oben, wachsende Kräfte auf einen Eisenkörper einwirken läßt, zwischen je zwei Versuchen die Kraft vollständig aufhebt, so kann man die schon früher (S. 121) erwähnte Erscheinung der Remanenz oder des remanenten Magnetismus messend verfolgen und sich neben der Kurve für $\mathfrak{J}$ eine zweite für die remanente Magnetisierung $\mathfrak{J}'$ verschaffen. Als Beispiel diene folgende, einen langen, weichen Eisendraht betreffende Tabelle[3]:

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{J}'$ | $\mathfrak{J}':\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{J}'$ | $\mathfrak{J}':\mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,42 | 16 | 3,9 | 0,24 | 6,46 | 1050 | 864 | 0,82 |
| 0,70 | 33 | 9,9 | 0,30 | 8,64 | 1110 | 897 | 0,81 |
| 1,16 | 91 | 46 | 0,50 | 10,26 | 1130 | 910 | 0,80 |
| 1,44 | 195 | 133 | 0,68 | 11,91 | 1150 | 913 | 0,80 |
| 1,76 | 364 | 283 | 0,78 | 17,50 | 1190 | 929 | 0,79 |
| 2,14 | 507 | 418 | 0,82 | 23,61 | 1195 | 929 | 0,78 |
| 2,51 | 614 | 513 | 0,84 | 35,71 | 1230 | 933 | 0,76 |
| 2,88 | 702 | 598 | 0,85 | 45,51 | 1230 | 933 | 0,76 |
| 3,58 | 842 | 711 | 0,85 | | | | |
| 5,02 | 984 | 832 | 0,84 | | | | |

[1] P. VILLARI, Pogg. Ann. **126**. S. 103. 1865. — Mem. Acc. Bol. (5) **2**. S. 443. 1892; (5) **3**. S. 153. 1893. — N. Cim. **33**. S. 152. 193. 268. 1893. — G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **117**. S. 213. 1862; die Lehre von der Elektr. (3) **3**. S. 456. — W. SIEMENS, Berl. Ber. 1881, Juni; Wiss. Abh. S. 334. — P. JANET, Compt. rend. **108**. S. 398. 1889. — Es sei bei dieser Gelegenheit auch auf die Arbeiten dieses Physikers über Transversalmagnetismus hingewiesen: Sur l'aimantation transversale, Paris 1890; Compt. rend. 1887 u. 1888. — C. DECHARME, C. R. **110**. 1000. 1890; **111**. 340. 1890; **112**. 523. 1891. — C. G. KNOTT, Phil. Mag. (5) **30**. 244. 1890; Proc. Edinb. Soc. **18**. 124. 1891; Trans. Edinb. Soc. **37**. I. (2) **7**. 1892. — J. KLEMENCIC, Wied. Ann, **56**. 574. 1895. — K. HONDA, Univers. Tokio **11**. 283. 1899. — TROWBRIDGE und ADAMS, Sill. J. **11**. 175. 1901. — [2] W. H. SCHULTZE, Wied. Ann. **24**. 643. 1885. — [3] J. A. EWING, Magn. Induktion. S. 291.

Wie man aus Figur 102 ersieht, nimmt die Kurve für $\mathfrak{J}'$ einen ganz ähnlichen Verlauf wie die Kurve für $\mathfrak{J}$, unterscheidet sich aber von der MAXWELLschen theoretischen $\mathfrak{J}'$-Kurve in ihrem ersten Teile sehr wesentlich, indem sie gleich vom Nullpunkte aus in die Höhe steigt, d. h. schon die kleinste magnetisierende Kraft hinterläßt remanenten Magnetismus — eine Tatsache, die freilich noch gegenwärtig von manchen Seiten bestritten wird und, da es sich hier um eine Frage der Empfindlichkeit des Meßinstrumentes handelt, in ihrer äußersten Konsequenz wohl auch kontrovers bleiben wird (s. w. u.). Man sieht übrigens ein, daß diese Kontoverse mit der oben (S. 199) erwähnten Proportionalität oder Nichtproportionalität von $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{H}$ für sehr kleine $\mathfrak{H}$ innig zusammenhängt. In neuester Zeit hat HOLITSCHER[3] diese Frage an einem Ellipsoid aus Juraeisen sehr exakt geprüft und gefunden, daß nach $\mathfrak{H} = 0{,}18$ noch 18, nach $\mathfrak{H} = 0{,}055$ noch immer 6% des Magnetismus zurückblieben; er erklärt daher, daß auch bei außer-




Figur 102.

ordentlich kleiner Magnetisierung Remanenz auftritt. Jedenfalls ist für kleine Kräfte $\mathfrak{J}'$ sehr klein, wächst dann schneller, dann wieder langsamer, um sich schließlich, und zwar, wie man sieht, rascher als $\mathfrak{J}$ der Sättigung zu nähern; und zwar entsprechen den drei Teilen der $\mathfrak{J}$-Kurve die nämlichen der $\mathfrak{J}'$-Kurve. Wie hoch sich die Kurve erhebt und wie groß das Maximum von $\mathfrak{J}'$ ist, hängt zunächst in hohem Grade vom Material ab, und zwar in der Weise, daß für Stoffe mit kleinem $\mathfrak{J}$ sich $\mathfrak{J}'$ bis zu einem relativ großen Bruchteile von $\mathfrak{J}$ erhebt, z. B. für glasharten Stahl, für Stoffe mit großem dagegen, z. B. für weiches Schmiedeeisen, $\mathfrak{J}'$ nur einen kleinen Bruchteil von $\mathfrak{J}$ ausmacht. Man kann dies Verhalten sehr anschaulich darstellen, indem man den echten Bruch $\mathfrak{J}'/\mathfrak{J}$ bildet und graphisch darstellt, wie dies in der Figur geschehen ist (Ordinatenskala rechts). Hier erhebt sich dieser Bruch also bis zu $^5/_6$, und man sieht zugleich, daß er zwar mit $\mathfrak{H}$ stark ansteigt, dann aber ein Maximum erreicht und schließlich wieder etwas abfällt, d. h. daß sich $\mathfrak{J}'$ rascher als $\mathfrak{J}$ seinem Maximum nähert. Das Maximum von $\mathfrak{J}'$ scheint den Wert 1200 nirgends zu überschreiten. Den echten Bruch $\mathfrak{J}'/\mathfrak{J}$ nennt man häufig R e t e n t i o n s f ä h i g k e i t.

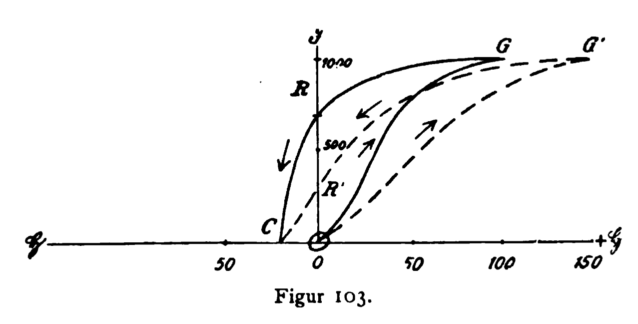
Wie die Kurve für $\mathfrak{J}$, so wird natürlich auch die für $\mathfrak{J}'$ verschieden aus-

1 P. HOLITSCHER, Drude Ann. 3. 683. 1900. Inaug.-Diss. Zürich 1900.

fallen, je nachdem man $\mathfrak{H}_0$ oder $\mathfrak{H}$ als Abszisse wählt. Bei $\mathfrak{J}'$ kommt aber noch ein anderer, und zwar sehr wesentlicher Umstand in Betracht, nämlich die entmagnetisierende Kraft des remanenten Magnetismus selbst. In Ringen und sehr langen Stäben findet eine solche Gegenwirkung nicht statt, wohl aber bei kurzen Stäben, Ellipsoiden und Kugeln, und sie kann alsdann so groß werden, daß sie den ganzen remanenten Magnetismus vernichtet. Hat man z. B. ein Ellipsoid mit dem Achsenverhältnis 1 : 200, so ist die Gegenkraft (allgemein $N\mathfrak{J}'$) nach der Tabelle auf S. 143 gleich 0,0016 $\mathfrak{J}'$, also z. B. für $\mathfrak{J}' = 1000$ (was nicht selten vorkommt) gleich 1,6, dieser Gegenkraft kann leicht ein Magnetismus von etwa 50 entsprechen, und folglich wird $\mathfrak{J}'$ von 1000 auf 950 herabgedrückt; bei einem Achsenverhältnis von 1 : 50 wird es unter Umständen schon auf die Hälfte reduziert usw. Lange Stäbe und Ringe werden also stets größeres $\mathfrak{J}'$ aufweisen als gedrungene Körper aus gleichem Stoff, und man muß sich stets darüber orientieren, inwieweit der Mangel oder die Geringfügigkeit der Remanenz nur scheinbar, d. h. der Gestalt des Körpers zuzuschreiben, und wie weit sie eine wirkliche Eigentümlichkeit des Materials ist.

Endlich kann man, statt $\mathfrak{J}'$, auch die remanente Induktion $\mathfrak{B}'$ einführen, und, wie das neuerdings HOLITSCHER[1] getan hat, als Funktion von $\mathfrak{H}$ oder von $\mathfrak{B}$ darstellen.

**Koerzitivkraft.** Die Eigenschaft der Eisenkörper, nach dem Aufhören der magnetisierenden Kraft nicht völlig unmagnetisch zu werden, sondern einen gewissen remanenten Magnetismus zu bewahren, nannte man früher ihre Koerzitivkraft. Dieser zunächst ganz vage Begriff hat dann durch HOPKINSON eine strenge Bedeutung erhalten. Wenn nämlich die auf null reduzierte Kraft noch Magnetismus zurückläßt, so wird die Anwendung einer bestimmten negativen, d. h. entgegengesetzt gerichteten Kraft erforderlich sein, um den Magnetismus auf null zu reduzieren; diesen negativen Kraftwert oder vielmehr seinen absoluten Betrag nennt man die Koerzitivkraft des Körpers. In der Figur 103[2], die sich auf ausgeglühten Stahldraht bezieht, stellt $OG$ die Magnetisierungskurve bei auf-, $GC$ die bei absteigenden Kräften dar; $OR$ ist der remanente Magnetismus, $OC$ ist die Koerzitivkraft. Wenn man die oben für die Remanenz wiedergegebene Untersuchung derart vervollständigt, daß man beim jedesmaligen Unterbrechen der Kraft noch die zur Aufhebung des Magnetismus erforderliche negative Kraft bestimmt, so erhält man auch für diese, d. h. für die Koerzitivkraft, Werte, die mit der magnetisierenden Kraft ansteigen und deren Kurve ähnlich wie die in Figur 102 verläuft; nur sind die Ordinaten für sie $\mathfrak{H}$-Werte, und zwar, wie sich zeigt, im Verhältnis zu den $\mathfrak{J}'$-Werten sehr kleine $\mathfrak{H}$-Werte, d. h. es genügt schon eine sehr kleine negative Kraft, um einen sehr großen positiven remanenten Magnetismus zu zerstören. Bei weichem Schmiedeeisen bewegt sich die Koerzitivkraft, je nach der Größe der voraufgegangenen magnetisierenden Kraft in dem Bereiche von 1 bis 3 oder 4; bei hartem Stahl, wo ja auch die Remanenz größer ist, kann die Koerzitivkraft bis 30 und selbst 80 steigen (s. w. u.).



Figur 103.

Über das Verhältnis von Koerzitivkraft und Remanenz sind, in Anbetracht der vielfach schiefen Auffassung, die man findet, noch einige Bemer-

[1] HOLITSCHER, a. a. O. Vgl. insbesondere die Kurventafel 4, S. 709. — [2] Die Linie um den Nullpunkt soll der Buchstabe $O$ sein.

kungen zu machen. In erster Linie stehen diese Begriffe allerdings in dem einfachen Verhältnis von Ursache und Wirkung; die Koerzitivkraft ist daher, geometrisch-graphisch gesprochen, eine Abszisse, die Remanenz eine Ordinate. Damit ist aber das Wesen ihres Verhältnisses nicht erschöpft. Denn während die Remanenz, außer von der Natur des Materials, ganz wesentlich auch von der Form des Eisenkörpers abhängt, ist die Koerzitivkraft lediglich ein Charakteristikum des Materials. Man sieht dies sehr deutlich bei Betrachtung der Figur 103; hier beziehen sich die ausgezogenen Linien auf einen endlosen Körper, z. B. einen Ring, sie stellen also die Normalkurve dar; dagegen gelten die gestrichelten Linien für einen Körper mit entmagnetisierender Kraft der Enden (im vorliegenden Falle ist etwa $N = 0{,}05$); bei jenem Körper ist $\mathfrak{J}' = OR = 700$, bei diesem nur noch $OR' = 300$, obgleich der Magnetisierungsprozeß in beiden Fällen bis zu dem gleichen Werte von $\mathfrak{J} = 1000$ getrieben wurde; mit anderen Worten: die Retentionsfähigkeit des endlosen Körpers ist 70%, die des Körpers mit Enden nur 30%, obwohl beide aus genau demselben Material sind. Dagegen ist eben deshalb die Koerzitivkraft in beiden Fällen die gleiche, nämlich $OC$. Ebenso würden in Figur 92 die zu den aufsteigenden, auf Drähte verschiedener Länge bezüglichen Kurven gehörigen absteigenden Kurven zwar die Ordinatenachse in sehr verschiedenen, die negative Abszissenachse aber alle in demselben Punkte schneiden. — Man kann dieses Verhältnis von Koerzitivkraft und Remanenz auch so ausdrücken: Die Remanenz ist desto größer, je größer die Koerzitivkraft des Materials und je kleiner die entmagnetisierende Kraft der Gestalt des Körpers ist.

**Magnetische Nachwirkung.** Die Tatsache der Remanenz beweist, daß der magnetische Zustand eines Körpers, auf den zurzeit keine Kräfte wirken, von denen, die vorher auf ihn gewirkt haben, oder, wie man es ganz allgemein ausdrücken kann, von seiner „Vorgeschichte", ganz wesentlich abhängt. Diesen Satz kann man nun verallgemeinern für den Fall, daß der Körper auch zurzeit magnetisierenden Kräften unterliegt, aber anderen als früher; sein magnetischer Zustand wird alsdann nicht nur von den jetzigen, sondern auch von den früheren Kräften, d. h. von der ganzen Vorgeschichte abhängen. Diese Tatsache kann man ganz allgemein als „magnetische Nachwirkung" bezeichnen, den Namen „Hysteresis" aber, der ja sprachlich etwa dasselbe besagt, für diejenigen Nachwirkungserscheinungen oder, richtiger gesagt, für diejenigen Untersuchungsmethoden und ihre Ergebnisse reservieren, die in neuerer Zeit, im Zusammenhange mit der Entwickelung der magnetischen Technik, in den Vordergrund getreten sind. Es mögen zunächst jene älteren Arbeiten erledigt werden[1].

**Sätze von G. Wiedemann[2],** (zum Teil zuerst von ihm selbst, zum Teil schon vorher von Joule, Poggendorff, Abria, Ritchie, Jacobi, Mariani, Plücker u. a. gefunden). 1. Bei der ersten Magnetisierung eines Stabes wächst der $TM$ (temporäre Magnetismus) anfangs wie die Kraft, dann rascher, zuletzt langsamer; die Periode des rascheren Wachsens ist bei langen Stäben ausgeprägter als bei kurzen, und das Maximum wird bei langen, dünnen Stäben schneller erreicht als bei kurzen, dicken. 2. Bei der ersten Magnetisierung ist der Verlauf des $PM$ (permanenten Magnetismus) analog. 3. Ein entgegengesetzter Strom kann entgegengesetztes $TM$ und doch noch ursprüngliches $PM$ bewirken; die zur Vernichtung des $PM$ erforderliche Kraft ist kleiner als die zur Erzeugung erforderlich gewesene. 4. Ein auf diese Weise entmagnetisierter Stab erhält durch noch-

[1] In dem hier gegebenen Sinne ist der Ausdruck „Magnetische Nachwirkung" zuerst (1878) von Fromme, dann von Auerbach u. a. benutzt worden. Später ist dann, nachdem der Ausdruck „Hysteresis" die Oberhand gewonnen hatte, der Ausdruck „magnetische Nachwirkung" für ganz andere Erscheinungen, nämlich für zeitliche Änderungen des Magnetismus vorgeschlagen worden; von diesen wird weiter unten die Rede sein. In einer gewissen Beziehung zueinander stehen, wie sich zeigen wird, beide Klassen von Erscheinungen. — [2] G. Wiedemann, Pogg. Ann. **100**. S. 235. 1857; **106**. S. 169. 1859; **117**. S. 195. 1862; Wied. Ann. **27**. S. 376. 1886; d. Lehre v. d. Elektr. Bd. 3 (3. Aufl.). Daselbst auch die weitere Literatur.

malige Anwendung der negativen Kraft (oder einer kleineren) kein negatives *PM*, wohl aber durch eine ebenso große positive Kraft ein positives *PM*; der Stab ist also nur scheinbar unmagnetisch geworden und besitzt in Wahrheit eine Asymmetrie zugunsten der ersten Magnetisierungsrichtung. 5. Bei wiederholter Hin- und Hermagnetisierung durch dieselbe Kraft wächst das *PM* anfangs etwas, wird aber allmählich konstant; eine größere Kraft steigert aber das *PM* von neuem. 6. Alle obigen Erscheinungen treten am meisten im harten Stahl hervor.

**Formeln von BOUTY**[1]. Die Dauer der Kraft hat keinen Einfluß auf das *PM*, wohl aber ihre Wiederholung, und zwar ist nach $x$-maligem Magnetisieren $PM = A - B/x$ (z. B. $A = 57{,}78$, $B = 6{,}32$). Das Verhältnis $A/(A - B)$, d. h. des schließlichen zum erstmaligen *PM* nimmt mit wachsender Kraft ab. Dagegen ist das Verhältnis $\mathfrak{H}'/\mathfrak{H}$, d. h. der Kraft, die ein bestimmtes *PM* nach einmaligem Wirken erzeugt, zu einer solchen, die es nach häufigem Wirken tut, ziemlich konstant für verschiedene $\mathfrak{H}$, nämlich etwa 1,06. In manchen Fällen ist der obigen Formel für *PM* eine exponentielle vorzuziehen.

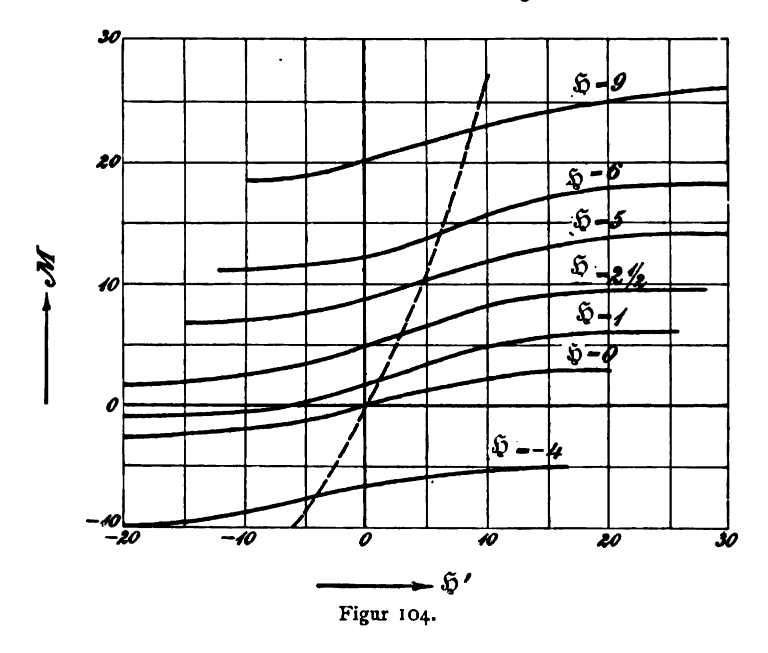
**Untersuchungen von FROMME**[2]. Die älteren von diesen Untersuchungen sind fast durchweg auf Stahl bezüglich. Sobald das *PM* für ein bestimmtes $\mathfrak{H}$ erreicht ist, verhält sich der Körper für alle kleineren $\mathfrak{H}$, wie wenn er keine Koerzitivkraft hätte. Das Verhältnis $PM_1/PM_\infty$ ist für kleine Kräfte nahezu 1, nimmt dann bis zu einem Minimum ab und schließlich wieder bis 1 zu. Wiederholung einer Erstlingskraft liefert gewöhnlich abnehmende *TM*, dagegen Wiederholung einer auf eine etwas kleinere folgenden Kraft, zunehmende *TM*; allgemein hängt die Zunahme oder Abnahme des *TM* durch Wiederholung einer Kraft von der Größe und Wiederholung der vorhergegangenen kleineren Kraft ab. Andererseits nimmt *PM* bei Wiederholung stets zu, das verschwindende Moment *VM* stets ab, und zwar um Beträge, die sich mit der Differenz $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$ der wirkenden und der nachwirkenden Kraft der null nähern. Eine Kraft $\mathfrak{h}$, die auf eine größere $\mathfrak{H}$ folgt, läßt *PM* unverändert; dagegen erzeugt ihre Wiederholung abnehmende *TM*, und das schließliche $TM_\infty$ ist von $\mathfrak{H}$ unabhängig. Die Nachwirkung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{h}$ läßt sich in der Form $N = c\,\mathfrak{h}^a(\mathfrak{H} - \mathfrak{h})^b$ darstellen, wo $b$ ein echter Bruch und $a$ vielleicht nahezu 1 ist; für $\mathfrak{h} = 0$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{H}$ wird also $N = 0$, für einen gewissen Zwischenwert wird es ein Maximum.

Neuerdings hat FROMME die analogen Versuche auch bei weichen Eisenstäben und besonders bei Drahtbündeln durchgeführt und gefunden, daß hier die Erscheinungen wesentlich andere werden; insbesondere ändert hier auch eine kleinere Kraft das *PM*, selbst wenn es sehr groß ist, ab, und zwar je nach dem Werte der Kraft in erhöhendem oder verringerndem Sinne.

**WALTENHOFENsches Phänomen.** Wie zuerst v. WALTENHOFEN[3] beobachtete und später FROMME[4], AUERBACH[5], RIGHI[6], PEUCKERT[7] u. a. näher untersuchten, hat bei weichem Eisen die Art und Weise, wie man die Kraft zu wirken anfangen resp. aufhören läßt, einen oft nicht unwesentlichen Einfluß auf den *PM*, resp. *TM*. Unterbricht man nämlich den magnetisierenden Strom plötzlich, so bleibt ein geringerer *PM* übrig, als wenn man ihn durch Einschalten von Widerständen allmählich auf null reduziert oder den Eisenstab allmählich seiner Wirkung entzieht. In Fällen, in denen schon bei allmählicher Unterdrückung der Kraft ein nur kleiner *PM* auftritt, kann bei plötzlicher Stromunterbrechung sogar negativer

[1] Von den zahlreichen Arbeiten BOUTYs s. bes. Compt. rend. **80**. S. 650 u. 879; **81**. S. 88. Ann. Ec. norm. (2) **4**. S. 9 u. 49. 1875. — [2] C. FROMME, Pogg. Ann. Ergzbd. **7**. S. 390; Wied. Ann. **4**. S. 76; **5**. S. 345; **18**. S. 442; **43**. S. 181; **44**. S. 138; **45**. S. 798. 1875 bis 1892. Auf den weiteren, sehr reichen Inhalt dieser Abhandlungen kann hier leider nicht eingegangen werden. — [3] A. v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. **48** (2). S. 564. 1863; Pogg. Ann. **120**. S. 650. — [4] C. FROMME, Wied. Ann. **5**. S. 345. 1878; **13**. S. 326. 1881; **18**. S. 442. 1883; **44**. S. 138. 1891. — [5] F. AUERBACH, Wied. Ann. **14**. S. 308. 1881. — [6] A. RIGHI, Compt. rend. **90**. S. 688. 1880; Mem. di Bol. (4) **1**. 1880. — [7] W. PEUCKERT, Wied.Ann. **32**. S. 291. 1887.

Magnetismus, die sogenannte „anomale Magnetisierung" eintreten. Diese merkwürdige Erscheinung könnte zwei verschiedene Ursachen haben, sie könnte nämlich entweder durch die beim plötzlichen Stromöffnen im Eisen erzeugten Induktionsströme bewirkt sein und würde alsdann ihr eigentliches Interesse verlieren; sie könnte aber auch rein magnetischer Natur sein und würde dann, wie man sofort einsieht, zu wichtigen Folgerungen Anlaß geben. Jene Ansicht wird z. B. von G. WIEDEMANN[1], diese von v. WALTENHOFEN in seiner Theorie der magnetischen Oszillationen, FROMME[2], AUERBACH[3], EWING[4] vertreten und durch verschiedenartige Versuche und Erwägungen gestützt; hier sei nur zugunsten der letzteren Auffassung darauf hingewiesen, daß in dem verwandten Gebiete der Elastizität die analoge Erscheinung (z. B. die verschiedene Einstellung einer Federwage nach behutsamer und nach plötzlicher Entlastung) ebenfalls vorkommt, und daß sie dort jedenfalls molekular-elastischer Natur ist. Neuerdings hat sich auch ZIELINSKI[5] der WALTENHOFENschen Theorie angeschlossen.




Figur 104.

Eine Verallgemeinerung des Phänomens ist von AUERBACH im Zusammenhange mit seinen gleich anzuführenden Untersuchungen in den Worten ausgesprochen worden: Bei plötzlicher Änderung der magnetisierenden Kraft fällt der ihrem Endwert entsprechende Magnetismus kleiner oder größer aus als bei allmählicher Änderung, je nachdem die Kraft verkleinert oder vergrößert wurde.

**Untersuchungen von AUERBACH[6].** Die allgemeinste Fragestellung lautet offenbar: Wie hängt der Magnetismus von der jetzt wirkenden Kraft $\mathfrak{H}$ und den ihr vorangegangenen Kräften $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, ... ab? In erster Annäherung ist hierauf zu antworten: Der Magnetismus $M$ setzt sich zusammen aus einem der Kraft $\mathfrak{H}$ entsprechenden Normalmagnetismus $M_0$ und einem Nachwirkungswerte $N$, und für den letzteren maßgebend ist diejenige unter den vorangegangenen Kräften,

---

[1] G. WIEDEMANN, D. Lehre v. d. Elektr. (3) **4**. S. 279. 1885; Wied. Ann. **37**. S. 610. 1889. — [2] C. FROMME, zuletzt Wied. Ann. **33**. S. 236. 1888 und **44**. S. 138. 1891. — [3] F. AUERBACH, Wied. Ann. **16**. 554. 1882. — [4] J. A. EWING, Magn. Ind. (s. o.) — [5] ZIELINSKI, Mitt. a. d. Telegr.-Ing.-Bur. d. R.-Postamtes **2**. 46. 1896. — [6] F. AUERBACH, Wied. Ann. **14**. S. 308. 1881. — Vgl. auch Encycl. Brit. **9**. Ed. Art. Magnetism, wo ein Auszug aus der Arbeit gegeben ist.

auf die nur noch solche folgen, die der Größe nach zwischen ihr und $\mathfrak{H}$ liegen. In vielen Fällen ist diese Regel genau, in manchen aber erfährt sie Abweichungen und bedarf alsdann einer zweiten Annäherung. Der theoretisch und praktisch wichtigste dieser letzteren Fälle ist der, wo unter den vorangegangenen Kräften $\mathfrak{H}$ selbst vorkommt, weil dann die Regel zweideutig wird. Es seien z. B. in der Reihe $\mathfrak{H}_{10}\mathfrak{H}\mathfrak{H}_5\mathfrak{H}$ alle Kräfte positiv und die Indizes Andeutungen für ihre Größenverhältnisse, dann bleibt zweifelhaft, ob das Endergebnis $M_{10}$ oder $M_5$ sein werde; tatsächlich liegt es zwischen beiden Werten, aber näher an $M_{10}$. Um $M_5$ zu erzielen, muß man vielmehr noch eine Kraft $\mathfrak{H}_0 < \mathfrak{H}$ einschieben und überdies die Glieder $\mathfrak{H}_5\mathfrak{H}$ mehrmals wiederholen, so daß folgende Reihe entsteht: $\mathfrak{H}_{10}\mathfrak{H}\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_5\mathfrak{H}\mathfrak{H}_5\mathfrak{H}\ldots$ Eine weitere Abweichung läßt sich folgendermaßen aussprechen: von zwei vorangehenden Kräften, die auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{H}$ (der Größe nach) liegen, ist die zweite ausschließlich maßgebend, wenn sie weiter von $\mathfrak{H}$ abliegt als die erste, andernfalls bestimmen beide Kräfte gemeinschaftlich die Nachwirkung, die erste allein ist nie maßgebend. Mit Rücksicht auf diese und andere Umstände kann man nunmehr daran gehen, für ein gegebenes $\mathfrak{H}$ den Magnetismus $M$ als Funktion der maßgebenden vorangehenden Kraft $\mathfrak{H}'$ zu ermitteln und diese Funktion als eine Kurve darzustellen. In Figur 104 sind diese „Nachwirkungskurven" für verschiedene Werte von $\mathfrak{H}$ wiedergegeben. Wie man sieht, sind sie, bis auf ihre geringere Erhebung, den Magnetisierungskurven selbst ganz ähnlich. Eine von ihnen, nämlich die für $\mathfrak{H} = 0$, ist die Kurve des remanenten Magnetismus, ihr Inflexions- oder Symmetriepunkt liegt im Nullpunkt; dagegen sind die Inflexionspunkte der übrigen Kurven nach rechts oder links verschoben, ihre Abszissen $\mathfrak{H}'$ sind nämlich gleich den betreffenden $\mathfrak{H}$-Werten. Hiernach erhält man den Satz: Die Nachwirkung hängt in derselben Weise von der Differenz der wirkenden und der nachwirkenden Kraft ab, wie die Hauptwirkung von der wirkenden Kraft. Verbindet man alle Inflexionspunkte, so erhält man (vgl. die unterbrochene Linie) die Kurve des Normalmagnetismus als reine Funktion der wirkenden Kraft.

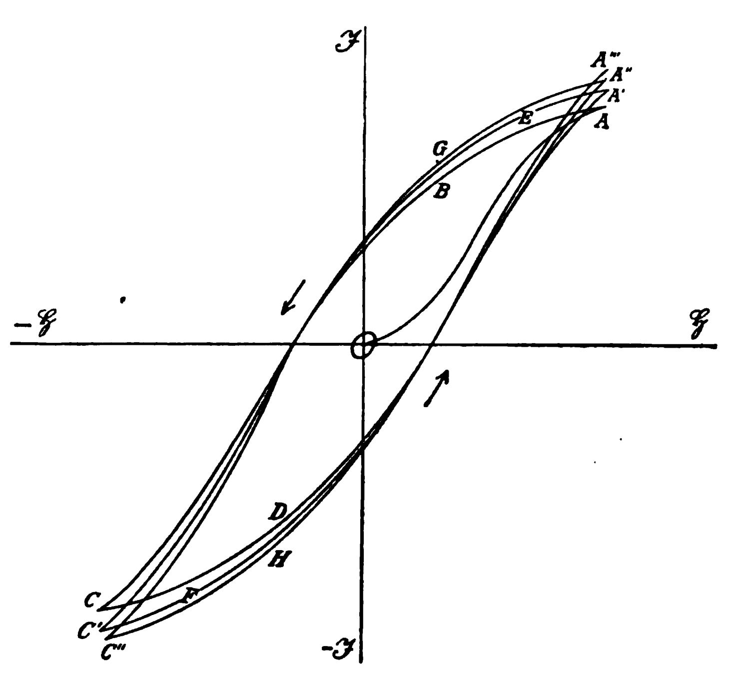
Im Anschlusse an AUERBACH hat BACHMETJEFF[1] den „normalen" und den remanenten Magnetismus gerader und ringförmiger Magnete untersucht.

**Entmagnetisierung.** Schließlich ist aus dem obigen noch eine wichtige Folgerung zu ziehen in bezug auf die Zurückführung eines Eisenkörpers in den unmagnetischen Zustand. Eine einfache und zuverlässige Methode hierfür besteht bekanntlich in dem Ausglühen (s. w. u.). Aber es fragt sich, ob es nicht auch ein magnetisches Verfahren gibt. Daß die Anwendung einer Kraft, die an sich einen dem bestehenden entgegengesetzten $PM$ erzeugen würde, nicht imstande ist, letzteren zu vernichten, und daß dies überhaupt durch Anwendung einer beliebigen Gegenkraft nicht möglich ist, ist nach dem Gesagten klar; bei geeigneter Wahl der Gegenkraft würde man nämlich zwar $PM = 0$ erhalten, der Körper würde aber immer noch eine Asymmetrie gegen neue magnetische Einwirkungen aufweisen. Dagegen findet in den AUERBACHschen Versuchen die folgende, von verschiedenen Seiten mit Erfolg benutzte Entmagnetisierungsmethode ihre Begründung: man lasse der Reihe nach die Kräfte $-\mathfrak{H}$, $+(\mathfrak{H} - \varepsilon)$, $-(\mathfrak{H} - 2\,\varepsilon)$, $+(\mathfrak{H} - 3\,\varepsilon)$, ... bis zur Null herab wirken, wo $\mathfrak{H}$ desto größer zu wählen ist, je stärker magnetisch der zu entmagnetisierende Körper ist, aber lieber etwas zu groß als zu klein, und wo $\varepsilon$ möglichst klein gewählt werden muß, um den Zweck möglichst vollständig zu erreichen. Dasselbe Verfahren kann mit entsprechender Modifikation auch dazu dienen, um, statt des Nullzustandes, einen bestimmten magnetischen Normalzustand herzustellen. Die Entmagnetisierungsmethode durch Stromwechsel ist hinsichtlich der erzeugten magnetischen Sym-

[1] P. BACHMETJEFF, Rep. der Phys. **27**. S. 147. 1891.

metrie dem Ausglühen nach EWING sogar noch überlegen, während andere freilich das Gegenteil behaupten.

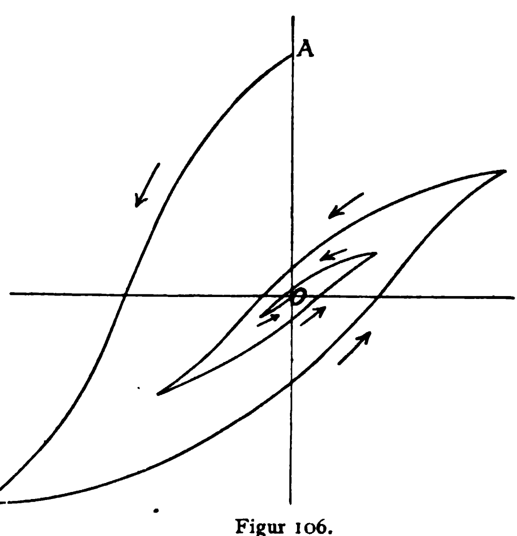
**Hysteresis.** Wir kommen nun zu den neueren Untersuchungen der Hysteresis im engeren Sinne, wie sie sich bei geschlossenen Prozessen, bei denen ein Körper eine zyklische Folge von magnetischen Zuständen durchmacht, bemerklich macht. Diese Frage steht mit der des Energieumsatzes in engstem Zusammenhange und ist theoretisch schon oben (S. 153 ff.) erörtert worden. Hier handelt es sich um die experimentelle Ausarbeitung und die einzelnen dabei auftretenden Probleme.




Figur 105.

Zunächst ist festzustellen, daß der stationäre Zustand der zyklischen Veränderung, wie er z. B. durch die Figur 71 dargestelt wird, sich nicht sofort, sondern erst nach einer Periode der Einrichtung herstellt. Man erhält also etwa das Bild der Figur 105, die als eine einzige fortlaufende Kurve

*OABCDA'EC'FA''GC''HA'''*

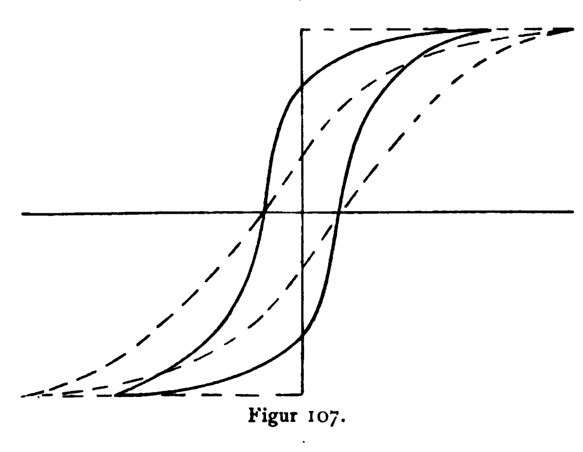



Figur 106.

aufzufassen ist; nur muß man sich nicht gerade drei, sondern je nach den Umständen eine mehr oder weniger große Anzahl solcher Schleifen denken. Man kann diese Erscheinung magnetische Akkomodation nennen: erst nachdem sie vorüber, erhält man das, was man als die endgültige Hysteresisschleife bezeichnen darf. Übrigens kann man der Figur noch eine andere Bedeutung geben, indem man die Kurve rückwärts durchläuft, von *A* anfangend und bei *O* endigend, so daß man dann den Vorgang der Entmagnetisierung eines ursprünglich magnetischen Körpers hätte; indessen würde man so nicht zum Ziele gelangen, man muß vielmehr (vgl. o. S. 216) allmählich abnehmende

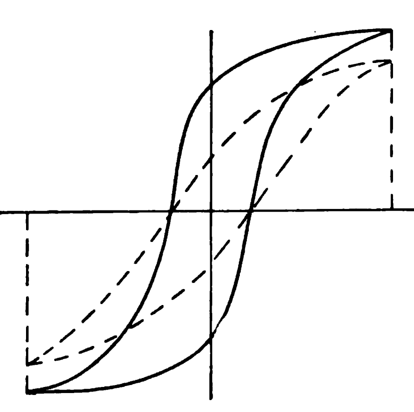
Kräfte wirken lassen, also so verfahren, wie es etwa die Figur 106 andeutet. Im folgenden nehmen wir an, daß der definitive Zustand erreicht ist.

Es fragt sich nun, wovon die Form der Hysteresisschleife und insbesondere ihre Flächengröße, also der Energieverlust abhängt. Da kommen denn zunächst drei Faktoren in Betracht, die sich unmittelbar darbieten: die Natur des Materials, die Form des Körpers und die Kraft, bis zu der hinaufgegangen wird. Vom Material soll hier nicht gesprochen werden (s. d. folg. Art.). Was die Form betrifft, so braucht man nur an das bei der Remanenz Gesagte und an die betreffende Figur 103 anzuknüpfen und diese Figur zu der neuen Figur 107 zu ergänzen, um einzusehen, daß die Form keinen oder doch keinen primären Einfluß auf die Flächengröße hat; denn die ausgezogene und die gestrichelte Fläche haben gleiche Basis und gleiche Höhe und sind daher in erster Annäherung gleich groß; d. h. bei gleicher maximaler Magnetisierung ist der Energieverlust von der Form bzw. dem Entmagnetisierungsfaktor unabhängig. Ganz anders natürlich, wenn man für beide Körper den Prozeß nicht bis zu der gleichen Magnetisierung, sondern bis zu der gleichen Kraft treibt; dann bleibt (Figur 108) die gestrichelte Fläche hinter der vollen an Größe weit zurück, d. h. der Energieverlust ist bei offenen Formen kleiner als bei geschlossenen. Messungen hierüber sind vielfach angestellt worden, es muß aber dafür auf die technische Literatur verwiesen werden.



Figur 107.

Nun kommen wir zu dem interessantesten Punkte, der Abhängigkeit des Energieumsatzes $U$ von der maximalen Kraft oder, was offenbar dem Wesen der Beziehung näher kommt, zur maximalen Magnetisierung $\mathfrak{J}$ bzw. Induktion $\mathfrak{B}$. Man könnte unter oberflächlicher Anwendung des Energieprinzips vermuten, es möchte $U$ mit $\mathfrak{J}^2$ bzw. $\mathfrak{B}^2$ proportional sein; aber schon WARBURG[1] fand das nicht bestätigt. Später hat dann STEINMETZ[2] gezeigt, daß die Beziehung



Figur 108.

$$U = \eta' (\mathfrak{J}_{\max} - \mathfrak{J}_{\min})^{1,6}$$

bzw. $$U = \eta (\mathfrak{B}_{\max} - \mathfrak{B}_{\min})^{1,6}$$

die Verhältnisse annähernd darstellt; das Minimum kann dabei auch negativ sein — vollständiger Zyklus nach beiden Seiten — und ist dann natürlich zu addieren. Der Exponent 1,6 findet sich freilich nicht in allen Untersuchungen wieder; er schwankt oft bis 1,8 hinauf und 1,3 herab; in besonderen Fällen konnte EWING[3] sogar $U$ als lineare Funktion darstellen. Die folgende Tabelle

[1] E. WARBURG, Wied. Ann. **13**. 141. 1881. — [2] P. CH. STEINMETZ, Elektrot. Z. **12**. 62. 1891; **13**. 519. 1892. — Electrician **28**. 384. 408. 425. 1892. — [3] J. A. EWING, Electrician **28**. 635. 1892. — Vgl. zur Hysteresis auch EWING, Proc. R. Soc. **54**. 75. 1893.

stellt nach BAILY[1] den Hysteresisverlust in Prozenten des maximalen für verschiedene Magnetisierungen dar:

| $\mathfrak{J}$ | $U$ % | $\mathfrak{J}$ | $U$ % |
|---|---|---|---|
| 400 | 9 | 1100 | 44 |
| 500 | 12 | 1200 | 56 |
| 600 | 16 | 1300 | 71 |
| 700 | 20 | 1400 | 85 |
| 800 | 25 | 1500 | 95 |
| 900 | 31 | 1600 | 99 |
| 1000 | 37 | 1700 | 100 |

In neuester Zeit hat MAURACH[2] den Exponenten $x$ in der Energiegleichung in weitem $\mathfrak{H}$-Bereich bestimmt (an einem Eisenringe) und folgendes gefunden ($\varkappa$ Suszeptibilität des Materials, also $\mathfrak{J}/\mathfrak{H}$, $E$ Energieverbrauch während eines Zyklus in absolutem Maße):

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\varkappa$ | $E$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,31 | 4,78 | 15,4 | 0,12 | 2,5 |
| 1,16 | 27,8 | 23,9 | 15,4 | 2,2 |
| 3,11 | 357 | 115 | 1107 | 1,9 |
| 7,5 | 1008 | 134 | 5262 | 1,7 |
| 12,9 | 1356 | 105 | 8162 | 1,3 |
| 18,4 | 1450 | 79 | 8926 | 1,2 |
| 27,8 | 1567 | 56,4 | 9817 | 1,2 |

Wie man sieht, nimmt $x$ mit wachsendem $\mathfrak{H}$ auf die Hälfte ab.

Läßt man andererseits den STEINMETZschen Exponenten gelten, so frägt es sich noch nach dem Werte des Faktors $\eta$ bzw. $\eta'$; hierüber sind zahlreiche, zum Teil nicht übereinstimmende Angaben zu finden. Nur so viel läßt sich sagen, daß $\eta$ bzw. $\eta'$ vom Material[3] und von der Form, namentlich von der Dicke abhängt. So fand z. B. KENNELLY[4] für Nickelspiralen:

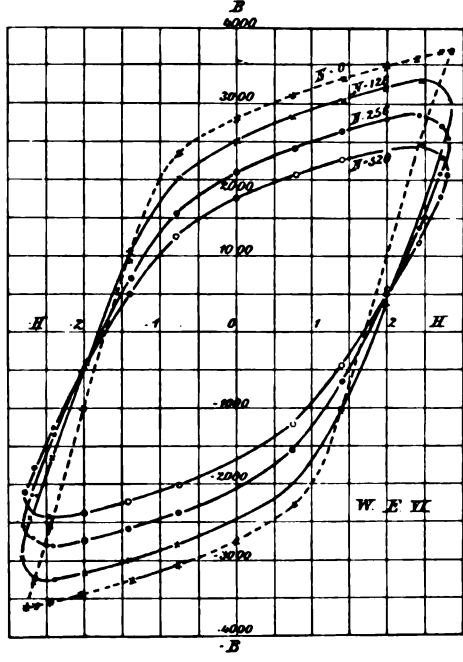
| dick | dünn |
|---|---|
| $\eta = 0{,}00125$ | $\eta = 0{,}00101$ , |

also im ersten Falle 25% mehr.

Auf die ausgedehnte Spezialliteratur über diese und andere Hysteresisfragen kann hier nicht eingegangen werden[5].

**Statische, wechselnde und rotierende Hysteresis.** Mit den besprochenen Einflüssen ist aber das Problem nicht erschöpft; es fehlt vielmehr noch ein, wie sich gezeigt hat, ganz wesentlicher Einfluß. Die gewöhnlichen Magnetisierungsversuche kann man als statische bezeichnen, weil die Magnetisierung und Entmagnetisierung oder die Hin- und Hermagnetisierung in aller Ruhe erfolgt. Nun kann man aber auch ganz anders verfahren, nämlich richtige periodische Ströme zur Magnetisierung benutzen, seien es nun unterbrochene einseitige oder richtige

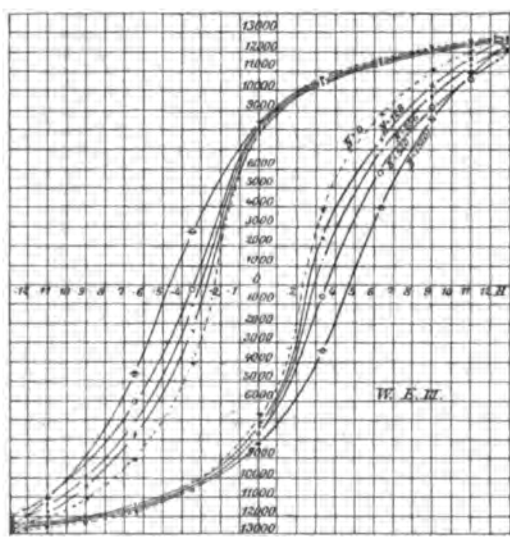
[1] F. G. BAILY, Electrician **36**. 118. 1895. — [2] H. MAURACH, Drude Ann. **6**. 580. 1901. — [3] Vgl. z. B. FRIESE, El. Z. 1895. 669, wonach $\eta$ für verschiedene Eisensorten zwischen 0,00138 und 0,00694. — [4] A. E. KENNELLY, Electrician **28**. 666. 1892. — [5] Vgl. u. a. A. E. KENNELLY, Electrician **28**. 666. 1892. — J. A. EWING und KLAASSEN, Proc. R. Soc. **54**. 75. 1893. — R. M. FRIESE, El. Z. **16**. 569. 1895. — C. SEARLE, Proc. Cambr, **9**. 2. 1895. — P. WEISS, L'Ecl. el. **8**. 436. 1896. — ALIAMET, Proc. Phys. Soc. Lond. **14**. 356. 1896. — J. A. FLEMING, Phil. Mag. **44**. 262. 1897; Electrician **40**. 587. 1898. — GILL, Phil. Mag. **46**. 478. 1898. — S. WEBB, Phys. Review **8**. 311. 1899. — G. STERN, El. Z. **22**. 432. 1901. — M. HEYSE, Inaug.-Diss. Halle 1901.



Figur 109.

Wechselströme. Man kann dann freilich nicht die gewöhnlichen, sondern muß besondere Methoden anwenden, um alle Größen: Magnetisierung, Permeabilität, Hysteresis usw. einwurfsfrei zu erhalten; namentlich für die Hysteresis macht sich hier eine andere Quelle von Energievergeudung, die Wirbelstrombildung, störend geltend[1]. So ist es begreiflich, daß die anfänglich zahlreichen Widersprüche sich erst nach und nach gehoben haben; gegenwärtig darf die Frage, nachdem sich OBERBECK, Lord RAYLEIGH, J. und B. HOPKINSON, zum Teil mit WILSON und LYDALL, WARBURG und HÖNIG, TANAKADATÉ, WEIHE, NIETHAMMER und viele andere, namentlich aber M. WIEN[2] mit ihr befaßt haben, als im wesentlichen geklärt gelten.

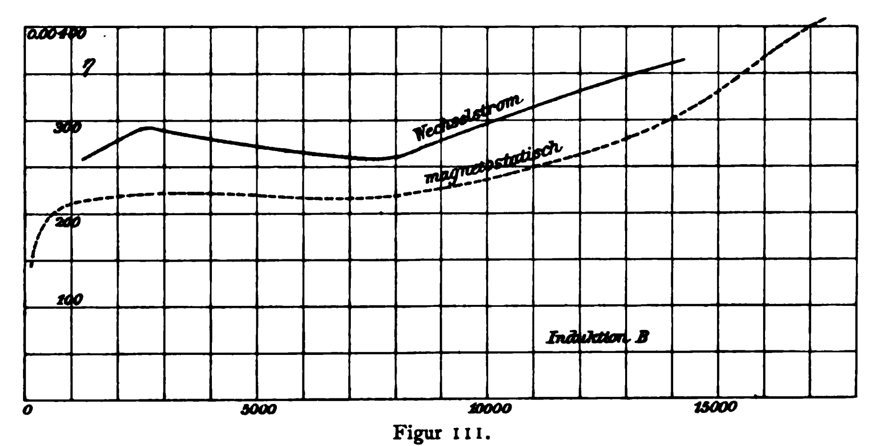
M. WIEN faßt seine Resultate in folgende Sätze zusammen: 1. Von Einfluß auf alle Verhältnisse ist zunächst die Form der Wechselströme, d. h. ihre Zusammensetzung aus Grund- und Oberströmen, und dies bringt unter Umständen eine große Komplikation in die Erscheinungen. 2. Hiervon abgesehen sind Induktion und Permeabilität im Wechselfelde stets kleiner als im konstanten; die Differenz ist sehr klein für kleine Kräfte, am größten für mittlere und wird dann wieder immer kleiner. 3. All diese Differenzen sind desto größer, je weicher und je dicker der Körper ist. 4. Die Differenzen sind um so größer, je größer die Schwingungszahl des Feldes ist. Bei 520 Wechseln erreichten sie für einen weichen, 0,003 cm dicken Draht ihr Maximum von 40% Abnahme der Induktion. 5. Der Energieverlust ist bei gleicher Magnetisierung im Wechselfelde stets größer als im statischen und desto größer, je größer die Frequenz und je stärker die Magnetisierung ist. Die Differenzen gehen bis zu 70% hinauf. 6. Dagegen ist der Energieverlust, wenigstens in schwachen Feldern, bei



Figur 110.

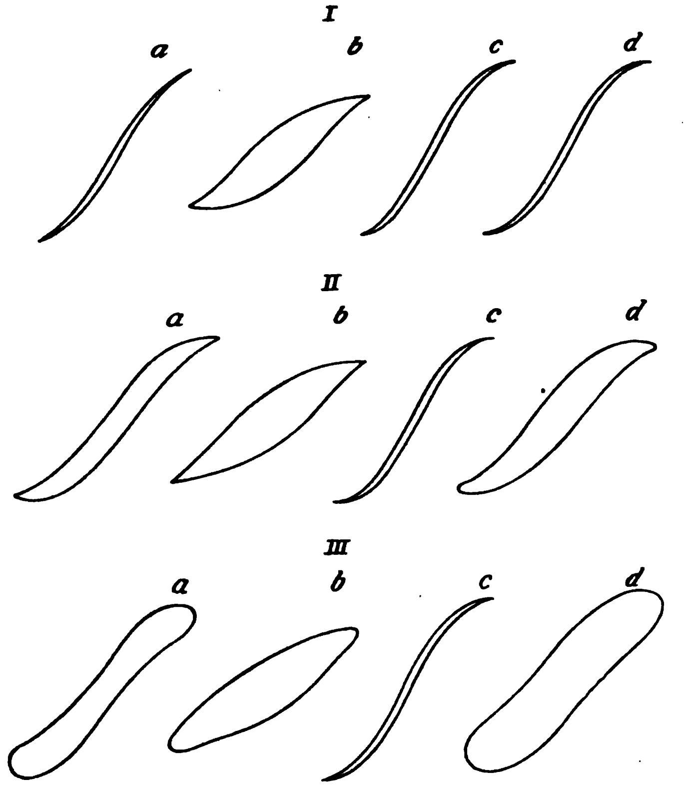
[1] Vgl. hierzu u. a. A. GRAU, Wien. Anz. 1898. 102. — W. HÖNIG, Mit. Gew. Mus. Wien 1897. — Die beiden Einflüsse lassen sich trennen, da der eine mit $\mathfrak{B}^{1,6}$, der andere mit $\mathfrak{B}^2$ proportional ist. — [2] A. OBERBECK, Wied. Ann. **21**. 672. 1884. — Lord RAYLEIGH, Phil. Mag (5) **23**. 241. 1887. — J. u. B. HOPKINSON. Lum. électr. **45**. 38. 1892. — J. HOPKINSON, WILSON u. LYDALL, Proc. R. Soc. 1893. 352. — EVERSHED und VIGNOLES, Electrician **27**. 664. 1891; **29**. 583. 605. 1892. — AYRTON u. SUMPNER, ebenda **29**. 615. 1892. — WARBURG u. HÖNIG, Wied. Ann. **20**. 814. 1893. — A. TANAKADATÉ, Phil. Mag. (5) **28**. 207. 1889. — GEROSA u. FINZI, Rend. Ist. Lomb. (2) **24**. 951. 1891. — J. KLEMENCIC, Wied. Ann. **58**.

gleicher Kraft im Wechselfelde kleiner als im konstanten; Abnahme bis zu 40 %. 7. Die Hysteresisschleifen werden desto breiter und kürzer, je rascher die Kraft wechselt.




Figur 111.

In den Figuren 109 und 110 sind die von WIEN erhaltenen Hysteresisschleifen, für kleinen und für großen Zyklus, wiedergegeben; in Figur 111 ist der Energie-




Figur 112.

249. 1896. — WEIHE, Wied. Ann. **61**. 578. 1897. — MAURAIN, L'Ecl. él. **15**. 409. 1898. — NIETHAMMER, Wied. Ann. **66**. 29, 1898. — M. WIEN, Wied. Ann. **66**. 859. 1898. — BENISCHKE, El. Z. **22**. 52. 1901. — Die spezielle Literatur über Hysteresis, namentlich Wechselhysteresis, ist zu ausgedehnt, um hier angeführt werden zu können.

umsatz im Wechsel- und konstanten Felde nach NIETHAMMER mit Benutzung der STEINMETZschen Formel als Funktion der Induktion vergleichend dargestellt. — Mit Hilfe der BRAUNschen Röhre hat ÅNGSTRÖM[1] die Schleifen objektiv zur Darstellung gebracht; Figur 112 ist eine Reproduktion der Photogramme. Dabei bezieht sich Reihe I auf statische Hysteresis, II auf solche bei 20, III bei 60 Wechseln in der Sekunde; ferner gilt a für einen ausgeglühten Eisenstab mit 0,2% Kohle, b für einen gehärteten mit 0,8% Kohle, c für ein Bündel sehr weicher Drähte, d für ein von einem Messingrohr umgebenes, sonst ganz ähnliches Bündel.

In neuester Zeit sind GUYE und HERZFELD[2], sowie MAURAIN[3] für sehr dünne Drähte wieder zu entgegengesetzten Resultaten gelangt: jene finden bis zu 1200 Wechseln pro Sekunde die umgesetzte Energie unabhängig von der Wechselzahl; dieser findet eine Verschmälerung der Hysteresisfläche, ja für dünne Probestücke sogar eine völlige Unterdrückung der Hysteresis, also eine vollkommen reversible Normalkurve. Wie man sieht, bedarf die Frage noch weiterer Klärung[4].

Als dritte Abart hat neuerdings die Magnetisierung durch Drehstrom oder durch Rotation des Eisenkörpers im ruhenden Felde Bedeutung erlangt; hier wird also die Achse der Magnetisierung fortwährend geändert, und es treten daher auch besondere qualitative und quantitative Erscheinungen auf. Jedoch muß es genügen, auf die bezügliche Literatur hinzuweisen[5].

**Zeitliche Erscheinungen. Magnetische Nachwirkungs-Veränderungen.** In allen bisher besprochenen Erscheinungen spielte die Zeit als solche keine Rolle; es wurde vielmehr der magnetische Zustand als etwas durch die wirkenden Kräfte Erzeugtes und nun Bestehendes betrachtet. Es erhebt sich aber die Frage, ob der Vorgang der Magnetisierung etwa Zeit beansprucht, und ob diese Zeit meßbar ist — dieselbe Frage, die auch auf anderen Gebieten (Licht, Elektrizität, Gravitation) eine bedeutsame Rolle spielt. Dabei sind in unserem Falle zwei Probleme zu unterscheiden: 1. Braucht der Magnetismus Zeit, um an der Stelle, wo er erregt wird, aufzutreten? 2. Braucht der Magnetismus Zeit, um sich von der Erregungsstelle nach anderen Stellen des Körpers fortzupflanzen? Wir wollen zunächst die erste Frage behandeln; man nennt sie zuweilen „zähe Nachwirkung“ oder auch kurz „Nachwirkung“, indem man dann für die oben so bezeichnete Klasse von Erscheinungen den Namen Hysteresis ausschließlich wählt; am besten wäre es wohl, diese zeitlichen Erscheinungen als „Nachwirkungs-Veränderungen“ zu bezeichnen.

Diese Art von magnetischer Nachwirkung ist, von einigen gelegentlichen Beobachtungen von AUERBACH[6] abgesehen, zuerst von EWING[7] und Lord RAYLEIGH[8], späterhin aber von zahlreichen Physikern untersucht worden, von denen namentlich v. HELMHOLTZ, HOPKINSON, zum Teil in Verbindung mit WILSON und LYDDALL, KLEMENCIC, FROMME, F. MARTENS, YOSHIJIRO KATO, LIZZIE LAIRD, HOLBORN, MAZZOTTO[9] zu nennen sind. Dabei wurde eine zeitliche Verzögerung teils behauptet, teils geleugnet; und nachdem sie sich zweifellos herausgestellt hatte, wurde sie teils als eine Verzögerung des Eindringens in die Tiefe angesprochen, so daß sie sich also nur bei dicken Körpern zeigen würde; teils wurde behauptet, daß

[1] K. ÅNGSTRÖM, Öfv. Vet. Ak. Förh. **56**. 251. 1899. — [2] GUYE u. HERZFELD, C. R. 1903, 20. April. — [3] C. MAURAIN, C. R. **137**. 914. 1903. — [4] O. M. CORBINO, Assoz. elettr. ital. 1903, 70, bestätigt wieder im wesentlichen die WIENschen Resultate. — [5] E. E. MARTENS, Wied. Ann. **60**. 61. 1897. — A. DINA, Rend. Ist. Lomb. (2) **33**. 34. 1900; El. Z. **23**. 41. 1902. — R. BEATTIE, Phil. Mag. **6**. 642. 1901. — R. HIECKE, El. Z. **23**. 142. 1902. — [6] F. AUERBACH, Wied. Ann. **5**. 322. 1878. — [7] J. A. EWING, Phil. Trans. 1885. 569; Proc. R. Soc. **46**. 269. 1890; Magnet. Induktion. — [8] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **23**. 225. 1887. — [9] J. u. B. HOPKINSON, Electrician 1892, 9. Sept. — HOPKINSON, WILSON und LYDALL, Proc. R. Soc. **53**. 352—368. 1893. — J. KLEMENCIC, Wied. Ann. **62**. 68; **63**. 61. 1897; Drude Ann. **6**. 181. 1901. — C. FROMME, Wied. Ann. **65**. 41. 1898. — F. MARTENS, Wied. Ann. **60**. 61. 1897. — YOSHIJIRO KATO, J. Coll. Science Jap. **9**. 295. 1897. — LIZZIE LAIRD, Drude Ann. **1**. 207. 1900. — L. HOLBORN, Berl. Ak. Ber. **11**. 173. 1896. — MAZZOTTO, N. Cim. (4) **11**. 81. 1900.

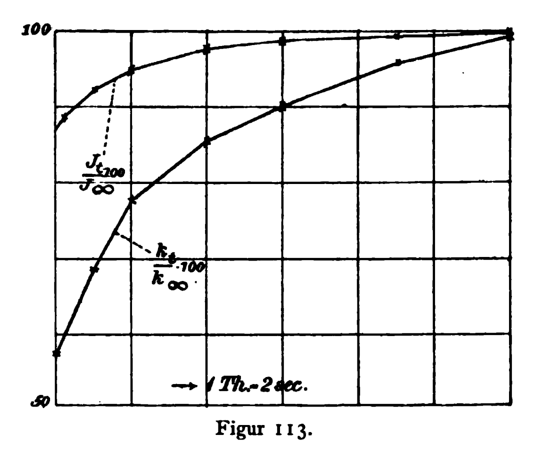
es hiervon abgesehen auch eine primäre Verzögerung gebe, die sich also auch bei dünnen bzw. flachen Körperformen geltend mache. Ferner ist es nicht leicht, die Nebeneinflüsse von der Haupterscheinung zu trennen, und es ist die ganze Nachwirkung vielfach als eine Folge von Induktionsströmen, Wirbelströmen u. dgl. im Eisen bezeichnet worden, wenigstens in massiven Körpern[1]. Gegenwärtig ist die Frage wohl dahin entschieden, daß es sowohl eine Eindringungs-Verzögerung als auch eine primäre Erregungs-Verzögerung gibt.

Was zunächst AUERBACH, EWING und Lord RAYLEIGH beobachteten, war eine langsame Zunahme der Magnetisierung nach Herstellung oder Steigerung und eine langsame Abnahme nach Aufhebung oder Schwächung des Feldes. Einige Gesetze dieser Nachwirkung, die bestimmenden Einflüsse sind dann namentlich von FROMME untersucht worden; und YOSHIJIRO KATO konnte seine Resultate sogar durch empirische Formeln darstellen. Daß die Wirkung zu einem großen Teile auf Rechnung der Eindringung kommt, geht daraus hervor, daß bei allen Versuchen mit Wechselströmen die Hysteresis bei dicken Körpern stärker als bei flachen ist (vgl. o. S. 220). Daß dann aber immer noch ein merklicher Betrag von primärer Erregungs-Verzögerung übrig bleibt, haben die Versuche von F. MARTENS und LIZZIE LAIRD schlagend gezeigt. Hier wurden nämlich dünne Scheiben im Felde in Rotation versetzt, und es wurde die Magnetisierung bei verschiedenen Drehgeschwindigkeiten, namentlich aber nach plötzlichem Anhalten der Scheibe von Sekunde zu Sekunde gemessen (mittels photographischer Registrierung); aus $\mathfrak{J}$ wurde dann auch die Suszeptibilität $\varkappa$ berechnet. LIZZIE LAIRD stellt ihre Ergebnisse in folgender Tabelle zusammen:

Scheibe aus Walzeisen, zweimal ausgeglüht.
Dicke 0,062 cm, Durchmesser 4,5 cm, $\varkappa(t = \infty) = 30{,}8$.

| $t$ | $\mathfrak{J}_t : \mathfrak{J}_\infty$ | $\varkappa_t : \varkappa_\infty$ | $t$ | $\mathfrak{J}_t : \mathfrak{J}_\infty$ | $\varkappa_t : \varkappa_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,872 | 0,567 | 6 | 0,980 | 0,904 |
| 1 | 0,918 | 0,683 | 9 | 0,992 | 0,959 |
| 2 | 0,947 | 0,775 | 12 | 0,997 | 0,984 |
| 4 | 0,968 | 0,854 | $\infty$ | 1,000 | 1,000 |

Figur 113 gibt eine anschauliche Darstellung hiervon. Wie man sieht, ist der Einfluß auf $\varkappa$ viel stärker als der auf $\mathfrak{J}$; und es ist auch leicht einzusehen, daß dem so sein muß[2].



Figur 113.

Von den hier besprochenen Nachwirkungs-Veränderungen sind diejenigen zu unterscheiden, die sich nach mechanischen, thermischen oder anderen Strukturmodifikationen abspielen; sie dauern viel länger an und unterliegen äußerst komplizierten Gesetzen, so daß sich in Kürze ein Bild von ihnen nicht geben läßt. Von besonderer Be-

[1] Vgl. hierzu u. a. A. HOPKINSON u. E. WILSON, Proc. R. Soc. 56. 108. 1894. — Über Wirbelstromverluste existiert eine reiche technische Literatur.

[2] In der Figur soll es heißen: $\frac{\mathfrak{J}_t}{\mathfrak{J}_\infty} \cdot 100$ bzw. $\frac{\varkappa_t}{\varkappa_\infty} \cdot 100$.

deutung sind diese Fragen für praktische Zwecke, z. B. für die Frage der Normalmagnete und ihre Konservierung; es sei in dieser Hinsicht auf die schon früher (S. 12) angeführten Arbeiten von KLEMENČIČ verwiesen.

**Fortpflanzung der Magnetisierung.** Die zweite der oben aufgestellten Fragen, ob die Magnetisierung Zeit brauche, um sich von der Erregungsstelle nach anderen Stellen des Körpers fortzupflanzen, zerfällt ihrerseits wieder in zwei verschiedene, je nachdem es sich um die Fortpflanzung ins Innere des Körpers oder um die Fortpflanzung längs seiner Achse handelt. Indessen wird sich die erstere Frage nicht direkt, sondern nur dadurch entscheiden lassen, daß man prüft, ob bei Magnetisierung durch rasche Wechselströme die Magnetisierung nach innen zu abnimmt; und das ist schon oben bei der Schirmwirkung konstatiert worden. Angeführt sei aber eine eigentümliche Folgerung, die J. HOPKINSON und E. WILSON gezogen haben. Die Zeit, die zum Eindringen des Magnetismus in die Tiefe erfordert wird, muß nämlich mit dieser allmählich immer stärker wachsen; bei der Erde kann es Millionen von Jahren dauern, und so stammt vielleicht ihr Magnetismus aus einer entlegenen Zeit[1].

Was nun die Fortpflanzung der Magnetisierung in der Längsrichtung betrifft, so hat schon W. v. SIEMENS[2] diese Frage mit Hilfe seines Fallhammers geprüft, aber ein negatives Ergebnis erhalten. OBERBECK[3] wandte periodische Veränderungen des Moments an und fand, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an sich sehr groß ist, durch die entstehenden Induktionsströme aber mehr oder weniger verkleinert wird. Seitdem haben sich zahlreiche Forscher mit dem Problem befaßt, von denen besonders TROUTON, TROWBRIDGE, PISATI, DECHANT, W. PEUCKERT, F. BRAUN, TH. LEHMANN, VAN HUFFEL und ZENNECK[4] zu nennen sind. Das wesentliche Ergebnis dieser teils an Ringen, teils an Stäben, teils mit langsamen, teils mit raschen Wechselströmen durchgeführten Untersuchungen ist dies, daß die Fortpflanzung in der Tat Zeit braucht; es tritt nämlich von der Erregungsstelle nach anderen Stellen hin eine Phasenverzögerung ein, die an der „Oppositionsstelle" ihr Maximum erreicht; auch Knoten und Bäuche sowie Interferenzen kann man feststellen; mit der Phasenverschiebung geht natürlich eine Amplitudenverminderung Hand in Hand, das Problem verknüpft sich hierdurch mit dem schon oben behandelten der Längsverteilung. Was indessen die quantitativen Verhältnisse betrifft, so gehen die Angaben der verschiedenen Autoren weit auseinander, es hätte daher wenig Sinn, Zahlenangaben zu machen; nur um die Größenordnung anzudeuten, sei bemerkt, daß LEHMANN Phasendifferenzen von $^1/_2$ bis 2 Grad fand, wenn die ganze erregende Periode gleich $360^0$ gesetzt wird.

Ein paar Worte sind noch über die Arbeiten von BRAUN und ZENNECK zu machen, über jene wegen der Methode, über diese wegen der Theorie. BRAUN wandte seine für so viele Zwecke brauchbare Röhre an, mit der man die Fortpflanzungserscheinung direkt sehen kann: verschiebt man auf dem zu den Versuchen dienenden Eisenstabe die Magnetisierungsspule, so ändert sich Gestalt und Orientierung der Schwingungsellipse; hieraus und aus der Wechselzahl läßt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu 86 m/sec berechnen, was mit einer OBERBECKschen Zahl gut übereinstimmt, trotzdem aber natürlich keine allgemeinere Bedeutung hat. Ferner ergibt sich, daß die vom freien Ende des Stabes aus-

[1] J. HOPKINSON u. E. WILSON, J. Inst. El. Eng. **24**. 194. 1895. — [2] W. v. SIEMENS, Wissensch. Abh. S. 350. — [3] A. OBERBECK, Wied. Ann. **21**. 672; **22**. 73. 1884. — [4] TROUTON, Rep. Brit. Ass. Cardiff 1891. — TROWBRIDGE, Phil. Mag. (5) **33**. 374. 1892. — PISATI, Rend. Acc. Linc. **6**. 82. 168 u. 487. 1890; N. Cim. **31**. 58. 1892; N. Cim. **31**. 125 u. 228. 1892. — DECHANT, Wien. Ber. (IIa) **52**. 1334. 1893. — W. PEUKERT, El. Z. **16**. 611. 1895. — F. BRAUN, Wied. Ann. **60**. 557. 1897. — TH. LEHMANN, Über den zeitlichen Verlauf der magn. Induktion an belieb. Stellen einer lokal erregten Eisengestalt. Inaug.-Diss. Zürich 1898. — N. G. VAN HUFFEL, Über den Verlauf des magn. Zustandes in einem Eisenstabe. Inaug.-Diss. Utrecht 1898. — J. ZENNECK, Drude Ann. **10**. 845. 1903.

gehende magnetische Kraft mit zunehmender Entfernung der Spule sehr stark abnimmt, und zwar für Wechselstrom viel stärker als für konstanten Strom.

ZENNECK geht bei seiner Theorie, in Analogie mit dem entsprechenden elektrischen Problem (vgl. Bd. 4, S. 227), von seiner Theorie des geschlossenen oszillatorischen Kreises (vgl. o. S. 160) aus und setzt so die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Beziehung zu Wechselzahl und Absorptionskoeffizient. Dies läßt sich nun auf die Beobachtungen OBERBECKS sowie auf solche, die der Verfasser selbst mit der BRAUNschen Röhre angestellt hat, anwenden, wobei sich freilich Schwierigkeiten, aber doch zum Teil gute Übereinstimmungen ergeben.

Im übrigen hängt das Problem, wie man sieht, eng mit dem des magnetischen Kreises und der Streuung zusammen, und es sei hier namentlich auf die schon zitierte Arbeit von HOPKINSON hingewiesen.

**Magnetischer Kreis. Streuung.** Es wäre nun noch der magnetische Kreis, der geschlossene und der unterbrochene, namentlich mit Rücksicht auf die Streuung, zu betrachten. Allein die hier gewonnenen experimentellen Resultate sind entweder, soweit sie wissenschaftlichen Wert haben, sachlich identisch und nur formell verschieden von den schon in den Abschnitten über den Ring und den geschlitzten Ring, über Remanenz, Hysteresis, Streuung und Schirmwirkung besprochenen; oder sie sind von rein technischem Interesse und haben nur Bedeutung für den Bau von Elektromagneten, Dynamomaschinen, Transformatoren uw., worauf hier nicht eingegangen werden kann.

**Tragkraft der Magnete.** Über wenige Probleme existiert eine so ausgedehnte Literatur wie über dieses; und bei wenigen hat der größte Teil dieser Literatur einen so geringen, über den engsten Bereich der Versuchsbedingungen hinausgehenden Wert wie hier. Es liegt das im wesentlichen darin, daß diese Versuche zu einer Zeit angestellt wurden, wo man von den Grundlagen der Theorie des Magnetismus noch so gut wie nichts wußte; man unterschied nicht oder doch nicht genügend zwischen magnetisierender Stromstärke, Intensität der Magnetisierung, magnetischer Induktion und Induktionsfluß, man unterschied nicht zwischen gleich- und ungleichförmiger Magnetisierung usw. Es ergaben sich daher die widersprechendsten Gesetze, von denen man heute weiß, daß sie keine oder nur ganz spezielle Bedeutung haben können. Es braucht deshalb auf diese Versuche, von denen die von LENZ und JACOBI, DUB, TYNDALL, DU MONCEL, NICKLES, VOM KOLKE, LAMONT, FECHNER, J. MÜLLER, JOULE, RITCHIE genannt seien, hier nicht eingegangen zu werden; man findet darüber ausführliches in WIEDEMANNS Lehrbuch[1]. Erst in neuerer Zeit hat man gelernt, die Versuche wissenschaftlich zu gestalten. Die Methode, nämlich die Bestimmung des zum Abreißen des Ankers vom Magneten erforderlichen Gewichtes mittels irgend einer geeigneten Wage, ist dabei die gleiche geblieben, nur daß man die dabei auftretenden Fehlerquellen jetzt besser vermeidet. Was sich aber geändert hat, ist erstens die Anwendung von Körpern, die sich mathematisch behandeln lassen, zweitens die richtige Messung der Magnetisierung oder Induktion und drittens die Benutzung der richtigen Formeln. Diese Formeln sind bereits im theoretischen Teile angeführt worden (S. 161); und da die neueren Versuche im wesentlichen diese Formeln, d. h. die MAXWELLsche bzw. in gewissen Fällen auch die STEFANsche Theorie bestätigt haben, braucht auch auf sie nicht so ausführlich eingegangen zu werden, wie es sich sonst wohl rechtfertigen würde. Es kommen hier namentlich in Betracht die Arbeiten von v. WALTENHOFEN, ROWLAND, W. v. SIEMENS, WASSMUTH, BIDWELL, BOSANQUET, THRELFALL und E. T. JONES[2]. Erst dem letzt-

[1] G. WIEDEMANN, Lehre v. d. El. u. d. Magnetismus. 3. Aufl. **3**. S. 587 u. 632. — Vgl. auch die Bücher von H. DU BOIS, Magn. Kreise und S. P. THOMSON, Der Elektromagnet. Halle 1894. — [2] A. v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. **61** (2). 739. 1870; Pogg. Ann. **142**. 252. 1871. — H. ROWLAND, Phil. Mag. (4) **46**. 140. 1873. — W. v. SIEMENS, Wied. Ann. **14**. 640. 1881. — A. WASSMUTH, Wien. Ber. **85** (2). 327. 1882. — SHELFORD BIDWELL, Proc. R. Soc.

genannten scheint es in der Hauptsache gelungen zu sein, die Fehlerquellen, namentlich das ungleichmäßige Abreißen, wodurch stets zu kleine Werte entstehen müssen, zu beseitigen. Er operierte zuerst mit einem in der Äquatorialebene zerschnittenen Rotationsellipsoide von 22,57 cm Länge und 1,5 cm Durchmesser, jede Hälfte erhielt ihre Magnetisierungsspule, die Berührungsfläche wurde äußerst sorgfältig behandelt; das Ergebnis war die völlig befriedigende Bestätigung der MAXWELLschen Formel. Immerhin blieb unentschieden, ob $T$ nicht mit $\mathfrak{J}^2$, statt mit $\mathfrak{B}^2$, proportional sei; denn in dem benutzten Bereiche waren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ selbst proportional. Es wurde daher eine zweite Untersuchung angefügt, bei der mit Hilfe des DU BOISschen Ringmagneten und zweier in die Höhlungen seiner Polschuhe eingeschliffener Stahlstäbe, Feldstärke und Induktion bis zu kolossalen Werten gesteigert werden konnten. Hier zeigte sich nun, daß $\mathfrak{J}$ längst konstant geworden war, daß aber die Tragkraft mit der Induktion immer weiter, und zwar nach dem MAXWELLschen Gesetze anstieg. Dieses ist somit erwiesen.

Es stellt sich also heraus, daß das Gesetz der Tragkraft außerordentlich einfach ist; sie hängt weder vom Material noch von der Gestalt der Fläche, noch von sonst etwas ab, sie ist, pro Flächeneinheit, lediglich durch die Induktion bestimmt. Sie wächst mit ihr im quadratischen Verhältnis, die Verhältnisse werden also mit wachsender Induktion in steigendem Maße günstig. Alle Umstände, die die Induktion steigern, steigern auch die Tragkraft. Mit der Fläche ist die Tragkraft, bei gegebener Induktion, direkt, dagegen bei gegebenem Induktionsflusse umgekehrt proportional. Was endlich die Beziehung der Tragkraft zum Eigengewichte des Magneten, das sogenannte Belastungsverhältnis, betrifft, so ist einleuchtend, daß der Zähler dieses Verhältnisses quadratisch, der Nenner dagegen kubisch mit den Lineardimensionen wächst. Das Belastungsverhältnis nimmt also ab wie die Lineardimensionen zunehmen. Große Magnete sind also in dieser Hinsicht ungünstiger als kleine, und durch Verringerung der Dimensionen kann man das Belastungsverhältnis beliebig steigern; so konnte ein von S. P. THOMPSON erwähnter Elektromagnet von 0,1 g Gewicht nicht weniger als 250 g tragen, d. h. das 2500fache seines Gewichtes.

Zum Schluß folgt eine Tabelle der zusammengehörigen Werte der Induktion und der Tragkraft (in kg/qcm), dem Buche von S. P. THOMPSON[1] entnommen und nach oben vervollständigt.

| $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{Z}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{Z}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{Z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 0,0456 | 8000 | 2,596 | 25000 | 25,4 |
| 2000 | 0,1623 | 10000 | 4,056 | 30000 | 36,6 |
| 3000 | 0,3651 | 12000 | 5,841 | 40000 | 64,9 |
| 4000 | 0,6489 | 14000 | 7,550 | 50000 | 101,5 |
| 5000 | 1,014 | 16000 | 10,39 | 60000 | 146,1 |
| 6000 | 1,460 | 18000 | 13,14 | 75000 | 228,5 |
| | | 20000 | 16,23 | | |

**40**. 486. 1886. — R. H. M. BOSANQUET, Phil. Mag. (5) **22**. 535. 1886. — R. THRELFALL, Phil. Mag. (5) **38**. 89. 1894. — E. T. JONES, Wied. Ann. **54**. 641. 1895; **57**. 258. 1896. — Auf die besonderen Untersuchungen über Zugkräfte im Felde wird bei den Beziehungen des Magnetismus zu mechanischen Erscheinungen zurückgekommen werden.

[1] S. P. THOMPSON, Der Elektromagnet. Halle 1894. S. 106.



# Magnetismus der verschiedenen Körper.

Von F. AUERBACH.

---

**Übersicht.** Das Eisen ist im Hinblick auf die magnetischen Erscheinungen zwar weitaus der wichtigste aller Stoffe, der magnetischen Eigenschaft sind aber, wie sich im Laufe der Zeit herausgestellt hat, auch die anderen Stoffe mehr oder weniger fähig, und einige von ihnen stehen dem Eisen nur wenig oder gar nicht nach, während andererseits auch unter den verschiedenen Sorten des Eisens und insbesondere zwischen Eisen und Stahl große quantitative und qualitative Unterschiede bestehen. Diesen spezifischen Eigentümlichkeiten der Stoffe ist das vorliegende Kapitel gewidmet. Es läßt sich für dasselbe eine Gliederung in folgender Weise vornehmen. Es hat sich nämlich herausgestellt, daß der Zustand, in den die Körper gelangen können, nicht schlechthin magnetisch genannt werden darf, sondern daß dabei ein akuter Gegensatz auftritt, indem sich manche Stoffe gerade umgekehrt wie die übrigen verhalten; man unterscheidet demgemäß zwischen paramagnetischen (oder kurz magnetischen) und diamagnetischen Stoffen. Ferner ist schon aus den Grundlagen des vorigen Artikels klar, daß die Erscheinungen, welche kräftig magnetisierbare und nur schwach magnetisierbare Stoffe darbieten, nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ verschieden ausfallen werden, indem alle sekundären Erscheinungen, wie die innere Induktion, die Nachwirkung, die Remanenz, bei jenen von entscheidender Wichtigkeit sind, bei diesen aber so gut wie gänzlich fehlen; man muß daher auch zwischen starkmagnetischen und schwach-magnetischen Stoffen unterscheiden. Hiernach würden sich vier Klassen von Stoffen ergeben, wenn nicht tatsächlich die eine von ihnen in der Natur fehlte und auch künstlich bisher noch nicht hergestellt worden wäre, nämlich die Klasse der stark diamagnetischen Stoffe. Ferner zeigen die schwachmagnetischen und die schwach-diamagnetischen Stoffe, eben wegen der Schwäche ihrer Eigenschaften ein, abgesehen von der Gegensätzlichkeit ganz analoges Verhalten, so daß kein Grund vorliegt, sie getrennt zu behandeln. Eher führt die experimentelle Verschiedenheit zu einer getrennten Behandlung der festen, flüssigen und gasförmigen schwach-magnetischen Körper. Endlich ist zu beachten, daß bei diesen Erörterungen bisher ebenso wie im vorigen Artikel immer stillschweigend angenommen worden ist, daß es sich um isotrope Körper handelt; es ist also schließlich ein Abschnitt über den Kristall-Magnetismus hinzuzufügen. Übrigens ist es verständlich, daß es auf einem Gebiete wie dem vorliegenden, wo es sich um unzählige verschiedene Stoffe handelt, das Material ein besonders ausgedehntes ist, und es kann daher hier nur das Wichtigste Berücksichtigung finden.

## A) Ferromagnetismus.

Für den Inbegriff der Erscheinungen, welche stark-magnetisierbare Stoffe darbieten, hat DU BOIS[1] den sehr zweckmäßigen Namen Ferromagnetismus vor-

[1] H. DU BOIS, Wied. Ann. **46**. S. 485. 1892.

geschlagen, der bis dahin vielfach, z. B. von W. THOMSON, in weiterem Sinne gebraucht worden war; im Prinzip läßt sich natürlich keine untere Grenze für das, was man noch Ferromagnetismus nennen soll, angeben; die tatsächlichen Verhältnisse aber lehren, daß zu der genannten Gruppe nur sehr wenige Stoffe gehören, nämlich Eisen, Nickel und Kobalt, die unter dem Namen Stahl bekannten kohlenhaltigen Eisensorten und diejenige Verbindung des Eisens, welche als Magneteisenstein zuerst zur Entdeckung der magnetischen Erscheinungen geführt hat.

**Eisen und Stahl.** Die verschiedenen Eisen- und Stahlsorten unterscheiden sich, von weniger wichtigen Umständen abgesehen, in chemischer und in physikalischer Hinsicht: in jener, insofern sie einen geringeren oder größeren Betrag von Kohlenstoff enthalten, der bei Schmiedeeisen sehr gering ist, bei den Stahlsorten $^1/_2$ bis $1^1/_2$%, bei Gußeisen 2 bis 3% und bei Spiegeleisen bis zu 5% ausmacht; in dieser Hinsicht, insofern sie verschiedene Härte besitzen, vom weichsten Schmiedeeisen an bis zum glasharten Stahl. Über die Beziehung zwischen diesen beiden Eigenschaften und dem magnetischen Verhalten hatte man bis vor kurzem die folgende einfache und allgemein bekannt gewordene Vorstellung, die man aus dem zahlreichen, sich zum Teil freilich stark widersprechenden Beobachtungsmaterial entnehmen zu können glaubte. Je weicher und kohleärmer das Eisen ist, desto stärkeren temporären Magnetismus nimmt es unter der Wirkung einer bestimmten Kraft an, desto geringeren Magnetismus bewahrt es aber nach dem Aufhören dieser Kraft; die beiden Grenzfälle sind also die des reinen, ganz weichen Eisens, welches stark magnetisch, dann aber wieder völlig unmagnetisch wird, und des glasharten Stahls, der einen verhältnismäßig nur geringen Magnetismus, diesen aber dauernd annimmt. Die Theorie der drehbaren Molekularmagnete und die Idee der Koerzitivkraft machen nicht nur beide Erscheinungen, sondern auch ihren inneren Zusammenhang verständlich. Auch ergeben sich dann zwanglos zahlreiche weitere für die verschiedenen Eisensorten charakteristische Erscheinungen, wie das schnellere oder langsamere Ansteigen des Magnetismus mit der Kraft, der frühere oder spätere Eintritt der Sättigung, die verschiedene Lage des Inflexionspunktes der Magnetisierungskurve usw. Trotzdem muß diese ganze Vorstellung in ihrer einfachen Form als veraltet bezeichnet werden; sie behält zwar ihren Wert für viele Fälle der Praxis, z. B. für die Herstellung von Dauermagneten aus hartem Stahl und von vorübergehenden Magneten aus weichem Schmiedeeisen bei, den prinzipiellen Verhältnissen wird sie aber in keiner Weise gerecht, und es kann daher unterbleiben, die zahlreichen Ergebnisse mitzuteilen, zu denen selbst die hervorragendsten Forscher auf diesem Gebiete, wie BARLOW, MÜLLER, DUB, WIEDEMANN, v. WALTENHOFEN, JAMIN, FROMME, RUTHS usw. in älterer Zeit und noch bis vor kurzem gelangt sind; nur als Beispiele und für den ungefähren Anhalt mögen folgende Zahlen dienen:

1. nach J. MÜLLER[1]:

| Sorte | temp. Magn. | reman. Magn. |
|---|---|---|
| Schmiedeeisen . . . . | 0,490 | 0 |
| Gewalztes Eisen . . . | 0,474 | 0 |
| Geglühter Stahl . . . | 0,404 | 3,5° |
| Angelassener Stahl . . | 0,393 | 7° |
| Harter Stahl . . . . | 0,259 | 9° |
| Gußeisen . . . . . | 0,220 | 1° |

Die temporären Zahlen sind relative, die remanenten Grade, zur Umrechnung diene, daß die Remanenz bei hartem Stahl 55% betrug. Je kleiner der

[1] J. MÜLLER, Pogg. Ann. **85**. S. 157. 1852.



temporäre, desto größer ist, wie man sieht, der remanente Magnetismus, nur bei Gußeisen sind beide sehr klein.

2. Nach COULOMB[1]; Verhältniszahlen des maximalen remanenten Magnetismus für bei verschiedenen Temperaturen abgelöschten Stahl, der dann wieder angelassen, also erst immer härter, dann wieder immer weicher gemacht wurde:

| Temperatur des | Ablöschens | | | | Anlassens | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | bis 875° | 975° | 1075° | 1187° | 267° | 512° | 1250° |
| Rem. Mag. | 1 | 1,42 | 2,11 | 2,18 | 2,07 | 1,77 | 1,00 |

Die Wirkung des Ablöschens fängt also erst bei 875° an, durch Anlassen wird sie wieder aufgehoben.

3. Nach G. WIEDEMANN[2] für verschiedene Kräfte, alles Relativzahlen (z. T. interpoliert):

| Kraft | | 14,0 | 28,2 | 45,6 | 91,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Temp. Mag. | Weiches Eisen . . . . | 41,5 | 86,0 | 142,0 | 269,5 |
| | Harter Stahl . . . . . | 28,5 | 55,6 | 87,0 | 184,8 |
| Stahl : Eisen . . . . . . . . . . | | 0,69 | 0,65 | 0,61 | 0,68 |

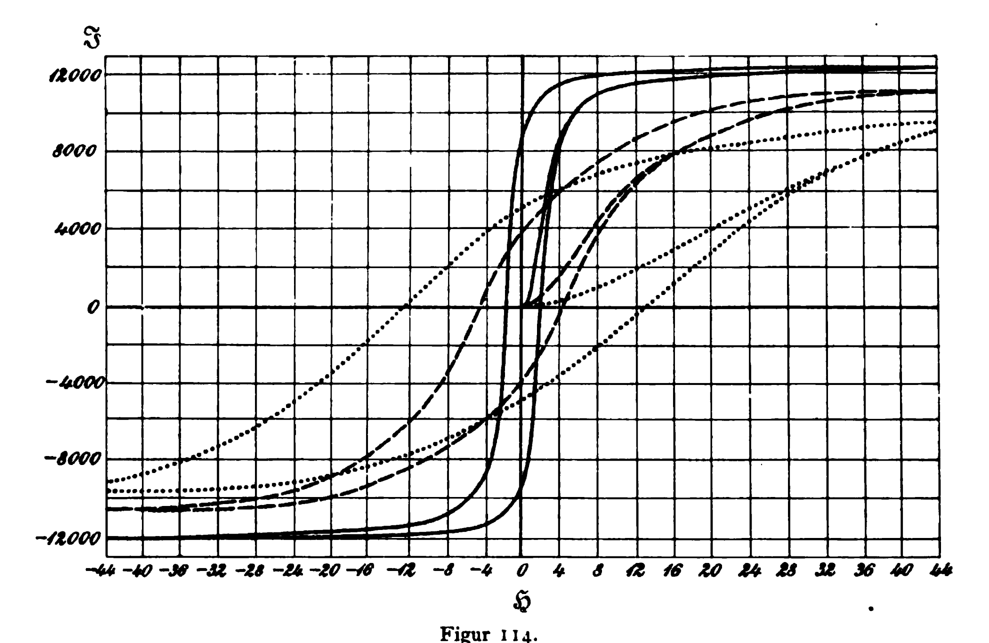
| Kraft | | 7,4 | 20,8 | 53,3 | 99,1 | 130,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rem. Mag. | Weiches Eisen . . . | 4,1 | 7,4 | 9,4 | 9,6 | 9,7 |
| (Nach mehrfacher | Weicher Stahl . . . | 6,6 | 16,3 | 31,2 | 40,7 | 43,9 |
| Wiederholung) | Harter Stahl . . . | 7,5 | 15,0 | 35,5 | 69,3 | 82,6 |

Beim Stahl ist also der temporäre Magnetismus kleiner und wächst auch relativ langsamer als beim Eisen, der remanente dagegen ist größer und wächst auch viel stärker.

Kehren wir nun zu unserer Hauptbetrachtung zurück. Die Gründe, welche die Einfachheit der obigen Vorstellungen über den Haufen werfen, sind zahlreich. Zunächst ist, wie wir aus dem vorigen Artikel wissen, die Form der Körper von großem Einfluß auf ihre Magnetisierung, es ist also nicht erlaubt, Körper verschiedener Form, wie dies vielfach geschehen ist, miteinander zu vergleichen. Noch wesentlicher ist aber der Einfluß der Form auf die Remanenz, und es ist besonders hervorgehoben worden, daß derselbe Stoff, also z. B. genau dieselbe Eisensorte bei verschiedener Form einen sehr verschiedenen Bruchteil ihres Magnetismus dauernd bewahrt; man muß eben unterscheiden zwischen demjenigen Werte des remanenten Magnetismus, welcher auftritt, wenn keine entmagnetisierende Kraft nachwirkt, was bei Ringen und langen dünnen Stäben der Fall ist, und den mehr oder weniger kleineren Werten bei Schwächung durch eine entmagnetisierende Kraft. Wie groß diese Schwächung meist ist, geht am besten daraus hervor, daß man früher meist schlechtweg sagte, weiches Eisen zeige keinen oder nur ganz geringen remanenten Magnetismus, während z. B. die Tabelle auf S. 210 erkennen läßt, daß er bei einem dünnen Drahte rund 80 % des gesamten Magnetismus ausmacht. Dabei kommt ein weiterer Umstand sehr wesentlich in Betracht, nämlich die Art und Weise, wie das Eisen magnetisiert und wieder entmagnetisiert worden ist, und ob dieser Prozeß einmal oder wiederholt stattgefunden hat. Am deutlichsten kann man alle diese Verhältnisse sich durch Betrachtung eines Kreisprozesses von der Art des in Figur 71 dargestellten

[1] C. A. COULOMB, s. Wied. Galv. (3) **3**. S. 557. — [2] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **100**. S. 235. 1857 und **106**. S. 169. 1859.

veranschaulichen. In Figur 114 ist ein solcher für weiches Eisen (ausgezogen), hartgezogenes Eisen (gestrichelt) und harten Stahl (punktiert) nebeneinander verzeichnet. Wie man sieht, steigt allerdings die Kurve beim Stahl nicht so schnell und nicht so hoch wie beim weichen Eisen, d. h. der Stahl wird langsamer und schwächer magnetisiert, aber auf dem Rückwege schneidet die Stahlkurve die Ordinatenachse nicht in einem höheren, sondern in einem tieferen Punkte als die Eisenkurve, d. h. der remanente Magnetismus des Stahls ist in diesem Falle kleiner als der des Eisens, und man würde also zu einem völligen Gegensatze zu der früheren Anschauung gelangen, wenn man nicht durch weiteren Verfolg der Kurve einsähe, wo die Versöhnung zu suchen ist. Die Eisenkurve fällt nämlich links von der Ordinatenachse sehr rasch, die Stahlkurve viel langsamer ab, und der Abszissenwert, wo die negative Abszissenachse geschnitten wird, also die „Koerzitivkraft" im quantitativen Sinne des Wortes (S. 212) ist bei Stahl viel



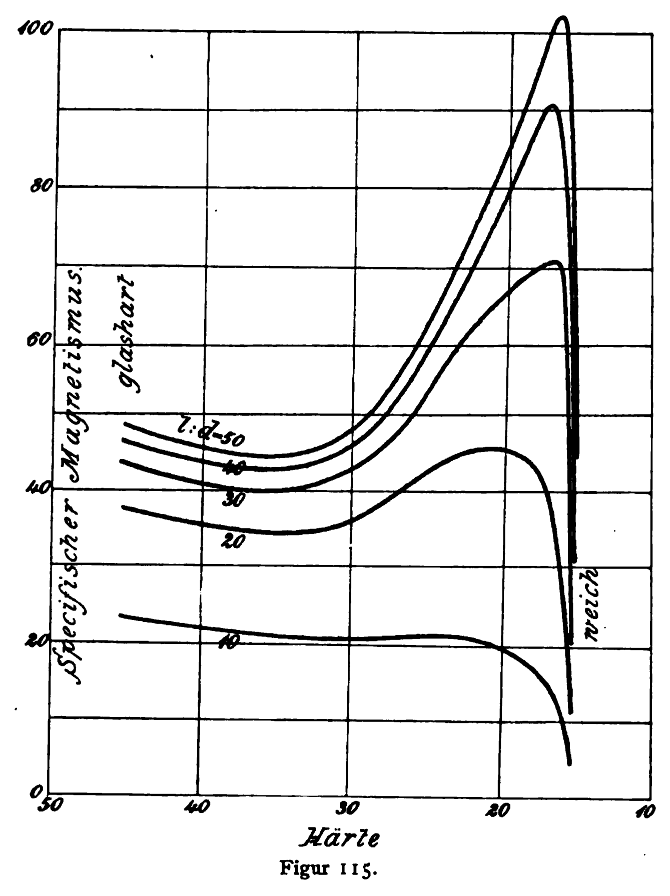

Figur 114.

größer als bei Eisen; mit anderen Worten: der remanente Magnetismus des Stahls ist beständiger als der des Eisens, er kann nur durch eine viel größere Kraft zerstört werden. Man hat eben früher den Fehler gemacht, die Koerzitivkraft durch den remanenten Magnetismus zu messen, während es doch zwei selbständige Größen (Abschnitt der negativen Abszissenachse und Abschnitt der positiven Ordinatenachse) sind. — Das gehärtete Eisen nimmt in allen diesen Hinsichten eine gewisse Mittelstellung zwischen weichem Eisen und hartem Stahl ein. Zu besonderer Betrachtung bietet noch das erste Stück der Kurve Anlaß, welches zu dem eigentlichen Prozeß nicht gehört, sondern die Magnetisierungskurve für „frisches" Material bedeutet. Gerade diese Kurve ist je nach dem Härtegrad sehr verschieden gestaltet, das erste, langsam ansteigende Stück ist desto kürzer, je weicher das Eisen ist, die Kurve steigt infolgedessen bei weichem Eisen viel rascher an als bei hartem, und v. WALTENHOFEN[1] hat sogar eine Methode und einen mehrfach vervollkommneten und vereinfachten Apparat vor-

[1] A. v. WALTENHOFEN, Dingl. Pol. Journ. **170**. S. 201. 1863; **217**. S. 357. 1875; **232**. S. 141. 1879.

geschlagen, um durch Ausmessung dieser Kurve den Härtegrad von Stahlsorten zu bestimmen.

Die Form der Eisenkörper bringt auch noch in anderer Weise eine nicht unwesentliche Verschiedenheit mit sich, nämlich in bezug auf die Homogenität der gehärteten Eisenmasse. Das Härten wird bekanntlich entweder auf mechanischem Wege, z. B. durch Hämmern oder Strecken oder aber — ebenso wie das Weichmachen — auf thermischem Wege erzielt, indem der Körper erhitzt, bei einer bestimmten Temperatur abgelöscht, d. h. plötzlich abgekühlt wird, wodurch er hart wird, und dann ev. wieder geglüht wird, wodurch er seine Härte wieder mehr oder weniger einbüßt. Fast alle diese Prozesse wirken aber von der Oberfläche des Körpers aus, erstrecken sich nur abgeschwächt in sein Inneres und geben also dünneren Körpern eine homogenere Umgestaltung als voluminösen Körpern, wie denn z. B. der Ähnlichkeitssatz von THOMSON (S. 136) nach H. MEYER[1], BARUS u. a. für Stahl seine Gültigkeit verliert, was bei homogenem Material unverständlich wäre. Dabei spielt ferner in leicht begreiflicher Weise die Ablöschungs- resp. Anlassungstemperatur, die Höhe und Dauer des Glühens, Streckens usw., die Häufigkeit der Wiederholung dieser Prozesse und noch mancher andere Umstand eine wichtige Rolle, so daß man die Komplikation dieses Problems einsieht und sich nicht wundern wird, wenn aus den meisten bezüglichen Experimentaluntersuchungen sichere und allgemeine Schlüsse nicht zu ziehen sind.



Figur 115.

Eine der brauchbarsten und wertvollsten Arbeiten dieser Art ist jedenfalls die von BARUS und STROUHAL[2]. Alle erwähnten Umstände wurden hierbei berücksichtigt, und die Härte der verschiedenen Drähte, die benutzt wurden, wurde durch ihren elektrischen Leitungswiderstand bestimmt, eine Methode, die, wie BARUS vorher gezeigt hatte, relativ sehr zuverlässig ist. Ein Teil der Ergebnisse ist in der folgenden Tabelle zahlenmäßig und in der ihr entsprechenden Figur 115 graphisch dargestellt. Die erste Spalte der Tabelle gibt die Behandlung resp.

[1] H. MEYER, Wied. Ann. 18, S. 248. 1883. — [2] C. BARUS u. V. STROUHAL, Bull. Un. States Geol. Surv. Nr. 14. 1885.

den Zustand des Eisens an, die zweite die elektrisch bestimmte Härte, die folgenden den spezifischen Magnetismus für 5 verschiedene, darüber stehende Dimensionsverhältnisse $l:d$ (Länge : Dicke).

| Härtezustand | Härte | Spezif. Magnetismus | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| Glashart . . . . . . . . . . . . | 45,3 | 23,5 | 37,6 | 43,6 | 46,5 | 48,3 |
| Angelassen 1 St. in Wasserdampf v. 100° | 40,2 | 22,2 | 35,7 | 41,3 | 44,2 | 46,0 |
| „ 3 „ „ „ „ „ | 37,9 | 22,3 | 35,3 | 40,8 | 43,3 | 45,0 |
| „ 6 „ „ „ „ „ | 36,6 | 22,3 | 35,3 | 40,6 | 43,1 | 44,8 |
| „ 10 „ „ „ „ „ | 35,7 | 22,3 | 35,2 | 40,6 | 43,1 | 44,8 |
| „ 20 Min. in Anilindampf v. 185° | 30,2 | 20,8 | 36,0 | 42,9 | 46,2 | 48,3 |
| „ 1 St. in „ „ „ | 28,5 | 20,8 | 37,4 | 45,1 | 48,8 | 51,2 |
| „ 3 „ „ „ „ „ | 26,7 | 21,4 | 40,2 | 49,4 | 53,8 | 56,5 |
| „ 7 „ „ „ „ „ | 25,1 | 21,9 | 43,3 | 54,3 | 59,6 | 63,0 |
| „ 13 „ „ „ „ „ | 23,8 | 21,4 | 44,7 | 57,8 | 64,3 | 68,2 |
| „ 10 Min. im Zinnbad v. 240° | 23,0 | 21,0 | 45,2 | 59,3 | 66,5 | 70,9 |
| „ 1 „ „ Bleibad „ 330° | 19,5 | 19,3 | 45,8 | 67,0 | 80,4 | 87,3 |
| „ 1 St. „ Zinkbad „ 420° | 16,7 | 15,2 | 40,8 | 71,3 | 91,3 | 101,8 |
| Weich . . . . . . . . . . . . . | 15,3 | 4,3 | 11,2 | 20,5 | 31,8 | 44,6 |

Wie man sieht, ist der Verlauf der Kurven zwar, wenigstens teilweise, ein ähnlicher, einfach ist er aber durchaus nicht, es treten Maxima und Minima auf, und die den verschiedenen Dimensions-Verhältnissen entsprechenden Kurven liegen so verschieden hoch, daß die Unvergleichbarkeit der Magnetismen verschiedener Härtegrade ohne Rücksicht auf die Dimensionen in die Augen springt.

Mit der zahlenmäßigen Feststellung der verschiedenen magnetischen Charakteristiken der Eisensorten haben sich besonders EWING, HOPKINSON, HOLBORN, DU BOIS und JONES, PEIRCE, ABT, GUMLICH u. SCHMIDT, sowie BENEDICKS[1] beschäftigt. Es handelt sich dabei hauptsächlich um maximale temporäre und remanente Induktion $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, bzw. Magnetisierung $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$, ferner um die Konstanten $\varkappa$ oder $\mu$, um die „Koerzitivkraft“ $\mathfrak{K}$ und um die bei dem maximalen Kreisprozeß zerstreute Energie $E$ pro cbcm Material — sämtlich Größen, welche von Wichtigkeit sind, da sie sich von Sorte zu Sorte unabhängig von einander und durchaus nicht parallel ändern, weil eben die Magnetisierungskurven in jeder Hinsicht verschieden verlaufen. Die erste der folgenden Tabellen enthält eine kleine Auswahl der HOPKINSONschen für $\mathfrak{H} = \pm 240$ geltenden Resultate, die zweite, die die Maxima von $\varkappa$ und $\mu$ sowie die $\mathfrak{H}$-Werte, für die sie eintreten, enthält, rührt von EWING her.

| Sorte | Härtezustand | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B}'$ | $\mathfrak{K}$ | $E$ (in Erg.) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) Schmiedeeisen . . . . . | Langs. gekühlt | 18251 | 7248 | 2,30 | 13356 |
| 2) Hämmerb. Gußeisen . . . | „ „ | 12408 | 7479 | 8,80 | 34742 |
| 3) Graues Gußeisen . . . . | — | 10783 | 3928 | 3,80 | 13037 |
| 4) Graues kohlenhltg. Gußeis. | — | 9148 | 3161 | 13,67 | 39789 |
| 5) Halbiertes Gußeisen . . | — | 10546 | 5108 | 12,24 | 41072 |
| 6) Weißes Gußeisen . . . . | — | 9342 | 5554 | 12,24 | 36383 |
| 7) Weicher Bessemerstahl . . | — | 18196 | 7860 | 2,96 | 17137 |
| 8) „ Whitworthstahl . | Langs. gekühlt | 19840 | 7080 | 1,63 | 10289 |
| 0) „ „ (mehr Kohle) | Langs. gekühlt | 16120 | 10740 | 8,26 | 42366 |
| 10) „ „ „ | In Öl gehärtet | 16120 | 8736 | 19,38 | 99401 |

[1] J. HOPKINSON, Trans. R. Soc. 1885 (2), 463. — J. A. EWING, ebenda (1), S. 523 (2), S. 581. — EWING u. PARSHOLL, Proc. Inst. Civ. Eng. **126**. 50. 1896. — L. HOLBORN, Z. f. Instr.-

Der Kohlegehalt beträgt bei 7) 0,045%, 8) 0,09%, 9) und 10) 0,89%, bei 6) 2,036%, bei 5) 2,581% und bei 4) 3,455%. Außerdem enthalten 7) bis 10) 0,015 bis 0,08% an Mangan, Silizium, Schwefel und Phosphor, bei 4) bis 6) sind diese Stoffe bis zu 0,6%, Silizium sogar bis zu 2,04% vorhanden. Der remanente Magnetismus schwankt, wie man sieht, zwischen 34 und 66% des temporären, am günstigsten in bezug auf temporären Magnetismus und Kleinheit der Koerzitivkraft (und von $E$) verhält sich weicher Whitworthstahl, nächstdem Schmiedeeisen; im übrigen sei auf die Zahlen selbst verwiesen; nur sei, um einem naheliegenden Zweifel zu begegnen, bemerkt, daß die $\mathfrak{B}$usw. die unter gewöhnlichen Umständen zu erreichenden Maxima sind — die Isthmusmethode z. B. erlaubt für Schmiedeeisen $\mathfrak{B}$ bis über 40000 hinaufzutreiben (s. S. 201)

| Eisensorte | $\varkappa$ | $\mu$ | $\mathfrak{H}$ |
|---|---|---|---|
| Klavierdraht, glashart . . . . | 9,3 | 118 | 55 |
| „ normal . . . . . | 22 | 273 | 39 |
| Stahldraht, hart gezogen . . . | 25 | 320 | 30 |
| Eisendraht, „ „ . . . | 36 | 450 | 17 |
| Stahldraht, geglüht . . . . . | 37 | 470 | 18 |
| Eisendraht, „ . . . . . | 162 | 2040 | 4,1 |
| „ stärker geglüht . . | 212 | 2670 | 2,8 |
| „ sehr weich . . . . | 279 | 3500 | 2,1 |

Die Drähte sind nach steigendem $\varkappa$ und $\mu$ geordnet, wobei, wie man sieht, gleichzeitig $\mathfrak{H}$ abnimmt; d. h. je größer das Maximum von $\varkappa$ ist, bei desto kleinerer Kraft tritt es bereits ein. Hieran liegt es auch, daß die Sorten sich hinsichtlich des Wertes von $\varkappa$ viel stärker unterscheiden als in den Werten von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{B}$.

In neuester Zeit hat man eingesehen, daß quantitative Untersuchungen der in Rede stehenden Art einen höheren Wert erst dadurch erlangen, daß man das untersuchte Material scharf charakterisiert, also durch Angabe seiner physikalischen nnd chemischen Beschaffenheit oder, da das häufig sehr mißlich ist, durch Angabe des Ursprungs und Hinzufügung der offiziellen Bezeichnung. Einige der wichtigsten dieser Arbeiten müssen hier in ihren Hauptergebnissen wiedergegeben werden; dabei sind diejenigen bevorzugt worden, deren Angaben sich auf das absolute Maß beziehen, was leider bei mehreren sonst sehr verdienstlichen Arbeiten nicht der Fall ist.

Du Bois und Jones haben u. a. folgende Stoffe geprüft: 1. Schwedisches Eisen, Normaltype; 2. Kruppschen Dynamo-Stahlfassonguß; 3. Steirisches Walzeisen; 4. Harlemer Magnetstahl; 5. Steirischen, sehr harten Magnetstahl; 6. Bergischen (Remscheider) Wolframstahl; also drei Eisen- und drei Stahlsorten. Der Kraftbereich war stets $\mathfrak{H} = \pm 240$, nur in der letzten Spalte (*) $\mathfrak{H} = \pm 500$. Das Ergebnis war folgendes:

| | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}$ |
| Magnetisierungsbereich | 1380 | 17400 | 1420 | 18000 | 1460 | 18400 |
| Remanenz $\mathfrak{J}'$ bzw. $\mathfrak{B}'$ | 550 | 6900 | 650 | 8200 | 550 | 6900 |
| Koerzitivkraft $\mathfrak{K}$ | 0,8 | | 1,8 | | 2,0 | |
| Spez. Energie-Umsatz $U$ (kiloerg/cbcm) | 6,6 | | 12,5 | | 14,5 | |

Kunde 1891. 113; Ber. ü. d. Verh. d. int. Elektr.-Kongr. 2. 81; Frankf. 1892; Wied. Ann. 61. 281. 1897. — H. du Bois u. E. T. Jones, El. Z. 1896. 543. — B. O. Peirce, Amer. J. Science 2. 347. 1896. — A. Abt, Wied. Ann. 66. 116. 1898; Drude Ann. 6. 774. 1901. — Gumlich u. Schmidt, El. Z. 22. 621. 1901. — C. Benedicks, Recherches s. l'acier au carbone, Ups. 1904, S. 135. Daselbst findet man auch eine reiche Literatur-Zusammenstellung.

| | 4 | 5 | | 6 | | | (*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | weich | s. hart | weich | hart | s. hart | s. hart |
| Magnetis.-Bereich ($\mathfrak{J}$) | 1270 | 1420 | 1150 | 1320 | 1320 | 1250 | 1280 |
| Remanenz $\mathfrak{J}'$ | 800 | 790 | 600 | 850 | 850 | 800 | 800 |
| Koerzitivkraft $\mathfrak{K}$ | 56 | 34 | 75 | 35 | 53 | 72 | 77 |
| Spez. Energie-Umsatz $U$ | 210 | 145 | 225 | 140 | 205 | 265 | 275 |

Man sieht sehr deutlich, daß sich Eisen und Stahl nur sehr wenig hinsichtlich der Remanenz, dagegen ganz kolossal hinsichtlich der Koerzitivkraft unterscheiden; letztere ist bei den Stahlsorten 20 bis 100 mal so groß wie bei den Eisensorten, und ebenso ist bei jenen der hysteretische Energieumsatz 15 bis 40 mal so groß wie bei diesen. Den größten Wert erreichen beide Größen bei Sorte 6, bergischem Wolframstahl, die kleinsten Werte andererseits weist Sorte 1, schwedisches Eisen, auf; man hat hierin eine wichtige Stütze für die Auswahl des Materials für bestimmte Zwecke. Die Werte

$$\mathfrak{K} = 77 \,, \quad U = 275 \quad ,$$

letzteres in Kiloerg, scheinen die bisher festgestellten Maxima zu sein.

GUMLICH und SCHMIDT benutzten ihre Materialien in der Form von Ellipsoiden, um die Theorie streng anwenden zu können (s. d. vor. Art.). Ihre Resultate sind sehr reichhaltig, ein kleiner Auszug ist im folgenden gegeben; es bedeutet: 1 Kohlswa 52, fünfmal geglüht; 2 Remscheider Dynamostahl; 3 Gelsenkirchener Stahlguß, zweimal geglüht; 4 Kohlswa 52; 5 Kohlswa 50; 6 Gußeisen; 7 Böhlerscher Wolframstahl, geglüht; 8 Remscheider Wolframstahl, ungehärtet.

| Nr. | Länge | Dicke | $\mathfrak{H}$ (max) | $\mathfrak{B}$ (max) | $\mathfrak{J}'$ | $\mathfrak{K}$ | $\mu$ (max) | $U$ (erg) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 33 | 0,8 | 151 | 18500 | 7100 | 1,0 | 3700 | 11700 |
| 2 | 26 | 0,8 | 152 | 18400 | 8840 | 1,3 | 3280 | 12800 |
| 3 | 33 | 0,6 | 165 | 18660 | 8500 | 1,6 | 2630 | 13300 |
| 4 | 18 | 0,6 | 149 | 18310 | 8520 | 1,7 | 2390 | 16200 |
| 5 | 26 | 0,6 | 156 | 18320 | 9000 | 2,1 | 2100 | 20400 |
| 6 | 33 | 0,6 | 155 | 9900 | 4230 | 11,9 | 184 | 34300 |
| 7 | 10 | 1,0 | 235 | 17000 | 12900 | 16,7 | 433 | 92000 |
| 8 | 33 | 0,8 | 505 | 18720 | 9880 | 27,5 | 233 | 116000 |

Die Magnetisierbarkeit ist, wie man sieht, bei den meisten Sorten annähernd die gleiche, nur bei Gußeisen ist sie nur etwa halb so groß. Dagegen verhalten sich die Extreme bei der Remanenz wie 1 : 3, bei der Koerzitivkraft wie 1 : 28, bei der maximalen Permeabilität wie 1 : 20 und bei der Energievergeudung wie 1 : 10. Ferner haben GUMLICH und SCHMIDT für zahlreiche Sorten die Wirkung des Ausglühens bis zu 950° geprüft; die Ergebnisse sind naturgemäß sehr verwickelt, bei Walzeisen tritt z. B. fast gar keine Wirkung, bei Gußeisen eine sehr starke Wirkung auf (die Remanenz steigt um 10%, die Koerzitivkraft sinkt auf den dritten Teil, die Energievergeudung auf weniger als die Hälfte usw.); ferner wird die Wirkung wiederholten Glühens untersucht, wobei sich meist ein Optimum nach einer bestimmten Zahl von Glühungen ergibt u. a. m.

BENEDICKS' Untersuchungen beziehen sich auf „Elektro-Stahl" von GYSINGE in Dannemora (Schweden), und zwar im rohen, geglühten und gehärteten Zustande; dabei wurde besonderes Gewicht auf die Elimination aller sekundären Einflüsse (Form, Methode usw.) gelegt. Die chemische Zusammensetzung war folgende:

| Nr. | $C$ | $Si$ | $Mn$ | $Ph$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,08 | 0,03 | 0,13 | 0,009 | 0,005 |
| 2 | 0,45 | 0,65 | 0,35 | 0,015 | 0,02 |
| 3 | 0,55 | 0,86 | 0,44 | 0,014 | 0,02 |
| 4 | 0,90 | 0,28 | 0,41 | 0,014 | 0,015 |
| 5 | 1,20 | 0.30 | 0,44 | 0,014 | 0,01 |
| 6 | 1,35 | 0,26 | 0,54 | 0,014 | 0,015 |
| 7 | 1,50 | 0,12 | 0,29 | 0,013 | 0,02 |
| 8 | 1,70 | 0,08 | 0,29 | 0,013 | 0,03 |

Übrigens gilt dieser Kohlegehalt nur im rohen und geglühten Zustande; im gehärteten modifiziert er sich bei Nr. 6 zu 1,07, bei Nr. 7 zu 1,14. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt, nämlich die stärkste Magnetisierung, die Koerzitivkraft, die Remanenz, der Energieverlust in Kiloerg und der Faktor $\eta$ in der STEINMETZschen Hysteresisformel (vgl. S. 218, wo $U$ in erg zu denken ist).

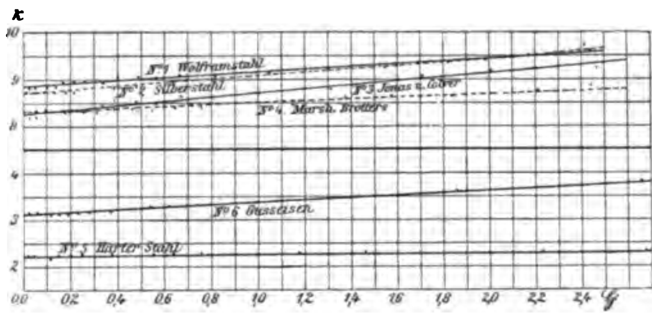
| Nr. | $\mathfrak{J}$ (max) | $\mathfrak{K}$ | $\mathfrak{J}'$ | $U$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | A) roh | | |
| 1 | 1455 | 1,8 | 26,2 | 13,4 | 0,0027 |
| 2 | 1376 | 10,9 | 140 | 52,2 | 0,0012 |
| 3 | 1366 | 12,9 | 161 | 54,0 | 0,0119 |
| 4 | 1339 | 17,5 | 216 | 73,0 | 0,0166 |
| 5 | 1278 | 17,5 | 215 | 71,4 | 0,0175 |
| 6 | 1260 | 18,7 | 231 | 73,0 | 0,0183 |
| 7 | 1225 | 17,6 | 213 | 65,4 | 0,0172 |
| 8 | 1136 | 13,4 | 161 | 52,2 | 0,0155 |
| | | | B) geglüht | | |
| 1 | 1473 | 1,1 | 14,4 | 8,3 | 0,0019 |
| 2 | 1390 | 5,5 | 76 | 34,5 | 0,0074 |
| 3 | 1390 | 6,9 | 95,5 | 37,8 | 0,0081 |
| 4 | 1349 | 9,9 | 136 | 47,5 | 0,0107 |
| 5 | 1289 | 11,7 | 160 | 56,8 | 0,0137 |
| 6 | 1265 | 12,5 | 171 | 57,9 | 0,0144 |
| 7 | 1230 | 10,9 | 145 | 50,9 | 0,0133 |
| 8 | 1145 | 8,8 | 213 | 40,6 | 0,0119 |
| | | | C) gehärtet | | |
| 1 | 1475 | 1,0 | 13,6 | 11,6 | 0,0023 |
| 2 | 1279 | 26,0 | 280 | 86,8 | 0,0210 |
| 3 | 1248 | 34,9 | 421 | 115,0 | 0,0293 |
| 4 | 1029 | 45,4 | 380 | 115,2 | 0,0399 |
| 5 | 852 | 48,3 | 321 | 100,2 | 0,0470 |
| 6 | 762 | 50,2 | 289 | 93,9 | 0,0526 |

Während diese Untersuchungen den Hauptnachdruck auf den Sättigungszustand legen, hat HOLBORN gerade das Verhalten gegen kleine Kräfte geprüft (vgl. o. S. 198) und gefunden, daß die Beziehung

$$\varkappa = a + b\,\mathfrak{H}$$

für alle Sorten in einem gewissen Bereiche erfüllt ist; dabei ergaben sich für die Koeffizienten $a$ und $b$ folgende Werte:

| Nr. | Sorte | $\mathfrak{H}$ - Bereich | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Wolframstahl . . . . . . . . . | 0 bis 2 | 8,90 | 0,264 |
| 2 | Silberstahl . . . . . . . . . | 0 bis 2 | 8,66 | 0,384 |
| 3 | Stahl von JONAS und COLVER . . | 0 bis 2 | 8,30 | 0,409 |
| 4 | Stahl von MARSH BROTHERS . . | 0 bis 2 | 8,27 | 0,210 |
| 5 | Harter Wolframstahl . . . . . | bis 3,5 | 2,23 | 0,032 |
| 6 | Gußeisen . . . . . . . . . | bis 3,4 | 3,16 | 0,236 |
| 7 | Raffinierter Stahl . . . . . . | 0,24 bis 0,8 | 10,28 | 1,92 |
| 8 | Kohlenstoffreiches Eisen . . . | 0,1 bis 0,7 | 16,6 | 18,6 |
| 9 | Stahlguß . . . . . . . . . . | 0,07 bis 0,9 | 18,7 | 13,4 |
| 10 A | Walzeisen, ungeglüht . . . . | 0,07 bis 0,75 | 13,0 | 85,7 |
| 10 B | „ einmal geglüht . . . | 0,07 bis 0,75 | 37,5 | 61,8 |
| 10 C | „ zweimal geglüht . . | 0,07 bis 0,75 | 45,3 | 88 |
| 11 A | Stabeisen, ungeglüht . . . . . | oberhalb 0,08 | 13,0 | 85,7 |
| 11 B | „ zweimal geglüht . . . | 0,18 bis 0,55 | 51,3 | 127,5 |
| 12 | Harter Eisendraht . . . . . | 0,1 bis 1,07 | 5,88 | 1,76 |

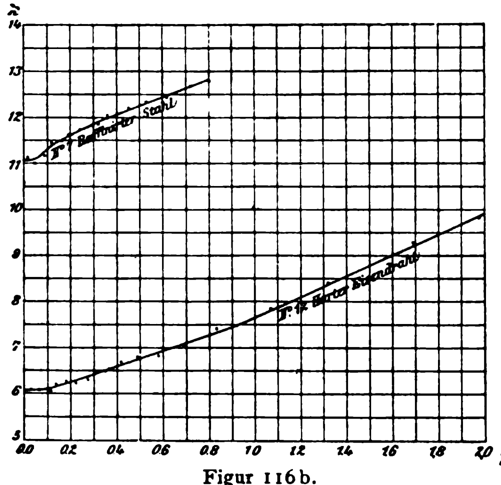


Figur 116a.

In den Figuren 116a, b, c, d sind diese Verhältnisse dargestellt; man sieht, inwieweit die Kurven geradlinig verlaufen und inwieweit sie sich leicht krümmen.

Auf die weiteren Arbeiten von HOLBORN wird im Artikel „Magnetismus und Wärme" eingegangen werden.

Ein reiches Zahlenmaterial hat schließlich ABT für ungarische Stahlsorten aus der Resitzaer Fabrik sowie für Wolframstahl aus Hagen in Westfalen bekannt gemacht; ein Material, das leider viel von seinem Werte dadurch einbüßt, daß alles in willkürlichen Einheiten angegeben ist und sich, zumal keine Reduktion auf den durch die Theorie vorgeschriebenen Normalfall durchgeführt ist, nicht oder nur mit großer Mühe umrechnen läßt. Es muß daher genügen, die Interessenten auf die Abhandlungen selbst zu verweisen.

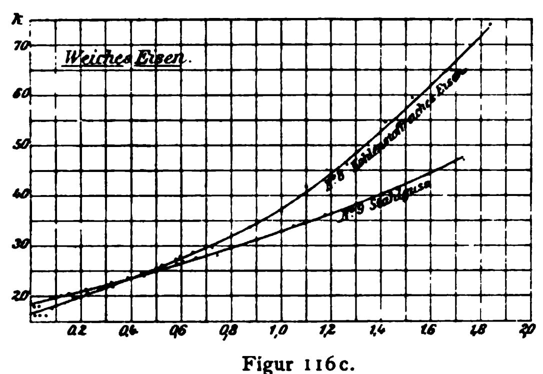


Figur 116b.

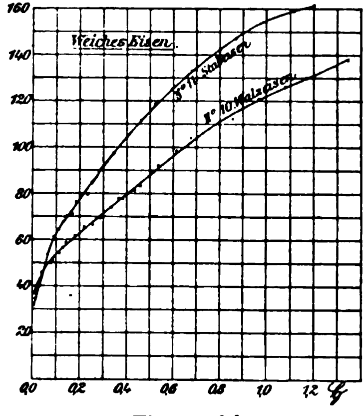
Zu erwähnen sind noch die Arbeiten von M. E. THOMPSON[1] über die Permeabilität von Eisensorten (beste Gußstahle sind Gußeisen weit überlegen) und CHISTONI[2], der bei italienischem Wolframstahl den spezifischen Magnetismus $s = 55$ im Maximum und damit dieses Material sehr geeignet für permanente Magnete fand.

[1] M. E. THOMPSON, KNIGHT und BACON, Trans. Am. Inst. El. Eng. 9. 1892. — [2] CHISTONI und DE VECCHI, N. Cim. (4) 6. 216. 1897. — Mem. Acc. Modena (3) 2. 1899.

**Empirische Beziehungen.** Verschiedene Autoren haben, und zum Teil mit einigem Erfolg, versucht, Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen, wie sie




Figur 116c.




Figur 116d.

für verschiedene Eisen- und Stahlsorten charakteristisch sind, aufzustellen. So haben Gumlich und Schmidt die Beziehung

$$(1) \qquad \mu(\max) = a \frac{\mathfrak{J}'}{\mathfrak{K}}$$

zwischen dem Maximalwerte der Permeabilität, der Remanenz und der Koerzitivkraft angegeben, wo $a$ für weiches Eisen und für Gußeisen eine Konstante (annähernd 0,5), für andere Sorten aber wenigstens eine lineare Funktion der Koerzitivkraft, $a = \alpha + \beta \mathfrak{K}$, ist. Diese Beziehung fand auch Benedicks für seine Stahlsorten gut und selbst für Speziallegierungen leidlich erfüllt; sie läßt sich offenbar auch in der Form

$$(2) \qquad a = \frac{\mathfrak{J}(\max)\,\mathfrak{K}}{\mathfrak{J}'}$$

schreiben, und sie stellt dann auch die Messungen von Hopkinson und Frau Curie ganz leidlich dar. Ferner hat Benedicks gezeigt, daß für sehr verschiedene Stahlsorten der Hysteresiskoeffizient $\eta$ mit der Koerzitivkraft einfach proportional ist, in Formel

Figur 117.

$$(3) \qquad \eta\,'\mathfrak{K} = \text{const} .$$

Diese Beziehung findet sich sogar bei zahlreichen Eisenlegierungen wieder; die

Figur 117 veranschaulicht dies für die, der besseren Sichtbarkeit halber, übereinander eingezeichneten Messungen von Benedicks, Gumlich und Schmidt und Barrett, Brown und Hadfield[1]; übrigens hatte schon Steinmetz die betreffende Wahrnehmung gemacht. Natürlich ist dabei ein bestimmter Kraftbereich des Zyklus vorausgesetzt; für verschiedene $\mathfrak{H}$ (max) nimmt jenes Verhältnis ab, wenn $\mathfrak{H}$ (max) wächst, wie die folgende Tabelle zeigt:

| $\mathfrak{H}$(max) | $\eta/\mathfrak{K}$ | Autor | $\mathfrak{H}$(max) | $\eta/\mathfrak{K}$ | Autor |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 0,00131 | Steinmetz | 4,9 | 0,0066 | |
| 45 | 0,00105 | Barrett usw. | 10,1 | 0,0026 | |
| 90 | 0,00103 | Steinmetz | 14,4 | 0,0023 | |
| 100 | 0,00110 | Ebeling und Schmidt[2] | 18,9 | 0,00155 | Ewing |
| 150 | 0,00105 | Gumlich und Schmidt | 23,5 | 0,00128 | |
| 205 | 0,00092 | Benedicks | 30 | 0,00114 | |
| 500 | 0,00072 | Frau Curie | 82 | 0,00098 | |
| 505 | 0,00062 | Gumlich und Schmidt | | | |

Es lassen sich dann noch weitere Betrachtungen an diese Beziehungen anknüpfen, worauf jedoch hier nicht eingegangen werden kann.

**Besondere Stahl- und Eisenlegierungen.** Eine besondere Betrachtung verdienen die Eisensorten, die man neuerdings sehr vielfach hergestellt hat, und die, von Kohlenstoff abgesehen, erhebliche Mengen anderer Stoffe, namentlich Silicium, Chrom, Wolfram, Antimon, Aluminium und Mangan enthalten. Die praktischen Konsequenzen dieser Arbeiten für die Herstellung temporärer und permanenter Magnete sind schon früher (S. 4 u. 12) besprochen worden; hier handelt es sich nur um das Verhalten als solches. Was zunächst Chromstahl und Wolframstahl betrifft, so besitzen diese eine etwas geringere temporäre, ersterer auch etwas geringere remanente Magnetisierbarkeit, andererseits aber beide eine ganz kolossale Koerzitivkraft, die im härtesten Zustande bei jenem bis zu 40, bei diesem sogar über 50 hinaus ansteigt, also 20 bis 25 mal so groß ist wie im weichen Eisen und 2 bis 3 mal so groß wie beim harten Whitworthstahl; die bei einem maximalen Kreisprozeß zerstreute Energie erreicht daher auch sehr große Werte (für $\mathfrak{H} = 240$ z. B. bis über 200000 Erg.). Am seltsamsten verhält sich Manganstahl, wie die folgenden Hopkinsonschen Zahlen erkennen lassen.

| Sorte | Zustand | % Mn. | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B}'$ | $\mathfrak{K}$ | $U$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Manganstahl . . . . . | weich | 4,73 | 10578 | 5848 | 33,9 | 113963 |
| " . . . . . . . | hart | 4,73 | 4769 | 2158 | 27,6 | 41941 |
| " . . . . . . . | weich | 8,74 | 1985 | 540 | 24,5 | 15474 |
| " . . . . . . . | hart | 8,74 | 733 | — | — | — |
| Hadfields Manganstahl . | hart | 12,36 | 310 | — | — | — |

Der 4prozentige harte Manganstahl ist also noch $^1/_4$ so stark magnetisierbar wie gewöhnlicher, der 8 prozentige nur noch $^1/_{20}$ so stark und der 12prozentige fast gar nicht mehr; dabei ist die Koerzitivkraft außerordentlich groß, bei dem Hadfieldschen aber die Remanenz trotzdem äußerst schwach, vielleicht überhaupt nicht vorhanden; die Permeabilität $\mu$ ist für ihn etwa 1,4, also überaus klein und dabei fast konstant. Durch Oxydation werden nach O'Shea[3] Manganstahlspäne magnetisch, weil das Mangan durch die Oxydation entfernt wird. Man vergleiche ferner eine Abhandlung von E. Wilson[4].

[1] Barrett, Brown und Hadfield, Trans. Dublin Soc. (2) **7**. 67. 1900; J. Inst. Electr. Eng. **31**. 729. 1902. — [2] Ebeling und E. Schmidt, El. Z. **18**. 276. 1897. — [3] O'Shea, Rep. Brit. Ass. 1890. 753. — [4] E. Wilson, Electrician. **45**. 894. 1900.

Holborn[1] hat besonders den Einfluß der Härtungstemperatur für gewöhnlichen Wolframstahl untersucht und gefunden, daß die wirkliche Härtung erst bei 750° eintritt, daß hierbei der temporäre Magnetismus ab-, der remanente bis auf das vierfache zunimmt, daß jedoch jenseits 850° beide Größen abnehmen, so daß letzterer bei 1000° nur noch $^2/_3$ seines größten Wertes beträgt; der gewöhnliche und der Wolframstahl verhielten sich fast gleich. Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese Ergebnisse zunächst nur für die betreffenden Versuchsverhältnisse (ziemlich dicke, kurze Stäbe usw.) zu gelten brauchen. (Vgl. auch w. u. Magnetismus und Wärme.)

Von anderen Untersuchungen seien noch die von Negbaur[2] (22 Eisen- und Stahlsorten, am stärksten magnetisierbar ganz weiches und Flußeisen, von den Stahlen Bessemer- und zweimal raffinierter Löwenstahl), von P. Meyer[3] (Manganstahl) und von du Bois[4] (Eisen, Stahl, Manganstahl für Kräfte bis zu sehr hohen Werten) erwähnt; letzterer zieht aus seinen magnetometrischen und magnetooptischen Beobachtungen am Manganstahl (12%) den Schluß, daß dieses Material sehr heterogen in magnetischer Hinsicht, also für exakte Zwecke untauglich ist.

Vom Silicium war bisher nur bekannt, daß es — nach J. Hopkinson — keinen besonderen Einfluß auf das magnetische Verhalten des Eisens, dem es zugesetzt wird, ausübe; Siliciumstahl verhielt sich danach etwa wie kohlereicher Whitworthstahl; und ähnliches galt für Aluminstahl. Systematisch untersucht wurden diese Legierungen erst durch Barrett, Brown und Hadfield[5], deren Resultate dann Gumlich[6] diskutiert hat. Einen kleinen Auszug gibt folgende Tabelle ($\mathfrak{B}'$ = remanente Induktion):

| Marke | %-Gehalt C | Al | Si | $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{H} = 45$ | $\mathfrak{B}'$ (korr.) | $\mathfrak{K}$ | $\mu$ (max) | $U$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1167 D | 0,17 | 0,75 | 0,10 | 16500 | 11000 | 2,00 | 2700 | 11620 | 0,0021 |
| 1167 H | 0,24 | 2,25 | 0,18 | 16500 | 11300 | 1,87 | 2950 | 10960 | 19 |
| 1167 J | 0,22 | 5,50 | 0,20 | 13410 | 4500 | 1,43 | 1550 | 6825 | 17 |
| Eisen B | 0,03 | — | 0,14 | 17480 | 10600 | 1,66 | 3100 | 11090 | 18 |
| 898 E | 0,20 | — | 2,5 | 16640 | 8000 | 0,90 | — | — | — |
| 898 H | 0,26 | — | 5,5 | 16480 | 6900 | 0,85 | 4000 | 6500 | 12 |
| SCI | 0,03 | — | 0,07 | 16750 | 9400 | 1,66 | 2800 | 10100 | 18 |
| B | 0,03 | — | 0,14 | 17480 | 10600 | 1,76 | 3100 | 11090 | 18 |

Ferner hat A. Jouve[7] Eisen-Silicium-Legierungen untersucht und in gewissen Grenzen Proportionalität mit dem Si-Gehalt gefunden.

Über die Aluminium-Legierungen des Eisens liegen noch zahlreiche Arbeiten vor; sie beziehen sich aber abgesehen von einer von Schweitzer[8] (Aluminium-Zusätze zu Gußeisen) meist auf den Einfluß der Temperatur (s. w. u.).

Antimon-Legierungen hat P. Weiss[9] untersucht und gefunden, daß sie mit zunehmendem Eisengehalte, namentlich von 38% ab ($Sb_3Fe_4$), immer magnetischer werden, und daß die Remanenz große Verschiedenheiten aufweist.

**Magnetit oder Magneteisenstein.** Die Angaben über dieses Mineral ($Fe_3O_4$) lauten außerordentlich verschieden, was zum Teil auf die sehr schwankende chemische Beschaffenheit desselben (von zwei von Abt benutzten Stücken enthielt z. B. das eine 17, das andere 61% Eisen), zum Teil auf die verschiedene Form

[1] L. Holborn, Beibl. 1893. S. 957; vgl. auch eine ältere Abh. mit zum Teil etwas abweichenden Zahlen, Zeitschr. f. Instr.-K. 1891. S. 113. — [2] W. Negbaur, El. Z. 1889. S. 348. — [3] P. Meyer, El. Z. 1889. S. 582. — [4] H. du Bois, Phil. Mag. (5) **29**, S. 293. 1890. — [5] Barrett, Brown und Hadfield, Trans. R. Dubl. Soc. (2) **7**. 1900. — [6] E. Gumlich, El. Z. 1902. S. .01. — [7] A. Jouve, C. R. **134**. 1577. 1902. — [8] A. Schweitzer, El. Z. 1901. 363 u. 466. — [9] P. Weiss, In.-Diss. Paris 1896. — Die Steinmetzsche Hysteresisformel ist bei diesen Legierungen nicht erfüllt.

der den Beobachtungen zugrunde liegenden Stücke zu schieben ist. BECQUEREL fand den spezifischen Magnetismus etwa halb so groß wie beim Eisen. A. L. HOLZ[1] verglich den Magnetit mit Stahl und fand den temporären Magnetismus in drei Fällen ziemlich übereinstimmend zu 93, 84, 77% von dem des Stahls, den permanenten beträchtlich größer und zwar in einem von der Kraft ziemlich unabhängigen Verhältnisse, im Mittel 1,3, 1,45, 1,55 bei den 3 Stücken. Trotzdem wird der Magnetit, wie HOLZ fand und sich nach den damaligen Vorstellungen noch nicht zu erklären vermochte, leichter entmagnetisiert, d. h. seine Koerzitivkraft ist kleiner. Zu qualitativ ähnlichen, quantitativ jedoch abweichenden Ergebnissen ist neuerdings ABT[2] gelangt, der ungarischen Magnetit, und zwar zu gleichartigen Prismen verarbeitet, benutzte; das eine Stück (I.) enthielt (s. o.) 17, das zweite (II.) 61% Eisen. Die folgende kleine Tabelle enthält für verschiedene, leider nicht in absolutem Maße gegebene Kräfte $\mathfrak{H}$ das Verhältnis der temporären ($T$) und permanenten ($P$) Magnetismen für Magnetit und glasharten Stahl:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | $\mathfrak{H}$ | 37,5 | 51,2 | 64,0 | 71,5 | 79,0 | 95,5 | 99,5 |
| | $T$ | 0,25 | 0,23 | 0,21 | 0,20 | 0,18 | 0,24 | 0,24 |
| | $P$ | 0,84 | 1,22 | 1,54 | 1,50 | 1,56 | 1,75 | 1,82 |
| II. | $\mathfrak{H}$ | 38,5 | 50,5 | 65,8 | 72,2 | 82,0 | 94,0 | 98,5 |
| | $T$ | 0,37 | 0,39 | 0,35 | 0,38 | 0,31 | 0,38 | 0,31 |
| | $P$ | 2,00 | 2,61 | 2,73 | 2,65 | 2,57 | 2,24 | 2,21 |

Das Verhältnis der $T$ ist also konstant, bei I. etwa 0,22, bei II. etwa 0,36, d. h. der Magnetit nimmt etwa $^1/_5$—$^2/_5$ von dem temporären Magnetismus des Stahls an; dagegen ist der permanente (bis auf eine Ausnahme) bei Magnetit größer, das Verhältnis wächst bei I mit steigender Magnetisierung bis zu 1,82, bei II wächst es bis 2,73, um dann wieder auf 2,21 abzunehmen. Die Zahlen beziehen sich auf die Gewichtseinheiten; für die Volumeneinheit wird die Überlegenheit des Magneteisensteins noch größer. Bei späteren Untersuchungen wurden diese Resultate im allgemeinen bestätigt; nur wurde zu höheren Sättigungen fortgeschritten, die Koerzitivkraft gemessen usw. Allgemeines läßt sich auch aus diesen Versuchen nicht schließen. Übrigens fand sich, daß der Magnetit zwar die gewöhnlichen Stahlsorten an Remanenz übertrifft, hinter raffinierten Tiegelstahlen, besonders Wolframstahl, aber zurückbleibt. Der größte ermittelte Wert des spezifischen remanenten Magnetismus ist $s' = 6{,}3$, woraus sich etwa $\mathfrak{J}' = 50$ ergeben würde. (?)

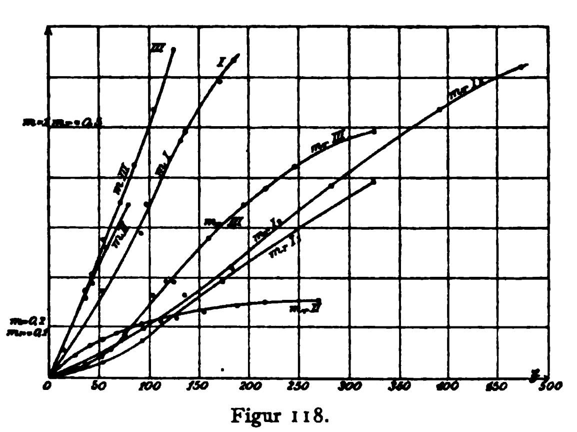
Die einzigen absoluten Bestimmungen sind bisher von DU BOIS, und zwar nach der optischen Methode (S. 181) ausgeführt worden; hiernach steigt der Magnetismus des Magnetits mit der magnetisierenden Kraft rasch an und erreicht etwa bei $\mathfrak{H} = 1500$ das Maximum $= 350$, d. h. etwa $^1/_4$ von dem des Eisens. Der Wert des remanenten $\mathfrak{J}'$ ist leider nicht angegeben.

**Andere Mineralien.** Außer Magnetit hat ABT[3] noch mehrere andere Eisenverbindungen, wie sie sich in der Natur vorfinden, auf ihr magnetisches Verhalten geprüft, nämlich Pyrrhotit (annähernd $Fe_7S_8$), Hämatit oder Magnetkies ($FeO_2$) und Limonit ($H_6Fe_4O_9$). Die beiden ersteren erwiesen sich als von derselben Größenordnung magnetisierbar wie Magnetit; das Verhältnis ist zwar in schwachen Feldern sehr klein — 1/12 bis 1/6, die Kurve ist aber steiler, und so kommen diese Mineralien jenem allmählich näher; in einzelnen Fällen überholte der Magnetkies sogar den Magnetit. Jedenfalls zeigt der Vergleich, daß es bei diesen Mineralien nicht allein auf den Eisengehalt, sondern auch auf die Strukturverhältnisse ankommt. Dagegen ist der permanente Magnetismus des

[1] A. L. HOLZ, Wied. Ann. **5**. S. 169. 1878. — [2] A. ABT, Wied. Ann. **45**. S. 80. 1892; **52**. 749. 1894; **66**. 119. 1898. — [3] A. ABT, Wied. Ann. **57**. 135. 1896; **68**. 658. 1899; Drude Ann. **6**. 782. 1901.

Limonits kaum merklich, und man kann auch ganz gut verfolgen, wie der Hämatit durch Aufnahme von Wasser, wodurch er in Limonit übergeht, seinen Magnetismus nach und nach verliert.

Endlich hat POCKELS[1] Basalt untersucht — im Hinblick auf die Bedeutung dieses Materials für den Erd- und Gesteins-Magnetismus — und zwar Nephelin-Basalt von drei verschiedenen Fundstätten. Die Proben erhielten Stabform, die Messung erfolgte nach dem magnetometrischen Kompensationsverfahren. Die Ergebnisse sind in Figur 118 dargestellt, die drei obersten Kurven beziehen sich auf den temporären, die vier unteren auf den remanenten Magnetismus für die Volumeneinheit, bei letzteren ist der Ordinaten-Maßstab der halbe. Wie man sieht, verhält sich Basalt im ganzen etwa wie Eisen, nur tritt bei den verschiedenen Proben die Inflexion und die Annäherung an die Sättigung sehr verschieden ein. Natürlich sind die Magnetisierungen sehr schwach, wie bei dem geringen Gehalt an Magnetit, auf den doch jedenfalls alles zurückzuführen ist, nicht wundernehmen darf; bei III betrug derselbe 24,5, bei II 6,6, bei I 17,7 %.



Figur 118.

**Nickel.** Die älteren Beobachter[2] fanden meist, daß Nickel etwa ein drittel bis ein halb so stark magnetisch wird wie Eisen unter gleichen Umständen, und das hat sich auch neuerdings so ziemlich bestätigt. Die vollständigsten und zuverlässigsten Bestimmungen sind die von ROWLAND, EWING und DU BOIS, die sich insofern ergänzen, als sie sich auf verschiedene Gestalten (Ringe, Drähte, Stäbe), verschiedene Härtezustände beziehen und nach verschiedenen Methoden (Induktions-, magnetometrische, Isthmus-, optische) gewonnen sind.

1. ROWLAND[3]: gegossener Nickelring, maximale Werte:

$$\varkappa = 17,6 \ , \quad \mu = 222 \ , \quad \mathfrak{J} = 434 \ (\text{für } \mathfrak{H} = 104) \ :$$

2. EWING[4]: ausgeglühter Nickeldraht bei kleinen bis mittleren Feldstärken:

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\varkappa$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 22 | — | 24,6 | 325 | 13,2 |
| 4,0 | 36 | — | 52,6 | 371 | 7,1 |
| 6,5 | 83 | 12,8 | 79,7 | 392 | 4,9 |
| 8,0 | 177 | 22,1 | 100,4 | 401 | 4,0 |
| 9,5 | 223 | 23,5 | 0 | 284 | — |
| 10,9 | 251 | 23,0 | −7,5 | 0 | — |
| 12,3 | 273 | 22,2 | | | |

$\mathfrak{J}$ wächst also zuerst rascher, dann langsamer als $\mathfrak{H}$, oder $\varkappa$ nimmt erst zu, dann ab; die $\varkappa$-Kurve ist aber viel flacher als beim Eisen, und zwar auch relativ; denn während das $\mathfrak{J}$-Maximum etwa $^1/_3$ bis $^1/_4$ desselben bei Eisen ist, beträgt das $\varkappa$-Maximum nur rund $^1/_{10}$ desselben für Eisen, auch tritt es erst bei

[1] F. POCKELS, Wied. Ann. **63**. 195. 1897. — [2] Vgl. namentlich: G. HANKEL, Wied. Ann. **1**. 285. 1877. — [3] H. ROWLAND, Phil. Mag. (4) **48**. S. 321. 1874. — [4] J. A. EWING, Phil. Trans. Lond. **179** A. S. 327. 1888.

einer etwa dreimal so großen Kraft, aber freilich umgekehrt schon bei sehr viel kleinerem ℑ ein. Mit anderen Worten: Die Magnetisierungskurve (ℑ als Funktion von ℌ) und die Kurve für $\varkappa$ als Funktion von ℌ steigen beim Nickel sanfter an als beim Eisen. die Kurve für $\varkappa$ als Funktion von ℑ, oder auch von $\mu$ als Funktion der Induktion 𝔅 (vgl. Fig. 90) hingegen steigt bei Nickel plötzlicher an als bei Eisen. Die vorletzte Zahl für ℑ gibt den remanenten Magnetismus, er beträgt also 70% des temporären; die letzte Zahl für ℌ gibt die Koerzitivkraft, sie ist im Vergleich zu weichem Eisen sehr beträchtlich. Noch viel größer wurde sie freilich nach Härtung des Drahtes, nämlich gleich 18, während dabei $\varkappa$ auf 8,3 im Maximum herabsank.

3. DU BOIS[1]: hartgezogener Nickeldraht bei hohen Feldstärken und bei 100° (aus experimentellen Gründen); bei 0° würden die Zahlen etwas größer sein (z. B. in der letzten Zeile 579 statt 525).

| ℌ | 𝔅 | ℑ | $\mu$ | $\varkappa$ | ℌ | 𝔅 | ℑ | $\mu$ | $\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 550 | 6420 | 453 | 11,67 | 0,82 | 9600 | 16250 | 527 | 1,69 | 0,06 |
| 3410 | 9920 | 518 | 2,91 | 0,15 | 12620 | 19290 | 525 | 1,52 | 0,04 |
| 6290 | 12850 | 522 | 2,04 | 0,08 | | | | | |

Wie bei Eisen wird also auch bei Nickel $\varkappa$ für hohe ℌ sehr klein; aber es ist bemerkenswert, daß das Verhältnis hier für Nickel immer günstiger wird.

4. EWING[2]: hartgezogener und ausgeglühter Nickeldraht bei hohen Kräften und 0° (Isthmus-Methode).

| hartgezogen | | | | ausgeglüht | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ℌ | 𝔅 | ℑ | $\mu$ | ℌ | 𝔅 | ℑ | $\mu$ |
| 2220 | 7100 | 390 | 3,20 | 3450 | 9850 | 510 | 2,86 |
| 4440 | 9210 | 380 | 2,09 | 6420 | 12860 | 510 | 2,00 |
| 7940 | 12970 | 400 | 1,63 | 8630 | 15260 | 530 | 1,77 |
| 14660 | 19640 | 400 | 1,34 | 11220 | 17200 | 480 | 1,53 |
| 16000 | 21070 | 400 | 1,32 | 12780 | 19310 | 520 | 1,51 |
| | | | | 13020 | 19800 | 540 | 1,52 |

540 scheint bis jetzt der höchste erreichte Wert der Magnetisierungs-Intensität im Nickel zu sein.

Den remanenten Magnetismus des Nickels hat u. a. auch ABT[3] untersucht und mit dem des Stahls verglichen. Für kleine Kräfte ist Nickel dem Stahl 4 bis 5 mal überlegen, dann schneiden sich die Kurven, und schließlich ist das Maximum nur $^1/_8$ bis $^1/_4$ von dem für Stahl.

Legierungen von Nickel und Wolfram haben TROWBRIDGE und SHELDON[4] untersucht, es muß aber an diesem Hinweise genügen.

**Nickeleisen.** Besonders merkwürdige Eigenschaften weisen die Legierungen von Eisen mit Nickel auf, wie dies zuerst von J. HOPKINSON[5] festgestellt worden ist. Diese Legierungen sind nämlich, je nach dem Nickelgehalte, sehr stark oder sehr schwach magnetisierbar; und zwar nimmt die Magnetisierbarkeit bis zu einem Gehalte von 25% mehr und mehr ab, um dann wieder zuzunehmen; bei dem genannten Mischungsverhältnis beträgt die Permeabilität nur eine oder

[1] H. DU BOIS, Phil. Mag. (5) **29**. S. 300. 1890; vgl. J. A. EWING, Magn. Ind. S. 155, wo jedoch einige Zahlen falsch berechnet sind. — [2] J. A. EWING, Magn. Ind. S. 147. 1892. — [3] A. ABT, Centr. Z. f. Opt. u. Mech. 1890. S. 229. — [4] TROWBRIDGE und SHELDON, Sill. Journ. (3) **38**. S. 462. 1889. — [5] J. HOPKINSON, Proc. R. Soc. Dez. 1889 u. Jan. u. Mai 1890.

wenige Einheiten. Allerdings gilt das nur für den natürlichen Zustand; durch Erhitzung kann die Magnetisierbarkeit gewaltig gesteigert werden, wovon später die Rede sein wird.

Später hat dann PAILLOT[1] verschiedene Nickelstahle einer systematischen Untersuchung unterworfen und folgendes gefunden: 1. bei irreversiblem Stahl — so wird solcher unter 25% Nickelgehalt genannt, weil hier nach der Erhitzung der ursprüngliche Zustand sich nicht wieder einstellt —, speziell bei 24,1% Nickel und 0,3% Kohle wächst die Permeabilität mit wachsender Feldstärke, und zwar bei 15° C folgendermaßen:

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mu$ |
|---|---|---|
| 20050 | 20462 | 1,020 |
| 25910 | 27205 | 1,049 |
| 28182 | 29309 | 1,040 |
| 29471 | 30975 | 1,051 |
| 30098 | 32597 | 1,083 |

Man beachte zugleich, wie klein die Permeabilität überhaupt ist, d. h. um wie wenig die Induktion die Kraft übertrifft. 2. Bei reversiblem Stahl mit 26 oder 27% Nickelgehalt erreicht die Permeabilität bei einer Feldstärke von rund 4000 den Wert 1,19, den sie dann bis zu Feldern von 30000 beibehält. 3. Sind noch geringe Mengen von Chrom oder Mangan in der Legierung enthalten, so nimmt die Permeabilität mit wachsender Feldstärke ab; die zusammengehörigen Werte von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mu$, entsprechend größter Permeabilität und größter Induktion, sind hier zusammengestellt:

| Legierung | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|
| 27,2% Ni und 1,48% Cr | 5356<br>30704 | 8834<br>37766 | 1,64<br>1,23 |
| 29,1% Ni und 1,4% Cr | 3427<br>30643 | 10693<br>40756 | 3,12<br>1,33 |
| 30,4% Ni und 1,3% Cr | 3530<br>30748 | 5613<br>40279 | 1,59<br>1,31 |
| 41,7% Ni und 1,3% Mn | 3220<br>29992 | 4925<br>38990 | 1,52<br>1,30 |
| 29,6% Ni und 1,1% Mn | 3128<br>30094 | 10116<br>36113 | 3,25<br>1,20 |
| 35% Ni und 0,3% Mn | 3246<br>30446 | 14964<br>59065 | 4,61<br>1,94 |

Andererseits können durch geringen Nickelzusatz die magnetischen Eigenschaften des Eisens sogar gesteigert werden, und das Optimum scheint bei 5% *Ni* zu liegen. — Diese Legierung ist also für die Technik besonders empfehlenswert[2].

Auch OSMOND[3] hat Stahl mit Nickel- und Mangangehalt untersucht und die Bedingungen zur Herstellung brauchbarer Magnete aus solchen Legierungen festgestellt; sie haben den Vorzug, nicht gehärtet werden zu brauchen.

Endlich sei auf die Arbeit von ABT[4], u. a. über Nickelstahlsorten, verwiesen.

---

[1] R. PAILLOT, C. R. **132**. 1180. 1901. — [2] Vgl. J. A. EWING und PARSHALL, Proc. Inst. Civ. Eng. **126**. 50 u. 71. 1896. — W. LEICK, Wied. Ann. **59**. 750. 1896. — [3] F. OSMOND, C. R. **128**. 1513. 1899. — [4] A. ABT, Drude Ann. **6**. 774. 1901.

Hier wäre ferner das Material über Meteorstein, das ja mehr oder weniger aus Nickeleisen besteht, anzuschließen. Es muß indessen in dieser Hinsicht auf die mineralogische Literatur verwiesen werden[1].

**Magnetische Verbindungen unmagnetischer Bestandteile.** Wenn es nach dem obigen zweifellos ist, daß bei der Kombination eines magnetischen Bestandteiles mit einem unmagnetischen (Eisen und Mangan) und selbst zweier magnetischer Bestandteile (Eisen und Nickel) die Magnetisierbarkeit teilweise und vielleicht sogar völlig verloren gehen kann[2], so erhebt sich andererseits die Frage, ob man auch durch Kombination unmagnetischer Bestandteile Stoffe herstellen könne, die magnetisierbar — im ferromagnetischen Sinne — sind; eine Frage, die offenbar gleich hohes wissenschaftliches wie praktisches Interesse darbietet. Diese Frage ist nun, nachdem vereinzelte frühere Beobachtungen ohne endgültige Beweiskraft geblieben waren, nach den Entdeckungen von HEUSLER[3] zu bejahen. Die Manganlegierungen der Metalle: Zinn, Aluminium, Arsen, Antimon, Wismut und Bor, also von lauter indifferenten Metallen, sind mehr oder weniger stark magnetisierbar, und sie behalten diese Eigenschaft auch bei, wenn man ihnen Kupfer und andere an sich unmagnetische Metalle zusetzt; freilich ist dabei die thermische Vorgeschichte der Legierungen von wesentlichem Einflusse, und es sei wenigstens angeführt, daß es am günstigsten ist, die frisch gegossenen Legierungen mit einer 110 grädigen Temperatur zu behandeln.

Einige systematische Untersuchungen haben bisher nur die Mangan-Aluminium-Kupfer-Legierungen erfahren, und zwar, unter Leitung von RICHARZ, durch W. STARCK und E. HAUPT; das Rohmaterial bildete das von der Isabellenhütte zu Dillenburg hergestellte, ca. 30% Mangan enthaltende Mangankupfer, dem dann verschiedene Mengen Aluminium zugesetzt wurden; die Methode war die magnetometrische. Die Versuchsreihe I ergab wegen falscher Vorbehandlung der Proben noch keine brauchbaren Resultate; die Reihe II ist hier wiedergegeben:

| Nr. | Prozent | | Atom-Verh. | Induktion $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{H}$ = | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Mn | Al | Mn : Al | 20 | 40 | 100 | 150 |
| 34 | 28,1 | 3,6 | 3 : 0,8 | unmagnetisierbar | | | |
| 35 | 27,7 | 5,7 | 3 : 1,25 | schwach magnetisierbar | | | |
| 36 | 25,9 | 9,6 | 3 : 2,25 | 2220 | 2670 | 3200 | 3470 |
| 32 | 26,5 | 14,6 | 3 : 3,2 | 4500 | 4850 | 5380 | 5550 |
| 33 | 24,4 | 13,8 | 3 : 3,4 | 3580 | 4075 | 4645 | 4900 |

Wie man sieht, nimmt die Magnetisierbarkeit mit steigendem Aluminiumgehalte zu bis zu einem Maximum, das erreicht ist, sobald auf ein Atom Mangan ein Atom Aluminium kommt. Die Magnetisierbarkeit an sich beträgt etwa zwei Drittel von der des Gußeisens; da außerdem die Hysteresis anscheinend gering ist, so darf die Herstellung derartiger magnetischer Bronzen als ein wichtiger Fortschritt bezeichnet werden.

Für Mangan-Zinn-Kupfer ergab eine vorläufige Reihe folgendes:

| Nr. | Atom-Verh. | Induktion $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{H}$ = | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Mn : Al | 20 | 40 | 100 | 150 |
| 9 | 1 Sn : 2 Mn | fast unmagnetisierbar | | | |
| 13 | 1 Sn : 3 Mn | — | — | 1140 | 1500 |
| 10 | 1 Sn : 4 Mn | 220 | 420 | 815 | 1000 |
| 11 | 1 Sn : 6 Mn | 70 | 170 | 450 | 610 |

[1] Vgl. z. B. E. COHEN, Ann. k. k. Hofmuseums Wien. **10.** 81. 1895. — [2] Nach einer gelegentlichen Bemerkung von G. REICHARD — Drude Ann. **6.** 832. 1901 — sind auch Ni-Co-Legierungen nicht magnetisierbar. — [3] FR. HEUSLER, W. STARCK und E. HAUPT, Verh. D. Phys. Ges. 1903, 219 u. 220. — Ges. z. Beförd. d. Nat.-Wiss. Marburg. **13.** 1903—1904.

**Kobalt.** Es wird hier genügen einige Zahlen anzuführen, aus denen hervorgeht, daß das Kobalt qualitativ sich ganz wie Nickel verhält und quantitativ zwischen Eisen und Nickel steht, derart, daß es sich für hohe Feldstärken dem Eisen sehr nähert, für geringe aber nicht erheblich vom Nickel abweicht. So fand EWING[1] bei einem gegossenen Kobaltstabe im Maximum $\varkappa = 13,8$ (bei $\mathfrak{H} = 25$), ROWLAND bei einem gegossenen Ringe sogar nur 11,2, also etwa halb so viel wie bei Nickel; andererseits fanden DU BOIS und EWING bei großen Kräften folgende sehr gut übereinstimmende Zahlen:

DU BOIS, Gegossenes Kobalt. 100° C. Optische Methode. — EWING, Kobalt. Isthmusmethode.

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mu$ | $\varkappa$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mu$ | $\varkappa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 860 | 14180 | 1060 | 16,49 | 1,23 | 1350 | 16000 | 1260 | 12,73 | 0,93 |
| 2500 | 16750 | 1134 | 6,70 | 0,45 | 4040 | 18870 | 1280 | 4,98 | 0,32 |
| 4800 | 19550 | 1174 | 4,07 | 0,24 | 8930 | 23890 | 1290 | 2,82 | 0,14 |
| 6870 | 21710 | 1181 | 3,16 | 0,17 | 14990 | 30210 | 1310 | 2,10 | 0,09 |
| 8350 | 23330 | 1192 | 2,79 | 0,14 | | | | | |

Das Maximum von $\mathfrak{J}$ ist hiernach etwa 1300, d. h. $^3/_4$ von dem Werte für weiches Eisen.

Für die Nickel- und Kobaltversuche gemeinschaftlich gilt übrigens die Bemerkung, daß diese Materialien schwer rein zu erhalten sind, und daß sie auch in den oben benutzten Versuchen Eisen und (das Kobalt) Nickel enthielten, was auf die Zahlen vielleicht von nicht ganz unwesentlichem Einflusse ist.

BEATTIE[2] hat die Hysteresis von Nickel und Kobalt in einem magnetischen Drehfelde untersucht, indem er um das kreisförmige Probestück, das an einem Stahldrahte hing, einen Elektromagneten herumdrehte und den Ausschlag des Probestücks maß. Wie sich zeigte, nimmt die drehende Hysteresis pro Zyklus und cbcm anfangs zu und erreicht dann ein Maximum, nämlich

für Ni bei $\mathfrak{J} = 350$ 10000 Erg
für Co bei $\mathfrak{J} = 700$ 36000 Erg
für Weicheisen bei $\mathfrak{J} = 1350$ 44000 Erg ;

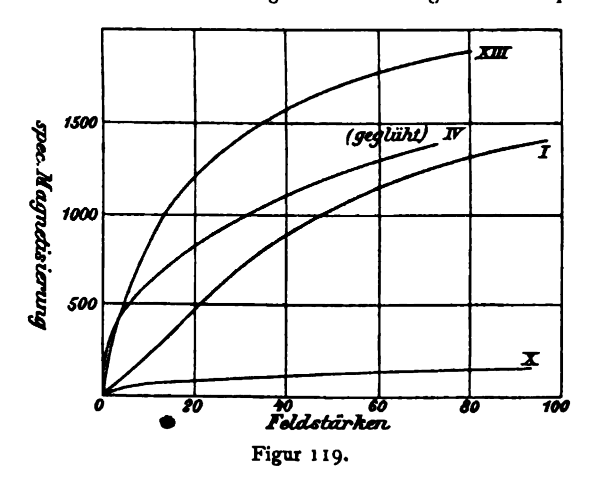
bei weiterer Steigerung nimmt sie ab und verschwindet fast ganz für Ni bei $\mathfrak{J} = 500$, für Co bei 1000 und für Eisen bei 1700.

**Dünne Schichten, Drähte und galvanische Niederschläge.** Von verschiedenen Gesichtspunkten aus hat man dünne Drähte aus magnetischem Material oder solche aus unmagnetischem Stoffe, aber mit einer magnetischen Schicht überzogen, sowie dünne Schichten überhaupt untersucht. Namentlich sind hier die Arbeiten von DU BOIS, SECKELSON, LEICK und MAURAIN[3] zu nennen. SECKELSON benutzte die QUINCKEsche Zugkraftmethode (S. 181), die bekanntlich zwei verschiedene Konstanten $k$ $(= \varkappa/2)$ ergibt, je nachdem Parallel- oder Querstellung erfolgt; er bestimmte diese Konstanten für verschiedene Dicken der Schicht und bei jeder Dicke für verschiedene Feldstärken; schließlich stellt er seine Zahlen mit denen anderer Beobachter nach der gleichen Methode (HOWARD, LENARD, WEBER, ALLAN, MEYER, wegen der Literatur s. o. S. 191) zusammen. Da dieses ganze Zahlenmaterial nur sehr speziellen Wert hat, kann hier von seiner Wiedergabe abgesehen werden. Nur sei angeführt, daß nach diesen Versuchen beide $k$

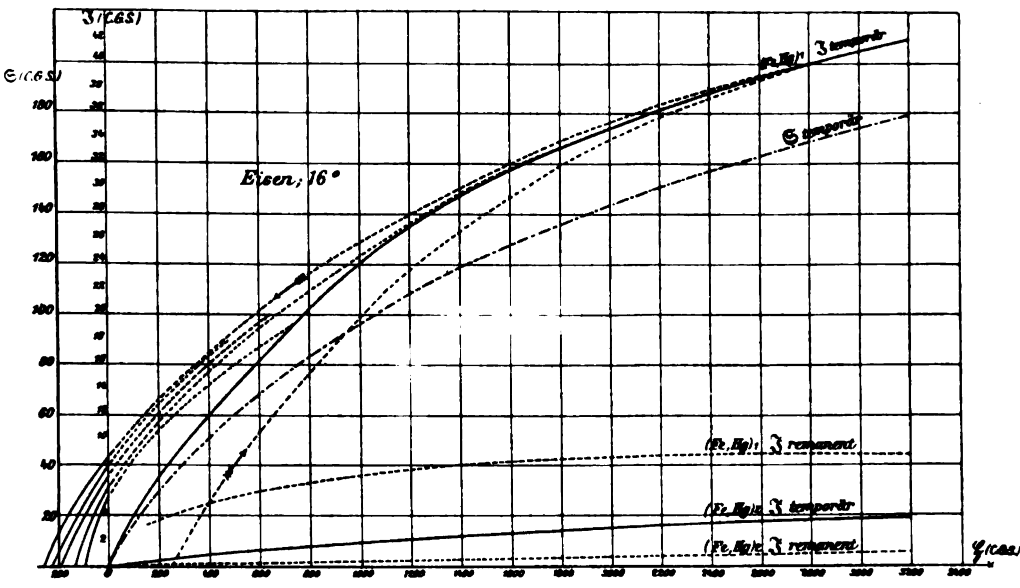
[1] J. A. EWING, a. a. O. — [2] R. BEATTIE, Phil. Mag. **6**. 642. 1901. — [3] H. DU BOIS, Phil. Mag. (5) **29**. 298. 1890. — E. SECKELSON, Wied. Ann. **67**. 37. 1899. — W. LEICK, Wied. Ann. **58**. 691 u. **59**. 750. 1896. Daselbst ist auch die ältere Literatur angegeben. — CH. MAURAIN, C. R. **131**. 410 u. 880. 1900; J. de Phys. (4) **1**. 151. 1902.

für Eisen am größten sind, daß dann Kobalt, Nickel und, wenn die untersuchten nicht-ferromagnetischen Stoffe gleich mit erwähnt werden dürfen, Mangan und Platin kommen; im übrigen vergleiche man das im vorigen Artikel Gesagte (S. 191).

LEICK untersuchte das magnetische Verhalten galvanischer Eisen-, Nickel- und Kobaltniederschläge auf Messing- oder Kupferstäben von 12 cm Länge und 2 bis 4 mm Dicke, wobei die Dicke des Überzugs zwischen 4 und 63 mg variiert wurde; das Eisen wurde aus Eisenvitriol, Eisenchlorür oder Eisenammoniumsulfat, das Nickel aus Nickelammoniumsulfat, das Kobalt aus Kobaltsulfat ausgeschieden; schließlich kamen dann noch Niederschläge von Nickeleisen und Kobalteisen hinzu; die Methode war die magnetometrische. Als wesentliches Ergebnis ist anzuführen, daß die Suszeptibilität bei Eisen und Kobalt erst steigt und dann fällt, bei geglühtem Eisen und Nickeleisen aber von vornherein fällt; ferner, daß die Remanenz bei galvanischem Eisen sehr groß ist (in zwei Fällen betrug sie 65 bzw. 62% der temporären Magnetisierung), und daß sie durch Erschütterungen oder Liegenlassen nicht wesentlich beeinflußt wird (der Verf. spricht übrigens fälschlich von Koerzitivkraft statt von Remanenz). Was endlich das Verhältnis der verschiedenen Materialien zueinander betrifft, so gibt Figur 119 eine Anschauung; es bezieht sich Kurve I auf Eisen, IV auf geglühtes Eisen, X auf Nickel (die Kobaltkurve würde sich von dieser nicht weit entfernen), endlich XIII auf Nickeleisen; Abszissen sind



Figur 119.

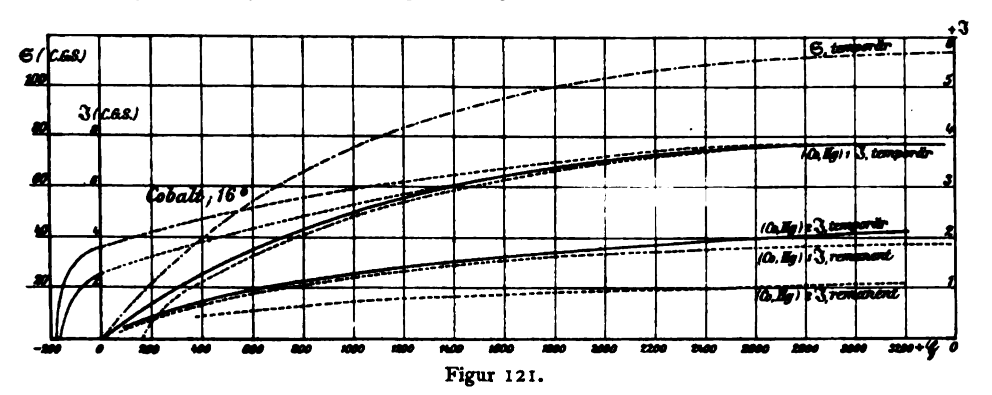


Figur 120.

die Feldstärken, Ordinaten die Magnetisierungen $\mathfrak{J}$ (nicht, wie der Verf. sagt, die spezifischen Magnetisierungen). Das Nickeleisen erreicht dabei den hohen Wert $\mathfrak{J} = 1830$, also mit den höchsten bisher festgestellten.

Aus den Arbeiten von MAURAIN endlich ist namentlich hervorzuheben die Bestimmung der Grenzdicke, bei der der Niederschlag bestimmte magnetische Eigenschaften annimmt, und die sich bei Eisen auf 83, bei Nickel auf 200 $\mu\mu$ beläuft: ferner die Ermittelung der Induktionskurven einerseits für fertiges, andererseits für erst im Augenblick sich bildendes Material, wobei sich zeigt, daß die letztere viel steiler verläuft und keinen Inflexionspunkt besitzt.

**Amalgame.** Über die magnetischen Eigenschaften der Amalgame, d. h. der Verbindungen der ferromagnetischen Substanzen mit Quecksilber sind wiederholt gelegentliche Versuche angestellt worden, und ZAMBONI[1] widmete dem Eisenamalgam sogar eine eigene Untersuchung; Ergebnisse von allgemeinerem Werte hat aber erst die Arbeit von NAGAOKA[2] gezeitigt. Dieselbe bezieht sich, soweit Mitteilungen vorliegen, auf flüssige Amalgame von Eisen und Kobalt, die in Ge-



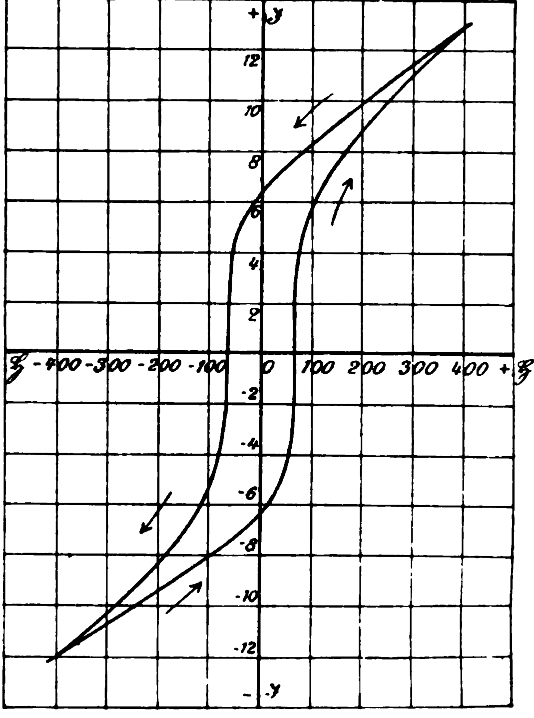

Figur 121.

fäßen von der Form von Rotationsellipsoiden sowohl der magnetometrischen als auch der ballistischen Prüfung unterworfen wurden; ihre Zusammensetzung geht aus folgender Zusammenstellung hervor

| | Prozentgehalt g | Konzentration c g/ccm |
|---|---|---|
| $(Fe, Hg)_1$ | 1,78 | 0,235 |
| $(Fe, Hg)_2$ | 0,19 | 0,025 |
| $(Co, Hg)_1$ | 0,50 | 0,068 |
| $(Co, Hg)_2$ | 0,25 | 0,034 |

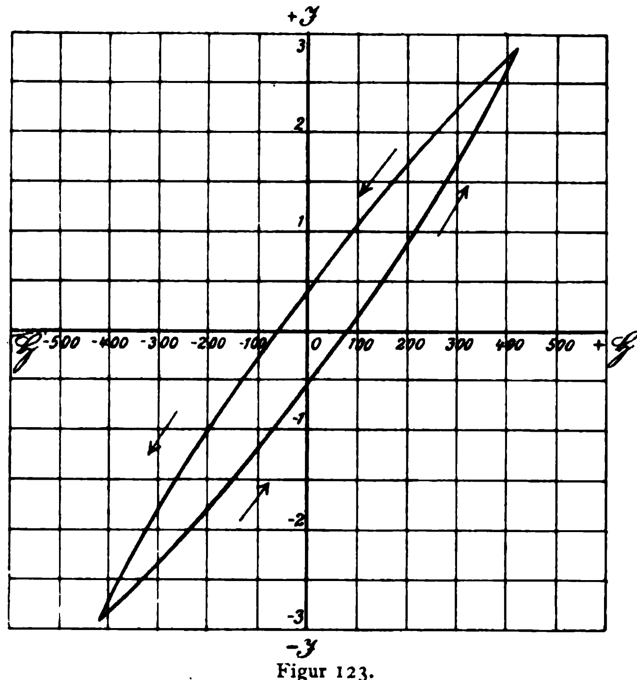
In Figur 120 und 121 sind die temporären und remanenten Magnetisierungen der Amalgame sowie die temporären spezifischen Magnetismen angegeben, letztere erhalten durch Division mit der Konzentration, wodurch diese Zahlen direkt vergleichbar werden mit denen für reines Eisen bzw. Kobalt, wo die Konzentration eben einfach die Dichte ist. Die ausgezogenen Linien sind die aufsteigenden Magnetisierungen, die gestrichelten die von verschiedenen Stellen rückwärts ausgehenden Remanenzkurven, endlich sind die punktiert-gestrichelten Kurven die der spezifischen Magnetismen $\mathfrak{S}$ (Ordinaten ganz links), wobei man jetzt für die verschiedenen Konzentrationen desselben Metalls eine und dieselbe Kurve erhält. Die höchsten Werte von $\mathfrak{S}$ betragen, wie man sieht, 180 für Eisen und

[1] A. ZAMBONI, N. Cim. **2**. 26. 1895. — [2] H. NAGAOKA, Wied. Ann. **59**. 66. 1896. Daselbst auch die ältere Literatur.




Figur 122.

112 für Kobalt, sie bleiben nicht erheblich hinter den Werten für die reinen Metalle zurück, besonders wenn man bedenkt, daß die Sättigung wohl noch nicht erreicht ist. Besonders merkwürdig ist aber das Verhältnis von Remanenz und Koerzitivkraft; während nämlich erstere nicht sehr bedeutend ist, weist die letztere, wie sich aus den ausgezogenen Verlängerungen der Remanenzkurven nach links bis zum Schnittpunkt mit der Abszissenachse ergibt, ganz gewaltige Werte auf: bei $(Fe, Hg)_1$ 240, bei $(Co, Hg)_1$ 150; bei einem 2,3 prozentigen Eisenamalgam fand sich sogar 370; man bedenke, daß die höchste bei Wolframstahl ermittelte Koerzitivkraft rund 80 beträgt. Dementsprechend ist auch die Energievergeudung hier sehr groß; sie betrug bei dem $(Fe, Hg)_1$ 125000, bei $(Co, Hg)_1$ 50000 und bei dem 2,3%-Eisenamalgam sogar 190000 Erg pro Zyklus und Gramm. In Figur 122 und 123 sind zwei Hysteresisschleifen für die starken Eisen- und Kobaltamalgame dargestellt, sie zeigen die verschiedenen Verhältnisse sehr deutlich (man beachte den sehr verschiedenen 𝔍-Maßstab).




Figur 123.

Die von Nagaoka in bezug auf Nickelamalgame gelassene Lücke ist inzwischen von Wünsche[1] ausgefüllt worden, und zwar in sehr bemerkenswerter Weise. Es hat sich nämlich mit Hilfe von Versuchen, die nach der Zugkraftmethode (S. 179) angestellt wurden — die magnetometrische und die ballistische erwiesen sich als nicht anwendbar — herausgestellt, daß die Nickelamalgame im Gegensatz zu den Eisen- und Kobaltamalgamen

[1] H. Wünsche, Drude Ann. 7. 116. 1902.



nur sehr schwach magnetisierbar sind; ein Resultat, das dafür spricht, daß dieses Amalgam im Gegensatz zu den beiden anderen eine wirkliche chemische Verbindung darstellt, die den Magnetismus des einen ihrer beiden Bestandteile fast völlig eingebüßt hat. Obgleich Nickelamalgam hiernach kaum noch zu den ferromagnetischen Körpern gehört, mögen doch die folgenden Zahlen gleich hier Platz finden:

| Prozentgehalt | Suszeptibilität $\times 10^6$ | Verhältnis |
|---|---|---|
| 0,5 | 24,9 | 49,8 |
| 1 | 49,3 | 49,3 |
| 1,5 | 83,2 | 55,5 |
| 2 | 121,9 | 61,0 |
| 2,5 | 169,6 | 57,8 |
| 3 | 249,1 | 83,0 |
| 3,5 | 349,8 | 100,0 |

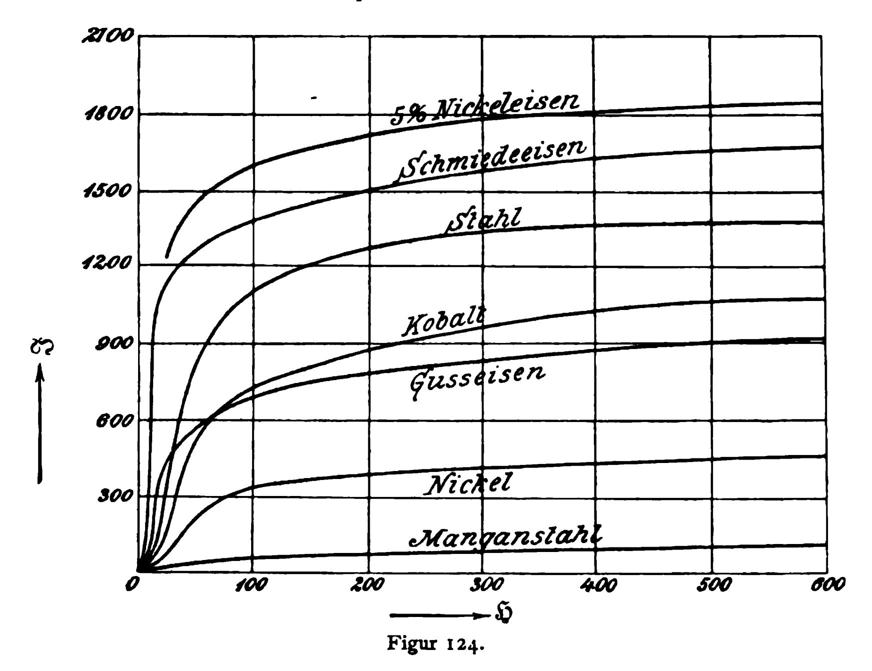
Wie man sieht, wächst $\varkappa$ rascher als die Konzentration, namentlich für stärkere Konzentrationen. Von der Feldstärke ist die Magnetisierung kaum abhängig; dagegen von der Molekularstruktur, die sich unter gewissen Umständen ändert.

**Eisen- und Nickelpulver.** Über den Magnetismus pulverförmigen Eisens haben COULOMB, BÖRNSTEIN, TÖPLER und v. ETTINGSHAUSEN, v. WALTENHOFEN, AUERBACH, HAUBNER, MAURAIN u. a.[1] Versuche und Messungen ausgeführt. Die älteren Versuchsreihen kommen nicht in Betracht, da sie veraltet resp. irrig oder nur gelegentlich angestellt sind. Die neueren führen in der Hauptsache zu dem übereinstimmenden Resultate, daß der spezifische Magnetismus von Eisenpulver kleiner ist als der von konsistentem Eisen und daß er mit abnehmender Dichte ebenfalls abnimmt — eine Erscheinung, die verständlich ist, da die Wechselwirkung der Teilchen, die doch einen wesentlichen Anteil an der Magnetisierung hat, bei der Verdünnung immer schwächer wird; man kann sogar aus der Tatsache, daß der Magnetismus sehr stark abnimmt und zuletzt nur noch einen kleinen Bruchteil seines vollen Wertes hat, schließen, daß bei weitem der größte Teil des Magnetismus des Eisens nicht von der äußeren Kraft, sondern von jener inneren Wechselwirkung herrührt. Quantitativ kommen freilich die genannten Autoren zu ziemlich verschiedenen Ergebnissen, wofür AUERBACH die Gründe zum Teil erörtert hat. Nach ihm entsprechen den äußersten von ihm untersuchten Dichten, nämlich 0,0176 und 3,612, spezifische Magnetismen, die sich wie 1 : 4 verhalten, und für den Vergleich des ersteren Pulvers mit konsistentem Eisen erhöht sich dies Verhältnis auf 1 : 7. Die Magnetisierungskurve, welche $\varkappa$ (Verhältnis des Magnetismus zur Kraft) als Funktion der Kraft darstellt, verläuft bei Pulvern zum Teil ähnlich wie bei konsistentem Eisen, d. h. $\varkappa$ wächst erst, erreicht ein Maximum und fällt dann ab; aber je dünner das Pulver ist, desto kürzer ist der ansteigende Ast, desto kleiner auch das Maximum, und für sehr dünne Pulver fehlt dieser Ast ganz, $\varkappa$ fällt von Beginn an[2]. Der Wert der HAUBNERschen Arbeit liegt hauptsächlich in der absoluten Bestimmung von Kraft und Magnetismus. Die Werte von $\mathfrak{J}$ sind bei ihm sehr klein, weil er die Pulver in die für die Magnetisierung ungünstige Kugelform brachte, aber auch die von dem Einfluß der Gestalt befreite Suszeptibilität $\varkappa$ ist überaus klein, selbst für das dichteste

[1] C. A. COULOMB, vgl. WIEDEMANN, Galv. (2) **2.** S. 420. — R. BÖRNSTEIN, Pogg. Ann. **154.** S. 336. 1875. — A. TÖPLER u. v. ETTINGSHAUSEN, Pogg. Ann. **160.** S. 1. 1877. — A. v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. **89** (2). 1873. — F. AUERBACH, Wied. Ann. **11.** 359. 1880. — J. HAUBNER, Wien. Ber. **83** (3). 1167. 1881. — C. MAURAIN, Écl. él. **34.** 465. 1903. —
[2] Hiermit ist eine Angabe von BAUR, Wied. Ann. **11.** 411. 1880, wonach $\varkappa$ bei Pulver sein Maximum später erreicht als bei konsistentem Eisen, schwer in Einklang zu bringen.

Pulver und die stärkste Kraft ($\mathfrak{H}$ = 1825) kleiner als 1, mit der Kraft aber nur sehr langsam steigend und dann gar nicht fallend, so daß es für die größten Kräfte sich den Werten für konsistentes Eisen stark nähert (vgl. S. 200). Die remanenten Magnetismen, die HAUBNER ebenfalls maß, sind wegen der bei der Kugel sehr starken entmagnetisierenden Wirkung minimal, zwischen 0 und 4% der temporären schwankend; viel größer — ebenso wie die hier bis 1071 ansteigende Magnetisierung $\mathfrak{J}$ — sind sie bei einem Versuche mit ringförmig angeordnetem Pulver, wo sie bis 14% steigen. AUERBACH sowohl wie HAUBNER haben aus ihren Zahlen Formeln für den Magnetismus als Funktion der Dichte abgeleitet und hieran theoretische Betrachtungen geknüpft, auf die jedoch nicht eingegangen werden kann.

MAURAIN untersuchte gewöhnliches Eisenfeilicht und porphyrisiertes Eisenpulver, teils allein, teils mit Zinkpulver vermischt, und fand für schwache Felder




Figur 124.

Proportionalität, später etwas schnelleres Steigen; auch etwas Hysteresis ergab sich. Bei starken Feldern schien die spezifische Magnetisierung von der Konzentration unabhängig zu werden, so daß dieser Grenzwert eine charakteristische Konstante der Substanz wäre. Indessen bedarf das noch weiterer Bestätigung.

Angeregt durch eine Bemerkung E. BECQUERELS, der den verschiedenen Magnetismus von Eisen und Nickel mit ihrer verschiedenen Dichte in Verbindung bringen zu sollen meinte, hat AUERBACH[1] auch Nickelpulver verschiedener Dichte untersucht und für den spezifischen Magnetismus im Vergleich mit Eisen von gleicher Dichte folgende Zahlen gefunden:

| Dichte | 0,05 | 0,1 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | konsistent |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nickel : Eisen | 0,49 | 0,49 | 0,45 | 0,39 | 0,35 | 0,24 | 0,25 bis 0,35 |

Das Verhältnis wächst also zwar mit abnehmender Dichte, nähert sich aber nicht dem Werte 1, sondern dem Werte $^1/_2$, wodurch jene Vermutung widerlegt ist.

[1] F. AUERBACH, Wied. Ann. 11. 372. 1880.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge, soweit das bei den geschilderten Komplikationen möglich ist, eine vergleichende Darstellung der ferromagnetischen Stoffe gegeben werden. Hierzu dient die auf Eisen, Nickel und Kobalt bezügliche Tabelle sowie die Figur 124, in die auch noch Kurven für Stahl, Gußeisen, 5 prozentisches Nickeleisen und Manganstahl aufgenommen sind.

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ Eisen (0°) | Kobalt (100°) | Nickel (100°) | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ Eisen (0°) | Kobalt (100°) | Nickel (100°) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 1410 | — | 313 | 800 | 1697 | 1056 | 459 |
| 200 | 1520 | 856 | 375 | 1000 | 1705 | 1080 | 467 |
| 300 | 1580 | 933 | 406 | 1200 | 1710 | 1090 | 471 |
| 400 | 1627 | 988 | 428 | 2000 | 1715 | 1110 | 485 |
| 500 | 1658 | 1018 | 441 | 3000 | 1720 | 1140 | 505 |
| 600 | 1677 | 1032 | 450 | 5000 | 1725 | 1175 | 520 |
| 700 | 1689 | 1048 | 456 | 10000 | 1730? | 1200 | 525 |

Zahlen und Kurven beziehen sich auf die Volumeneinheit (Intensität der Magnetisierung); für die Masseneinheit werden die Verhältnisse für Kobalt und Nickel noch etwas ungünstiger, die Maxima sind dann

| Eisen | Kobalt | Nickel |
|---|---|---|
| 230 | 140 | 65. |

## B) Paramagnetismus und Diamagnetismus.

### Theorie.

Wie bei den stark magnetischen Körpern muß auch bei den schwach magnetischen, wenn es sich um die Aufstellung einer Theorie handelt, zwischen der eigentlichen mathematischen Theorie und molekular-physikalischen Hypothesen unterschieden werden.

**Theorie der magnetischen Induktion in schwach magnetischen Körpern**[1]. Diese Theorie ist in der im vorigen Artikel für stark magnetische Körper entwickelten nicht nur ohne weiteres enthalten, sondern es ist sogar zu beachten, daß die Grundlagen der Theorie im jetzt vorliegenden Falle weit näher erfüllt sind als im früheren, und daß folglich die Theorie für para- und diamagnetische Körper strenger richtig ist. Es ist nämlich, wie gezeigt wurde, bei letzteren die Suszeptibilität $\varkappa$ eine konstante Größe (nicht von der Kraft abhängig), und es existiert keine (oder keine irgendwie in Betracht kommende) Remanenz. Es handelt sich also nur darum, zu sehen, wie sich die Theorie für Werte von $\varkappa$ von kleinen positiven oder negativen Beträgen gestaltet; hier hat die Gleichung (28) des vorigen Artikels (S. 134)

$$(4) \qquad \mathfrak{J} = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa \varepsilon} \mathfrak{H}_0 \quad ,$$

welche die Intensität $\mathfrak{J}$ der induzierten Magnetisierung durch die äußere Kraft $\mathfrak{H}_0$ mit Hilfe der Suszeptibilität $\varkappa$ und des Gestaltskoeffizienten $\varepsilon$ ausdrückt, als Ausgangspunkt zu dienen. Ist hierin $\varkappa$ das eine Mal positiv, das andere Mal negativ, so kehrt sich zunächst das Zeichen des Zählers um, man erhält also den Satz: Diamagnetische Körper werden entgegengesetzt magnetisiert wie paramagnetische. Aber man sieht auch sofort, daß sie bei gleicher äußerer Kraft, gleicher Gestalt und gleichem absolutem Werte von $\varkappa$ im allgemeinen nicht

[1] Vgl. u. a. W. THOMSON (jetzt Lord KELVIN), Ges. Abh. üb. El. u. Mag., S. 478. 484. 493 und 501. — Ferner sei auf einige Abh. v. BOLTZMANN verwiesen, die besonders für die Theorie der Meßmethoden wichtig sind: Wien. Ber. **80** (2). 25. Okt. 1879 und **83**. 2. S. 575. 1881.

gleich stark magnetisiert werden, weil sich auch im zweiten Gliede des Nenners das Zeichen umkehrt; nur bei einem unendlich langen Zylinder und beim Ring, wo $\varepsilon = 0$ und folglich

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}_0 \tag{5}$$

[Gleichung (30), S. 136] ist, würde entgegengesetzte Gleichheit der Magnetisierung eintreten. In Wirklichkeit ist jedoch $\varkappa$ bei allen paramagnetischen und diamagnetischen Stoffen so klein (s. ob.), daß man $\varepsilon\varkappa$ gegen die Einheit vernachlässigen kann und folglich für Körper beliebiger Form die obige Gleichung (5) erhält. Es ergeben sich also die beiden Sätze: 1. Bei den para- und diamagnetischen Stoffen ist die Form ohne Einfluß auf die Magnetisierung. 2. Diamagnetische Stoffe verhalten sich dem Zeichen nach entgegengesetzt und quantitativ identisch wie paramagnetische Stoffe unter gleichen Umständen. Dieser Gegensatz zeigt sich in sehr mannigfaltiger Weise, und es sei zunächst kurz auf die in Figur 60a auf S. 128 dargestellte Verdichtung der Kraftlinien durch einen in ein Feld eingeschobenen Eisenstab hingewiesen: bei paramagnetischen Körpern findet eine entsprechende Verdichtung, bei diamagnetischen dagegen eine Verdünnung, Zerstreuung der Kraftlinien statt, beides jedoch in so minimalen Beträgen, daß es unmöglich sein würde, sie in der Zeichnung zur Anschauung zu bringen[1].

**Bewegung und Einstellung im magnetischen Felde.** Von besonderem Interesse ist im Hinblick auf die Grundversuche, welche man mit ferro-, para- und diamagnetischen Körpern anstellen kann, die Frage, wie sich solche Körper im magnetischen Felde nach der Theorie bewegen müssen, wenn sie sich verschieben können, und wie sie sich einstellen müssen, wenn sie sich drehen können. Zu diesem Zwecke geht man am besten vom Begriffe der potentiellen Energie $E$ eines Körpers im magnetischen Felde aus; diese Größe hängt von dem herrschenden Potential $V$ ab, von welchem für alle schwach magnetischen Körper angenommen werden kann, daß es mit dem Potential der gegebenen äußeren Kraft des Feldes identisch ist; sie hängt ferner von der Intensität der Magnetisierung ab, die man als eine Oberflächenmagnetisierung auffassen, und deren Element man selbst wieder durch $\varkappa\, \partial V / \partial n$ ausdrücken kann; es wird also

$$E = \frac{1}{2} \iint \varkappa V \frac{\partial V}{\partial n} ds \quad ,$$

oder, nach Umwandlung des Flächenintegrals in ein Raumintegral und Einführung der Kraft $\mathfrak{H}$:

$$E = -\tfrac{1}{2} \iiint \varkappa \mathfrak{H}^2 d\tau \quad . \tag{6}$$

Bewegt sich der Körper, den wir uns als klein vorstellen wollen, so ändert sich seine Energie pro Volumeneinheit um:

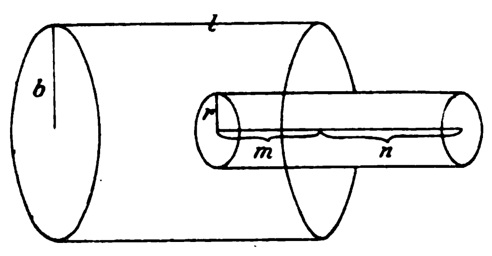
$$dE = -\frac{\varkappa}{2} d(\mathfrak{H}^2) \quad , \tag{7}$$

und diese Änderung wird, wenn der Körper die gedachte Bewegung „von selbst" (sich selbst überlassen) ausführt, in der Abnahme von $E$ bestehen (weil ohne Arbeitsaufwendung Bewegung entsteht). Wie man sieht, muß er sich zu diesem Zwecke entgegengesetzt bewegen, je nachdem $\varkappa$ positiv oder negativ ist, je nachdem er also para- oder diamagnetisch ist; im ersten Falle muß er sich so bewegen, daß die Kraft zunimmt, im anderen so, daß sie abnimmt. Man erhält also den Satz, den schon FARADAY[2] als Ergebnis seiner Versuche in dieser Form

[1] W. THOMSON (Ges. Abh., S. 475, Figur 54), gibt hierfür durch Wahl übertriebener, in der Wirklichkeit nicht vorhandener Zahlenverhältnisse eine Veranschaulichung. — [2] FARADAY, Exp. Res. **21**, § 2418; Trans. R. Soc. 1846, 41; Exp.-Unters. Ed. **3**, 63.

ausgesprochen hatte: Im ungleichförmigen Felde bewegen sich paramagnetische Körper nach Stellen größter Kraft, diamagnetische nach Stellen kleinster Kraft; in einem gleichförmigen Felde sind sowohl para- als diamagnetische Körper im indifferenten Gleichgewicht und bleiben folglich in Ruhe (vgl. übrigens weiter unten). Für ferromagnetische Substanzen gilt der Satz in dieser Form nicht, weil hier die Rückwirkung der Induktion auf das Feld in Betracht kommt; er kann aber, richtig gefaßt, natürlich auch auf solche ausgedehnt werden. Es ist von Interesse an diesen Satz die Bemerkung zu knüpfen, daß die Orte größerer Kraft in einem Felde im allgemeinen den Polen näher liegen; dorthin werden also paramagnetische und ferromagnetische Körper meist getrieben, während diamagnetische sich von ihnen entfernen; daher der Ausdruck magnetische Anziehung und Abstoßung. Das braucht aber durchaus nicht immer zu geschehen, da es auch im Innern des Feldes relative Maxima gibt; es können vielmehr Umstände hergestellt werden, unter denen paramagnetische Körper abgestoßen und diamagnetische angezogen werden. Über solche Fälle und manche andere interessante hierher gehörige Fragen kann man bei W. THOMSON[1] und DUHEM (s. w. u.) ausführlich nachlesen.

Einige wichtige Spezialfälle hat BOLTZMANN[2] ausgerechnet, wobei freilich sehr komplizierte Formeln sich ergeben, die nur bei gewissen Vernachlässigungen eine einfachere Form annehmen. So den Fall eines schwach magnetisierbaren Zylinders, der aus einer koaxialen Spirale, durch die er erregt wird, teilweise herausragt (Fig. 125); in die Formel für die Anziehungs- oder Abstoßungskraft gehen dann außer der Suszeptibilität $\varkappa$ noch die Länge $l$ und der Radius $b$ der Spule, die Länge $m + n$ ($m$ innerhalb, $n$ herausragend) und der Radius $r$ des Zylinders, die Stromstärke $i$ und die auf 1 cm Achsenlänge entfallende Zahl $N$ der Windungen ein; sie läßt sich in der Form



Figur 125.

$$Z = f(-m, \; l - m) - f(n \;, \; l + n)$$

schreiben, wo die Funktion $f$ als eine unendliche Reihe mit sehr verwickelten Gliedern darstellbar ist. Vereinfachungen treten ein, wenn der Zylinder gerade zur Hälfte aus der Spule herausragt, also $m = n$ ist, und wenn es außerdem erlaubt ist, die Spule als unendlich lang und den Zylinder als unendlich dünn zu betrachten; dann wird nämlich

$$(8) \qquad Z = \frac{8 \pi^3 \varkappa N^2 i^2 r^2 m}{\sqrt{b^2 + m^2}} \; ;$$

darf der Zylinder nicht als unendlich dünn betrachtet werden, so ist noch das Korrektionsglied

$$(9) \qquad Z' = Z \left[ \frac{3 r^2 b^2}{8 (b^2 + m^2)^2} - \frac{5 r^4 b^2}{16 (b^2 + m^2)^3} + \frac{35 (2 r^4 b^4 + r^6 b^2)}{128 (b^2 + m^2)^4} \right]$$

zu addieren; darf auch die Spirale nicht als unendlich lang betrachtet werden, so kommt noch das weitere Glied

---

[1] W. THOMSON, a. a. O. — [2] L. BOLTZMANN, Wien. Ber. **80** (2), 23. Okt. 1879. Daselbst ist überall statt des verdruckten $\xi$ richtig $\zeta$ zu lesen.

$$(10)\quad \begin{cases} Z'' = Z\Big[-\dfrac{b^2(l^2+m^2)}{2(l^2-m^2)^2} - \dfrac{l\,b^2\sqrt{b^2+m^2}}{(l^2+m^2+b^2)^2-4\,l^2m^2} \\ \qquad + \dfrac{3\,b^4(l^4+6\,l^2m^2+m^4)}{8(l^2-m^2)^4} - \dfrac{3\,r^2b^4(l^2+m^2)}{16(l^2-m^2)^2(b^2+m^2)^2}\Big] \end{cases}$$

hinzu. Ferner muß noch berücksichtigt werden, ob die Spule mehrere Lagen Drahtes hat[1]. Auch für eine Kugel berechnet BOLTZMANN die Anziehung bzw. Abstoßung; jedoch würden die Formeln zuviel Raum in Anspruch nehmen.

Soweit die verschiebende Kraft. Noch verwickelter sind im allgemeinen die Verhältnisse hinsichtlich der Einstellung länglicher Körper, welche drehbar aufgehängt sind. Man muß hier wiederum zwischen einem gleichförmigen und einem ungleichförmigen Felde unterscheiden. In einem gleichförmigen Felde kann man leicht das Drehungsmoment ableiten, und zwar beispielsweise für ein Rotationsellipsoid aus den Gleichungen (39) und (40) des vorigen Artikels:

$$(11)\qquad D = \frac{4}{3}\pi a b c \frac{\varkappa^2(L-M)}{(1+\varkappa L)(1+\varkappa M)} \quad .$$

Da hierin in der Hauptsache nicht $\varkappa$, sondern $\varkappa^2$ vorkommt, so folgt, daß sich paramagnetische und diamagnetische Körper ganz gleich einstellen, nämlich (wieder aus Gründen, die den obigen analog sind) axial, d. h. mit der Längsachse in die Richtung des Feldes. Nur wird die Tendenz zu dieser Einstellung bei allen para- und diamagnetischen Stoffen so geringfügig sein, daß man annähernd sagen kann: Im gleichförmigen Felde sind alle schwach magnetischen Stoffe im indifferenten Gleichgewicht. Ganz anders im ungleichförmigen Felde. Hier tendieren die einzelnen Elemente des länglichen Körpers nach dem Punkte größter oder kleinster Kraft, je nachdem er para- oder diamagnetisch ist. Eine paramagnetische Nadel wird sich axial stellen. Bei einer diamagnetischen wird es von der Beschaffenheit des Feldes abhängen; zwischen zwei entgegengesetzten punktförmigen Polen oder zwischen zwei entgegengesetzt gewickelten Stromspulen (BOLTZMANN) wird sie sich, wie man leicht einsieht, transversal stellen, aber es kann auch Fälle geben, wo sie sich axial stellt, und die Erfahrung (s. o.) bestätigt dies vollkommen. Und selbst bei paramagnetischen Nadeln kann man Bedingungen herstellen, bei denen sie sich nicht axial verhalten. Auch hierüber findet man bei THOMSON[2] und bei MASCART und JOUBERT[3] nähere Ausführungen.

Auch das Drehungsmoment hat BOLTZMANN[4] in einigen Fällen berechnet, z. B. in dem Falle eines Zylinders von der Länge $\lambda$ und dem Radius $\varrho$ im Innern einer Spule von der Länge $2h$, dem Radius $b$, der Windungsdichte $N$, der Stromstärke $i$ und dem Winkel $\alpha$ zwischen den Achsen; gibt man dem Zylinder abgerundete Enden, läßt man die Mittelpunkte von Spirale und Zylinder zusammenfallen, wählt letzteren klein gegen erstere und $\varrho$ wieder klein gegen $\lambda$, so wird das Drehungsmoment:

$$(12)\qquad D = \frac{3\pi^3\varkappa N^2 i^2 h^2 \varrho^2 b^2 \lambda^3}{(b^2+h^2)^3}\sin 2\alpha \quad ,$$

wozu noch, wenn nötig, der Faktor

$$1 - \frac{9\varrho^2}{2\lambda^2}$$

kommt.

In engem Zusammenhange mit der Theorie der Einstellungen steht übrigens die der Schwingungen länglicher magnetischer Körper im Felde. Im allgemeinen

1 L. BOLTZMANN, Wien. Ber. 83 (2). 575. 1881. — 2 W. THOMSON, a. a. O. — 3 MASCART u. JOUBERT, El. u. Magn. 1. 358. — 4 L. BOLTZMANN, a. a. O.

hängt die Schwingungsdauer natürlich von der Länge ab, gerade wie beim Pendel; wenn aber das Feld um den Mittelpunkt der Nadel symmetrisch ist, fällt die Länge heraus, und man findet, wenn $A$ und $B$ von den Dimensionen der Nadel abhängige Konstanten und $\varrho$ ihre Dichte ist, die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{\varrho}{A+B} \cdot \frac{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}{\varkappa}} \quad ; \tag{13}$$

für ferromagnetische Stoffe wird also

$$t = \pi \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{\varrho}{A+B}} \quad , \tag{13a}$$

für para- oder diamagnetische

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{\varkappa} \frac{\varrho}{A+B}} \quad ; \tag{13b}$$

wie man sieht, ist die Schwingungsdauer ferromagnetischer Stoffe von $\varkappa$ unabhängig, die Schwingungsmethode also zur Bestimmung von $\varkappa$ nicht verwendbar, für schwach magnetische Stoffe hingegen ist sie hierzu sehr wohl geeignet.

**Unmöglichkeit diamagnetischer Körper.** Die obigen Ausführungen zeigen, daß nach der THOMSONschen Theorie die diamagnetischen Körper zwar unter Umständen komplizierte Erscheinungen, aber durchaus keine prinzipielle Schwierigkeit aufweisen. Das ist aber der Fall, wenn man die von DUHEM durchgeführte thermodynamische Theorie (S. 157) auf sie anwendet, wie dies von DUHEM[1], PARKER[2] usw. geschehen ist. Nach DUHEM erhält man nämlich die Grundgleichung des Problems, wenn man das thermodynamische Potential, da es ein Minimum sein muß, differenziert und das Ergebnis null setzt. Differenziert man nun noch einmal, so erhält man für diamagnetische Körper einen negativen Wert, und das führt zu Bewegungen der Körper in einem Sinne, welcher der durch den zweiten Hauptsatz vorgeschriebenen entgegengesetzt ist. PARKER hat dies noch auf andere Weise ausgeführt und den Beweis auch gegen Angriffe von verschiedenen Seiten verteidigt. Hier zeigt sich die Überlegenheit der thermodynamischen Theorie über die gewöhnliche, insofern letztere den diamagnetischen Zustand als mathematisch möglich, erstere ihn aber als physikalisch unmöglich erweist. Nach SIERTSEMA[3] ergibt sich freilich die Unmöglichkeit diamagnetischer Stoffe nur bei Zugrundelegung der POISSONschen, nicht aber der MAXWELLschen Theorie, weil hier jene Operationen nicht erlaubt sind. Übrigens führt die thermodynamische Theorie auch sonst zu interessanten Ergebnissen[4], z. B. auf die nicht exakte Gültigkeit des FARADAY-THOMSONschen Satzes (S. 252).

**Differentielle Theorie des Diamagnetismus.** Wenn es nun keine in Wahrheit diamagnetischen Körper geben kann, so bleibt nur übrig anzunehmen, daß der Diamagnetismus nur ein scheinbarer sei, daß die Konstante $\varkappa$ bei ihnen nicht in Wahrheit, sondern nur scheinbar negativ sei, und die Analogie mit dem archimedischen Prinzip in der Mechanik führt sofort zur Aufklärung über diesen Anschein. Diamagnetisch erscheinen Körper, wenn sie schwächer magnetisch sind als die Umgebung, in der sie sich befinden. So hat man durch den Versuch gezeigt, daß eine schwache Eisenchlorid-Lösung, umgeben von einer stärkeren, diamagnetisch erscheint; und bei Angaben über den Magnetismus von Gasen (s. w. u.) muß man immer bemerken, ob es sich um die Zahlen gegen Luft oder gegen ein anderes Gas oder gegen den leeren Raum handelt, weil

---

[1] P. DUHEM, Compt. rend. **108**. S. 1042. 1889. — Mém. faculté de Lille 1889 u. a. a. O. — [2] J. PARKER, Phil. Mag. (5) **27**. S. 403. 1888; **32**. S. 192 u. 253. 1891. — [3] L. H. SIERTSEMA, Verh. K. Ak. Wet. Amst. (1) **5**. Nr. 4. 1897. — [4] P. DUHEM, de l'aimantation p. infl. S. 73.

hiervon die Größe der Zahlen und nicht selten auch ihr Vorzeichen abhängt. Eine Schwierigkeit bereitet bei dieser ganzen Vorstellung nur die Tatsache, daß auch im Vakuum zahlreiche Stoffe diamagnetisch erscheinen, so daß nur die Schlußfolgerung übrig bleibt, daß das Vakuum selbst magnetisch und zwar stärker magnetisch sei, als alle diejenigen Stoffe, welche in ihm diamagnetisch erscheinen. Diese Annahme verliert aber ihren paradoxen Charakter, wenn man bedenkt, daß das sog. Vakuum kein leerer Raum, sondern mit Äther erfüllt ist, und daß der Äther zwar unmeßbar leicht ist, trotzdem aber auch in anderer Hinsicht physikalische Eigenschaften von durchaus nicht unendlich kleinen Größenwerten besitzen muß, um den Erscheinungen, bei denen er eine Rolle spielt, zur Grundlage dienen zu können.

Die Annahme, daß alle Körper positiv magnetisch und nur einige von ihnen scheinbar diamagnetisch seien, ist schon von E. BECQUEREL[1] aufgestellt, seitdem vielfach angenommen, aber auch vielfach angegriffen worden. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß alle zu dem letzteren Zwecke angestellten Versuche nichts beweisen, weil sie ebensogut aus der BECQUERELschen Annahme verständlich gemacht werden können; man vergleiche hierüber unter anderem Aufsätze von BRAUN[2] und BLONDLOT[3]. Allerdings ist es auch schwer, Versuchsanordnungen zu treffen, welche für die differentielle Theorie entscheiden, und es muß dahingestellt bleiben, ob einem Versuch von TUMLIRZ über die Einstellung eines Bergkristalls (s. w. u.) eine entscheidende Bedeutung zukomme. In jedem Falle ist diese Entscheidung nicht mehr von fundamentaler Bedeutung, seitdem die Unmöglichkeit wirklicher Diamagnete auf andere Weise erkannt worden ist.

Will man das archimedische Prinzip auf das differentielle Verhalten magnetischer Körper in magnetischer Umgebung anwenden[4], so muß man von der Oberflächengleichung für einen magnetischen Körper ausgehen, also z. B. von der Gleichung (18b, S. 128) des vorigen Artikels, diese aber in der Richtung modifizieren, daß man der Umgebung nicht die Suszeptibilität null, also die Permeabilität 1, sondern eine bestimmte Suszeptibilität $\varkappa_0$ und eine von 1 verschiedene Permeabilität $\mu_0$ zuschreibt; es wird dann, wenn $(1 + 4\pi\varkappa)$ durch $\mu$ ersetzt wird, die Gleichung für das Gesamtpotential $V$:

$$\mu \frac{\partial V}{\partial n_i} + \mu_0 \frac{\partial V}{\partial n_a} = 0 \quad . \tag{14}$$

Diese Gleichung kann man aber auf die ursprüngliche Form, in welcher der Koeffizient des zweiten Gliedes 1 ist, zurückführen, indem man mit $\mu_0$ dividiert, und man sieht dann, daß die Größe $\mu/\mu_0$ als die scheinbare Permeabilität $\mu'$ des Körpers im Medium anzusehen ist:

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0} \quad . \tag{15}$$

Die scheinbare Suszeptibilität wird demgemäß die durch die Gleichung

$$\mu' = 1 + 4\pi\varkappa'$$

bestimmte Größe $\varkappa'$, und diese hängt mit den wahren Suszeptibilitäten $\varkappa$ und $\varkappa_0$ des Körpers und des Mediums durch die Gleichung

$$\varkappa' = \frac{\varkappa - \varkappa_0}{1 + 4\pi\varkappa_0} \tag{16}$$

zusammen; sie ist also im allgemeinen nicht einfach

$$\varkappa' = \varkappa - \varkappa_0 \quad , \tag{17}$$

[1] E. BECQUEREL, Ann. Chim. Phys. (3) **28**. S. 343. 1850. — [2] F. BRAUN, Wied. Ann. **33**. S. 318. 1888. — [3] R. BLONDLOT, Compt. rend. **106**. S. 1347. 1888. — [4] J. C. MAXWELL, El. u. Magn. **2**. S. 64. — MASCART u. JOUBERT, El. u. Magn. **1**. S. 341.

d. h. gleich der Differenz der beiden wahren Suszeptibilitäten, wird es aber in allen schwach para- oder diamagnetischen Medien. Man kann also das Ergebnis in folgenden Satz zusammenfassen: die scheinbare Permeabilität eines Körpers in einem Medium ist gleich dem Verhältnis der wahren Permeabilität von Körper und Medium, die scheinbare Suszeptibilität ist in schwach magnetischen Medien gleich der Differenz der wahren Suszeptibilität von Körper und Medium, in stark magnetischen Medien hingegen der durch die Permeabilitätszahl des Mediums angegebene Bruchteil jener Differenz. Ist diese Differenz positiv, so erscheint der Körper paramagnetisch, ist sie negativ, so erscheint er diamagnetisch.

**Physikalische Theorien.** Die ausgeführten Betrachtungen werden es rechtfertigen, wenn die zahlreichen, im Laufe früherer Jahrzehnte aufgestellten physikalischen Erklärungsversuche des Diamagnetismus weit kürzer behandelt werden, als es vielfach noch in modernen Büchern geschieht. Von der BECQUERELschen Theorie der differentiellen Magnetisierungen ist schon die Rede gewesen. FARADAY[1] stellte anfangs die Theorie der umgekehrten Polarität auf, wonach also ein Nordpol im benachbarten Ende eines diamagnetischen Körpers einen Nordpol erzeugt und umgekehrt, ließ aber diese Theorie dann zugunsten einer anderen Erscheinung fallen, welche u. a. in seinem obigen Satze Ausdruck findet, und welche dann von THOMSON, MAXWELL u. a. weiter ausgebildet wurde, wobei sich übrigens herausstellte, daß die beiden FARADAYschen Anschauungen nicht eigentlich in einem diametralen Gegensatze zueinander stehen. FARADAYs erste Theorie andererseits wurde von PLÜCKER, W. WEBER, TYNDALL u. a.[2] aufgenommen und durch zahlreiche Experimente zu erhalten versucht; es ist aber schon angeführt worden, daß diese Versuche in letzter Instanz nichts beweisen. Eine besondere Anschauung entwickelte v. FEILITZSCH[3], indem er die magnetische Induktion durch die äußere Kraft der inneren Induktion gegenüberstellte und annahm, daß bei manchen Körpern jene, bei anderen diese überwiege; man kann auf diese Weise natürlich, außer dem Gegensatz zwischen stark und schwach magnetischen Körpern, auch einen Gegensatz zwischen positiv und negativ magnetischen Körpern formal statuieren, kommt aber über die Schwierigkeiten der physikalischen Durchführung nicht hinweg.

Die einzige Theorie, welche sich, entsprechend ihrer sinnreichen und eleganten Ausgestaltung, größerer Anerkennung zu erfreuen gehabt hat, ist die in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten weiter ausgebildete elektrische Theorie von W. WEBER[4]. Sie schließt sich an die AMPÈREsche Theorie des Magnetismus (s. o. S. 168 und w. u. im Art. Elektromagnetismus) an, wonach um die Molekeln der Körper Ströme kreisen, welche durch eine magnetisierende Kraft mehr oder weniger gerade gerichtet werden. Außer dieser elektrodynamischen Wirkung muß nun aber, wenn man einen magnetisierbaren Körper in ein Feld bringt, noch eine andere Wirkung eintreten, nämlich eine elektrische Induktionswirkung, es müssen um die Molekeln herum Ströme erzeugt werden, und diese Ströme werden nicht, wie andere Induktionsströme, rasch wieder erlöschen, sondern dauernd erhalten bleiben, wenn man annimmt, daß sie in widerstandslosen Bahnen verlaufen, gerade wie jene Ströme, die beim Einbringen des Körpers in das Feld schon vorhanden waren und nur gerichtet werden; erst wenn man zu einer neuen, entgegengesetzten Induktion Anlaß gibt, indem man den Körper wieder aus dem Felde entfernt, werden dann die Induktionsströme wieder aufgehoben werden. Bei paramagnetischen Körpern sollen nun die schon vorhandenen Ströme stark

[1] M. FARADAY, Exp. Researches, Ser. 21 u. f., 1846 u. f. — Pogg. Ann. **69**. S. 289; **79**. S. 24; **76**. S. 144. Exp. Unt. Bd. 3. — [2] Die Literatur dieser Frage findet man u. a. bei R. FRANZ, Üb. d. diamagn. Polarität, N. Acta Leop.-Car. Ac. **40**. S. 233. 1878. — [3] O. v. FEILITZSCH, Pogg. Ann. **82**. S. 93. 1850. — [4] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen, insb. üb. Diamagnetismus. Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. 1. S. 485. 1852. — Pogg. Ann. **87**. S. 145. 1852. — Werke **3**. S. 475 u. 555.

sein, so daß sie durch die entgegengesetzt gerichteten Induktionsströme höchstens um ein Geringes geschwächt werden; bei diamagnetischen Körpern hingegen sollen sie gar nicht existieren oder doch so schwach sein, daß sie durch die Induktionsströme übertroffen werden und folglich ein Resultat von entgegengesetztem Charakter entsteht. Weshalb freilich in manchen Stoffen, und zwar sowohl in den ferromagnetischen als auch in den paramagnetischen, von vornherein starke Molekularströme vorhanden sind, in den diamagnetischen nicht, läßt sich nicht sagen; auch läßt die Theorie einige eigenartige Folgerungen zu, welche bisher durch die Erfahrung nicht bestätigt worden sind.

Schließlich ist auf die schon im vorigen Artikel erwähnte Theorie der Valenzladungen, wie sie namentlich von RICHARZ und ROBERT LANG[1] entwickelt worden ist, auch an dieser Stelle hinzuweisen. RICHARZ setzt dabei die Rotationsdauer, die jedenfalls außerhalb der Grenzen sichtbarer Lichtschwingungen liegen muß, rund zu $10^{-14}$ an, wendet dann die Theorie auf ein Fe-Atom an, für das er die Kante des Elementarwürfels und somit den Durchmesser der Bahn des Ions gleich $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ setzt, und findet aus der Valenzladung $43 \cdot 10^{-22}$ das magnetische Moment gleich $2 \cdot 10^{-22}$ und daher das Sättigungsmoment, da in 1 g Fe $4 \cdot 10^{-22}$ Molekeln anzunehmen sind, gleich 8; der Versuch gibt dafür etwa 220, immerhin ist die Größenordnung ziemlich dieselbe. — LANG seinerseits zieht es erstens vor, statt der Metalle die Lösungen als Beispiele heranzuziehen, und zweitens wählt er für die Rotationsdauer nicht einen größeren, sondern einen kleineren Wert als den Lichtschwingungen entspricht, was ebenso zulässig ist, nämlich höchstens $10^{-19}$; für normale Eisensulfatlösung erhält er dann als Sättigungsmoment eines Kubikzentimeters die Zahl 4,6 statt der beobachteten Zahl 1,6; also eine der Größenordnung nach sehr gute Übereinstimmung. Auch in weiteren Fällen erweist sich die Theorie als fähig, die chemischen Beziehungen des Atommagnetismus in großen Zügen darzustellen; es kann aber hierauf nicht näher eingegangen werden.

In neuester Zeit hat DU BOIS[2] die Frage auch vom Standpunkte des mechanischen Bildes behandelt (vgl. o. S. 169) und zur Veranschaulichung ein Modell konstruiert, das er als magnetokinetischen Kreisel zur Erläuterung des Para- und Diamagnetismus bezeichnet. Er untersucht nämlich, wie sich ein permanenter Magnet im homogenen Felde verhält, wenn es sich um eine Achse drehen kann, die mit der magnetischen Körperachse und mit der Feldrichtung beliebige Winkel einschließt; alsdann wird für drei naheliegende Fälle spezialisiert. Es ergibt sich, daß ein Medium, das derartige Kreisel enthält, je nach den Umständen para- oder diamagnetische Eigenschaften aufweist.

## Methodik.

Die paramagnetischen und die diamagnetischen Stoffe haben die gemeinsame Eigenschaft, selbst durch starke Kräfte nur schwach magnetisch zu werden, so daß man Beobachtungen und besonders Messungen ihrer magnetischen Konstanten nur unter günstigen Umständen vornehmen kann. Man hat daher auf diesem Gebiete teils schon vorhandene, besonders kräftige Apparate benutzt, teils eigene Apparate konstruiert und dabei keines der gebräuchlicheren Verstärkungsmittel magnetischer Wirkungen unverwendet gelassen. Hierzu gehört zunächst das astatische Nadelpaar, das bei dem „Sideroskop"[3] insofern eine von der gewöhnlichen abweichende Anordnung hat, als die beiden Nadeln mit gleichnamigen

[1] F. RICHARZ, Wied. Ann. **52**. 410. 1894 (daselbst auch die ältere Literatur). — ROBERT LANG, Drude Ann. **2**. 483. 1900. — [2] H. DU BOIS, Arch. Néerl. (2) **5**. 242 (Jubelband für LORENTZ). — Versl. Akad. Wet. Amst. 1901/1902. 415 u. 504. — [3] LEBAILLIF, Pogg. Ann. **10**. S. 507. 1827.

Enden in die beiden Enden eines Strohhalmes gesteckt werden, der an einem Faden aufgehängt ist; derart, daß sie im Raume entgegengesetzt orientiert und folglich astasiert sind. Überhaupt spielt hier die Fadenaufhängung eine große Rolle und zwar teils die einfache Fadenaufhängung, teils wie oben die durch Vermittelung eines horizontalen Querbalkens, wobei man den Vorteil erlangt, daß ein am Ende des Balkens angebrachter Körper sich seitlich bewegen, also z. B. angezogen oder abgestoßen werden kann, ohne gegen die Schwerkraft ankämpfen zu müssen. Neben der Fadenaufhängung hat man wohl auch die Beweglichkeit schwimmender Körper, jedoch ohne besonderen Erfolg, verwertet. Als Magnete benutzt man natürlich vorzugsweise Elektromagnete, einmal weil sie kräftiger gebaut werden können, und dann, weil die Möglichkeit des Stromschlusses und der Stromöffnung die Beobachtung des plötzlichen Eintritts des magnetischen Zustandes resp. seines Verschwindens gestattet, so daß man selbst kleine, die beiden Zustände unterscheidende Merkmale, z. B. Einstellungen, noch wahrnehmen kann; freilich ergibt sich dabei zugleich die Notwendigkeit, die beim Stromöffnen und -schließen in den Drähten und in den Massen der Untersuchungskörper selbst auftretenden Induktionsströme mit peinlichster Sorgfalt auszuschließen oder in Rechnung zu ziehen, was namentlich in älterer Zeit nicht immer geschehen ist und bei manchen Anordnungen gar nicht geschehen kann. Unter den Formen der Magnete werden ihrer kräftigen Wirkung halber hauptsächlich der Hufeisenmagnet und der RUHMKORFFsche (S. 7) benutzt; letzterer hat den Vorteil noch größerer Stärke und geradlinig zwischen den Polen verlaufender Kraftlinien, ersterer den Vorteil, daß seine Polflächen in eine horizontale Ebene gebracht werden können, auf welcher man bequem experimentieren kann. Ist schon bei diesen Apparaten die Wirkung durch Anwendung zweier entgegengesetzten Pole verdoppelt, so gilt dies in noch höherem Maße bei einem besonders von TYNDALL[1] benutzten Apparate, bei dem sich entweder zwei entgegengesetzte Pole windschief gegenüber stehen oder deren gar vier benutzt werden. Ein ähnliches Prinzip, kombiniert mit einer Art von Multiplikationsverfahren, liegt auch dem Diamagnetometer von WEBER[2] in seiner empfindlichsten Form zugrunde. Hier ist ein gewöhnliches astatisches Nadelpaar (die Nadeln nebeneinander in einer horizontalen Ebene), mit dem sich behufs Ablesung ein Spiegel dreht, an einem Kokonfaden aufgehängt; zwischen dem Südpole des einen Stäbchens und dem Nordpole des anderen geht eine vertikal stehende Drahtspule hindurch, eine ebensolche auf der anderen Seite zwischen Nordpol des einen Stäbchens und Südpol des anderen. Durch die Achse der Spule ist ein Faden ohne Ende gezogen, der oberhalb und unterhalb um eine Rolle geführt ist und an zwei Stellen, die den Faden in gleiche Teile teilen, zwei der Länge nach, also gleichfalls vertikal stehende Stäbchen aus dem zu untersuchenden Stoffe trägt; bei symmetrischer Stellung befindet sich die Mitte dieser Stäbchen zwischen den Polen des astatischen Paares, durch Ziehen an der Schnur kann man aber auch das untere Ende des einen und das obere des anderen zwischen diese Pole bringen und ebenso umgekehrt. Leitet man nun durch die Spulen entgegengesetzte Ströme, die man, wenn sie schon an sich das Nadelpaar beeinflussen, durch Anwendung einer Gegenspule äquilibrieren kann, so lenken die durch sie magnetisch gewordenen Stäbchen das Nadelpaar ab, und diese an und für sich meist sehr kleine Ablenkung kann man bequem steigern, indem man die Stäbchen abwechselnd hebt resp. senkt. Eine weitere Methode beruht ebenfalls auf Ablenkungen, aber auf solchen einseitigen Charakters, ausgeübt nicht auf astatische, sondern einfache Systeme. Drei verschiedene derartige elektromagnetische Methoden hat BOLTZMANN[3] angegeben; bei der ersten

[1] J. TYNDALL, Phil. Mag. (4) **9**. S. 425. 1855 und (4) **10**. S. 268. Trans. R. Soc. 1855. S. 24. — [2] W. WEBER, Elektrodynamische Maßbestimmungen, 3. Teil, 1852. Vgl. auch TYNDALL, Trans. R. Soc. 1856. **1**. S. 237 und CHRISTIE, Pogg. Ann. **103**. S. 577. 1858. — [3] L. BOLTZMANN, Wien. Ber. **80** (2). 23. Okt. 1879. — **83** (2). 576. 1881.

befindet sich der Körper derart koaxial zur Spirale, daß sein Mittelpunkt in deren Frontebene liegt, die Kraft wird durch Äquilibrierung eines bifilaren Horizontalhebels gemessen: bei der zweiten befindet sich der Körper drehbar in der Mitte der Spirale, und es wird der Winkel zwischen ihren Achsen gemessen; bei der dritten befindet er sich zwischen zwei koaxialen, einander gegenüberstehenden, entgegengesetzt gewundenen Spiralen, und es wird das auf ihn ausgeübte Moment gemessen. Im Anschluß hieran hat v. ETTINGSHAUSEN eine Methode ausgearbeitet (Abstoßung eines Körpers aus einer Spule[1] s. w. u.). Ferner kann man mit ROWLAND und JACQUES[2] davon Gebrauch machen, daß sich im magnetischen Felde die Schwingungsdauer ändert. Statt die bei obigen Methoden auftretenden Ablenkungen zu beobachten, kann man sie natürlich, wie bei anderen elektrischen und magnetischen Messungen, auch aufheben, indem man nach dem Vorgange G. WIEDEMANNS[3] die Torsionsmethode anwendet, was sogar entschieden vorzuziehen ist und deshalb meist geschehen ist. Statt der Äquilibrierung durch Torsion kann man ferner die durch Gewichte benutzen, wodurch man zu dem Prinzip der diamagnetischen Wage gelangt, an deren einem Arm der zu untersuchende Körper frei herabhängt, während man auf die Wagschale am anderen Ende Gewichte auflegt oder von ihr abnimmt. Die Wägungsmethode ist besonders von PLÜCKER[4] angewandt worden. Des weiteren ist auch hier, wie bei den ferromagnetischen Substanzen, die Induktionsmethode vielfach benutzt worden, und auch hier wieder, um die Wirkung zu steigern, unter Anwendung häufiger Induktionsstöße, zu deren regelmäßigerer und in Rechnung zu ziehender Ausführung sich TÖPLER[5] und später SILOW[6] eines Rotationskommutators eigener Konstruktion bedienten.

Endlich ist an die Zugkraft-Methode, wie sie im Anschluß an QUINCKES Steighöhenmethode (S. 116) namentlich von P. MEYER, M. WEBER und SECKELSON (S. 181) für drahtförmige Körper ausgebildet worden ist, zu erinnern,

Insoweit war in erster Linie an Versuchskörper vom festen Aggregatzustande gedacht. Für Flüssigkeiten und ev. auch Gase, die begreiflicherweise ein besonderes Interesse darbieten, müssen die Methoden meist variiert oder durch andere ersetzt werden. Es kommen hier, wie dies DU BOIS[7] übersichtlich zusammengestellt hat, im wesentlichen folgende Verfahren in Betracht:

1. Ablenkung astatischer Systeme, deren eine Magnetnadel über oder in der Flüssigkeit schwebt; letztere wird entweder durch das Erdfeld oder durch besondere Spiralen magnetisiert[8].

2. Induktionsmethoden mit Differentialschaltung, wobei das Feld der einen primären Spirale mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt wird[9].

3. Schwingungsdauer eines mit der Flüssigkeit gefüllten Gefäßes von bestimmter Form in einem ungleichförmigen, symmetrischen, topographisch ausgemessenen Felde[10].

4. Statischer, durch Torsion bestimmter Zug auf eine Flüssigkeitsmasse im ungleichförmigen, topographisch ausgemessenen oder berechneten Felde[11]; dabei kann die Flüssigkeit entweder in einem Gefäße eingeschlossen sein, oder man kann nach E. BECQUEREL[12] einen festen Körper abwechselnd im Vakuum und in der Flüssigkeit aufhängen, so daß man in Analogie mit dem archimedischen Prinzip indirekt die Wirkung der verdrängten Flüssigkeit erhält.

---

[1] A. v. ETTINGSHAUSEN, Wien. Ber. **85** (2). S. 38. 1882. — [2] ROWLAND und JACQUES, Sill. Journ. **18**. S. 360. 1879. — [3] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **126**. S. 8. 1865. — [4] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **91**. S. 1. 1854. — [5] A. TÖPLER, Pogg. Ann. **160**. S. 1. 1877. — [6] P. SILOW, Wied. Ann. **11**. S. 324. 1880. — [7] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**, 139. 1888. — [8] P. SILOW, Wied. Ann. **1**, 481. 1877. — [9] A. TÖPLER, Pogg. Ann. **154**. 600. 1875. — TÖPLER u. v. ETTINGSHAUSEN, Pogg. Ann. **160**. 1. 1877. — P. SILOW, Wied. Ann. **11**. 324. 1881. — [10] H. ROWLAND und JACQUES, Sill. J. **18**. 360. 1879. — SCHUHMEISTER, Wien. Ber. **83** (2). 46. 1881. — [11] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **126**. 8. 1865. — SCHUHMEISTER, a. a. O. — EATON, Wied. Ann. **15**. 225. 1882. — A. v. ETTINGSHAUSEN, Wied. Ann. **17**. 304. 1882. — [12] E. BECQUEREL, Ann. chim. phys. (3) **28**. 290. 1850.

5. Die Steighöhen-Methode mit Benutzung des QUINCKEschen U-Rohres[1] oder in der modifizierten Form von DU BOIS (vgl. S. 117, 181 u. Figur 58)[2].

Diese Methoden sind geordnet nach zunehmender Intensität der Felder, in denen sie zu operieren gestatten; für kräftige und dementsprechend räumlich beschränkte Felder ist die Steighöhen-Methode unzweifelhaft den anderen überlegen, und sie ist auch neuerdings am häufigsten benutzt worden.

Eine Modifikation dieses Verfahrens haben JÄGER und ST. MEYER[3] benutzt, indem sie nicht die Steighöhen ablasen, sondern den Überdruck maßen, der erforderlich war, um den Meniskus nach Erregung des Magnetismus wieder in seine ursprüngliche Stellung zu bringen; und zwar wurde dieser Druck an der Volumenänderung gemessen, die man einem weiten Gefäße erteilen mußte, in das der dem Magneten abgewandte Schenkel des U-Rohres auslief, wozu ein mit dem Gefäße verbundenes Kapillarrohr diente.

Ferner ist sehr erwähnenswert eine eigenartige Nullmethode, die Methode der „inaktiven Lösungen", die H. DU BOIS[4] angegeben hat, und die von LIEBKNECHT und WILLS[5] weiter ausgebildet worden ist; sie besteht, kurz gesagt, darin, daß man von einer etwas paramagnetischen Lösung ausgeht und diese so lange verdünnt, bis die Magnetisierung des Salzes durch das diamagnetische Lösungsmittel gerade kompensiert erscheint; auf Grund gewisser gesetzmäßiger Beziehungen kann man dann die nötigen Schlüsse ziehen.

Übrigens ist auf die Abhandlung von LIEBKNECHT und WILLS noch insofern hinzuweisen, als man dort nähere Angaben über die QUINCKEschen Tropferscheinungen für para- und diamagnetische Flüssigkeiten findet (s. w. u.).

Nachdem es sich herausgestellt hatte, daß die Messung an Flüssigkeiten, namentlich nach den letztgenannten Methoden, sehr zuverlässig ist, zuverlässiger als die direkte Messung an festen Körpern, lag der Gedanke nahe, die Messung fester Körper auf indirektem Wege vorzunehmen, nämlich indem man die Differenz der ponderomotorischen Wirkungen des Feldes auf eine bereits bekannte Flüssigkeit und auf den zu prüfenden festen Körper mißt; dieser Gedanke ist namentlich von J. KÖNIGSBERGER[6] ausgearbeitet worden; eine Platte aus dem betreffenden festen Material wird bifilar aufgehängt und in eine Flüssigkeit getaucht, die sich in einem Glasgefäße zwischen den Polen eines Elektromagneten befindet; je nachdem das Material para- oder diamagnetisch, stellt sich die Platte mit ihrer Längsrichtung parallel oder senkrecht zur Pollinie. Die Empfindlichkeit läßt sich sehr günstig gestalten, so daß auch die Abhängigkeit von der Feldstärke verfolgt werden kann.

Zu der Schwierigkeit, die in der Kleinheit der zu bestimmenden Größe bei den para- und diamagnetischen Stoffen begründet ist, kommt nun noch eine andere, mit ihr zusammenhängende, nämlich die Schwierigkeit und doch unumgängliche Notwendigkeit, die zu untersuchenden Stoffe in ganz reinem Zustande zu benutzen; die käuflichen festen Körper, insbesondere die Minerale und manche Metalle, enthalten bekanntlich fast immer größere oder kleinere Spuren von Eisen; und bei dem gewaltigen Übergewicht des Eisens in magnetischer Hinsicht über alle anderen Stoffe können selbst kleine Spuren von Eisen die Erscheinung nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ modifizieren, ein Grund, weshalb man, besonders in älterer Zeit, vielfach zu ganz falschen Ergebnissen gelangt ist und über die festen Körper, die der Verunreinigung vorzugsweise ausgesetzt sind, noch

[1] G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. 374. 1885. — [2] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. 137. 1888. — [3] G. JÄGER und ST. MEYER, Wied. Ann. **63**. 83. 1897. — [4] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. 154. 1888. — **65**. 38. 1898. — Übrigens ist dieser Gedanke, soweit es sich um rein qualitative Schlüsse handelt, schon von QUET und VERDET benutzt worden: QUET, C. R. **38**. 562. 1854. — E. VERDET, Oeuvres I. 199. — [5] O. LIEBKNECHT und A. P. WILLS, Drude Ann. **1**. 178. 1900. — [6] Joh. KÖNIGSBERGER, Wied. Ann. **66**. 698. 1898. — Später hat KÖNIGSBERGER — Drude Ann. **6**. 506. 1901 — auch für die Feldstärkemessung ein neues Verfahren angewandt, das unter Benutzung des Quadrantelektrometers große Genauigkeit gewährleistet.

bis vor kurzem wenig sicheres wußte. Übrigens ist zu bemerken, daß man zahlreiche feste Stoffe in amorphem oder pulverförmigem Zustande untersuchen muß, weil sonst besondere, von der Kristallnatur abhängige Erscheinungen auftreten (s. w. u.).

## Ergebnisse.

**Diamagnetismus.** Während für viele Stoffe die Versuche über ihr magnetisches Verhalten nichts Besonderes darbieten, indem eben die Erscheinungen lediglich schwächer sind als beim Eisen, hat das entgegengesetzte Verhalten mancher Stoffe, der diamagnetischen, schon frühzeitig das Interesse der Beobachter erregt. Man kann die bezüglichen Grunderscheinungen in sehr verschiedenen Formen, z. B. den folgenden beobachten. Eine Wismutkugel wird von einem Magnetpole nicht angezogen, sondern abgestoßen. Ein Wismutstäbchen stellt sich zwischen zwei Magnetpolen nicht axial, sondern transversal ein; dabei müssen aber möglichst punktförmige Pole benutzt werden, bei flächenhaften Polen kommt der Mißstand in Betracht, daß die Randteile dieser Flächen viel stärker magnetisch sind als die Mitte, so daß das Wismuthstäbchen, indem es der Abstoßung der ersteren folgt, sich axial einstellt. Diese letzteren Versuche kann man durch Benutzung verschieden geformter Pole, verschiedener Abstände derselben, verschiedener Lage des Wismutstäbchens zu den Polen usw. vielfach modifizieren, erhält dabei aber keine Erscheinungen von innerem Interesse, sondern nur solche, die durch die Umstände in leicht erklärlicher Weise beeinflußt sind und nach Eliminierung derselben doch wieder auf die Grunderscheinungen führen. Eine Flüssigkeit, die in einer Schale auf die Polflächen eines Hufeisen-Magneten gebracht wird, verändert ihre ursprünglich radial symmetrische Form; aber während sich manche Flüssigkeiten axial dehnen und dabei an beiden Enden, den Polen zunächst, Wulste, in der Mitte eine Mulde bilden, verhalten sich andere wieder gerade umgekehrt, sie dehnen sich in die Breite und bilden einen nach den Polen hin abfallenden Sattel.

Die Körper, welche angezogen werden, resp. sich „axial" stellen, nennt man paramagnetisch, diejenigen, welche abgestoßen werden, resp. sich „transversal" oder „äquatorial" stellen, diamagnetisch. Ehe man aus der Beobachtung in dieser Richtung einen Schluß zieht, muß man sich vergewissern, daß sich nicht Nebenerscheinungen geltend machen, unter denen namentlich die Induktion von Strömen in der Masse des untersuchten Körpers zu nennen ist, wie sie auftreten, wenn der Elektromagnet geschlossen wird. Man muß also insbesondere einige Zeit warten, bis ein deutlicher Gleichgewichtszustand eingetreten ist. Auch muß man durch Schutzhüllen dafür sorgen, daß nicht Luftströmungen die Sicherheit des Ergebnisses beeinträchtigen.

Will man die Grunderscheinung an einer Flüssigkeit oder einem Gase beobachten, so muß man sie in Glasballons oder Röhren einschließen, findet dann aber, daß es nicht nur von der Natur der Flüssigkeit, sondern auch von der des Gefäßmaterials abhängt, ob Anziehung oder Abstoßung, axiale oder transversale Stellung eintritt; sehr begreiflich, da beide Stoffe magnetisch werden und es folglich lediglich darauf ankommt, welcher von ihnen stärker paramagnetisch oder schwächer diamagnetisch wird. Es ist hierauf bei der Besprechung der Theorie des Diamagnetismus bereits eingegangen worden. MARANGONI[1] demonstriert die Anziehung einer Eisenchloridlösung in einer Glaskugel durch die Magnetpole, indem er die Schwerkraft durch Aufgießen eines Öls kompensiert. Dieselbe Bemerkung bezieht sich übrigens auch auf die meisten anderen gelegentlich benutzten Methoden, von denen hier die von FARADAY[2] herrührende, sehr anschauliche

---

[1] C. MARANGONI, Lum. él. **48**. 148. 1893. — [2] M. FARADAY, Exper. Researches. **21**. § 2400, 1846; Exp. Unters. Bd. **3**.

Färbungsmethode für Gase erwähnt sein mag. Bei den gefärbten Gasen sieht man schon ohne weiteres, ob sie magnetisch oder diamagnetisch sind; bei farblosen ließ FARADAY eine Anzahl Röhrchen, die Papier mit flüssigem Ammoniak enthielten, zwischen und neben den Polen bis in ihre Ebenen hinabreichen; in dem Rohre andererseits, welches das Gas von unten her zuführt, befand sich mit Salzsäure getränktes Papier; in jenen Röhrchen, in welche das Gas einströmte, bildeten sich infolgedessen weiße Dämpfe, und zwar bei magnetischen in den axial, bei den diamagnetischen in den äquatorial einmündenden Röhrchen.

Man kann dieses differentielle Verhalten der Stoffe dem Magnetismus gegenüber mit dem ganz analogen der Schwere gegenüber vergleichen und das archimedische Prinzip von dort hierher übertragen (s. o.). Man kann also hier wie dort entweder verschiedene Körper, die man untersuchen will, in demselben Medium beobachten, oder einen und denselben Körper, der dann als Hilfskörper dient, in verschiedenen, eben den zu untersuchenden Medien; beide Methoden sind angewendet worden, und man sieht leicht ein, in welchen Fällen die eine, in welchen die andere von Vorteil sein wird.

Der Erste, der die diamagnetische Natur des Wismuts beobachtete, und zwar schon 1778, war BRUGMANNS[1]; BEQUEREL[2] (1827) und FARADAY[3] (1845) haben die Beobachtungen, die vielfach mißdeutet worden oder in Vergessenheit geraten waren, wiederholt und variiert; von FARADAY rührt auch der Name Diamagnetismus und der Nachweis her, daß fast alle Stoffe, auch Flüssigkeiten und Gase, schwach magnetisch oder diamagnetisch sind.

In der ersten Zeit nach dem Bekanntwerden der allgemeinen Verbreitung des Magnetismus hat man sich meist begnügt, anzugeben, welche Körper paramagnetisch, welche diamagnetisch sind, und welche von jenen und diesen es in stärkerem oder schwächerem Grade sind, wobei es freilich einen Unterschied macht, ob man den Magnetismus auf die Volumen-, Gewichts- oder Atom-Einheit (s. w. u.) bezieht; man kommt auf diese Weise, ähnlich wie in anderen Gebieten, zu einer magnetischen Reihe der Stoffe, in die sich jedoch die meisten Stoffe nicht einreihen lassen, weil sie sich hinsichtlich der Stärke ihrer Eigenschaften zu wenig und in zu wenig sicherer Weise unterscheiden. Beschränkt man sich daher auf die hierfür geeigneten Stoffe und nimmt noch die ferromagnetischen hinzu, so erhält man für das Atom etwa folgende Reihe, die mit dem am stärksten magnetischen Metall anfängt und mit dem am stärksten diamagnetischen aufhört:

(+) Eisen — Kobalt — Nickel — Mangan — Chrom — Cer — Didym — Lanthan — Palladium — Platin — Wolfram — Molybdän — Aluminium — Silizium — (hier liegt etwa der Indifferenzpunkt) — Kohle — Kalium — Natrium — Calcium — Baryum — Phosphor — Arsen — Kupfer — Zink — Cadmium — Silber — Schwefel — Blei — Gold — Brom — Jod — Quecksilber — Antimon — Tantal — Wismuth (—).

Viele der hier auf der diamagnetischen Seite stehenden Stoffe wurden früher für magnetisch gehalten, weil sie eisenhaltig waren, und es ist nicht ausgeschlossen, daß immer noch einige Änderungen an der obigen Reihe vorgenommen werden müssen. In der Hauptsache aber zeigt sie deutlich eine Beziehung zum periodischen System der Elemente; denn die in der Mitte stehenden Elemente, die bekanntlich das kleinste Atomvolumen haben, sind zugleich am stärksten paramagnetisch, nach rechts und links reihen sich dann Elemente mit steigendem Atomvolumen und abnehmendem, ja negativ werdendem Atommagnetismus (s. w. u.) an, und die ganz rechts stehenden Stoffe mit dem größten Atomvolumen sind am stärksten diamagnetisch[4].

---

[1] BRUGMANS, Magnetismus seu de affin. magneticis oes. Ludg. 1778. — [2] A. C. BECQUEREL, Pogg. Ann. **10**. S. 507. 1827. — [3] M. FARADAY, Exper. Researches **20** u. f. 1845 u. f. — [4] Vgl. J. KÖNIGSBERGER, Wied. Ann. **66**. 731. 1898.

Manche Stoffe, z. B. Palladium, verhalten sich übrigens verschieden, je nach der Art und Weise, wie sie chemisch dargestellt worden sind. Sonst seien noch folgende Stoffe als diamagnetisch in ungeordneter Folge aufgeführt: fast alle Glassorten, falls sie eisenfrei sind, was freilich meist nicht der Fall ist, Bergkristall, Gips, Koch-, Bitter- und Glaubersalz, Alaun, Salmiak, Salpeter, Soda, Kalkspat, Wachs, Walrat, Olivenöl, Terpentin, Kautschuk, Gummi, Stärke, Elfenbein, Leder, Blut, Fleisch, Brot usw. Die Flüssigkeiten sind fast sämtlich diamagnetisch, insbesondere Wasser, Alkohol und Äther. Sehr wenig einheitlich verhalten sich die Verbindungen und Lösungen der Metalle. So sind z. B. nicht einmal alle Eisenverbindungen magnetisch, das gelbe Blutlaugensalz ist vielmehr diamagnetisch; die chromsauren Salze sind sogar sämtlich diamagnetisch. Vom Kupfer andererseits sind die Oxydulsalze diamagnetisch, wie das Metall selbst, die Oxydsalze hingegen magnetisch. In manchen Fällen ist der Zustand magnetisch oder diamagnetisch, je nach dem Lösungsmittel oder sogar je nach der Konzentration der Lösung, in welch letzterem Falle entsprechend dem Diamagnetismus des Wassers, meist die konzentrierte Lösung magnetisch, die verdünntere diamagnetisch ist. Bestimmte Gesetze wird man daher nur in gewissen eng begrenzten Gruppen erwarten dürfen (s. w. u.).

Bei den Gasen kann man sich eine magnetische Reihe verschaffen, indem man nach dem übertragenen archimedischen Prinzip zunächst Luft und dann der Reihe nach andere Gase als umgebende Medien einer und derselben Flüssigkeit wählt. Man ist hierbei indessen nicht immer zu übereinstimmenden Ergebnissen gelangt, und es sei daher hier zunächst nur angeführt, daß gegen den leeren Raum Sauerstoff und demnächst Stickoxyd und Luft am stärksten magnetisch, daß aber wahrscheinlich auch alle übrigen Gase gegen den leeren Raum schwach magnetisch oder höchstens, wie vielleicht Wasserstoff, sehr schwach diamagnetisch sind; während gegen Luft nur Sauerstoff und Stickoxyd magnetisch, alle anderen Gase aber diamagnetisch sind.

## Quantitative Bestimmungen.

Um die spezifischen Charakteristiken der diamagnetischen Stoffe zu erhalten, muß man sich zunächst darüber klar werden, inwieweit es solche gibt. Beim Eisen gibt es bekanntlich keine spezifische magnetische Konstante, weil das Verhalten von der magnetisierenden Kraft abhängig und zwar in nicht proportionaler Weise abhängig ist. Bei den schwach magnetischen Körpern ist dies jedoch jedenfalls innerhalb gewisser Grenzen der Fall (s. w. u.), man braucht also nur bei irgend einer (möglichst großen) Kraft den Magnetismus zu bestimmen und den Quotienten zu bilden, wobei man die äußere Kraft geradezu als magnetisierende Kraft betrachten darf, da die innere Selbstinduktion von äußerst geringem Betrage oder geradezu null ist (eine hiervon abweichende Beobachtung v. ETTINGSHAUSENS[1], wonach der Magnetismus gepulverten Wismuts um 12% kleiner ist als der des konsistenten, wird von dem Autor selbst als wahrscheinlich durch fremde Einflüsse verursacht hingestellt).

Die Bestimmungen, die besonders neuerdings in sehr großer Zahl ausgeführt worden sind, sind teils relativ, d. h. auf irgend einen Vergleichsstoff als Einheit bezogen, teils absolut; und es wird entweder die Magnetisierung der Volumeneinheit im Verhältnis zur Feldstärke, also die Suszeptibilität $\varkappa$, oder der spezifische Magnetismus $s$ oder der Atom- bzw. Molekular-Magnetismus angegeben; im folgenden ist, wenn möglich, überall $\varkappa$ angegeben und zwar, da es sich um meist sehr kleine Zahlen handelt, mit $10^6$ multipliziert. Ferner handelt es sich meist um die scheinbare Suszeptibilität gegen Luft, es muß also, um den Wert im

[1] A. v. ETTINGSHAUSEN, Wien. Ber. (2) **96**. S. 785. 1887.



Vakuum zu bekommen, noch die oben bezeichnete Korrektion angebracht werden. Der Übersichtlichkeit wegen soll zwischen den drei Aggregatzuständen unterschieden werden, innerhalb jedes derselben aber die alphabetische Reihenfolge innegehalten werden, außer wo dadurch zusammenhängende Reihen gar zu sehr auseinandergerissen werden würden.

## I. Feste Stoffe.

(*p* im pulverförmigen Zustande.)

Literatur: Faraday, Plücker, E. Becquerel, W. Weber, Christie, Rowland und Jacques, v. Ettingshausen, Swinton, Bleekrode, Lombardi, Curie, Königsberger, St. Meyer, Wills[1].

### a) Elemente.

| | | |
|---|---|---|
| Aluminium | 1,9 | Wills |
| | 1,7 | Lombardi |
| | 1,7 | Königsberer |
| Antimon | (−33,1) | Meyer (!) |
| Antimon *p* | −2,3 | Meyer (!) |
| Antimon | −5,2 | Ettingshausen |
| Beryll *p* | 33,8 | Meyer |
| Blei | −1,03 | Becquerel |
| | −0,86 | Lombardi |
| | −1,24 | Königsberger |
| Bor *p* | 2,2 | Meyer |
| Cadmium | −1,16 | Meyer |
| Cer *p* | 182 | Meyer |
| Didym *p* | 121 | Meyer |
| Erbium *p* | 231 | Meyer |
| Gold | −2,60 | Faraday |
| | −2,77 | Becquerel |
| Gold (elektrol.) | −3,07 | Königsberger |
| Kohle | −2,5 | Meyer |
| Kohle (Anthraz.) | +0,39 | Meyer |
| Kohle (Graph.) | −8,1 | Meyer |
| Kohle | +2 | Königsberger |
| Kohle (Steink.) | +1 | Königsberger |
| Kupfer | −0,66 | Meyer |
| | −0,30 | Königsberger |
| Kupfer (elektr.) | −0,82 | Königsberger |
| Lanthan *p* | 112 | Meyer |
| Magnesium | +0,44 | Meyer |
| Molybdän | 2,2 | Meyer |
| Osmium *p* | 0,62 | Meyer |
| Palladium | 61 | Curie |
| | 55 | Königsberger |
| Phosphor, rot | −0,4 | Meyer |
| Platin | 29 | Königsberger |
| Schwefel[1] | −0,87 | Faraday |
| | −0,76 | Becquerel |
| | −0,87 | Lombardi |
| | −0,85 | Königsberger |
| | −0,77 | Wills |
| Selen | −1,25 | Faraday |
| | −1,32 | Becquerel |
| | −1,34 | Curie |
| | −1,28 | Königsberger |
| Selen (rot, *p*) | −0,50 | Königsberger |

[1] M. Faraday, Exper. Researches. Bd. **3**. — J. Plücker, Pogg. Ann. **74**. 321. 1848. — E. Becquerel, Ann. Chim. Phys. (5) **12**. 34. 1887. — W. Weber, Elektr. Maßbestimm., insb. über Diamagnetismus. 523. — H. Christie, Pogg. Ann. **133**. 589. 1858. — H. Rowland und Jacques, Still. J. **18**. 360. 1879. — A. v. Ettingshausen, Wien. Ber. **85**. (2) 37. 1882; Wied. Ann. **17**. 272; Wien. Ber. **96** (2). 177. 1877. — A. C. Swinton, El. Review. **34**. 1894. — L. Bleekrode, Wied. Ann. **55**. 398. 1895. — L. Lombardi, Mem. Acc. Science Torino (2) **47**. 1897. — P. Curie, C. R. **115** u. **116**. 1892. — J. Königsberger, Wied. Ann. **66**. 698. 1898. — St. Meyer. Wied. Ann. **68**. 325. 1899; **69**. 236. 1899; Drude Ann. **1**. 668. 1900. Wien. Ber. **110**. (2a) 541. 1901; **111**. (2a) 38. 1902. — P. Wills, Phys. Review. **6**. 223. 1898; Phil. Mag. **45**. 432. 1898. — [2] Die von St. Meyer angegebene Zahl —0,43 für gepulverte Kristalle weicht von den übereinstimmenden obigen Zahlen zu sehr ab.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Silber | —1,74 | FARADAY | Wismut | —16,4 | WEBER |
| | —1,86 | BECQUEREL | | —14,6 | CHRISTIE |
| | —1,3 | MEYER | | —15,1 | TÖPLER u. E. |
| Silber (elektr.) | —1,5 | KÖNIGSBERGER | | —14,0 | ETTINGSHAUSEN |
| Silizium *p* | 0,33 | MEYER[1] | | —13,8 | CURIE |
| | | | | —13,3 | LOMBARDI |
| Tantal | 58 | MEYER | Wismut *p* | — 5,3 | MEYER |
| Tellur | —1,6 | ETTINGSHAUSEN | Wolfram | 10,5 | MEYER |
| | —1,9 | CURIE | Wolfram *p* | 14 | KÖNIGSBERGER |
| | —2,1 | KÖNIGSBERGER | Zink | —0,62 | FARADAY |
| | —0,6 | MEYER | | —0,20 | BECQUEREL |
| Thallium | —4,6 | KÖNIGSBERGER | | —1,05 | LOMBARDI |
| | | | | —0,83 | KÖNIGSBERGER |
| Thorium *p* | 81 | MEYER | Zinn | 0,46 | KÖNIGSBERGER |
| Titan | 9,5 | MEYER | | 0,26 | MEYER |
| Titan *p* | 18,5 | MEYER | | 0,35 | WILLS |
| Uran | 16,3 | MEYER | Zirkon *p* | —0,18 | MEYER |
| Vanadium | 1,56 | MEYER | | | |

Überblickt man diese Tabelle, so sieht man, daß die seltenen Metalle Erbium, Cer, Didym, Lanthan und Thorium am stärksten paramagnetisch sind; ihre Magnetisierbarkeit beträgt aber der Größenordnung nach nur ein milliontel von der des Eisens. Andererseits ist, wenn man von dem einen, unmöglich richtigen Werte für Antimon absieht, Wismut am stärksten diamagnetisch, und es hat demgemäß auch zuerst die Aufmerksamkeit auf das dem Eisen entgegengesetzte Verhalten mancher Stoffe gelenkt. Immerhin ist seine Magnetisierbarkeit, von dem Vorzeichen abgesehen, noch wieder zehnmal kleiner als die der besten paramagnetischen Stoffe, also nur rund ein zehnmilliontel von der des Eisens.

## b) Andere feste Stoffe.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Apatit | —1,23 | KÖNIGSBERGER | Holz | —0,16 bis —0,51 | WILLS |
| Argentan | +4,8 | LOMBARDI | Marmor | —0,8 | WILLS |
| Asbest | z. stark param. | SWINTON BLEEKRODE | Messing | —1,3 | LOMBARDI |
| Beryll | 3,9 | KÖNIGSBERGER | Palmitinsäure | —0,73 | KÖNIGSBERGER |
| Caesiumchlorid | —0,47 | MEYER | Paraffin | —0,78 | LOMBARDI |
| Celluloid | —0,2 | KÖNIGSBERGER | Quarz | —1,20 | KÖNIGSBERGER |
| Ebonit | 34 (!) | LOMBARDI | | —1,14 | CURIE |
| | 1,1 (!) | WILLS | Samariumoxyd | 66,8 | MEYER |
| Eisenoxyd | 50 | KÖNIGSBERGER | Stearinsäure | —0,90 | KÖNIGSBERGER |
| Flußspat | —1,3 | KÖNIGSBERGER | Topas | —0,43 | KÖNIGSBERGER |
| Gips ‖ | —0,86 | KÖNIGSBERGER | Turmalin ⊥ | 1,4 | KÖNIGSBERGER |

[1] An anderer Stelle steht freilich 0,006 (!).

### c) Jenenser Gläser (Königsberger).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| O · 2259 | Borosilikat-Kron | —0,90 | O · 1809 | Boro-Flint | —0,78 |
| O · 2253 | Borat-Kron | —0,93 | O · 1614 | Baryt-Leichtflint | —0,39 |
| O · 2161 | Silikat-Kron m. Zn. | 0,86 | O · 2217 | Baryt-Leichtflint | —0,93 |
| O · 1282 | Silikat-Kron m. Ba. | —0,60 | O · 2178 | Gew. Silikat-Flint | —0,92 |
| O · 2236 | Schwerstes Baryt-Kr. | —0,95 | O · 2234 | Schweres Silikat-Flint | —1,01 |

| | |
|---|---|
| Kobaltglas . . . . . | 2,15 |
| Kathedralglas . . . . | 23,3 |
| Eisenoxyd-Silikat . . . | 79 |

d) Ferner hat St. Meyer zahlreiche Oxyde, Sulfide, Halogenverbindungen und kompliziertere Salze von Metallen in Pulverform untersucht und die Resultate in ausgedehnten Tabellen zusammengestellt; es können hier nur einige Zahlen bzw. Grenzwerte für ganze Reihen wiedergegeben werden.

Lithium-Verbindungen . —0,12 bis —0,45
$LiCl$ —0,45

Boro-Verbindungen . . +0,22 bis —0,01
$B_2O_3$ 0,014

Natrium-Verbindungen . —0,13 bis —0,57
$NaCl$ —0,52; $NaBr$ —0,51 $NaJ$ —0,57; $Na_2CO_3$ —0,132

Magnesium-Verbindungen —0,30 bis —0,45 (außer $MgO$)
$MgO$ —0,055; $MgCl_2$ —0,42; $MgSO_4$ —0,34; $MgCO_3$ —0,38

Aluminium-Verbindungen . —0,28 bis —0,42
$Al_2O_3$ —0,279; $Al_2(SO_4)_3$ —0,36

Kalium-Verbindungen . . —0,44 bis —0,57
$KFl$ —0,437; $KCl$ —0,566; $KBr$ —0,515; $KJ$ —0,521

Calcium-Verbindungen . —0,27 bis —0,46
$CaO$ —0,310; $CaFl_2$ —0,32; $CaCl_2$ —0,442; $CaSO_4$ —0,447

Chrom-Verbindungen . . +31 bis +41 (außer $CrO_4H_2$)
$Cr_2O_3$ +41,0; $CrCl_2$ +31,8; $Cr_2Cl_3$ +35,5; $CrO_4H_2$ +0,62

Kupfer-Verbindungen . . sehr verschieden, teils +, teils —
$CuO$ +2,90; $CuSO_4$ +6,72; $CuBr_2$ +6,1; $CuCl_2$ +1,02; $CuJ_2$ —0,18

Zink-Verbindungen . . —0,39 bis —0,61
Selen-Verbindungen . . —0,45 bis —0,55
Strontium-Verbindungen . —0,40 bis —0,58

Silber-Verbindungen . . —0,61 bis —0,73
$AgCl$ —0,658; $AgBr$ —0,610; $AgJ$ —0,726

Cadmium-Verbindungen . —0,55 bis —0,76
Zinn-Verbindungen . . sehr verschieden, teils +, teils —

Barium-Verbindungen . . —0,23 bis —0,65 (außer $BaO_2$ ?)
$BaO$ —0,236; $BaCl_2$ —0,643; $BaS$ —0,41

Quecksilber-Verbindungen —0,43 bis —0,87
$HgO$ —0,87; $HgCl$ —0,61; $HgCl_2$ —0,65; $HgS$ —0,465

Platin-Chlorür . . . . —0,029
Gold-Chlorid . . . . —0,455

Blei-Verbindungen . . . —0,38 bis —0,63 (außer $PbO_2$ ?)
$PbO$ —0,38; $PbCl_2$ —0,54; $PbJ_3$ —0,623; $PbFl_2$ —0,519

Uran-Verbindungen . . sehr verschieden, teils +, teils — ($UO_2$ +2,46)

Soweit die festen Körper. Die Bedeutung der betreffenden Bestimmungen tritt zurück gegen die an Flüssigkeiten, weil sich letztere bekanntlich schärfer definieren lassen und es bei der Festlegung einer Konstanten von meist so kleinen Werten wie die vorliegende auf Reinheit und Bestimmtheit des Materials in hohem Maße ankommt.

## II. Flüssigkeiten.

Hier ist das Zahlenmaterial so überaus umfangreich, daß eine große Beschränkung in der Wiedergabe stattfinden muß. Dabei dürfen zunächst mehrere ältere Reihen, die in der ersten Auflage dieses Werkes Platz fanden, wegbleiben, da sich herausgestellt hat, daß die betreffenden Zahlen[1] nicht richtig sind. Im übrigen muß es genügen, nur für die wichtigsten Stoffe eine vergleichende, alphabetische Tabelle der von verschiedenen Autoren erhaltenen Werte zu geben. Dabei sind fast nur absolute Zahlen berücksichtigt; einige wenige relative sind in geeigneter Weise umgerechnet.

Von älterer Literatur sind die Arbeiten von FARADAY, E. BECQUEREL, PLÜCKER, ARNDTSEN, BORGMANN ihres historischen Interesses halber zu nennen; die neueren Bestimmungen rühren im wesentlichen von folgenden Autoren her: QUINCKE, H. DU BOIS, SILOW, HENRICHSEN, P. CURIE, LOMBARDI, G. JÄGER und ST. MEYER, TOWNSEND, WILLS, J. KÖNIGSBERGER, St. MEYER, v. ETTINGSHAUSEN, R. APT, FREITAG, HEINRICH, LIEBKNECHT und WILLS, PIAGGESI, STEARNS und (für verflüssigte Gase) FLEMING und DEWAR[2].

### Suszeptibilität $\varkappa \times 10^6$.

Die erste Spalte nennt die Flüssigkeit, die zweite charakterisiert sie, wenn erforderlich, entweder durch ihre Dichte (ohne Zusatz) oder durch den Gehalt an Gewichtsteilen des gelösten Stoffes (%) oder durch die Zahl der Gramm-Molekeln (g-M); die dritte Spalte gibt $\varkappa \cdot 10^6$, wobei das Minuszeichen fortgelassen und nur die wenigen paramagnetischen Stoffe durch ein + gekennzeichnet sind; die letzte Spalte nennt den Autor.

[1] Hierher gehören namentlich die Zahlen von SCHUHMEISTER (Wien. Ber. **83** [2] 45. 1881) und von WÄHNER (Wien. Ber. **96** [2]. 85. 1887), die, wie der Vergleich mit neueren Messungen gezeigt hat, fast um die Hälfte zu klein sind. Übrigens sind auch unter den neueren Angaben wohl noch manche, die mit Vorsicht aufgenommen werden müssen. — [2] M. FARADAY, Exp. Res. **3**. 497; Pogg. Ann. **88**. 557. 1853. — E. BECQUEREL, Ann. chim. phys. (3) **28**. 313. 1850; **44**. 223. 1855. — H. BECQUEREL, Ann. chim. phys. (5) **12**. 5. 1877. — J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **74**. 321. 1848. — A. ARNDTSEN, Pogg. Ann. **104**. 600. 1858. — J. BORGMANN, Wied. Ann., Bbl. **3**. 812. 1879. — G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. 347. 1885. — H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. 137. 1888; **65**. 38. 1898. — P. SILOW, Wied. Ann. **11**. 324. 1880. — S. HENRICHSEN, Wied. Ann. **34**. 180. 1888; **45**. 38. 1892. — P. CURIE, C. R. **115** u. **116**. 1892. — L. LOMBARDI, Mem. Acc. Science Torino (2) **47**. 1897. — G. JÄGER und ST. MEYER, Wien. Ber. (2a) **106**. 104 u. 594. 1897; Wied. Ann. **63**. 83. 1897; **67**. 427. 707. 1899. — TOWNSEND, Proc. R. Soc. **60**. 186. 1896/97. — P. WILLS, Phys. Rev. **6**. 223. 1898; Phil. Mag. **45**. 432. 1898. — J. KÖNIGSBERGER, Wied. Ann. **66**. 698. 1898; Drude Ann. **1**. 175. 1900; Drude Ann. **6**. 506. 1901. — ST. MEYER, Drude Ann. **1**. 664. 1900. — A. v. ETTINGSHAUSEN, Wien. Ber. (2) **85**. 37. 1882. — R. APT, Schrift. Nat.-Ver. Schlesw.-Holst. **11**. 1898. — H. FREITAG, Sitz.-Ber. Münch. Akad. 1900. 36. — G. HEINRICH, Sitz.-Ber. Münch. Akad. 1900. 35. — O. LIEBKNECHT und A. P. WILLS, Drude Ann. **1**. 178. 1900. — H. DU BOIS und O. LIEBKNECHT, Drude Ann. **1**. 189. 1900. — G. PIAGGESI, N. Cim. (5) **4**. 247. 1902; Phys. Z. **4**. 347. 1903. — H. D. STEARNS, Phys. Review **16**. 1. 1903. — J. DEWAR, Electrician **29**. 169. 1892. — J. A. FLEMING und J. DEWAR, Proc. R. Soc. **60**. 283. 1896; Proc. R. Soc. **63**. 311. 1898.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aceton . . . . . . . . . | | 0,505 | HENRICHSEN |
| Äther . . . . . . . . . | | 0,63 | QUINCKE |
| | | 0,642 | DU BOIS |
| | | 0,61 | KÖNIGSBERGER |
| Äthylacetat . . . . . . . | | 0,63 | KÖNIGSBERGER |
| Äthylformiat . . . . . . | | 0,70 | KÖNIGSBERGER |
| Alkohol . . . . . . . . | | 0,69 | QUINCKE |
| | | 0,694 | DU BOIS |
| | | 0,67 | KÖNIGSBERGER |
| Aluminiumchlorid in HCL . | 15% | 0,845 | KÖNIGSBERGER |
| Ameisensäure . . . . . . | | 0,56 | HENRICHSEN |
| Ammoniak . . . . . . . | | 0,81 | QUINCKE |
| | | 0,75 | KÖNIGSBERGER |
| Amylacetat . . . . . . . | | 0,65 | HENRICHSEN |
| Amylalkohol . . . . . . | | 0,69 | HENRICHSEN |
| Bariumacetat . . . . . . | 15 % | 0,807 | KÖNIGSBERGER |
| Bariumbromid . . . . . . | 20 % | 0,871 | KÖNIGSBERGER |
| Bariumchlorid . . . . . . | 11,6% | 0,839 | KÖNIGSBERGER |
| | 30,1% | 0,880 | KÖNIGSBERGER |
| Bariumjodid . . . . . . | 20 % | 0,871 | KÖNIGSBERGER |
| Benzin . . . . . . . . | | 0,63 | KÖNIGSBERGER |
| Benzol . . . . . . . . . | | 0,69 | QUINCKE |
| | | 0,70 | KÖNIGSBERGER |
| Bleiacetat . . . . . . . | 15% | +0,78 | KÖNIGSBERGER |
| Brom . . . . . . . . . | | 1,44 | QUINCKE |
| Bromoform . . . . . . . | | 1,02 | HENRICHSEN |
| Buttersäure . . . . . . . | | 0,64 | HENRICHSEN |
| Cadmiumchlorid . . . . | 15 % | 0,858 | KÖNIGSBERGER |
| Calciumchlorid . . . . . | 20 % | 0,880 | KÖNIGSBERGER |
| | 37,4% | 0,939 | KÖNIGSBERGER |
| Cerchlorid . . . . . . . | 11,5% | +4,877 | DU BOIS |
| Chloral . . . . . . . . | | 0,75 | HENRICHSEN |
| Chloroform . . . . . . . | | 0,785 | HENRICHSEN |
| Chromalaun . . . . . . | 1,1% | −0,63 | KÖNIGSBERGER |
| | 5 % | ∓0 | KÖNIGSBERGER |
| | 16,2% | +1,60 | KÖNIGSBERGER |
| Chromoxyd . . . . . . . | 14 % | 0,578 | KÖNIGSBERGER |
| Eisenchlorid . . . . . . | 1,49 | +57,5 | ARNDTSEN |
| | 1,49 | 48,8 | BORGMANN |
| | 1,51 | 65 | QUINCKE |
| | 1,52 | 55 | SILOW |
| | 1,48 | 57,2 | v. ETTINGSHAUSEN |
| | 1,36 | 42,9 | HENRICHSEN |
| | 3,6 g-M | 42,7 | JÄGER und MEYER |
| Eisenchlorür . . . . . . | 1,31 | +35 | QUINCKE |
| Eisennitrat . . . . . . . | 1,88 g-M | +20,5 | JÄGER und MEYER |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eisensulfat . . . . . . . | 1,22 | +19,6 | QUINCKE |
| | 1,21 | +16,1 | LOMBARDI |
| | 1,09 g-M | +13,6 | JÄGER und MEYER |
| Essigsäure . . . . . . . | | 0,64 | KÖNIGSBERGER |
| Glyzerin . . . . . . . . | | 0,8 | QUINCKE |
| | | 0,82 | KÖNIGSBERGER |
| Isobutylalkohol . . . . . | | 0,70 | KÖNIGSBERGER |
| Kaliumbromid . . . . . . | 1,117 | 0,835 | KÖNIGSBERGER |
| Kaliumchlorid . . . . . . | 1,110 | 0,833 | KÖNIGSBERGER |
| Kaliumfluorid . . . . . . | 1,131 | 0,847 | KÖNIGSBERGER |
| Kaliumjodid . . . . . . . | 1,120 | 0,840 | KÖNIGSBERGER |
| Kaliumhydroxyd . . . . | 1,120 | 0,825 | KÖNIGSBERGER |
| Kaliumpermanganat . . . | 1,03 | 0,78 | QUINCKE |
| Kobaltchlorür . . . . . . | 1,129 | +12,4 | QUINCKE |
| | 2,02 g-M | +20,8 | JÄGER und MEYER |
| Kobaltnitrat . . . . . . . | 2,03 g-M | +20,1 | JÄGER und MEYER |
| Kobaltsulfat . . . . . . . | 1,26 | +18,5 | QUINCKE |
| | 1,75 g-M | +15,0 | JÄGER und MEYER |
| Kupferchlorid . . . . . . | 13,8% | + 1,21 | KÖNIGSBERGER |
| Kupfersulfat . . . . . . . | 4,7% | − 0,30 | KÖNIGSBERGER |
| | 15,3% | + 1,06 | KÖNIGSBERGER |
| Lithiumchlorid . . . . . . | 1,081 | 0,809 | KÖNIGSBERGER |
| Luft, flüssig . . . . . . . | | +180 | FLEMING und DEWAR |
| Manganchlorid . . . . . . | 3,55 g-M | +52,4 | JÄGER und MEYER |
| Manganchlorür . . . . . . | 1,045 | + 6,82 | DU BOIS |
| | 1,37 | +58 | QUINCKE |
| Mangansulfat | 2 g-M | +29,1 | JÄGER und MEYER |
| | 1,417 | +56,2 | QUINCKE |
| Magnesiumchlorür . . . . | 15% | 0,852 | KÖNIGSBERGER |
| Magnesiumsulfat . . . . | 1,25 | 0,9 | QUINCKE |
| Methylacetat . . . . . . . | | 0,69 | KÖNIGSBERGER |
| Methylalkohol . . . . . . | | 0,68 | QUINCKE |
| | | 0,60 | HENRICHSEN |
| Methylformiat . . . . . . | | 0,56 | KÖNIGSBERGER |
| Monobromnaphthalin . . . | | 0,9 | KÖNIGSBERGER |
| Natriumchlorid . . . . . . | 1,109 | 0,828 | KÖNIGSBERGER |
| Natriumjodid . . . . . . | 1,126 | 0,840 | KÖNIGSBERGER |
| Nickelchlorür . . . . . . | 1,14 | + 4,9 | QUINCKE |
| | 2 g-M | + 9,44 | JÄGER und MEYER |
| Nickelnitrat . . . . . . . | 2,47 g-M | +10,6 | JÄGER und MEYER |
| Nickelsulfat . . . . . . . | 1,292 | + 8,8 | QUINCKE |
| | 1,92 g-M | + 6,9 | JÄGER und MEYER |
| | 2,35% | + 0 | KÖNIGSBERGER |
| | 12,3 % | + 3,89 | KÖNIGSBERGER |
| Paraffinöl . . . . . . . . | | 0,48 | KÖNIGSBERGER |
| Petroläther . . . . . . . | | 0,62 | KÖNIGSBERGER |
| Phosphor . . . . . . . . | | 1,64 | QUINCKE |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Platinchlorid . . . . . . . | 6% | 0,79 | KÖNIGSBERGER |
| Propylalkohol . . . . . | | 0,66 | HENRICHSEN |
| Quecksilber . . . . . . . | | 2,6<br>2,05 | QUINCKE<br>MEYER |
| Rapsöl . . . . . . . . . | | 0,77 | QUINCKE |
| Sauerstoff, flüssig . . . . | | +324 | FLEMING und DEWAR |
| Schwefelkohlenstoff . . . . | | 0,75<br>0,816<br>0,77<br>0,77 | QUINCKE<br>DU BOIS<br>KÖNIGSBERGER<br>HENRICHSEN |
| Salpetersäure . . . . . . | 1,387<br>1,147 | 0,70<br>0,74 | QUINCKE<br>KÖNIGSBERGER |
| Salzsäure . . . . . . . . | 1,165<br>1,137 | 0,82<br>0,78 | QUINCKE<br>KÖNIGSBERGER |
| Schwefelsäure . . . . . . | 1,833<br>1,828 | 0,82<br>0,83 | QUINCKE<br>KÖNIGSBERGER |
| Silberchlorid in $NH_3$ . . . | 10% | 0,765 | KÖNIGSBERGER |
| Steinöl . . . . . . . . | | 0,72<br>0,33 | QUINCKE<br>KÖNIGSBERGER |
| Terpentinöl . . . . . . . | | 0,69 | QUINCKE |
| THOULETsche Lösung . . . | 1,552<br>3,164 | 0,93<br>1,21 | KÖNIGSBERGER<br>KÖNIGSBERGER |
| Wasser . . . . . . . . . <br>Die Zahlen für Wasser beziehen sich nicht, wie die meisten anderen, auf Luft als Umgebung, sondern auf das Vakuum; gegen Luft ist 0,023 hinzuzufügen, so daß 0,804 (KÖNIGSBERGER) herauskommt. | | 0,84<br>0,75<br>0,77<br>0,837<br>0,79<br>0,781<br>0,689<br>0,732<br>0,77<br>Mittel } 0,78 | QUINCKE<br>HENRICHSEN<br>TOWNSEND<br>DU BOIS<br>CURIE<br>KÖNIGSBERGER<br>JÄGER und MEYER<br>STEARNS<br>PIAGGESI |
| Wasserstoffsuperoxyd in Wasser | 1,006 | 0,81 | KÖNIGSBERGER |
| Wismutnitrat . . . . . . . | 1,625 | 0,89 | QUINCKE |
| Xylol . . . . . . . . . | | 0,69 | KÖNIGSBERGER |
| Zinkchlorid . . . . . . . | 15% | 0,857 | KÖNIGSBERGER |
| Zinksulfat . . . . . . . . | 1,44 | 0,92 | QUINCKE |
| Zinnchlorid . . . . . . . | 1,856 | 0,92 | QUINCKE |
| Zinnchlorür . . . . . . . | 1,465 | 0,74 | QUINCKE |

Eine ins einzelne gehende Kritik dieser Tabelle muß unterbleiben. Nur in bezug auf zwei Gruppen von Stoffen ist eine kurze Bemerkung zu machen. Die Zahlen für die Eisensalze, namentlich für Eisenchlorid, das man früher gern zur Basis nahm, differieren recht beträchtlich; und selbst wenn man die Reduktion auf eine sehr genau definierte Konzentration ausführt, erhält man noch kein be-

friedigendes Resultat. In noch weit höherem Maße ist das bei Nickelsalzen, z. B. bei Nickelsulfat der Fall; hier hat die Konzentration einen — nach früheren Erfahrungen übrigens nicht auffallenden (vgl. S. 242) — kolossalen Einfluß. — Andererseits gibt es eine Gruppe von Stoffen, für die man die absoluten Werte gegenwärtig bis auf etwa 1% als gesichert ansehen darf, so daß man sich auf sie als Basis beziehen kann: Wasser, Äther, Alkohol und Schwefelkohlenstoff; die Mittelwerte sind:

| Wasser | Äther | Alkohol | Schwefelkohlenstoff |
|---|---|---|---|
| 0,78 | 0,625 | 0,685 | 0,77 , |

alles natürlich negativ und mit $10^{-6}$ zu multiplizieren.

## III. Gase.

Absolute Bestimmungen sind für Gase, von den Torsionsmessungen SCHUHMEISTERS[1] abgesehen, ausschließlich nach QUINCKES manometrischer Methode ausgeführt worden, und zwar von QUINCKE[2] selbst, von TÖPLER und HENNIG[3] und von H. E. J. G. DU BOIS[4]. Die Anwendung der Methode auf Gase erfolgt am einfachsten derart, daß eine in das Manometer oder in die U-Röhre gebrachte Flüssigkeit mit verschiedenen Gasen umgeben wird; zur Kontrolle wird man natürlich nacheinander verschiedene Flüssigkeiten wählen. TÖPLER modifizierte die Anordnung, indem er eine in der Mitte schwach geknickte Glasröhre benutzte, an die Knickstelle die Flüssigkeit brachte und sich auf diese Weise eine Art von magnetischer Libelle verschaffte — eine Anordnung, die sich durch Empfindlichkeit und Freiheit von einigen Fehlerquellen auszeichnet. Die bei der manometrischen Methode sich direkt ergebende Konstante $Q$ führt durch Multiplikation mit $2g$, also mit 1962, zur Suszeptibilität $\varkappa$. Die TÖPLERschen Zahlen fußen insofern auf den QUINCKEschen Messungen an Flüssigkeiten, als zur Berechnung der Feldstärke die QUINCKEsche Zahl für Eisenchloridlösung benutzt wurde. Beim Vergleichen der QUINCKEschen und der TÖPLERschen Zahlen ist zu beachten, daß die letzteren Differenzwerte gegen Luft, die ersteren absolute Werte gegen den leeren Raum sind. Mit Rücksicht hierauf stimmen die Resultate dem Vorzeichen nach insoweit überein, als sich alle Gase außer Sauerstoff und Stickoxyd gegen Luft diamagnetisch verhalten; dagegen sind sie gegen den leeren Raum nach QUINCKE sämtlich magnetisch, während nach TÖPLER und HENNIG, wenigstens wenn man den QUINCKEschen Wert für Luft benutzt, Kohlensäure, Stickstoff, Wasserstoff, Schwefelkohlenstoff und Cyan schwach diamagnetisch sein würden. In quantitativer Hinsicht ist die Übereinstimmung nur zum Teil einigermaßen befriedigend, wie die folgenden Zahlen zeigen. (Die $Q$-Werte von TÖPLER und HENNIG müßten, um mit den QUINCKEschen vergleichbar zu werden, um eine Zahl vergrößert werden, die nach QUINCKE 0,163 ist, von TÖPLER und HENNIG aber nicht angegeben ist, weshalb die Umrechnung besser unterbleibt).

| Stoff | QUINCKE | | TÖPLER u. HENNIG | | DU BOIS |
|---|---|---|---|---|---|
| | $Q \cdot 10^{10}$ | $\varkappa \cdot 10^{6}$ | $Q \cdot 10^{10}$ | $\varkappa \cdot 10^{6}$ | $\varkappa \cdot 10^{6}$ |
| Sauerstoff | 0,7993 | 0,157 | 0,662 | 0,129 | 0,117 |
| Stickoxyd | 0,271 | 0,053 | 0,120 | 0,024 | — |
| Luft | 0,1626 | 0,032 | — | — | 0,024 |
| Stickoxydul | 0,0159 | 0,0031 | −0,158 | −0,031 | |
| Kohlensäure | 0,0146 | 0,0029 | −0,172 | −0,034 | |

[1] SCHUHMEISTER, Wien. Ber. **83**. (2) 45. 1881. — [2] G. QUINCKE, Wied. Ann. **34**. 401. 1888. — [3] A. TÖPLER und . HENNIG, Wied. Ann. **34**. S. 790. 1888. — [4] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. S. 137. 1888.

| Stoff | QUINCKE | | TÖPLER u. HENNIG | | DU BOIS |
|---|---|---|---|---|---|
| | $Q \cdot 10^{10}$ | $\varkappa \cdot 10^6$ | $Q \cdot 10^{10}$ | $\varkappa \cdot 10^6$ | $\varkappa \cdot 10^6$ |
| Elayl | 0,0129 | 0,0025 | — | — | |
| Sumpfgas | 0,0058 | 0,0011 | — | — | |
| Stickstoff | 0,0046 | 0,0009 | −0,165 | −0,032 | |
| Wasserstoff | 0,0015 | 0,0003 | −0,176 | −0,034 | |
| Kohlenoxyd | — | — | −0,132 | −0,026 | |
| Schwefelwasserstoff | — | — | −0,175 | −0,034 | |
| Cyan | — | — | −0,183 | −0,036 | |
| Leuchtgas | — | — | −0,150 | −0,029 | |

Später hat HENNIG[1] den Sauerstoff noch besonders sorgfältig untersucht und bei 25° $\varkappa \cdot 10^6 = 0{,}096$ gegen Luft, also $\varkappa \cdot 10^6 = 0{,}120$ gegen das Vakuum gefunden.

Hierzu kommen noch einige relative Bestimmungen. Zunächst die hier folgenden älteren von E. BECQUEREL (1851 und 1855, Mittelwerte) und FARADAY (1853), die auf Wasser gleich −1 bezogen sind und teils durch Torsions-, teils durch Wägungsversuche gefunden wurden. (Die Umrechnung in absolute Zahlen fällt beträchtlich verschieden aus, je nachdem man dabei, wie DU BOIS, den absoluten Wert für Wismut oder den DU BOISschen absoluten Wert für Wasser benutzt).

| Stoff | BECQUEREL | FARADAY |
|---|---|---|
| Sauerstoff | 0,181 | 0,175 |
| Stickoxyd | 0,0498 | — |
| Luft | 0,038 | 0,034 |
| Elayl | — | 0,006 |
| Kohlensäure | 0 | 0 |
| Stickstoff | 0 | 0,003 |
| Wasserstoff | 0 | 0? |

Ferner einige neuere Zahlen von EFIMOFF[2], im wesentlichen nach der BECQUERELschen Methode gewonnen und gegen den leeren Raum zu verstehen; als Einheit dient der Wert für Luft:

| O | NO | Luft | $C_2H_4$ | $CH_4$ | $CO_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| +4,83 | +1,60 | +1 | −0,068 | −0,063 | −0,033 |
| | $N_2O$ | N | CO | H | |
| | −0,018 | −0,015 | −0,009 | −0,002 (?) | . |

Diese Zahlen stimmen mit den TÖPLERschen besser als mit den QUINCKEschen überein; man vergleiche im übrigen die Einwände von GOLDHAMMER[3] und die Entgegnung von EFIMOFF[4].

Endlich eine Angabe CURIES[5], wonach der Sauerstoff 145 mal so magnetisch wie die gleiche Masse Wasser ist.

**Abhängigkeit vom Druck der Gase.** Schon die Versuche von PLÜCKER[6] und BECQUEREL[7] hatten es wahrscheinlich gemacht, daß der Magnetismus mit dem Drucke proportional ist, und die neueren Untersuchungen, besonders von

[1] R. HENNIG, Wied. Ann. **50**. S. 485. 1893. — [2] A. EFIMOFF, J. d. phys. (2) **7**. S. 494. 1888; J. soc. russe **20**; Beibl. **13**. S. 240. 1889. — [3] D. GOLDHAMMER, Beibl. **14**. S. 304. 1890. — [4] A. EFIMOFF, Beibl. **14**. S. 1160. 1890. — [5] P. CURIE, Compt. rend. **115**. S. 1292. 1892. — [6] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **83**. S. 87 und **84**. S. 161. 1851. — [7] E. BECQUEREL, Ann. chim. phys. **44**. S. 209. 1855.

QUINCKE[1] haben dies bestätigt, wenigstens für nicht zu kleine Drucke. Da ferner anzunehmen ist, daß die Magnetismen sich in Gemischen chemisch indifferenter Gase einfach addieren, so muß zwischen den Magnetismen von Sauerstoff, Stickstoff und Luft eine bestimmte Beziehung bestehen, es müssen sich nämlich die TÖPLERschen Zahlen für Sauerstoff und Stickstoff wie 79 : 21, d. h. wie 3,8 : 1 verhalten, womit das wirkliche Verhältnis 4,0 nahezu übereinstimmt[2]. Da der Magnetismus des Stickstoffs übrigens sehr klein ist, muß der der Luft gegen den leeren Raum etwa $^1/_5$ von dem des Sauerstoffs betragen, was tatsächlich der Fall ist.

## Chemische Beziehungen.

Nachdem man die Magnetisierungskonstanten zahlreicher Elemente und Verbindungen festgestellt hatte, erhob sich sofort die Frage nach den chemischen Beziehungen, durch die allein man hoffen konnte, einige Übersicht in das Material zu bringen. Das wichtigste, was in dieser Hinsicht bisher erzielt wurde, sei hier kurz zusammengestellt.

**Periodisches System der Elemente.** Hierüber ist schon oben (S. 263) eine Bemerkung gemacht worden. Etwas genauer hat ST. MEYER[3] die Frage studiert und zwar an der Hand der bekannten LOTHAR MEYERschen Kurve, die ihren Urheber[4] seinerzeit schon selbst zu bezüglichen Ideen über den Zusammenhang der Suszeptibilität mit dem Atomgewicht und folglich mit dem Atomvolumen gebracht hatte. Ein Blick auf die von ST. MEYER gezeichnete Kurve zeigt nun sofort folgendes: Die ferro- und paramagnetischen Stoffe liegen in allen Buchten links vom tiefsten Punkte, und zwar

in der 1. Bucht: Be, B,
in der 2. Bucht: Mg, Al (Si schon etwas rechts),
in der 3. Bucht: Ti, V, Cr, Mn, Fe, Ni, Co,
in der 4. Bucht: Nb, Mo, Ru (Rh und Pd schon etwas rechts),
in der 5. Bucht: La, Ce, Nd,
in der 6. Bucht; Ta, W, Os, Ir, Pt (letzteres schon etwas rechts),
in der 7. Bucht: Th, U.

Eine Ausnahme bildet der Sauerstoff, der (s. w. u.) an sich magnetisch ist und doch am rechten Hange liegt; es ist aber anzuführen, daß er sich in seinen festen und flüssigen Verbindungen wie ein diamagnetischer Stoff verhält. — Andererseits entsprechen die Stellen großen Atomvolumens, also die Gipfel der Kurve, und die rechten Hänge der Buchten den diamagnetischen Stoffen; es besteht also zwischen beiden Eigenschaften sozusagen eine Phasenverschiebung. Auf die weiteren Einzelheiten kann nicht eingegangen werden, nur sei noch auf einen Aufsatz von ERRERA[5] hingewiesen.

**Lösungen.** Bei Lösungen erhebt sich ferner die Frage, welchen Einfluß die Konzentration ausübt, und wie es mit verschiedenen Lösungsmitteln steht. In erster Hinsicht seien zunächst zwei Versuchsreihen von QUINCKE[6] angeführt:

Manganchlorür verschiedener Konzentration nach QUINCKE.

| spez. Gew. $s$ | $Q \cdot 10^{10}$ | $Q' \cdot 10^{10}$ | $\frac{Q'}{s-1} \cdot 10^9$ |
|---|---|---|---|
| 1,0357 | 25,6 | 29,9 | 84 |
| 1,1209 | 95,0 | 99,3 | 82 |
| 1,1739 | 140,0 | 144,3 | 83 |
| 1,2992 | 249,6 | 253,9 | 85 |
| 1,3339 | 281,8 | 286,1 | 86 |

[1] G. QUINCKE, Wied. Ann. **34**. S. 401. 1888. — [2] A. TÖPLER und R. HENNIG, Wied. Ann. **34**. S. 797. 1888. — [3] ST. MEYER, Wied. Ann. **69**. 261. 1899. — [4] LOTHAR MEYER, Die Atome und ihre Eigenschaften. 6. Aufl. — [5] L. ERRERA, Bull. Ac. Belg. 1900. 152. — [6] G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. 347. 1885.

Eisenchloridlösung verschiedener Konzentration nach WÄHNER.

| spez. Gew. $s$ | $\varkappa \cdot 10^6$ | $\varkappa' \cdot 10^6$ | $\frac{\varkappa'}{s-1} \cdot 16^6$ |
|---|---|---|---|
| 1,1325 | 10,21 | 10,75 | 81 |
| 1,1640 | 13,08 | 13,62 | 83 |
| 1,3132 | 26,35 | 26,89 | 86 |
| 1,3751 | 31,89 | 32,43 | 87 |
| 1,4345 | 37,63 | 38,17 | 87 |

Hierin bedeutet $Q'$ resp. $\varkappa'$ den um den entsprechenden Wert für Wasser verminderten (in Wahrheit wegen des negativen Vorzeichens vermehrten) Wert von $Q$ resp. $\varkappa$, also gewissermaßen den Wert dieser Konstanten für das Salz selbst; die dabei benutzte einfache Superposition der Magnetismen ist bei ihrer Kleinheit und dem damit verknüpften Fehlen innerer Wechselwirkungen jedenfalls gestattet. Die Zahlen der letzten Spalte zeigen dann, daß der Magnetismus des Salzes mit seiner Dichte — genauer noch mit dem Prozentgehalte der Lösung — proportional ist. Eine sehr exakte Bestätigung hat neuerdings ST. MEYER[1] für Vanadiumchlorid geliefert.

Da das Wasser an sich diamagnetisch ist, so muß es möglich sein, Lösungen magnetischer Salze herzustellen, die unmagnetisch oder „magnetisch inaktiv" sind, ein Gedanke, den DU BOIS[2] für die beiden hier folgenden Fälle verwirklicht hat:

| Manganchlorür | | Cerchlorid | |
|---|---|---|---|
| $s$ | $\varkappa \cdot 10^6$ | $s$ | $\varkappa \cdot 10^6$ |
| 0,9992 | −0,837 | 0,9992 | −0,837 |
| 1,0010 | −0,418 | 1,0529 | −0,215 |
| 1,0028 | −0,127 | 1,0748 | 0,000 |
| 1,0040 | 0,000 | 1,1565 | +0,950 |
| 1,0054 | +0,182 | 1,2165 | +1,596 |
| 1,0087 | +0,578 | 1,2697 | +2,175 |
| 1,0445 | +6,819 | 1,5229 | +4,877 |

Bei Manganchlorür tritt also die Indifferenz bei $s = 1{,}0040$, bei Cerchlorid bei $s = 1{,}0748$ ein; weitere Zahlen sind folgende, wobei zu bemerken ist, daß das Gas, gegenüber dem als Umgebung die Zahlen gelten, Leuchtgas ist:

| | |
|---|---|
| Eisenchlorid | 1,0066 |
| Nickelchlorür | 1,0183 |
| Kupferchlorid | 1,0520 |
| Ferricyankalium | 1,0513 |

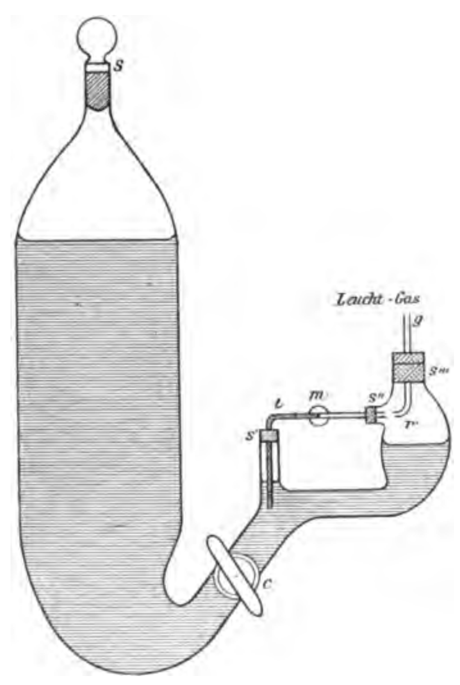
LIEBKNECHT und WILLS[3] haben die Frage weiter verfolgt und einen Apparat konstruiert, mit Hilfe dessen man unmagnetische Lösungen sehr genau feststellen kann. In Figur 126 ist er abgebildet; man sieht das große Verdünnungsgefäß, zwischen den Stopfen $s'$ und $s''$ befindet sich das Kapillarrohr $t$, der Meniskus liegt gerade zwischen den Polen des erregenden Ringmagneten, von denen der hintere $m$ angedeutet ist; als Nachbarmedium dient das so gut wie unmagnetisierbare Leuchtgas. Bei para- oder diamagnetischen Lösungen verschiebt sich der Meniskus nach der einen oder anderen Seite, bei inaktiven bleibt er stehen, und

[1] ST. MEYER, Drude Ann. 1. 664. 1900. — [2] H. DU BOIS, Wied. Ann. 35. 154. 1888. — [3] O. LIEBKNECHT u. A. P. WILLS, Drude Ann. 1. 178. 1900.

man kann, bei sehr geringer Neigung des Rohres gegen die Horizontale noch Suszeptibilitäten nachweisen, die nur $^1/_{100\,000}$ von der des Wassers betragen. — Auf die Untersuchungen von LIEBKNECHT und WILLS wird noch an anderer Stelle zurückzukommen sein.

Nicht so einfach liegen die Verhältnisse beim Vergleichen von Lösungen desselben Salzes in verschiedenen Lösungsmitteln, zumal da hierbei jedenfalls die Volumenänderungen und anderes eine Rolle spielt. Demgemäß findet man z. B. für die Quotienten $(Q - Q_0)/(s - s_0)$ bzw. $(\varkappa - \varkappa_0)/(s - s_0)$, wo $Q_0$ bzw. $\varkappa_0$, und $s_0$ sich auf das Lösungsmittel beziehen, voneinander abweichende Zahlen, z. B. für Eisenchlorid nach QUINCKE (a. a. O. S. 385):

| in Wasser | in Salzsäure | in Methylalkohol |
|---|---|---|
| 62 bis 65 | 86 bis 96 | 50 bis 56. |




Figur 126.

In diese Verhältnisse hat zuerst G. WIEDEMANN[1] Klarheit gebracht, indem er folgende Sätze aufstellte, die sich in der Folge mindestens als Leitsätze und als erste Annäherungen bewährt haben: Der spezifische Magnetismus einer Lösung ist proportional der darin aufgelösten Gewichtsmenge des magnetischen Salzes. Bei verschiedenen Lösungsmitteln gilt dies, falls keine Dissoziation, Volumenänderung oder andere außergewöhnliche Erscheinung auftritt, ebenfalls, und der spezifische Magnetismus ist alsdann von dem Lösungsmittel unabhängig.

In neuerer Zeit ist, namentlich von KÖNIGSBERGER[2], gezeigt worden, wie sich dieser Satz, besonders sein erster Teil, verallgemeinern und begründen läßt; er gelangt zu der Gleichung für den spezifischen Magnetismus $S$ ($= \varkappa/s$, wo $s$ das spezifische Gewicht):

$$S = m_0 S_0 + m_1 S_1 \quad ,$$

wo $m_0$ und $m_1$ die Anteile des Lösungsmittels und der gelösten Substanz am Ganzen ($m_0 + m_1 = 1$) sind, $S_0$ der spezifische Magnetismus des Lösungsmittels und $S_1$ eine Konstante ist, deren Deutung als spezifischer Magnetismus des festen Salzes naheliegt, aber nicht notwendig richtig zu sein braucht. Man sieht, daß der erste Teil des WIEDEMANNschen Satzes nur für stark magnetische Salze streng richtig ist, daß dagegen für schwach magnetische oder diamagnetische Stoffe sich Abweichungen ergeben werden. So fand KÖNIGSBERGER für Lösungen in Wasser (für die $S_0 = -0{,}80$ zu setzen ist) für $S_1$ folgende Werte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kupfersulfat | 10,4 | Chlorcalcium | —0,45 |
| Kupferchlorid | 12,6 | Chlornatrium | —0,45 |
| Eisenoxydulsulfat | 75,0 | Chlorkalium | —0,47 |
| Nickelsulfat | 32,7 | Jodkalium | —0,47 |
| Eisenchlorid | 91,8 | Jodbarium | —0,43 |

[1] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **126**. 1. 1865; **135**. 177. 1868. — Progr. Univ. Leipzig 1876. — Wied. Ann. **5**. 45. 1878; **32**. 452. 1887. — Diese Zitate gelten zum Teil auch für das Folgende. — [2] J. KÖNIGSBERGER, Wied. Ann. **66**. 707. 1898.

Die Werte für die rechts stehenden diamagnetischen Salze stimmen mit den direkt gemessenen überein, der Schluß von der Lösung auf das feste Salz ist also hier erlaubt; dagegen ergeben sich bei den links stehenden magnetischen Salzen sehr erhebliche Differenzen.

Weitere Beziehungen für Lösungen liefert die thermodynamische Theorie DUHEMS[1], so eine Beziehung zwischen den Dampfspannungen einer Lösung eines magnetischen Salzes innerhalb und außerhalb des Feldes; eine Beziehung, die auch KÖNIGSBERGER[2] untersucht hat; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

Ganz kurz sei hier noch die Frage des Kristallwassers angeschlossen, worüber WIEDEMANN den Satz aufgestellt hat: Der Magnetismus der festen, mit Kristallwasser verbundenen Salze ist nahezu derselbe wie der der gelösten Salze; dagegen weicht er für die wasserfreien Salze mehr oder weniger ab. Man sieht, in welchem Zusammenhange dieser Satz mit den eben erwähnten Ergebnissen KÖNIGSBERGERS steht. Übrigens ist die Frage neuerdings auch von ST. MEYER[3] diskutiert worden, und zwar besonders auch der Gegensatz zwischen Kristall- und chemisch gebundenem Wasser.

**Verbindungen.** Geht man zu chemischen Verbindungen über, wobei zunächst wesentlich an binäre zu denken ist, so erhebt sich die Frage nach dem Einflusse der beiden Bestandteile auf den Magnetismus des Ganzen; und zwar einmal, was das Vorzeichen, und sodann, was den Wert selbst betrifft. In erster Hinsicht sind offenbar drei Fälle möglich, es können beide Teile diamagnetisch oder beide paramagnetisch oder sie können entgegengesetzt sein. Daß in der Regel eine Verbindung zweier gleichsinniger Teile dasselbe Vorzeichen hat, ist sicher; es fragt sich nur, ob es Ausnahmen gibt. Sicher zu bejahen ist diese Frage für Verbindungen zweier schwach paramagnetischer Teile, die diamagnetisch sein können; Beispiele sind nach ST. MEYER[4]

$$Be_2O_3\,,\quad MgO\,,\quad Al_2O_3\,,\quad SiO_2\,,\quad Mo_2O_3\,,\quad WO_3\,,\quad ThO_2\,,$$

also sämtlich Oxyde, was man natürlich auch so ausdrücken kann, daß der Sauerstoff in Verbindungen diamagnetisch macht. Dagegen hatte MEYER die Regel, die Verbindung zweier diamagnetischer Elemente sei stets diamagnetisch, als ausnahmslos erklärt und anscheinende Ausnahmen auf Verunreinigungen zurückführen zu sollen gemeint; KÖNIGSBERGER[5] stellt demgegenüber fest, daß es wirkliche Ausnahmen gibt, z. B. Kupfersulfat und Kupferchlorid.

Ferner frägt es sich, welcher von zwei entgegengesetzt magnetischen Bestandteilen einer Verbindung entscheidend für den Charakter dieser selbst sei. Es wird das natürlich sehr von den quantitativen Verhältnissen abhängen; bei gleicher Vertretung scheint das Metall häufig den Ausschlag zu geben; allgemeines läßt sich indessen hierüber, wie sich neuerdings gezeigt hat, nicht aussagen.

Was andererseits den Zahlenwert der Suszeptibilität oder des spezifischen Magnetismus betrifft, so sind wieder drei Fälle denkbar, es kann nämlich der Wert für das Ganze zwischen den Einzelwerten liegen, oder er kann mehr oder weniger genau mit dem einen von ihnen zusammenfallen, so daß der eine der beiden Bestandteile der wesentlich ausschlaggebende wäre, oder der Wert für das Ganze kann außerhalb des Bereichs der Einzelwerte liegen. Daß das letztere vorkommt, folgt ja schon aus den Angaben, die eben über die Vorzeichenverhältnisse gemacht wurden; aber auch bei gleichsinnigen Bestandteilen scheint es, und zwar sogar zuweilen in sehr hohem Maße, vorzukommen; denn es ist z. B. nicht anzunehmen, daß metallisches Erbium oder Neodym so stark magnetisch

---

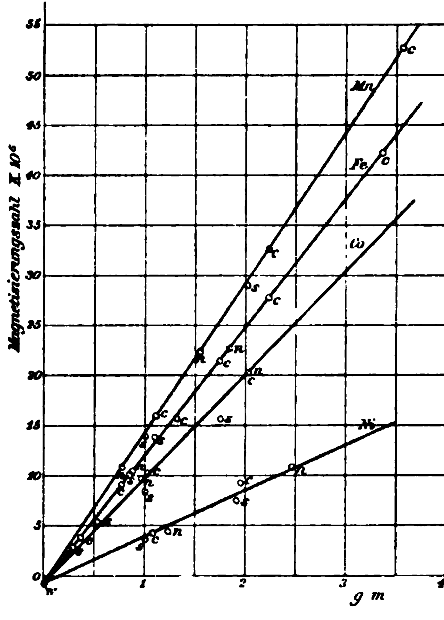
[1] P. DUHEM, Ann. Ec. norm. (3) **7**. 289. 1890. — [2] J. KÖNIGSBERGER, a. a. O. S. 709. — [3] ST. MEYER, Wied. Ann. **69**. 254. 1899. — [4] ST. MEYER, Wied. Ann. **69**. 247. 1899. — [5] J. KÖNIGSBERGER, Drude Ann. **1**. 175. 1900.

seien, wie es dem Magnetismus ihrer bisher allein untersuchten Salze entspräche[1]. So ist z. B. $Er_2O_3$ nach MEYER viermal so stark magnetisch wie $Fe_2O_3$.

Die beiden anderen Fälle scheinen gleich häufig vorzukommen, und es scheint eine stetige Reihe der Möglichkeiten zu existieren, von dem Grenzfalle aus, wo die Suszeptibilität eine additive Eigenschaft ist, bis zu dem anderen, wo die eine Komponente völlig gleichgültig ist. Ein typisches Beispiel für das letztere Verhalten bieten die Halogenverbindungen der Metalle

Li, Na, K, Ca, Sr, Ba,

bei ihnen ist es fast gleichgültig, ob die andere Komponente Cl, Br, J oder Fl ist; freilich ist hinzuzufügen, daß auch die genannten Metalle untereinander keine großen Unterschiede aufweisen; die kleine Zusammenstellung auf S. 276 (rechte Spalte) zeigt dies, deutlicher aber die ausführlichen Tabellen bei KÖNIGSBERGER[2]. Ferner haben G. JÄGER und ST. MEYER[3] Salze von Eisen, Kobalt, Nickel und Mangan untersucht, und zwar Chlorüre und Chloride, Sulfate und Nitrate, und gefunden, daß es bei gleicher Konzentration nur auf den Metallgehalt ankommt; mit anderen Worten: wenn man als Abszissen den Gehalt an Gramm-Molekeln, als Ordinaten die Suszeptibilitäten einträgt, so erhält man für jedes Metall nur eine einzige gerade Linie. Die Figur 127 veranschaulicht das sehr deutlich; *c* bedeutet Chlorid, *s* Sulfat, *n* Nitrat.




Figur 127.

Die weiteren Betrachtungen knüpfen sich besser an die Begriffe des Molekular- und Atommagnetismus an.

**Molekular- und Atommagnetismus.** Bisher wurde die Magnetisierung und die Suszeptibilität meist auf die Einheit des Volumens oder des Gewichtes bezogen. Man wird aber erwarten dürfen, neue Einblicke in die chemischen Beziehungen zu gewinnen, wenn man statt dessen den Magnetismus bzw. die Suszeptibilität der Molekel oder des Atoms einführt: zur klaren Unterscheidung sollen die alten und die neuen Größen folgendermaßen bezeichnet werden:

für die Volumeneinheit . . . $\mathfrak{J}$ . . . $\varkappa$ ,
für die Masseneinheit . . . $\mathfrak{J}'$ . . . $\varkappa'$ ,
für die Molekel . . . . . $\mathfrak{J}_m$ . . . $\varkappa_m$ ,
für das Atom . . . . . . . $\mathfrak{J}_a$ . . . $\varkappa_a$ ,

und es gelten dann folgende einfache Beziehungen, wenn $d$ das spezifische Gewicht und $m$ bzw. $a$ Molekulargewicht bzw. Atomgewicht bedeuten:

$$\mathfrak{J}' = \frac{\mathfrak{J}}{d}\,, \quad \mathfrak{J}_m = \frac{m}{d}\mathfrak{J} = m\,\mathfrak{J}'\,, \quad \mathfrak{J}_a = \frac{a}{d}\mathfrak{J} = a\,\mathfrak{J}'\,,$$

$$\varkappa' = \frac{\varkappa}{d}\,, \quad \varkappa_m = \frac{m}{d}\varkappa = m\,\varkappa'\,, \quad \varkappa_a = \frac{a}{d}\varkappa = a\ .$$

[1] Man vergleiche hierzu die Bemerkungen von ST. MEYER, Wied. Ann. **69**. 247 u. f., wo die Meinung vertreten wird, daß reines Erbiummetall allerdings voraussichtlich kolossal magnetisch sein würde. — [2] J. KÖNIGSBERGER, Wied. Ann. **66**. 713. 1898. — [3] G. JÄGER und ST. MEYER, Wied. Ann. **63**. 83. 1897.

Hiernach kann man mit Leichtigkeit den Atommagnetismus der Elemente oder den Molekularmagnetismus von Verbindungen angeben. Bei Lösungen ergibt sich der letztere (in bestimmtem Maße) natürlich direkt, wenn man, wie das z. B. JÄGER und MEYER tun, den Gehalt in Gramm-Molekeln angibt. Übrigens ist zu beachten, daß in obigen Formeln $d$ keine Konstante ist, sondern sich mit der Temperatur und, auch bei konstanter Temperatur, mit Rücksicht auf die Erscheinung der Magnetostriktion (s. w. u.) mit dem Grade der Magnetisierung ändert, wodurch sich das Verhältnis zwischen $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_m$ und $\mathfrak{J}_a$ merklich verschieben kann.

Dabei besteht zwischen den Angaben verschiedener Autoren eine Differenz, insofern z. B. KÖNIGSBERGER ein Grammatom im Kubikzentimeter, ST. MEYER im Liter nimmt; das erstere ist bequemer und entspricht dem absoluten Maßstabe, es ist daher vorzuziehen; die obigen Formeln sind dann ohne weiteres anwendbar[1].

Zunächst ist auch hier G. WIEDEMANN mit seinen Arbeiten zu nennen. Die wichtigsten Sätze, zu denen er gelangt ist, sind folgende:

1. Der Molekularmagnetismus der analog zusammengesetzten gelösten Salze desselben Metalls mit verschiedenen Säuren ist nahezu der gleiche (z. B. der von schwefelsaurem, salpetersaurem Nickeloxydul und Nickelchlorür 1426, 1433, 1400 in willkürlicher Einheit, für schwefelsaures, salpetersaures Eisenoxydul und Eisenchlorür 3900, 3861, 3858, für schwefelsaures, salpetersaures, essigsaures Manganoxydul und Manganchlorür 4695, 4693, 4586, 4700 usw.). 2. Dagegen ist der Molekularmagnetismus z. B. der Eisenoxyd- und Eisenoxydulsalze sehr verschieden. 3. Der Magnetismus einer binären Verbindung ist gleich der Summe der Magnetismen der Bestandteile in ihrem jedesmaligen besonderen Zustande, und diese Bestandteile behalten beim Eingehen anderer binärer, mit Konstitutionsänderung nicht verknüpfter Verbindungen ihren Magnetismus ungeändert bei. 4. Dagegen ändert sich der Molekularmagnetismus im allgemeinen mit der Konstitutionsänderung, und zwar sogar dem Vorzeichen nach (z. B. sind die Kupferoxydsalze stark paramagnetisch, die Kupferoxydulsalze stark diamagnetisch); es kann auf diese Weise sogar ein diamagnetisches Metall (z. B. Kupfer) mit einem diamagnetischen Element (z. B. Brom) eine magnetische Verbindung (Kupferbromid) liefern. 5. Der Molekularmagnetismus der meisten Oxydhydrate weicht von dem der entsprechenden Salze in ihren Lösungen nur wenig ab; der Magnetismus der kolloid gelösten Oxyde und der geglühten Oxyde ist hingegen sehr viel kleiner (z. B. der des kolloid gelösten Eisenoxyds nur $^1/_5$ von dem der Eisenoxydsalze, der des geglühten Eisenoxyds sogar nur $^1/_8$).

Von den von HENRICHSEN[2] aus seinen Messungen abgeleiteten und zunächst wohl nur für die, allerdings sehr zahlreichen von ihm untersuchten Körper gültigen Sätzen seien folgende angeführt: 1. Der Molekularmagnetismus der normalen primären, sekundären und der Isoalkohole ist derselbe, und das Analoge gilt für die Aldehyde, Säuren und Ester. 2. Ganz allgemein ist innerhalb der bisher beobachteten Reihen von Körpern der Molekularmagnetismus derselbe für alle isomeren und metameren Körper. Die empirische Formel ist also für den Molekularmagnetismus bestimmend, die Konstitution gleichgültig (vgl. hierzu w. u.). 3. Der Molekularmagnetismus hängt von der Bindungsweise der Atome ab; eine doppelte Bindung scheint ihn zu vermindern.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und aus dem Molekularmagnetismus den Atommagnetismus ableiten. WIEDEMANN[3] (und im Anschlusse an ihn auch QUINCKE) macht dabei die vereinfachende Annahme, daß der

[1] Nähere Angaben bei den früher genannten Autoren, namentlich bei J. KÖNIGSBERGER (Wied. Ann. **66**) und ST. MEYER (Wied. Ann. **63**, **68**, **69**; Drude Ann. **1**). Die Zahlen von ST. MEYER weisen übrigens vielfache Widersprüche auf, indem die $\varkappa$ und $\varkappa_m$ einander nicht entsprechen. — [2] HENRICHSEN, Wied. Ann. **34**. 207. 1888. — [3] G. WIEDEMANN, a. a. O. Vgl. Elektrizität **3**. 852.



Magnetismus eines Salzes ausschließlich dem „Kation" resp. dem Metalle in ihm zuzuschreiben sei, und bezeichnet demgemäß den Magnetismus der ein Atom Metall enthaltenden Salzmenge als Atommagnetismus des betreffenden Metalls in dem Salze. Es ergeben sich dann z. B. folgende Zahlen, deren zweite die Vergleichungseinheit ist.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Salze des Manganoxyduls | 100,4 | | Salze des Nickeloxyduls | 30,5 |
| „ „ Eisenoxyds | 100,0 | | „ „ Didymoxyds | 22,6 |
| „ „ Eisenoxyduls | 83,1 | | „ „ Kupferoxyds | 10,8 |
| „ „ Kobaltoxyduls | 67,2 | | „ „ Ceroxyds | 10,3 |
| „ „ Chromoxyds | 41,9 | | | |

Der Atommagnetismus des Eisens ist also in den Oxydsalzen und in den Oxydulsalzen nicht unwesentlich verschieden. Dagegen hat er im allgemeinen bei gleichen chemischen Eigenschaften des Metallatoms in der Molekel verschiedener Verbindungen denselben Wert. Auch QUINCKE[1] hat aus seinen manometrischen Messungen für zahlreiche Stoffe den Atommagnetismus des in ihnen enthaltenen Metalls nach einer einfachen Formel berechnet. Er beträgt z. B. in hier nicht näher zu erörternder Einheit bei:

| | | |
|---|---|---|
| Mangan | 7,8 bis 9,1 | (im Sulfat und Chlorür), |
| Eisen | 6,1 „ 8,2 | (im Sulfat, Chlorid und Chlorür), |
| Kobalt | 5,7 „ 6,1 | (im Sulfat und Chlorür), |
| Nickel | 2,5 „ 2,9 | ( „ „ „ „ ), |
| Chrom | 2,7 „ 4,1 | (im Alaun, Chlorid und Chlorür), |
| Cer | 2,8 | (im Sulfat), |
| Kupfer | 0,8 bis 0,9 | ( „ „ ), |
| Zinn | —0,04 „ —0,07 | (im Chlorür und Chlorid), |
| Quecksilber | —0,02 | |
| Magnesium | —0,05 | (im Sulfat), |
| Wismut | —0,12 | (im Nitrat). |

Wie man sieht, variiert der Atommagnetismus eines Metalles in verschiedenen Verbindungen zwischen nicht unerheblich voneinander abweichenden Grenzen; es lassen sich aber hieran keine weiteren Betrachtungen knüpfen, weil man nicht weiß, inwieweit dieses Verhalten auf besonderen molekularen Verhältnissen beruht und inwieweit es der Fehlerhaftigkeit der Annahme zuzuschreiben ist, daß der Magnetismus der nicht metallischen Bestandteile gegen den der metallischen zu vernachlässigen sei. Im übrigen stimmen die für einzelne Verbindungen gültigen QUINCKEschen Zahlen mit den WIEDEMANNschen recht gut überein, d. h. sie sind ihnen nahezu proportional.

Schließlich ist noch eine spezielle Angabe WIEDEMANNS zu erwähnen, weil später wiederholt an sie angeknüpft worden ist; es sollen nämlich die Atommagnetismen von Ni, Co, Fe, Mn die Proportion bilden:

$$a : a + b : a + \tfrac{3}{2} b : a + 2b \quad .$$

HENRICHSEN[2] greift das Problem des Atommagnetismus ohne vernachlässigende Annahmen an; er findet zunächst, daß die Gruppe $CH_2$ in den zahlreichen, von ihm untersuchten Flüssigkeiten nahezu den gleichen Beitrag zum Molekularmagnetismus liefert, wie sich durch Vergleichung der verschiedenen Körper einer Gruppe ergibt; so ergeben z. B. die Alkohole die folgenden Molekularmagnetismen $\mu$ und deren Differenzen $\delta$ mit der folgenden Zahl:

[1] G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. 392. 1885. — [2] S. HENRICHSEN, Wied. Ann. **34**. 209. 1888.

| Stoff | $\mu$ | $\delta$ | Stoff | $\mu$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Methylalkohol . . . . | 307 | 166 | Isobutylalkohol . . . | 806 | 155 |
| Äthylalkohol . . . . . | 473 | 166 | Amylalkohol . . . . . | 961 | $2 \times 164$ |
| Propylalkohol . . . . | 639 | 167 | Heptylalkohol . . . . | 1288 | |

Ähnlich ergeben die Säuren Zahlen zwischen 154 und 169, die Aldehyde 157 bis 166, die Ester 143 bis 177, die Chloride 151 bis 168, die Bromide 157 bis 178, die Jodide 147 bis 166, die Sulfide 159 bis 164. Der wahrscheinliche Fehler des Mittels dieser Zahlen beträgt nur etwa 3%, und man kann somit den für alle untersuchten Verbindungen gültigen Satz aufstellen: Für jedes $CH_2$, das in die Formel eines Körpers eingeführt wird, steigt der Molekularmagnetismus um 163, wenn der Volumenmagnetismus des Wassers gleich 10 gesetzt wird (beides negativ). Hält man sich nun zunächst an die Verbindungen, die nur C, O und H enthalten, also an die 1. Alkohole, 2. Aldehyde, 3. Säuren und Ester, und nimmt man den bekannten Wert für $CH_2$ hinzu, so hat man vier Gleichungen und kann folglich die Atommagnetismen von C, H (diese beiden überall als gleichwertig angesehen), von O′ (einfach gebunden) und O″ (zweifach gebunden) ermitteln; die übrigen Verbindungen liefern dann auch die Zahlen für die Halogene und Schwefel (für Stickstoff reichen die Beobachtungen nicht aus); dabei zeigt sich, daß man auch beim Kohlenstoff zwischen einfacher und doppelter Bindung unterscheiden muß, und daß die Atommagnetismen der Halogene ebenfalls von der Atomzahl abhängig sind — überall in dem Sinne einer Abnahme des Atommagnetismus mit wachsender Bindungs- resp. Atomzahl. Im folgenden sind die sich ergebenden Zahlen zusammengestellt.

| H | O′ | O″ | C′ | C″ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 129 | 17 | 145 | 98 |

| Cl′ | Cl″ | Cl‴ | Cl⁗ | Br′ | Br″ | Br‴ | J′ | J″ | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 282 | 249 | 218 | 194 | 413 | 374 | 334 | 642 | 577 | 284. |

O″ ist paramagnetisch, alle übrigen sind diamagnetisch.

Jäger und Meyer sowie St. Meyer allein[1] haben sich wiederholt mit den einschlägigen Fragen befaßt, und es kann aus den Schlüssen, die sie ziehen, folgendes hervorgehoben werden: Ob der Molekularmagnetismus einer Verbindung sich aus den Atommagnetismen der Bestandteile additiv zusammensetzt, hängt wesentlich davon ab, ob sich das Molekularvolumen aus den Atomvolumina additiv zusammensetzt; mit dem einen ist auch das andere, wenigstens annähernd, erfüllt. Dagegen hat Volumenkontraktion eine Steigerung des paramagnetischen, eine Volumendilatation Steigerung des diamagnetischen Charakters zur Folge. Bei den diamagnetischen Stoffen ist die additive Beziehung häufig gut erfüllt, z. B. bei

$$Cu_2S, \quad AgBr, \quad CdBr_2, \quad HgJ_2, \quad PbBr_2, \quad CdJ_2\,;$$

dagegen ist bei paramagnetischen Stoffen $\varkappa_m$ fast immer kleiner als die Summe der $\varkappa_a$, wofür als auffallende Beispiele die Oxyde der Gruppe

Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni

dienen. Bei alledem ist freilich zu bedenken, wie unsicher oft die Grundlagen der Berechnung sind; um nur ein Beispiel anzuführen, legt Meyer für Schwefel die Zahl $-0{,}43$ zugrunde, während für dieses Element $\varkappa$ nach den übereinstimmenden Ergebnissen aller anderen Forscher doppelt so groß ist.

In der Tat haben manche der Schlüsse dieser Autoren von seiten nachfolgender, namentlich Königsbeger, du Bois, Liebknecht und Wills Anfechtung erfahren. So findet z. B. Königsberger, daß der Atommagnetismus des Eisens

[1] G. Jäger u. St. Meyer, Wied. Ann. **63**. 83. 1897. — St. Meyer, Wied. Ann. **69**. 236. 1899; Drude Ann. **1**. 664 u. 668. 1900.

in den Lösungen der Oxydulsalze kleiner ist als in denen der Oxydsalze, was mit WIEDEMANN stimmt, aber mit JÄGER und MEYER (s. o.) im Widerspruch steht. Sehr merkwürdig ist auch das Verhalten des wasserhaltigen im Gegensatz zum wasserfreien Eisenvitriol; hier sieht sich KÖNIGSBERGER genötigt, sich in Gegensatz zu WIEDEMANN zu stellen. Auch für die Gläser (s. o. S. 267), bei denen es vermutlich im wesentlichen auf den Gehalt an Eisen- und Manganverbindungen ankommt, läßt sich über die Möglichkeit einer additiven Berechnung noch nichts bestimmtes sagen.

Ganz neuerdings haben nun DU BOIS, LIEBKNECHT und WILLS nach der Methode der unmagnetischen Lösungen die Frage zu klären versucht. Aus der magnetischen Indifferenz folgt nämlich die einfache Beziehung

$$\frac{\varkappa_m}{w} = m \frac{M_w}{M_s} ,$$

wo $w$ die Suszeptibilität des Wassers mit Fortlassung ihres negativen Vorzeichens, und $M_w/M_s$ das Massenverhältnis von Wasser und Salz in der Lösung ist; und zwar gilt nach dem über die Lösungen Gesagten dieser Wert nicht bloß für die indifferente, sondern für alle Lösungen, er gilt eben für das Salz selbst. Aus der Beobachtung ergibt sich nun direkt das Verhältnis $\varkappa_m/w$, das die genannten Autoren als relative molekulare Suszeptibilität des Salzes bezeichnen; durch Multiplikation mit $w$ ergibt sich dann $\varkappa_m$ selbst, aber mit geringerer Sicherheit, da man im Zweifel sein kann, welchen Wert man für $w$ einsetzen soll; die Autoren setzen 0,75 (richtiger wäre wohl 0,78).

Die untersuchten Stoffe waren 46 verschiedene Salze von 13 Metallen, natürlich lauter magnetische, da sich auf diamagnetische die Methode nicht anwenden läßt. Die Hauptergebnisse sind hier zusammengestellt (bei $\varkappa_m$ ist 0, überall weggelassen).

| Salz | $M_w/M_s$ | $\varkappa_m/w$ | $\varkappa_m$ |
|---|---|---|---|
| Chromisulfat | 40,73 | 7990 | 00599 |
| Chromkaliumalaun | 29,63 | 8400 | 00629 |
| Chromammoniumalaun | 30,77 | 8070 | 00605 |
| Chrominitrat | 35,28 | 8400 | 00629 |
| Manganofluorid | 215,71 | 20060 | 01504 |
| Manganochlorid | 163,10 | 20530 | 01540 |
| Manganobromid | 94,63 | 20340 | 01524 |
| Manganojodid | 65,49 | 20220 | 01516 |
| Manganosulfat | 133,65 | 20190 | 01514 |
| Manganoammoniumsulfat | 71,04 | 20130 | 01509 |
| Manganonitrat | 114,37 | 20480 | 01536 |
| Ferrojodid | 55,18 | 17090 | 01282 |
| Ferrosulfat | 111,72 | 16990 | 01272 |
| Ferroammoniumsulfat | 59,42 | 16890 | 01268 |
| Ferrichlorid | 111,14 | 18040 | 01353 |
| Ferribromid | 66,77 | 19750 | 01482 |
| Ferrisulfat | 101,06 | 20200 | 01515 |
| Ferriammoniumalaun | 75,64 | 20140 | 01510 |
| Ferriammoniumoxalat | 81,75 | 20450 | 01533 |
| Ferrinitrat | 74,48 | 18030 | 01352 |
| Kobaltfluorid | 142,60 | 13830 | 01037 |
| Kobaltchlorid | 108,21 | 14060 | 01054 |
| Kobaltbromid | 63,13 | 13820 | 01036 |
| Kobaltjodid | 44,08 | 13790 | 01034 |
| Kobaltsulfat | 87,65 | 13590 | 01019 |
| Kobaltnitrat | 76,62 | 14030 | 01052 |
| Nickelfluorid | 61,50 | 5950 | 00446 |
| Nickelchlorid | 46,02 | 5960 | 00447 |
| Nickelbromid | 27,00 | 5900 | 00442 |
| Nickeljodid | 18,62 | 5820 | 00436 |
| Nickelsulfat | 37,39 | 5790 | 00435 |
| Nickelnitrat | 32,31 | 5910 | 00443 |
| Cuprichlorid | 16,33 | 2200 | 00165 |
| Cupribromid | 9,40 | 2090 | 00157 |
| Cuprisulfat | 13,72 | 2190 | 00164 |
| Cuprinitrat | 11,54 | 2170 | 00163 |
| Yttriumchlorid | 1,41 | 280 | 00021? |
| Ceriumchlorid | 13,20 | 3250 | 00243 |
| Ceriumbromid | 8,44 | 3210 | 00240 |
| Praseodymchlorid | 17,72 | 4370 | 00328 |
| Neodymchlorid | 28,00 | 7000 | 00525 |
| Neodymnitrat | 20,98 | 6920 | 00519 |
| Samariumchlorid | 60,52 | 15510 | 01164 |
| Gadoliniumchlorid | 130,24 | 34170 | 02563 |
| Erbiumchlorid | 179,59 | 48910 | 03668 |
| Ytterbiumchlorid | 33,95 | 9480 | 00711 |

Wie man aus diesen Zahlenreihen ersieht, besteht allerdings in erster, roher Annäherung eine Abhängigkeit ausschließlich von dem metallischen Bestandteile; bei einigen Metallen ist die Übereinstimmung der Zahlen für die verschiedenen Salze sogar sehr gut, bei anderen betragen die Abweichungen 5 und mehr Prozent, am größten sind sie bei den Eisensalzen, wo erstens die Ferrisalze wesentlich größere Zahlen liefern als die Ferrosalze, und zweitens die Ferrisalze untereinander bis zu 12% abweichen. Alles in allem gelangt man also zu dem Schluß, daß die Atomsuszeptibilität des Kations zwar den Haupteinfluß auf die Molekular-Suszeptibilität der Verbindung ausübt, daß sich aber ein bestimmter Wert dieser Atomsuszeptibilität nicht streng angeben läßt.

Was nun die Rangordnung der wichtigsten magnetischen Stoffe betrifft, so läßt sich zunächst über die Metalle der letzten Tabelle folgendes sagen. Mit wachsendem Atomgewicht — so sind die Metalle geordnet — steigt die molekulare Suszeptibilität von Chrom zu Mangan und Eisen (Ferrisalze) und fällt dann zu Kobalt, Nickel und Kupfer ab; bei Yttrium liegt das Minimum; dann folgt ein neuer Anstieg bis zum Erbium, dessen Wert mehr als doppelt so groß wie der für Eisen ist (vgl. o. S. 265), schließlich ein plötzlicher Abfall zum Ytterbium.

Für die 6 Metalle der ersten Bucht in der Atomgewichtskurve hat teilweise schon WIEDEMANN (s. o.) eine Beziehung aufzustellen versucht, die dann von JÄGER und MEYER sowie von LIEBKNECHT und WILLS modifiziert und vervollständigt worden ist; die folgende Zusammenstellung gibt darüber Aufschluß: (für Eisen ist dabei Ferro- und Ferri- zu unterscheiden, die Zahlen der ersten Reihe sind die $\frac{\varkappa_m}{w}$ Relativzahlen).

| Beobachter | Cr | Mn | Fe-o | Fe-i | Co | Ni | Cu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LIEBKNECHT und WILLS exp. | 7990 | 20190 | 16990 | 20200 | 13590 | 5790 | 2190 |
| WIDEMANN Ni $= a$, $b = 1{,}15a$ | $1{,}34a$ | $3{,}29a$ | $2{,}74a$ | $3{,}26a$ | $2{,}26a$ | $a$ | — |
| JÄGER und MEYER, Ni $= a = b$ | — | 3a | $2{,}5a$ | — | $2a$ | $a$ | — |
| LIEBKNECHT und WILLS, Ni $= a$ | $1{,}38a$ | $3{,}49a$ | $2{,}93a$ | $3{,}49a$ | $2{,}35a$ | $a$ | $0{,}38a$ |
| LIEBKNECHT, $b = 1{,}25a$ . . . . | — | $3{,}5a$ | $2{,}88a$ | — | $2{,}25a$ | $a$ | — |

Wie man sieht, ist die Sache ziemlich unklar, und es scheint nicht, daß hier besonders einfache Verhältniszahlen vorliegen. Dasselbe gilt wohl für die Beziehungen, die namentlich MEYER für bestimmte Gruppen diamagnetischer Stoffe aufgestellt hat.

Schließlich sind noch zwei Spezialuntersuchungen zu erwähnen, die eine von H. FREITAG[1] über Substanzen der aromatischen Reihe, die andere von G. HEINRICH[2] über Alkohole verschiedener Stufen. Beide Arbeiten wurden im Anschlusse an die von JÄGER und MEYER ausgeführt und lieferten im wesentlichen das Ergebnis, daß diese sämtlichen Stoffe diamagnetisch sind, und daß ihr Molekularmagnetismus keine rein additive Eigenschaft ist, sondern auch von der Konstitution der betreffenden Verbindung abhängig ist.

**Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Feldstärke.** Bisher war immer von der Suszeptibilität, gleichviel ob sie auf Volumen, Masse oder Molekel bezogen wurde, als einer Konstanten die Rede; eine solche würde sie indessen offenbar nur dann sein, wenn die Magnetisierung, und zwar im ganzen Bereiche, der verfüglich wäre, mit der magnetisierenden Kraft proportional wäre. Existierte dagegen, wie bei den ferromagnetischen Substanzen, eine Annäherung an den

[1] H. FREITAG, Sitz. Ber. Münch. Ak. 1900. **36**. — [2] G. HEINRICH, Sitz. Ber. Münch. Ak. 1900. **35**.

Sättigungszustand, so müßte für große Kräfte $\varkappa$ abnehmen; und fände wie dort im Zusammenhange mit der Koerzitivkraft auch hier für kleine bis mittlere Kräfte ein rascheres als proportionales Ansteigen des Moments statt, so müßte für mäßige Kräfte $\varkappa$ zunehmen; für eine gewisse mittlere Kraft müßte also $\varkappa$ ein Maximum aufweisen. Zur Entscheidung dieser Frage liegt ein außerordentlich reichhaltiges, wenn auch nur teilweise ganz zuverlässiges Material vor. Die älteren Autoren, E. BECQUEREL, TYNDALL, JOULÉ, REICH, CHRISTIE, ARNDTSEN[1] u. a. haben sämtlich Proportionalität zwischen Moment und Kraft, also konstante Suszeptibilität gefunden; nur PLÜCKER glaubte die Annäherung an das Maximum des Moments beobachtet zu haben, und in einigen wenigen Fällen fand auch BECQUEREL Abweichungen von der Proportionalität. In neuerer Zeit ist bald Konstanz, bald Variabilität von $\varkappa$ gefunden worden, und es seien zunächst die letzteren Arbeiten erwähnt.

So erhielt SILOW[2] für Eisenchloridlösung nach den früher erwähnten Methoden folgende Zahlen ($\mathfrak{H}$ Feldstärke mit der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus als Einheit).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\mathfrak{H}$ = 0,46 | 0,82 | 1,12 | 1,48 | 2,15 | 2,89 | 4,36 | 6,64 |
| | $\varkappa \cdot 10^6$ = 34 | 62 | 122 | 148 | 179 | 138 | 105 | 72 |
| 2. | $\mathfrak{H}$ = 1,15 | 1,60 | 1,81 | 2,13 | 3,73 | 6,54 | 12,60 | |
| | $\varkappa \cdot 10^6$ = 96 | 131 | 142 | 111 | 70 | 65 | 55 | |

Diese Zahlen zeigen immerhin eine nicht unbeträchtliche Gesetzmäßigkeit, und es folgt aus ihnen, daß wie beim Eisen so auch beim Eisenchlorid $\varkappa$ erst steigt und dann fällt; sonderbar ist nur, daß das Maximum bei einer so kleinen Kraft, nämlich etwa 0,3 bis 0,4 CGS-Einheiten eintritt, während es beim Eisen erst bei 3 bis 5 Einheiten eintritt. SCHUHMEISTER (s. o.) findet — jedoch seltsamerweise gerade mit Ausnahme des Eisenchlorids — für große Kräfte veränderliches $\varkappa$, und zwar nimmt es bei den diamagnetischen Flüssigkeiten (Wasser, Alkohol, Schwefelkohlenstoff und Äther) ab, bei den magnetischen Gasen (Sauerstoff und Stickoxyd) hingegen zu, jenes um rund 20%, dieses bis auf mehr als das Doppelte. Endlich findet QUINCKE für sehr starke Kräfte (6000 bis 12000) eine wenn auch geringfügige und nicht bei allen Stoffen deutliche Abnahme der Suszeptibilität, am deutlichsten ist sie bei $TeCl_3$, $FeSO_4$, $MNCl_2$, Br, P, Hg; bei den Gasen ist das Ergebnis nicht einheitlich, indem sich bei einer Versuchsreihe eine nicht unbeträchtliche Abnahme, bei einer anderen ungefähre Konstanz von $\varkappa$ ergab.

Diesen Ergebnissen stehen andere gegenüber, bei denen sich $\varkappa$ als konstant herausstellt. So die von G. WIEDEMANN für Eisenchlorid, von EATON[3] für Eisenchlorid, Wasser, Alkohol, Äther und Schwefelkohlenstoff (die Zahlen zeigen freilich für eine durch 2 resp. 4 resp. 6 Elemente erzeugte Feldstärke eine regelmäßige kleine Zunahme von durchschnittlich 6%, mit Ausnahme des Eisenchlorids), TÖPLER und v. ETTINGSHAUSEN für Wismut und Eisenchlorid (meistens ganz geringfügige Abnahme), insbesondere aber DU BOIS[4], der die Kraft von 700 bis 10000 wachsen ließ und dabei unter anderen folgende Zahlen erhielt ($\mathfrak{H}$ Kraft, ($\varkappa$) Relativzahlen für die Suszeptibilität).

---

[1] Die Literatur s. bei G. WIEDEMANN, Elektricität **3.** S. 825 u. f. — [2] P. SILOW, Wied. Ann. **11.** S. 324. 1880. — [3] H. W. EATON, Wied. Ann. **15.** S. 225. 1882. — [4] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35.** S. 137. 1888.

| Wasser ($s = 0{,}9992$) | | $MNCl_2$-Lösung ($s = 1{,}1597$) | | $FeCl_3$-Lösung ($s = 1{,}1704$) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{H}$ | ($\varkappa$) | $\mathfrak{H}$ | ($\varkappa$) | $\mathfrak{H}$ | ($\varkappa$) |
| 2295 | 19,8 | 736 | 104,0 | 736 | 95,5 |
| 3782 | 20,1 | 1782 | 105,2 | 1782 | 94,1 |
| 5180 | 20,1 | 3837 | 104,7 | 3847 | 95,1 |
| 6684 | 20,3 | 5205 | 105,0 | 5180 | 94,8 |
| 7990 | 19,9 | 6638 | 106,1 | 6674 | 95,8 |
| 9658 | 20,3 | 7600 | 105,7 | 7654 | 94,5 |
| | | 9837 | 104,8 | 9853 | 95,1 |

Indirekt ergab sich dann weiter die Konstanz von $\varkappa$ auch für Sauerstoff.

In Anbetracht dieser Widersprüche ist die Frage auch neuerdings sehr lebhaft diskutiert und durch Ausdehnung der Versuche auf möglichst viele Stoffe und auf einen möglichst großen Bereich von Feldstärken zu entscheiden versucht worden; namentlich sind die Arbeiten von Gerosa und Finzi, Townsend, Jäger und Meyer, Königsberger, Lombardi, Wills, du Bois und Liebknecht sowie von Heydweiller[1] anzuführen.

Gerosa und Finzi finden zwischen 0,15 und 1,1 Feldstärke eine kleine Zunahme der Suszeptibilität von Ferrichloridlösungen, bei einer verdünnten von 4 auf 5, bei einer konzentrierteren von 10 auf 11 relativ; dies steht mit Silows Ergebnis im Widerspruch.

Jäger und Meyer finden für Lösungen Konstanz; für Pulver findet Meyer ebenfalls Konstanz, mit Ausnahme von Eisenoxyd, das eine entschiedene Abnahme von $\varkappa$ mit wachsender Feldstärke zeigt, während bei den Kobaltoxyden vielleicht eine kleine Abnahme, bei Beryllium und Bor eine kleine Zunahme stattfindet.

Königsberger findet für Eisenchloridlösung von der Dichte 1,0564 Konstanz, ebenso für andere Flüssigkeiten. Dagegen findet er bei manchen wasserfreien magnetischen Salzen eine Abhängigkeit von der Feldstärke, und zwar gerade bei denen, deren Suszeptibilität eine andere ist, als aus dem Verhalten der Lösungen zu schließen wäre; er schließt demgemäß auf einen Zusammenhang zwischen beiden Erscheinungen. Bei den meisten Elementen findet er Konstanz, nur bei Wolfram und, in schwächerem Maße, bei Molybdän, Silizium und Platin Abnahme mit wachsendem $\mathfrak{H}$. Bei den meisten Gläsern fand er Konstanz. Alles in allem zieht er den Schluß, daß $\varkappa$ für alle nicht freies Eisen enthaltenden Flüssigkeiten sowie für alle diamagnetischen festen Stoffe konstant, für viele, auch eisenfreie paramagnetische Körper dagegen von der Feldstärke abhängig ist.

Lombardi, Townsend und andere finden Konstanz, ersterer besonders auch für Eisenchloridlösungen. Ebenso findet Wills Konstanz für Wismut zwischen den Feldstärken 1,6 und 10,5.

du Bois und Liebknecht haben die Methode der unmagnetischen Lösungen (s. o. S. 261) auch auf die vorliegende Frage angewandt, wozu sie wegen ihrer Empfindlichkeit offenbar sehr geeignet ist. Bei keiner der untersuchten Lösungen wurde in dem weiten Bereiche von 2000 bis 40000 Feldeinheiten eine Abweichung der inaktiven Konzentration gefunden. Allerdings gilt dies zunächst nur von der relativen Suszeptibilität gegen Wasser; da es aber höchst unwahr-

[1] C. G. Gerosa und G. Finzi, Atti Acc. Linc. (4) **6**. 494. 1890. — J. S. Townsend, Trans. R. Soc. **178** A. 533. 1896. — G. Jäger und St. Meyer, Wien. Ber. **106** (2a). 594 u. 623. 1897; **107** (2a). 5. 1898; Wied. Ann. **66**. 83. — St. Meyer, Wied. Ann. **69**. 236. 1899. — J. Königsberger, Wied. Ann. **66**. 698. 1898. — L. Lombardi, Mem. Acc. Torino (2) **47**. 1. 1897. — P. Wills, Phil. Mag. **45**. 432. 1898. — H. du Bois und O. Liebknecht, Drude Ann. **1**. 189. 1900. — A. Heydweiller, Drude Ann. **12**. 608. 1903.

scheinlich ist, daß der Gang einer etwaigen Veränderlichkeit bei Wasser und den Lösungen ganz der gleiche wäre, ist zu schließen, daß auch absolut genommen $\varkappa$ sowohl für Wasser wie für die Lösungen konstant ist.

HEYDWEILLER endlich setzt sich die Aufgabe, die beiden Lücken der bisherigen Arbeiten auszufüllen, weil ohne das keine deutliche Entscheidung möglich ist: nämlich erstens bei ganz kleinen Feldern zu messen und zweitens einheitliche Reihen über den ganzen uns zugänglichen Bereich von Feldstärken von 0,1 bis 40000 zu erstrecken. Was nun die kleinen Kräfte betrifft, so ergab sich für schwächeres $FeCl_3$, $MnCl_2$, $Fe_2[SO_4]_3$, $FeSO_4$ und $Fe_2[SO_4]_3$ (saure Lösung) Konstanz, für stärkeres $FeCl_3$ und $MnSO_4$ leichte Abnahme, woraus aber nicht viel zu schließen wäre. Die andere Frage wurde in der Weise bearbeitet, daß zunächst für $FeCl_3$ festgestellt wurde, daß der Molekularmagnetismus, wie er sich aus den Beobachtungen verschiedener Forscher bei sehr verschiedenen Feldstärken berechnet, im ganzen Bereiche konstant ist:

| Beobachter | Grenzen von $\mathfrak{H}$ | $\varkappa_m \cdot 10^3$ |
|---|---|---|
| WYLACH (HEYDWEILLER) . | 0,1—1 | 13,7 |
| TOWNSEND . . . . . | 1—9 | 14,7 |
| ARNDTSEN . . . . . | 3,5—70 | 13,9 |
| v. ETTINGSHAUSEN . . . | 14—77 | 13,9 |
| LOMBARDI . . . . . | 70—600 | 14,3 |
| KÖNIGSBERGER . . . . | 1800—2200 | 14,9 |
| QUINCKE . . . . . | 6000—12500 | 15,0 |
| JÄGER und MEYER . . | 10000—18000 | 13,6 |
| LIEBKNECHT und WILLS . | 18000—40000 | 13,5 |

Es wurden deshalb alle zu untersuchenden Stoffe mit $FeCl_3$ verglichen und die — bekanntlich viel sichereren — Relativzahlen festgestellt. Es ergab sich nun folgendes:

| Beobachter | Feldstärke | $FeCl_3$ | $MnCl_2$ | $\frac{1}{2} Fe[SO_4]_3$ | $FeSO_4$ | $MnSO_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| WYLACH . . . . . | 0,1—1 | — | 0,90 | 0,86 | 0,66 | 0,81 |
| TOWNSEND . . . . . | 1—9 | 0,77 | — | 0,99 | 0,76 | — |
| HEYDWEILLER . . . . | < 15 | 0,79 | 1,02 | 0,96 | 0,80 | 0,90 |
| WIEDEMANN . . . . | ca. 100—1000 | 0,84 | 0,98 | 0,96 | 0,85 | 0,97 |
| QUINCKE . . . . . | 6000—12500 | — | 1,07 | — | 0,90 | 1,18 |
| JÄGER und MEYER . . | 10000—18000 | 0,85 | 1,09 | — | 0,91 | 1,10 |
| LIEBKNECHT und WILLS . | 18000—40000 | 0,85 | 1,12 | 1,12 | 0,94 | 1,14 |

Diese Reihen zeigen übereinstimmend eine Zunahme mit der Feldstärke, gering und unsicher bei den Chloriden, ausgesprochener bei den Sulfaten, im äußersten Falle um 40% des Anfangswertes, aber, was zu beachten ist, bei kolossal verschiedenen Feldstärken und, was vielleicht besonders betont werden muß, nach verschiedenen Methoden beobachtet.

Endlich ist noch auf die beiden schon einmal erwähnten Arbeiten von HEINRICH und FREITAG[1] zurückzukommen, die sich auf Alkohole und Stoffe der aromatischen Reihe beziehen. Beide finden übereinstimmend, daß $\varkappa_m$ mit wachsender Feldstärke abnimmt, und zwar derart, daß das Produkt $\mathfrak{H} \cdot \varkappa_m$ konstant bleibt, mit anderen Worten, daß die molekulare Magnetisierung $\mathfrak{J}_m$ sich mit $\mathfrak{H}$ nicht ändert. Die Werte dieses Produktes sind hier wiedergegeben (alle Zahlen negativ):

[1] G. HEINRICH, Münch. Ber. 1900. 35. — H. FREITAG, ebenda 1900. 36.

| (HEINRICH) | | (FREITAG) | |
|---|---|---|---|
| Methylalkohol | 0,185 | Orthoxylol | 0,734 |
| Äthylalkohol | 0,296 | Metaxylol | 0,718 |
| Propylalkohol | 0,392 | Paraxylol | 0,685 |
| Isopropylalkohol | 0,409 | Äthylbenzol | 0,675 |
| Butylalkohol | 0,520 | Pseudokumol | 0,823 |
| Isobutylalkohol | 0,541 | Mesitylen | 0,773 |
| Trimethylkarbinol | 0,482 | | |
| Amylalkohol | 0,599 | | |
| Dimethyläthylkarbinol | 0,563 | | |

**Sättigung, Koerzitivkraft, Remanenz und Hysteresis.** Wenn man die Frage der Konstanz oder Nichtkonstanz der Suszeptibilität schwach magnetisierbarer Stoffe theoretisch betrachten will, so wird man sich am besten des bei den ferromagnetischen Stoffen ausführlich Auseinandergesetzten erinnern. Zunächst trat uns dort als erste Abweichung von der Proportionalität die Erscheinung der Sättigung entgegen; sie hat zur Folge, daß $\varkappa$ abnimmt und $\varkappa\mathfrak{H}$ konstant bleibt. Es wäre also zu schließen, daß bei den Reihen von HEINRICH und FREITAG die Sättigung erreicht war. In einigen der anderen Fälle ist diese Sättigung noch nicht erreicht, aber sie verrät ihre Nähe durch eine leichte Abnahme von $\varkappa$. Wo umgekehrt sich eine Zunahme von $\varkappa$ zeigt wie bei HEYDWEILLER, muß man an die innere Wechselwirkung der Teile denken. Diese wird ja begreiflicherweise bei Lösungen und dergleichen Körpern wegen der zerstreuten Verteilung klein sein, und es stimmt hiermit, daß eben meist $\varkappa$ konstant ist; aber es läßt sich denken, daß in gewissen Lösungen Komplexbildung auftritt, und diese würde also im Steigen von $\varkappa$ zum Ausdruck kommen.

Hand in Hand mit derartigen hätte man nun auch die übrigen Erscheinungen, die bei ferromagnetischen Körpern in hohem Maße auftreten, hier wenigstens andeutungsweise zu erwarten; und es ist das auch der Fall: Spuren von Remanenz und sogar von Hysteresis sind bei einigen Stoffen gefunden worden — man vergleiche u. a. die oft zitierten Arbeiten von KÖNIGSBERGER und ST. MEYER, ferner verstreute Angaben bei LODGE, TUMLIRZ u. v. a. —; wird man aber nach einer kurzen Antwort gefragt, so muß man sagen, daß diese Erscheinungen bei den para- und diamagnetischen Stoffen nahezu gänzlich fehlen.

## Kristallmagnetismus.

**Einleitung.** Bisher wurde bei allen Betrachtungen, sowohl bei denen des vorhergehenden als auch bei denen des jetzigen Artikels, angenommen, daß es sich um nicht nur homogene, sondern auch isotrope Körper handle. Ein solcher Körper verhält sich, wie in den übrigen Hinsichten, so auch den magnetischen Kräften gegenüber nach allen Richtungen gleich, Ungleichheit des Verhaltens nach verschiedenen Richtungen tritt nur ein, wenn entweder die äußeren Kräfte, also das Feld, ungleichförmig sind, oder wenn seine eigene Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen verschieden ist. Man kann demgemäß das Verhalten eines isotropen Körpers nicht besser veranschaulichen, als wenn man sich einen Fall denkt, in welchem beide Ungleichförmigkeiten fehlen, wenn man sich also eine Kugel in einem gleichförmigen Felde denkt. Man erhält dann für die ponderomatorische Wirkung den Satz: Eine isotrope Kugel ist in einem gleichförmigen Felde im indifferenten Gleichgewicht; und für die magnetische Induktionswirkung (magnetomotorische Wirkung) den Satz: In einem gleichförmigen (und offenbar auch in einem ungleichförmigen) Felde ist die magnetische Induktion, welche eine isotrope Kugel erfährt, von ihrer Situation, von ihrer Orien-

tierung unabhängig — ein Satz, der ganz selbstverständlich ist, da alle Durchmesser der Kugel gleichwertig sind, es also keinen Unterschied ausmachen kann, welchen von ihnen man in die Richtung des Feldes bringt. Endlich kommt als drittes Charakteristikum einer isotropen Kugel hinzu, daß die Richtung der Magnetisierung, die sie erhält, mit der Richtung des Feldes an der Stelle, wo sie sich befindet, übereinstimmt (oder, wenn man will, bei diamagnetischen Körpern ihr entgegengesetzt ist).

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß man, wenn man jetzt zu heterotropen Körpern, also zu Kristallen oder künstlich heterotrop gemachten Körpern übergeht, deren charakteristisches Verhalten ebenfalls in drei Sätzen aussprechen kann, die man einfach erhält, indem man die obigen Sätze umkehrt; es bleibt dann, bei der viel größeren Mannigfaltigkeit der Kristalle den isotropen Körpern gegenüber, immer noch die Aufgabe, die umgekehrten Sätze genügend allgemein zu fassen und sie alsdann für die einzelnen Kristalltypen zu spezialisieren. In mathematischer Hinsicht ist diese Aufgabe gewissen Aufgaben in anderen Zweigen der Physik, insbesondere in der Elastizitätstheorie, so analog, daß man die meisten Betrachtungen und Begriffe von dort hierher übertragen kann.

Daß die Kristalle dem Magnetismus gegenüber ein besonderes Verhalten offenbaren müßten, ist zuerst von POISSON[1] vermutet worden. Durch Beobachtung entdeckt wurde es von PLÜCKER[2] 1847, dem dann FARADAY[3], TYNDALL u. a. nachfolgten. Die Theorie wurde 1850, unmittelbar nach PLÜCKERs Entdeckung, von W. THOMSON[4] in überaus einfacher und eleganter Weise entwickelt, so daß man auch heute noch am besten tut, sich ihr anzuschließen, obgleich inzwischen auch andere, teils in den Grundannahmen, teils in der Methodik abweichende Theorien, namentlich von A. BEER[5] und von DUHEM[6], ausgearbeitet worden sind. Dagegen sind zahlreiche physikalische hypothetische Vorstellungen und Erklärungen, die unter anderen von FARADAY ausgingen, inzwischen als überflüssig oder irrtümlich fallen gelassen worden, und auch der von FARADAY für die Ursache der Erscheinung aufgestellte Name „Magnekristallkraft" verdient kaum beibehalten zu werden, einfach weil eine solche besondere Kraft gar nicht existiert. Schließlich ist auf ein Buch von VOIGT[7] zu verweisen, in dem die magnetischen Eigenschaften der Kristalle im Rahmen ihrer übrigen physikalischen Eigenschaften behandelt werden.

**Theorie der Magnetisierung einer Kristallkugel.** Der Einfachheit halber betrachten wir die Kugelform, bemerken aber, daß die Formeln näherungsweise auch für andere Körper mit nicht zu verschiedenen Dimensionen gelten werden, da bei schwach magnetischen Körpern, wie es Kristalle fast stets sind, die Gestalt (S. 133 u. 251) so gut wie gar keinen Einfluß auf die Magnetisierung ausübt. Anzuknüpfen ist an die allgemeinen Formeln auf S. 125 und an die speziellen auf S. 140, welch letztere für eine Kugel gelten, wenn das Feld gleichförmig ist, also die Kugelfunktion erster Ordnung ist. Bei isotropen Körpern wurde die Komponente der Magnetisierung proportional mit den Komponenten der Gesamtkraft und folglich auch proportional mit den Komponenten der äußeren Kraft gesetzt; zwischen den entsprechenden Proportionalitätsfaktoren $p$ und $\varkappa$ bestand eine einfache Beziehung. Die entsprechenden Betrachtungen können hier übergangen werden; wir setzen demnach von vornherein die Komponenten der Mag-

[1] POISSON, Mém. Ac. Sciences **5**. S. 247 u. 488. 1821; **6**. S. 441. 1823. — Pogg. Ann. **1**. S. 301; **3**. S. 429. — [2] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **72**. S. 315. 1847; **76**. S. 576. 1849; **77**. S. 447. 1849; **78**. S. 427. 1849; **81**. S. 115. 1850; **82**. S. 42. 1851 (die letzten beiden Abhandlungen gemeinschaftlich mit BEER); **86**. S. 1. 1852; **110**. S. 397. 1860. — [3] M. FARADAY, Exp. Researches, Ser. 22, 26, 30 (1849, 1851, 1856). — Pogg. Ann. Erg.-Bd. **3**. S. 1 u. 108. 1853; **100**. S. 111 u. 439. 1857. — Exp. Unt. **3**. S. 76. 194. 534. — [4] W. THOMSON, Rep. Brit. Assoc. 1850 (2). S. 23; Phil. Mag. (4) **1**. S. 177. 1851; Ges. Abhandl. S. 449. — [5] A. BEER, Einl. in die Elektr. usw. Braunschweig 1865. S. 221. — [6] P. DUHEM, De l'aimant. par infl. S. 125. — [7] W. VOIGT, Die fund. physikal. Eigenschaften der Kristalle. Leipzig 1898.

netisierung gleich linearen Funktionen der Gesamtkraft $X, Y, Z$, wobei wir die auftretenden neun Koeffizienten wieder mit $\varkappa$ bezeichnen, diesem $\varkappa$ aber doppelte Indizes beifügen. Wir haben also für die gedachten Beziehungen die Gleichungen:

$$A = \varkappa_{11} X + \varkappa_{12} Y + \varkappa_{13} Z \quad ,$$
$$B = \varkappa_{21} X + \varkappa_{22} Y + \varkappa_{23} Z \quad ,$$
$$C = \varkappa_{31} X + \varkappa_{32} Y + \varkappa_{33} Z \quad ;$$

diese Formeln lassen sich in Wahrheit sehr bedeutend spezialisieren. Zunächst muß das System der $\varkappa$ symmetrisch sein, weil sonst bei fortwährender Umdrehung der Kugel im Magnetfelde, wie eine kleine Betrachtung lehrt, fortwährend Arbeit gewonnen werden würde, was dem Prinzip von der Erhaltung der Energie widersprechen würde; es muß also sein:

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{21} \; , \quad \varkappa_{23} = \varkappa_{32} \; , \quad \varkappa_{31} = \varkappa_{13} \quad ,$$

wodurch sich die Zahl der Koeffizienten in jedem Falle von 9 auf 6 reduziert.

Eine fernere Vereinfachung erlangt man durch Einführung des dem Druckellipsoid in der Elastizitätslehre (vgl. Bd. 1) entsprechenden magnetischen Induktionsellipsoids, dessen Koordinaten $x, y, z$ durch die Gleichung

$$\varkappa_{11} x^2 + \varkappa_{22} y^2 + \varkappa_{33} z^2 + 2 \varkappa_{23} y z + 2 \varkappa_{31} z x + 2 \varkappa_{12} x y = 1$$

bestimmt sind. Dieses Ellipsoid veranschaulicht die Richtung und Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ in sehr einfacher Weise. Zieht man nämlich nach irgend einem Punkte des Ellipsoids den Radiusvektor, legt im Endpunkt desselben die Tangentialebene an das Ellipsoid und fällt vom Mittelpunkt auf diese Tangentialebene die Normale, so gibt der Radiusvektor Richtung und Größe der Kraft und die Normale Richtung und reziproke Größe der entsprechenden Magnetisierung. Man leitet hieraus ohne weiteres den Satz ab: In einer Kristallkugel stimmt die Richtung der Magnetisierung im allgemeinen nicht mit der Richtung des Feldes überein, aber es gibt drei Richtungen in ihr von der Eigenschaft, daß, wenn man bei Einbringung der Kugel in das Feld eine von ihnen den Kraftlinien parallel einstellt, die Magnetisierung dieselbe Richtung annimmt. Diese Richtungen nennt man Hauptmagnetisierungsachsen oder magnetische Symmetrieachsen. Ferner folgt aus der angestellten Betrachtung, daß eine heterotrope Kugel sich ganz ebenso verhält wie ein isotropes Ellipsoid; es tritt hier eben an die Stelle der in verschiedenen Richtungen verschiedenen Ausdehnungen die in verschiedenen Richtungen verschiedene Struktur.

Benutzt man jetzt die Symmetrieachsen als Koordinatenachsen, so fallen die Glieder mit $\varkappa_{23}, \varkappa_{31}, \varkappa_{12}$ weg, und es erhält das Induktionsellipsoid die einfachere Gleichung

$$\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2 + \varkappa_3 z^2 = 1 \quad .$$

Die drei Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ nennt man die Hauptmagnetisierungskonstanten oder Hauptsuszeptibilitäten, sie entsprechen der Magnetisierungskonstante resp. Suszeptibilität bei isotropen Körpern und werden, wie man sofort einsieht, durch die reziproken Quadrate der halben Achsen des Induktionsellipsoids gemessen. Die eine Hauptsuszeptibilität ist die größte, die dritte die kleinste von allen, die der Körper besitzt, die zweite ist die größte von allen in dem einen, dagegen die kleinste von allen in dem dazu senkrechten Hauptschnitt.

Die Komponenten der Magnetisierung nehmen nunmehr die einfache Form

$$A = \varkappa_1 X \; , \quad B = \varkappa_2 Y \; , \quad C = \varkappa_3 Z$$

an; dafür kann man, wenn $\mathfrak{H}$ die Richtung und Stärke des Feldes und $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ die Kosinus seiner Winkel mit den Symmetrieachsen sind, auch schreiben:

$$A = \varkappa_1 \lambda_1 \mathfrak{H} \; , \quad B = \varkappa_2 \lambda_2 \mathfrak{H} \; , \quad C = \varkappa_3 \lambda_3 \mathfrak{H} \quad ,$$

die Intensität der Magnetisierung selbst wird also

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{H}\sqrt{\varkappa_1^2\lambda_1^2 + \varkappa_2^2\lambda_2^2 + \varkappa_3^2\lambda_3^2} \quad ,$$

ihre Richtung bildet mit den Symmetrieachsen Winkel, deren Kosinus $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ durch die Gleichungen

$$\frac{\alpha_1}{\varkappa_1\lambda_1} = \frac{\alpha_2}{\varkappa_2\lambda_2} = \frac{\alpha_3}{\varkappa_3\lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1^2\lambda_1^2 + \varkappa_2^2\lambda_2^2 + \varkappa_3^2\lambda_3^2}}$$

bestimmt wird; schließlich ist der Winkel $\vartheta$, den die Magnetisierungsrichtung mit der Feldrichtung bildet, bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\vartheta = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 = \frac{\varkappa_1\lambda_1^2 + \varkappa_2\lambda_2^2 + \varkappa_3\lambda_3^2}{\sqrt{\varkappa_1^2\lambda_1^2 + \varkappa_2\lambda_2^2 + \varkappa_3^2\lambda_3^2}} \quad .$$

**Einstellung im gleichförmigen Felde.** Für das Experiment ist es von Wichtigkeit, das Drehungsmoment zu kennen, welches auf die Kugel wirkt, wenn sie sich um ihren Mittelpunkt frei drehen kann. Hierfür ergibt sich

$$D = v\mathfrak{H}\mathfrak{J}\sin\vartheta = v\mathfrak{H}^2\sqrt{\lambda_2^2\lambda_3^2(\varkappa_2-\varkappa_3)^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2(\varkappa_3-\varkappa_1)^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2(\varkappa_1-\varkappa_2)^2} \quad ,$$

wo $v$ das Volumen der Kugel ist; die Richtungskosinus von $D$ leiten sich hieraus in bekannter Weise ab. Wie man sieht, ist dieses Drehungsmoment mit dem Volumen und dem Quadrate der Feldstärke proportional, im übrigen aber eine komplizierte Funktion der Orientierung der Kugel und der drei Differenzen der Hauptsuszeptibilitäten, welch letztere also nicht selbst in die Formel eingehen. Daraus folgt, daß man sie um einen beliebigen, für alle drei gleichen Betrag vergrößern oder verkleinern kann, ohne an den Verhältnissen etwas zu ändern, und hieraus folgt wieder: 1. daß man die obige Fläche zweiten Grades stets, auch für diamagnetische Körper, zu einem Ellipsoid machen kann, so daß sich der obige Ausdruck allgemein rechtfertigt, und 2. daß die Erscheinungen, welche ein Kristall in einem gleichförmigen Felde darbietet, von dem Medium, in dem sich der Kristall befindet, sofern es nur isotrop ist, unabhängig, und zwar auch quantitativ unabhängig sind. Soll dieses Drehungsmoment verschwinden, so muß jedes der Wurzelglieder verschwinden, also, da die $\varkappa$ voneinander verschieden angenommen wurden, zwei von den $\lambda$ gleich null sein, in Worten: Eine drehbare Kristallkugel und ebenso jeder Kristall von nicht zu verschiedenen Dimensionen ist im gleichförmigen, magnetischen Felde im Gleichgewicht, wenn eine ihrer Magnetisierungsachsen in die Richtung des Feldes fällt. Man sieht ferner durch Betrachtung des Minimums der Energie leicht ein und kann es auch direkt aus der Analogie mit dem isotropen Ellipsoid schließen, von welcher Art jenes Gleichgewicht sein wird: Das Gleichgewicht ist stabil, wenn die Achse der größten Suszeptibilität in die Richtung des Feldes fällt, anderenfalls ist es labil. Der Körper stellt sich infolgedessen stets mit der Achse seiner größten Suszeptibilität in die Richtung des Feldes. Dabei kommt es, wie die obigen Formeln lehren, auf den algebraischen Wert der Suszeptibilität an; ist der Körper diamagnetisch, so stellt er sich also mit derjenigen Richtung in die Richtung des Feldes, in welcher er am schwächsten diamagnetisch ist. Nach der differentiellen Theorie des Diamagnetismus (S. 255) ist die letztere Bemerkung an sich einleuchtend; ein schwächerer Diamagnetismus ist ja nichts anderes, als stärkerer Magnetismus.

Außer den Magnetisierungsachsen gibt es in dem Kristalle noch zwei andere ausgezeichnete Linien, die PLÜCKER „magnetische Achsen" genannt hat. Sie haben die Eigenschaft, daß, wenn man eine von ihnen mit dem Aufhängefaden zusammenfallen läßt, für jede Orientierung $D = 0$, das Gleichgewicht also indifferent wird. Man sieht leicht, daß die Richtungen der magnetischen Achsen durch die Kreisschnitte des Ellipsoids bestimmt sind. Offenbar liegen die mag-

netischen Achsen symmetrisch zu den Magnetisierungsachsen, und es können dabei zwei Fälle auftreten: der spitze Winkel zwischen den magnetischen Achsen kann entweder durch die Achse der größten oder durch die der kleinsten Magnetisierbarkeit halbiert werden; einen Körper ersterer Art kann man als positiv, einen der letzteren als negativ bezeichnen.

**Verschiebung im ungleichförmigen Felde.** Im ungleichförmigen Felde wird der Kristall sich nicht nur einstellen, sondern auch verschieben. Eine Betrachtung, die der auf S. 252 angestellten analog ist, führt hier für die Änderung der potentiellen Energie zu der Gleichung

$$dE = -\frac{v}{2}(\varkappa_1 \lambda_1^2 + \varkappa_2 \lambda_2^2 + \varkappa_3 \lambda_3^2)\, d(\mathfrak{H}^2) \quad .$$

Auch hier wird sich also der Körper nach den Stellen stärkster oder schwächster Kraft bewegen, je nachdem er para- oder diamagnetisch ist; aber diese Bewegungstendenz ist hier für verschiedene Orientierungen des Körpers verschieden; sie ist am größten, wenn die Hauptachse der algebraisch stärksten Magnetisierung (also des stärksten Para- oder des schwächsten Diamagnetismus) dem Felde parallel ist, am kleinsten, wenn sie auf ihm senkrecht steht. Auch hier ist wieder zu beachten, daß die Tendenz der stärksten Achse, sich dem Felde parallel zu stellen, und die Tendenz des Körpers, sich nach einer bestimmten Stelle des Feldes zu bewegen, miteinander in Konflikt kommen und dadurch eigentümliche, scheinbar paradoxe Erscheinungen hervorgerufen werden können. Noch verwickelter würden die Verhältnisse bei einem Körper werden, für welchen die drei Hauptsuszeptibilitäten verschiedene Vorzeichen haben, ein Fall, der zwar in der Natur nicht vorzukommen scheint, aber künstlich hergestellt werden kann, indem man als Medium, welches hier natürlich von Einfluß ist, ein solches wählt, dessen Suszeptibilität dem Zahlenwerte nach zwischen denen des Kristalls liegt.

**Schwingungen.** Läßt man die Kugel der Reihe nach um jede der drei Hauptachsen schwingen, so erhält man Schwingungsdauern $t_1$, $t_2$, $t_3$, die der Proportion

$$\frac{1}{t_1^2} : \frac{1}{t_2^2} : \frac{1}{t_3^2} = \varkappa_2 - \varkappa_3 : \varkappa_1 - \varkappa_3 : \varkappa_1 - \varkappa_2 \quad ,$$

und folglich auch der Gleichung

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_3^2} = \frac{1}{t_2^2}$$

genügen, die sich leicht in Worten aussprechen lassen. Die Schwingungsdauer $t$ um eine beliebige Achse läßt sich am besten durch die Winkel $\psi$ und $\psi'$ ausdrücken, welche diese Drehungsachse mit den beiden „magnetischen Achsen" bildet, und durch die Schwingungsdauer $t_2$ um die mittlere Hauptmagnetisierungsachse:

$$t = t_2 \cdot \sin\psi \sin\psi' \quad .$$

**Einachsige Kristalle.** Die obigen Formeln vereinfachen sich wesentlich, wenn die Struktur des Körpers gegen eine Gerade in ihm symmetrisch ist, also, kurz ausgedrückt, bei einachsigen Kristallen. Hier werden zwei von den $\varkappa$ einander gleich, das Induktionsellipsoid ein Rotationsellipsoid, woraus dann folgt, daß in sämtlichen, gegen die Achse senkrechten Richtungen die Suszeptibilität gleich groß ist. Der Winkel zwischen den beiden magnetischen Achsen (s. o.) ist hier null, diese fallen also mit der Symmetrieachse zusammen. Der Körper ist dann, um die Achse drehbar aufgehängt, in jeder Orientierung im indifferenten Gleichgewicht; ist die Achse senkrecht zur Drehungsachse, so stellt er sich in bestimmter Weise ein, und zwar sind hier zwei Fälle zu unterscheiden: wenn das axiale $\varkappa$ größer ist, als das äquatoriale $\varkappa'$, stellt er sich mit der Symmetrieachse dem Felde parallel, im anderen Falle senkrecht zu ihm. Man nennt einen ein-

achsigen Körper **magnetisch positiv**, wenn $\varkappa > \varkappa'$, **negativ**, wenn $\varkappa < \varkappa'$ ist. Da bei der Anwendung obiger Regel auf diamagnetische Körper die algebraischen Werte (nicht die Zahlenwerte) der $\varkappa$ zu vergleichen sind, erhält man folgendes Schema der Einstellung der Symmetrieachse zum Felde:

| paramagnetisch positiv | paramagnetisch negativ | diamagnetisch positiv | diamagnetisch negativ |
|---|---|---|---|
| $\parallel$ | $\perp$ | $\perp$ | $\parallel$ |

(einfacher würde es gewesen sein, unabhängig vom para- oder diamagnetischen Charakter jeden Kristall positiv zu nennen, bei welchem die Achse des größeren algebraischen $\varkappa$-Wertes sich axial stellt).

Das Drehungsmoment, mit welchem ein einachsiger Kristall seine Achse in das Feld oder senkrecht dazu zu stellen sucht, ist

$$D = \pm v \mathfrak{H}^2 (\varkappa - \varkappa') \sin^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \quad ,$$

($\vartheta$ der Winkel zwischen der Achse und der Drehungsachse und $\varphi$ der Winkel der durch Achse und Drehungsachse gelegten Ebene und der auf der Feldrichtung senkrechten Ebene).

Für die Schwingungsdauer brauchen hier natürlich keine der obigen analoge Beziehungen aufgestellt zu werden. Dafür sei hier die Schwingungsdauer $t$ ausgedrückt in Beziehung zur Schwingungsdauer ohne magnetische Erregung $t_0$, wobei natürlich das Trägheitsmoment $K$ auftritt:

$$\varkappa - \varkappa' = \pm \frac{\pi^2 K}{v \mathfrak{H}^2 \sin^2\vartheta} \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_0^2} \right) \quad .$$

**Reguläre Kristalle.** Wenn, wie beim regulären System, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$ wird, so findet ein verschiedenes, magnetisches Verhalten in verschiedenen Richtungen überhaupt nicht mehr statt, der Kristall verhält sich also magnetisch wie ein isotroper Körper.

**Theorie für ferromagnetische Kristalle.** Bei ferromagnetischen Körpern besteht, wie wir wissen, zwischen Kraft und Magnetisierung nicht mehr Proportionalität; entsprechend werden für ferromagnetische Kristalle die auf die Hauptmagnetisierungsachsen bezogenen Komponenten der Magnetisierung den Komponenten der Kraft nicht mehr proportional sein. Für solche Kristalle hat daher W. VOIGT[1] eine neue Theorie ausgearbeitet, allerdings unter der Annahme, daß diese Nichtproportionalität die einzige einzuführende Änderung sei; von Remanenz und Hysteresis wird also abgesehen. Beschränkt man sich ferner der Einfachheit halber auf zentrisch-symmetrische Kristalle, so kann man

$$A = X[\varkappa_1 + f_1(X^2, Y^2, Z^2)] \quad ,$$
$$B = Y[\varkappa_2 + f_2(X^2, Y^2, Z^2)] \quad ,$$
$$C = Z[\varkappa_3 + f_3(X^2, Y^2, Z^2)]$$

setzen, wo die $f$ Reihen in den geraden Potenzen von $X$, $Y$, $Z$ vorstellen. Für das reguläre System insbesondere wird

$$A = X(\varkappa - k_1 X^2 - k_2 \mathfrak{H}^2 - k_3 X^4 - k_4 X^2 \mathfrak{H}^2 - k_5 \mathfrak{H}^4 \ldots) \quad ,$$
$$B = Y(\varkappa - k_1 Y^2 - k_2 \mathfrak{H}^2 - k_3 Y^4 - k_4 Y^2 \mathfrak{H}^2 - k_5 \mathfrak{H}^4 \ldots) \quad ,$$
$$C = Z(\varkappa - k_1 Z^2 - k_2 \mathfrak{H}^2 - k_3 Z^4 - k_4 Z^2 \mathfrak{H}^2 - k_5 \mathfrak{H}^4 \ldots) \quad ,$$

[1] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1900. S. 331.

wo $\mathfrak{H}$ die Feldstärke und die $k$ Konstanten sind, die die betreffenden Glieder klein machen im Vergleich mit den ersten, mit $\varkappa$ behafteten. Während sich also schwach magnetische Kristalle isotrop verhalten, ist das bei ferromagnetischen nicht mehr der Fall. Inwieweit obige Reihen konvergieren, ist freilich zweifelhaft, und es erscheint deshalb angezeigt, bei Beobachtungen zum Vergleich mit der Theorie sich auf kleine Feldstärken zu beschränken. Ferner wird man dem Kristalle eine Form geben, für welche die Theorie am einfachsten wird, z. B. die eines Ellipsoids. Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Hauptachse in der $z$-Richtung) läßt sich die Rechnung unter gewissen vereinfachenden Annahmen durchführen; und wenn es sich speziell um eine Kreisscheibe handelt, werden die Formeln relativ einfach; und noch einfacher, wenn man sich auf äquatorial gerichtetes Feld beschränkt. Nun sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem es sich um eine Würfel-, Granatoeder- oder Oktaeder-Fläche handelt. Es ergeben sich hierfür mit einer gewissen Annäherung folgende Formeln, wobei nachstehende Abkürzungen benutzt sind:

$a$ Äquatorial-, $c$ Polarachse des durch die Scheibe dargestellten Rotationsellipsoids.

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \quad \text{(Abplattung)};$$

$$M = \frac{2\pi}{\lambda^3}[(1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda - \lambda]$$

$$= \frac{\pi}{\lambda}\left(\pi - \frac{4}{\lambda}\right) \text{ (angenähert) } = \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ (noch roher angenähert)};$$

$$m = \frac{1}{1+\varkappa M} = \frac{1}{1+\pi^2\frac{\varkappa}{\varepsilon}} \quad \text{(roh angenähert)};$$

$\mathfrak{H}_0$ = äußere Feldstärke;

$$K = \varkappa m \mathfrak{H}_0 - k_2 m^4 \mathfrak{H}_0^3 - k_5 m^6 \mathfrak{H}_0^5 - k_9 m^8 \mathfrak{H}_0^7 \quad ,$$

$$K_1 = k_1 m^4 \mathfrak{H}_0^3 + k_4 m^6 \mathfrak{H}_0^5 + k_8 m^8 \mathfrak{H}_0^7 \quad ,$$

$$K_2 = k_3 m^6 \mathfrak{H}_0^5 + k_7 m^8 \mathfrak{H}_0^7 \quad ,$$

$$K_3 = k_6 m^8 \mathfrak{H}_0^7 \quad .$$

$\vartheta$ Winkel zwischen $\mathfrak{H}_0$ und $X$,

$l$ longitudinales, $t$ transversales } Moment,

$(l = A\cos\vartheta + B\sin\vartheta \quad , \quad t = -A\sin\vartheta + B\cos\vartheta) \quad .$

1. Würfelfläche ($C = 0$):

$$A = K\cos\vartheta - K_1\cos^3\vartheta - K_2\cos^5\vartheta - K_3\cos^7\vartheta \quad ,$$

$$B = K\sin\vartheta - K_1\sin^3\vartheta - K_2\sin^5\vartheta - K_3\sin^7\vartheta$$

und hieraus:

$$l = [K - K_1 - K_2 - K_3] + \tfrac{1}{4}(2K_1 + 3K_2 + 4K_3[1 - \tfrac{1}{8}\sin^2 2\vartheta])\sin^2 2\vartheta \quad ,$$

$$t = \tfrac{1}{2}[K_1 + K_2 + K_3(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\vartheta)]\cos 2\vartheta \sin 2\vartheta \quad .$$

2. Granatoederfläche ($C = 0$):

$$A = K\cos\vartheta - K_1\cos^3\vartheta - K_2\cos^5\vartheta - K_3\cos^7\vartheta \quad ,$$

$$B = K\sin\vartheta - \tfrac{1}{2}K_1\sin^3\vartheta - \tfrac{1}{4}K_2\sin^5\vartheta - \tfrac{1}{8}K_3\sin^7\vartheta$$

und hieraus:

$$l = (K - K_1 - K_2 - K_3) + [\tfrac{1}{2} K_1 (1 + 3\cos^2\vartheta) + \tfrac{3}{4} K_2 (1 + \cos^2\vartheta)^2 + \tfrac{1}{8} K_3 (7 + 11\cos^2\vartheta + 5\cos^4\vartheta + 9\cos^6\vartheta)] \sin^2\vartheta \quad ,$$

$$t = \tfrac{1}{4} [K_1 + \tfrac{1}{2} K_2 (1 + \cos^2\vartheta) + \tfrac{1}{4} K_3 (1 - \cos^2\vartheta + 4\cos^4\vartheta)] \sin 2\vartheta (3\cos^2\vartheta - 1) \quad .$$

3. Oktaederfläche ($C$ im allgemeinen nicht null, aber für die Scheibe sehr klein):

$$A = (K - \tfrac{1}{2} K_1)\cos\vartheta - \tfrac{1}{36} K_2 (10\cos\vartheta + \cos 5\vartheta) - \tfrac{1}{216} K_3 [(35 + 2\cos 6\vartheta)\cos\vartheta + 6\cos 5\vartheta] \quad ,$$

$$B = (K - \tfrac{1}{2} K_1)\sin\vartheta - \tfrac{1}{36} K_2 (10\sin\vartheta - \sin 5\vartheta) - \tfrac{1}{216} K_3 [(35 + 2\cos 6\vartheta)\sin\vartheta - 6\sin 5\vartheta]$$

und hieraus:

$$l = (K - \tfrac{1}{2} K_1) - \tfrac{1}{36} K_2 (10 + \cos 6\vartheta) - \tfrac{1}{216} K_3 (35 + 8\cos 6\vartheta) \quad ,$$

$$t = \tfrac{1}{36} (K_2 + K_3) \sin 6\vartheta \quad .$$

Der Sinn der vorstehenden Formeln ist offenbar im wesentlichen folgender: Bei der Würfelfläche ist ohne die höheren Glieder $l$ konstant, $t$ null; die Heranziehung der höheren Glieder macht beide um $\pi/2$ periodisch, und zwar $l$ in $\cos 4\vartheta$, $t$ in $\sin 4\vartheta$, so daß der ganze Zug der Kurven für $l$ und $t$ in 8 gleiche, abwechselnd nach oben und unten liegende Zweige zerfällt, wobei die beiden Amplituden einander gleich sind. Nimmt man noch höhere Glieder hinzu, so werden die Amplituden ungleich, und es verschiebt sich die Phase. Ganz ähnlich verhält es sich bei der Granatoederfläche. Dagegen ist der Sachverhalt bei der Oktaederfläche wesentlich anders; hier setzt nämlich die Veränderlichkeit von $l$ und der Wert von $t$ nicht schon bei den Gliedern erster, sondern erst bei denen zweiter Ordnung ein, die mit sehr kleinen Koeffizienten behaftet sind; der Effekt wird also hier sehr schwach sein.

Bald darauf hat SANO[1] das Problem für alle regulären Kristalle der holoedrischen, der hemimorph- und enantiomorph-hemiedrischen Gruppen durchgeführt und Formeln erhalten, die bei Beschränkung auf zentrische Symmetrie in die VOIGTschen übergehen. Endlich hat dann VOIGT[2] auch die Fälle der paramorphen (oder pentagonalen) Hemiedrie sowie der Tetartoedrie behandelt und damit die noch verbliebene Lücke ausgefüllt; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

Von anderen theoretischen Untersuchungen sei noch die von WALLERANT[3] erwähnt. Die Komponenten der Induktion nach den quaternären Achsen werden durch mehr oder weniger willkürliche Ausdrücke dargestellt, die die Induktion nach einer binären Achse und die Richtungskosinus des Feldes enthalten; für das reguläre und rhomboedrische System werden die Formeln hingeschrieben; für das erstere ergibt sich eine charakteristische Oberfläche, die zwischen para- und diamagnetischen Körpern zu unterscheiden erlaubt.

Ferner ist auf eine Arbeit BECKENKAMPS[4] hinzuweisen, die sich mehr nach der speziell kristallographischen Seite der Frage verbreitet, und auf die hier um so weniger eingegangen zu werden braucht, als die betreffenden Ausführungen sich im Hinblick auf die inzwischen veröffentlichte Theorie VOIGTS in ihrem physikalischen Teile erübrigen.

---

[1] S. SANO, Phys. Zeitschr. **4**. 8. 1902. — [2] W. VOIGT, Gött. Nachr. 1903. 1. — [3] M. WALLERANT, C. R. **133**. 630. 1901. — Bull. Soc. min. **24**. 404. 1901. — [4] J. BECKENKAMP, Z. f. Krist. **36**. 102. 1902.

Endlich sei erwähnt, daß LUTTEROTH[1] — im Anschlusse an eine später zu besprechende Experimentaluntersuchung — gezeigt hat, wie sich die Theorie der drehbaren Molekularmagnete auf Kristalle anwenden läßt; die Formeln, zu denen er gelangt, stimmen, soweit das erforderlich ist, mit den THOMSONschen überein.

**Beobachtungen und Messungen.** Die mathematische Theorie des Kristallmagnetismus ist ein klassisches Beispiel dafür, wie übersichtlich und relativ einfach die Erscheinungen in einem Gebiete werden, in welchem sie ohne diese Theorie einen höchst verwickelten und zum Teil paradoxen Eindruck machen würden. Es dürfte daher hier ebensowenig wie bei den isotropen, para- und diamagnetischen Stoffen Interesse darbieten, die zahlreichen Beobachtungen mitzuteilen, welche früher an Kristallen in magnetischer Hinsicht angestellt worden sind; denn entweder ist ihre Notwendigkeit nach der Theorie sofort zu übersehen, oder ihre Komplikation ist nach der Theorie durch das Zusammenwirken verschiedener Umstände bedingt, das weiter zu verfolgen wenig lohnend ist. Es werden daher hier nur einige wenige der rein qualitativen Beobachtungen berücksichtigt werden. Von Wichtigkeit sind hingegen die quantitativen Bestimmungen, und diese kann man wieder in drei Klassen einteilen. Bei den Untersuchungen der ersten Art handelt es sich lediglich um die experimentelle Prüfung der THOMSONschen Theorie bzw. deren Verallgemeinerung, bei den zweiten um die Feststellung des para- oder diamagnetischen Verhaltens, des positiven oder negativen Charakters und der Reihenfolge der Achsen hinsichtlich der Stärke der Magnetisierung, bei den dritten endlich um Ermittelung von Zahlenwerten für die magnetischen Konstanten.

**Grundversuche.** PLÜCKER, der einen großen Hufeisenmagneten benutzte, untersuchte zuerst grünen Turmalin und fand, daß er zwar einerseits angezogen wird, sich aber andererseits mit der Achse äquatorial einstellt; ein Gegensatz, der ihn damals sehr überraschen mußte, während wir jetzt die einfache Deutung kennen, daß der Turmalin paramagnetisch, aber negativ ist. Auch bei einigen anderen Kristallen fand er dasselbe Verhalten. Als bald darauf FARADAY entdeckte, daß sich ein Wismutkristall axial einstellt, glaubte er hierfür eine besondere Ursache, die Magnekristallkraft, annehmen zu müssen. Erst durch seine und PLÜCKERs weitere Versuche gelangte er zu der Einsicht, daß alle kristallmagnetischen Erscheinungen einheitlichen Ursprungs sind und durch den Satz beschrieben werden können, daß ein Kristall im gleichförmigen Magnetfelde sich in diejenige Lage dreht oder zu drehen strebt, in der ihn die Kraftlinien am leichtesten durchsetzen können; man sieht den Zusammenhang dieses Satzes mit der obigen Theorie leicht ein. Die Auffindung des Gegensatzes zwischen positivem und negativem Charakter bei para- oder diamagnetischer Substanz brachte dann, nebst weiteren Versuchen von PLÜCKER und BEER, sowie von KNOBLAUCH und TYNDALL[2], vollends Klarheit in die Verhältnisse. Die Letztgenannten prüften auch künstlich heterotrop gemachte Körper, z. B. schnell abgekühltes Glas und einseitig komprimierte Stoffe, ferner auch Holz, Elfenbein usw. und fanden überall analoges Verhalten.

Endlich hat O. LEHMANN[3] bei seinen ausgedehnten Untersuchungen über flüssige Kristalle, wie sie von gewissen Substanzen unter besonderen Umständen gebildet werden, auch das magnetische Verhalten geprüft und das Bestreben der Molekeln, sich in die Feldrichtung einzustellen, konstatiert; es liegt damit zum ersten Male die Beobachtung vor, daß auch ohne Bewegung des Körpers als eines

---

[1] A. LUTTEROTH, Wied. Ann. **66**. 1097. 1898. — In.-Diss. Leipz. 1898. — [2] H. KNOBLAUCH und J. TYNDALL, Pogg. Ann. **79**. S. 233; **81**. S. 481. 1850. — J. TYNDALL, Phil. Mag. (4) **2**. S. 165. 1851 und (4) **10**. S. 153 u. 257. 1855. — Phil. Mag. (4) **11**. S. 125. 1856. — Pogg. Ann. **83**. S. 384. — [3] O. LEHMANN, Drude Ann. **2**. 675. 1900. — Flüssige Kristalle, Leipzig 1904.

Ganzen und ohne Änderung seiner Form eine molekulare Drehung möglich ist. Gleichzeitig macht sich allerdings auch eine Tendenz des Tropfens geltend, sich als Ganzes so zu stellen, daß die Symmetrieachse äquatorial steht.

Eine quantitative Prüfung der THOMSONschen Theorie erscheint insofern nicht durchaus erforderlich, als diese Theorie an sich unanfechtbar ist, abgesehen von zwei Voraussetzungen, welche sich aber ebenfalls direkt als richtig erweisen lassen, nämlich, daß bei den Kristallen die Suszeptibilität von der magnetisierenden Kraft unabhängig ist, und daß keine Remanenz existiert, Eigenschaften, die ebenso wie bei den isotropen schwach magnetischen Körpern auch bei den Kristallen sehr näherungsweise und höchstens mit speziellen Ausnahmen (s. w. u.) erfüllt sind. Immerhin ist es dankenswert, daß, von früheren beschränkteren Untersuchungen abgesehen, sich in neuester Zeit STENGER[1] und W. KÖNIG[2] der Prüfung der Theorie unterzogen haben. Sie benutzten als Material Kalkspat und Quarz, gaben dem Kristall die Kugelform, arbeiteten im gleichförmigen Felde und prüften die Richtigkeit der obigen Formeln für das Drehungsmoment, das durch die Torsion unifilarer Aufhängung oder die Schwerkraft bifilarer Aufhängung äquilibriert wurde, sowie für die Schwingungsdauer. Nach letzterer Formel muß die Größe $1/t^2 - 1/t_0^2$ caeteris paribus 1. mit $\sin^2\vartheta$, 2. mit $\mathfrak{H}^2$ und 3. mit $v$ proportional sein. Die Proportionalität mit $\sin^2\vartheta$, die sich bei den ersten Versuchen STENGERS nicht herausgestellt hatte, wurde zuerst von KÖNIG und dann auch von STENGER, der seinen anfänglichen Apparat fehlerhaft befunden hatte, erwiesen, was nicht ganz leicht ist, da sich der Winkel $\vartheta$ bei so kleinen Kugeln nur sehr mühsam und mit einer gewissen Unsicherheit bestimmen läßt. Die Proportionalität der Größe mit $\mathfrak{H}^2$ hat KÖNIG direkt geprüft, während STENGER in seiner ersten Arbeit nur mit einer und derselben Feldstärke arbeitete und in der zweiten den Einfluß von $\vartheta$ und $\mathfrak{H}$ gemeinschaftlich untersuchte. Das Ergebnis ist für Kalkspat mit fast absoluter Sicherheit, für Quarz mit großer Wahrscheinlichkeit die Richtigkeit der THOMSONschen Theorie, also die Unabhängigkeit der Suszeptibilität, oder richtiger gesagt, der Differenz der beiden Suszeptibilitäten von der magnetisierenden Kraft, die bei STENGER von 300—1000, bei KÖNIG sogar bis 3000 absoluten Einheiten variierte. Bei Quarz fand zwar KÖNIG eine kleine Abnahme für große Kräfte, sie ist aber zu unsicher, als daß man sie für erwiesen erachten könnte. Im Zusammenhange mit dem Ergebnis oben auf S. 283 sieht man also, daß wahrscheinlich alle schwach magnetischen Körper, isotrope und heterotrope, konstante oder doch nur wenig veränderliche Suszeptibilität haben. KÖNIG hat auch noch die Frage geprüft, ob die Magnetisierung des Kristalls eine magnetische Rückwirkung auf das Feld ausübt, was sich an dem Betrage der Dämpfung der Schwingungen oder durch die Differenz der aus den Schwingungen und aus den Ablenkungen ermittelten Zahlenwerte zu erkennen geben müßte; das Ergebnis war aber negativ.

Soweit die Schwingungsformel. Die Formel für das Drehungsmoment in abgelenkter Lage hat nur STENGER geprüft; für den Einfluß von $\vartheta$ und $\mathfrak{H}$ ergibt sich nichts Neues, dagegen erlaubt sie auch noch den Einfluß des Winkels $\varphi$ zu prüfen, also zu untersuchen, ob das Drehungsmoment der zur Äquilibrierung erforderlichen Torsion mit $\sin\varphi\cos\varphi$, oder mit $\sin 2\varphi$ proportional ist; natürlich kann man auch hierauf, wenn man künstliche Torsion hervorruft, die Schwingungsmethode anwenden. Beide Male fand sich wiederum die Theorie vollauf bestätigt.

**Die wichtigsten allgemeinen Resultate.** Zunächst mögen diejenigen Ergebnisse angeführt werden, die lediglich den paramagnetischen ($p$) oder diamagnetischen ($d$), positiven (+) oder negativen (—) Charakter des betreffenden Kristalls resp. die Reihenfolge der kristallographischen Achsen ($a > b > c$) be-

[1] F. STENGER, Wied. Ann. **20**. S. 304. 1883; **35**. S. 331. 1888. — [2] W. KÖNIG, Wied. Ann. **31**. S. 273. 1887; **32**. S. 222. 1887.



züglich ihrer Magnetisierbarkeit feststellen. Die meisten Angaben stammen von PLÜCKER und BEER sowie von GRAILICH und VON LANG[1] her.

Einachsige Kristalle.

| Hexagonal oder rhomboedrisch | | | Tetragonal | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Eisenspat, $FeCO_3$ | *p* | + | Quecksilberchlorür, $Hg_2Cl$ | *d* | — |
| $(Ca, Fe)CO_3$ | *p* | + | Vesuvian | *p* | — |
| $(Mg, Fe)CO_3$ | *p* | + | $(NH_4)Cl \cdot CuCl \cdot 2H_2O$ | *p* | — |
| Turmalin | *p* | — | $NiSO_4 \cdot 6H_2O$ | *p* | — |
| Beryll | *p* | — | Wulfenit | *d* | + |
| Dioptas | *p* | — | Zirkon | *d* | — |
| Kalkspat | *d* | + | $H_2(NH_4)AsO_4$ | *d* | — |
| $NaNO_3$ | *d* | + | $Hg(CN)_2$ | *d* | — |
| Wismut | *d* | — | Mellit | *d* | — |
| Antimon | *d* | — | Ammoniumkupferchlorid, | | |
| Arsen | *d* | — | $2(NH_4)CuCl_4 + 2H_2O$ | *p* | + |
| Eis | *d* | — | Magnesiumplatincyanür, | | |
| Korund $Al_2O_3$ | *p* | + | $MgPtCy_4 + 7H_2O$ | *d* | — |
| Beryll, $Be_3Al_2Si_6O_{18}$ | *p* | — | Zinnstein, $SnO_2$ | *p* | + |
| Unterschwefelsaurer Kalk, | | | Rutil, $TiO_2$ | *p* | + |
| $CaS_2O_4 + 4H_2O$ | *d* | + | Phosphorsaures Ammoniak, | | |
| Nickel- / Kobalt- Siliziumfluorid | *p* | + | $H_2NH_4PO_4$ | *d* | — |
| | | | Phosphorsaures Kali, | | |
| | | | $H_2KPO_4$ | *d* | — |
| | | | Arsensaures Kali, $H_2KAsO_4$ | *d* | — |
| | | | Harnstoff, $CH_4N_2O$ | *d* | — |

Einige dreiachsige Kristalle verhalten sich nach zwei dieser Achsen ziemlich gleich stark magnetisch, so daß sie als nahezu einachsig betrachtet werden können: unter ihnen ist Eisenvitriol *p* +, Bernsteinsäure *d* +, Borax *d* —, Kaliumnickelcyanid *d* —.

Rhombisches System.

Die älteren Angaben von PLÜCKER, KNOBLAUCH und TYNDALL sind wegen mangelnder Analyse unsicher und überdies meist nicht auf die Achsen bezogen. Die folgenden Angaben rühren von GRAILICH und v. LANG her; auch hier fehlt bei einigen Stoffen die Analyse.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Magnesiumcadmiumchlorid | $MgCl_2 \cdot 2CdCl_2 \cdot 12H_2O$ | *d* | *bac* |
| Nickelcadmiumchlorid | $NiCl_2 \cdot 2CdCl_2 \cdot 12H_2O$ | *p* | *bac* |
| Kobaltcadmiumchlorid | $CoCl_2 \cdot 2CdCl_2 \cdot 12H_2O$ | *p* | *bac* |
| Kaliumeisencyanid | | *p* | *bca* |
| Unterschwefelsaures Natrium | $Na_2S_2O_6 \cdot 2H_2O$ | *d* | *acb* |
| Ammoniumsulfat | $(NH_4)_2SO_4$ | *d* | *bca* |
| Kaliumsulfat | $K_2SO_4$ | *d* | *bca* |
| Kaliumchromat | $K_2CrO_4$ | *d* | *bca* |
| Saures Kaliumsulfat | $KHSO_4$ | *d* | *abc* |
| Anhydrid | | *d* | *abc* |
| Baryt | | *d* | *cab* |
| Cölestin | | *d* | *cab* |

[1] J. GRAILICH und V. v. LANG, Wien. Sitz.-Ber. **32**. S. 43. 1858. — V. v. LANG, Wien. Ber. **108**. (2a) 557. 1900.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Magnesiumsulfat | $MgSO_4 \cdot 7 H_2O$ | *d* | *c b a* |
| Zinksulfat | $ZnSO_4 \cdot 7 H_2O$ | *d* | *c b a* |
| Nickelsulfat | $NiSO_4 \cdot 7 H_2O$ | *p* | *c b a* |
| Magnesiumchromat | $MgCrO_4 \cdot 7 H_2O$ | *d* | *c b a*[1] |
| Arragonit | | *d* | *b c a* |
| Salpeter | | *d* | *b c a* |
| Uranylnitrat | $UO_2(NO_3)_2 \cdot 6 H_2O$ | *d* | *b c a* |
| Topas | | *d* | *a b c* |
| Staurolit | | *p* | *a c b* |
| Lithiumacetat | $Li(C_2H_3O_2) \cdot 2 H_2O$ | *d* | *b c a* |
| Bariumformiat | $Ba(CHO_2)_2$ | *d* | *a c b* |
| Strontiumformiat | $Sr(CHO_2)_2 \cdot 2 H_2O$ | *d* | *b c a* |
| Zitronensäure | $C_6H_8O_7 \cdot H_2O$ | *d* | *b a c* |
| Natriumnitrat | $Na_3C_5H_6O_7 \cdot 5 H_2O$ | *d* | *a b c* |
| Kaliumnatriumtartrat | $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4 H_2O$ | *p* | *b c a* |

Monoklines System.

Nach PLÜCKER sind hier magnetisch: Diopsid und Kaliumferricyanid (Achse *b* [010] am stärksten magnetisch) sowie Kupferformiat und Kupferacetat (Achse mittelstark magnetisch); diamagnetisch: unterschwefligsaures Natrium (Achse am stärksten magnetisch) sowie Natriumacetat und Bleiacetat (Achse am schwächsten magnetisch).

AMBRONN[2] hat durch Dehnung heterotrop gemachte Gelatineplatten untersucht und gefunden, daß sie sich mit der Dehnungsrichtung äquatorial einstellen.

**Zahlenmäßige Ergebnisse.** Für das Folgende ist in noch höherem Maße als für das Voranstehende auf die Schwierigkeit hinzuweisen, welche kristallmagnetische Versuche infolge der Geringfügigkeit der in Betracht kommenden Kräfte bereiten. Insbesondere muß auf peinlichste Sauberkeit und den Ausschluß selbst kleiner Fehlerquellen gehalten werden, da es sich hier nicht bloß wie bei isotropen schwach magnetischen Körpern um kleine Größen, sondern sogar nur um deren Differenzen in verschiedenen Richtungen handelt. Vor allen Dingen darf natürlich kein Eisenstaub auf den Kristall kommen, und das Gehänge muß mit Sorgfalt magnetisch unwirksam gewählt werden; aber auch die feuchte Hand kann schon das Ergebnis völlig umgestalten.

Die älteren Experimentatoren arbeiteten im ungleichförmigen Felde eines Magnetpoles und maßen die Abstoßung, teils indem sie den Ablenkungswinkel bestimmten, teils indem sie die Ablenkung durch Torsion kompensierten. Als Verhältnis der Abstoßungen parallel und senkrecht zur Achse fand für Wismut HANKEL[3] 67 : 100, TYNDALL[4] 71 : 100; für Kalkspat TYNDALL im Mittel aus zwei recht gut übereinstimmenden Zahlen 100 : 91, für Eisenspat 100 : 81. Auch ROWLAND und JACQUES[5] benutzten ein veränderliches, wenn auch symmetrisches Feld, bestimmten aber nicht die Abstoßung, sondern die Schwingungsdauer; leider sind die erhaltenen Zahlen infolge irrtümlicher Berechnung dem Vorzeichen und der Größenordnung nach offenbar falsch[6]. STENGER und KÖNIG[7] endlich benutzten gleichförmige Felder und erhielten somit aus den obigen Formeln die Differenz $\varkappa - \varkappa'$ der beiden Suszeptibilitäten parallel und senkrecht zur Achse. Für Kalkspat ist $\varkappa < \varkappa'$ (algebraisch genommen), also $\varkappa - \varkappa'$ negativ, für $(\varkappa' - \varkappa) \cdot 10^{10}$ ergaben sich folgende Werte:

[1] Von V. v. LANG neuerdings berichtigt. — [2] H. AMBRONN, Ber. Sächs. Ges. 1891. — [3] G. HANKEL, Ber. Sächs. Ges. d. Wiss. 1851. S. 99. — [4] J. TYNDALL, Phil. Mag. (4) **2**. S. 174. 1851; Pogg. Ann. **83**. S. 397. — [5] ROWLAND u. JACQUES, Sill. Journ. (3) **18**. S. 360. 1879. — [6] Vgl. A. v. ETTINGSHAUSEN, Wied. Ann. **17**. S. 274. 1882. — [7] F. STENGER, a. a. O. — W. KÖNIG, a. a. O.

| König | | Stenger | |
|---|---|---|---|
| Kugel 1 . . . . | 1080 | Kugel 2 . . . . | 803 |
| „ 2 . . . . | 1168 und 1148 | „ 3 . . . . | 900 |
| „ 3 . . . . | 1067 und 1083 | „ 5 . . . . | 788 |
| | | Parallelepiped . . | 797 |

Die Zahlen sind, wie man sieht, beträchtlich verschieden; ob dies auf Versuchsfehler oder auf Materialverschiedenheiten zurückzuführen sei, dürfte sich noch nicht entscheiden lassen. Was die beiden Suszeptibilitäten $\varkappa$ und $\varkappa'$ selbst betrifft, so kann man sie durch Kombination der Tyndallschen Verhältnismessung und der Königschen Differenzmessung ableiten, muß dann aber berücksichtigen, daß alle Beobachtungen in Luft angestellt sind, was zwar auf die Differenz keinen, wohl aber auf das Verhältnis einen Einfluß hat. Nach Königs Berechnung würde man hiernach für die beiden Suszeptibilitäten des Kalkspats in Luft

$$(\varkappa) = -1{,}25 \cdot 10^{-6}\ ,\quad (\varkappa') = -1{,}14 \cdot 10^{-6}$$

erhalten. Für Quarz sind die Zahlen, weil noch wesentlich kleiner, auch noch beträchtlich unsicherer. König findet für zwei Kugeln 60,2 resp. 63,6, Stenger 43 bis 55 für $(\varkappa' - \varkappa) \cdot 10^{10}$.

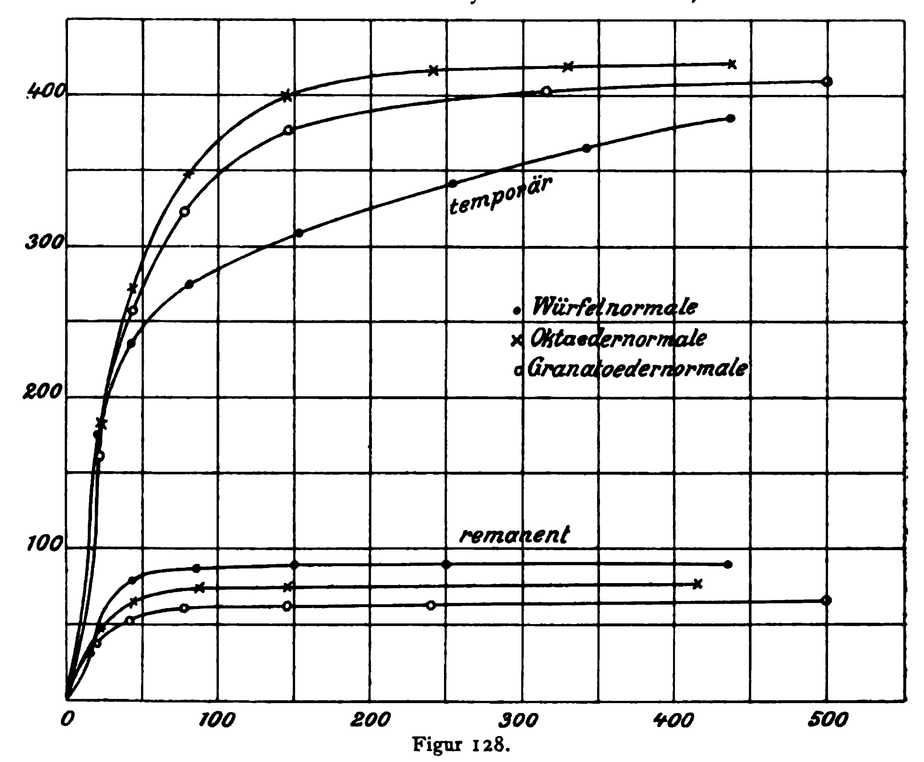
Über das Verhalten des Bergkristalls liegt auch eine Arbeit von Tumlirz vor, deren Resultate zu eigentümlich sind, um nicht noch der Bestätigung und ev. anderer Erklärung zu bedürfen, die aber jedenfalls erwähnt zu werden verdienen. Als nämlich eine vorher als diamagnetisch erkannte Quarzplatte in das homogene Feld gebracht wurde, stellte sie sich mit der Hauptachse unter $60^0$ gegen die Feldrichtung ein, und bei Umkehrung des Stromes begab sie sich in dieselbe Einstellung nach der anderen Seite. Nach der Schlußfolgerung des Verfassers muß hiernach der Kristall eine dauernde Polarität erworben haben, und ein weiterer Versuch zeigte, daß diese Polarität nicht diamagnetischen, sondern paramagnetischen Charakters war. Hinsichtlich der weiteren Ausführungen muß auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.

**Ferromagnetische Kristalle.** Die wichtigste an ferromagnetischem, heterotropem Material angestellte Experimentaluntersuchung ist die von Weiss[1]; sie betrifft den Magnetit (Magneteisenstein) und sie ist es, die zu den besprochenen Theorien von Voigt, Sano, Wallerant und Beckenkamp die Anregung gegeben hat, namentlich infolge ihres Fundamentalresultats, wonach sich der Magnetit, obwohl er dem regulären System angehört, doch in magnetischer Hinsicht nicht isotrop verhält, was er doch nach der Thomsonschen Theorie tun müßte. Im einzelnen ist über die Arbeit von Weiss folgendes zu sagen. Aus einem und demselben Kristall wurden Stäbe parallel zu den binären, ternären und quaternären Achsen, also in der Richtung der Granatoeder-, Oktaeder- und Würfel-Normale, geschnitten und nach der ballistischen Methode untersucht. Die Magnetisierung erwies sich am stärksten für die ternäre, nur wenig schwächer für die binäre, dagegen wesentlich schwächer für die quarternäre Achse. Für jene beiden Richtungen tritt in ziemlich übereinstimmender Weise Annäherung an die Sättigung ein, bei der dritten ist das nicht der Fall, viel eher scheint eine gegen die Feldstärkenachse geneigte Asymptote vorhanden zu sein. Dagegen ist die Remanenz gerade für die dritte Richtung am größten. Alle diese Verhältnisse sind aus Figur 128 zu ersehen, die sich auf einen Kristall von Brozzo bezieht. — Zur weiteren Prüfung und zur Ausdehnung der Beobachtung auf Richtungen außerhalb der Symmetrieachsen wurden dann noch Kreisscheiben parallel den Flächen des Würfels, Oktaeders und Granatoeders hergestellt, im konstanten Felde plötzlich um einen gemessenen Winkel gedreht und die Differenz der Magnetisierung in

[1] P. Weiss, Thèses prés. à la Fac. d. Sciences, Paris 1896; J. de Phys. **5**. 435. 1896; Z. f. Krist. **29**. 411 u. 690.

der Anfangs- und Endrichtung wieder ballistisch gemessen, woraus sich die Magnetisierung als Funktion der Richtung ergibt. Trägt man nun diese Größen in Form von Rosetten von einem Punkte aus auf, so erhält man Kurven bzw. Oberflächen von der Art der für den Elastizitätsmodul bekannten; nur die Schnitte parallel zu den Oktaederflächen sind Kreise.

Hält man diese Tatsachen mit der VOIGTschen Theorie zusammen, so findet man eine völlig befriedigende Übereinstimmung. Leitet man z. B. für den Fall der Würfelfläche die *l*- und *t*-Kurven ab, so erhält man durchaus den Habitus der theoretischen, und zwar mit einem Amplitudenverhältnis von ungefähr 4 : 1, so daß mindestens die Glieder 2. Ordnung (also 5. Grades) erfordert werden; da sie aber außerdem die erwähnte Dissymmetrie aufweisen, muß man noch die




Figur 128.

Glieder 3. Ordnung (7. Grades) heranziehen. Ebenso verhält es sich bei der Granatoederfläche; und die Kreisnatur der Kurven bei der Oktaederfläche stimmt ebenfalls mit der theoretischen Kleinheit der höheren Glieder bei dieser überein. — Eine genaue Übereinstimmung, besonders auch in quantitativer Hinsicht, darf man nicht verlangen, weil die Versuche von WEISS starke Remanenz und, was schließlich noch zu erwähnen ist, Hysteresis ergeben haben.

Sonst sind noch Beobachtungen von WEISS[1] am Pyrit und am Pyrrhotin sowie von WESTMAN[2] am Hämatit zu erwähnen. Pyrit-Schwefelkies, auch Eisenkies genannt, $FeS_2$, regulär kristallisierend — läßt sich nur in einer bestimmten Richtung magnetisieren. — Bei Pyrrhotin — Magnetkies, $Fe_7S_8$, hexagonal — ist eine Magnetisierung in der Hauptachse fast unmöglich, in der Basis 380 mal so stark. — Die Magnetisierung des Hämatit — Eisenglanz, $Fe_2O_3$ rhomboedrisch — beträgt senkrecht zur Achse 1,8 bis 1,9, dagegen parallel nur 0,05 bis 0,09; im Gegensatz zu diesem großen Unterschied war die Magnetisierung parallel einer Nebenachse und parallel einer Zwischenachse fast gleich; die Koerzitivkraft ist ziemlich groß.

[1] P. WEISS, a. a. O. — J. de Phys. 8. 542. 1899. — [2] J. WESTMAN, Upsala Univ. Arsskr. 1896.

# Beziehungen des Magnetismus zur Mechanik.

Von FELIX AUERBACH.

---

**Übersicht über die Beziehungen des Magnetismus zu anderen Erscheinungen überhaupt.** Im Laufe der Zeit hat sich herausgestellt, daß es kaum eine Klasse physikalischer Erscheinungen gibt, zu welcher der Magnetismus nicht eine direkte oder indirekte Beziehung hätte. Eine der wenigen Ausnahmen hiervon bildet die Gravitation, deren Beziehungen zum Magnetismus nach den vielfachen Versuchen von FARADAY u. a. rein negativer Natur sind, wenigstens, wenn man davon absieht, daß die magnetischen Kräfte in vielen Fällen das Gewicht der Körper scheinbar modifizieren, worauf doch z. B. die Anwendung aller Wägungsmethoden (s. o.) beruht. Im übrigen sind Beziehungen des Magnetismus zur Elastizität, Festigkeit und Kristallisation, zu den Bewegungen, zum Schall, zur Wärme, zum Chemismus, zum Licht und zur statischen und dynamischen Elektrizität aufgefunden worden, und zwar sowohl Einflüsse der in diesen Gebieten wirksamen Kräfte auf den Magnetismus, als auch umgekehrt des Magnetismus auf diese Erscheinungen, eine Wechselwirkung, die nicht nur im großen und ganzen zur Illustrierung des Prinzips von der Erhaltung der Energie dient, sondern vielfach auch quantitativ erlaubt, den einen Einfluß theoretisch vorherzubestimmen, wenn der umgekehrte experimentell ermittelt worden ist. Die Erscheinungen, von denen hier die Rede sein wird, sind teils an sich außerordentlich interessant, teils tragen sie zur Klärung der Anschauungen über den Magnetismus selbst wesentlich bei; sie sind demgemäß auch mit solchem Eifer und von so vielen Seiten bearbeitet worden, daß hier nur eine ganz kleine Auswahl des Wichtigsten gegeben werden kann. Dabei sollen die Beziehungen des Magnetismus zur Elektrizität ausgeschlossen werden, weil diese in dem späteren Artikel „Elektromagnetismus“ gesonderte Darstellung finden werden.

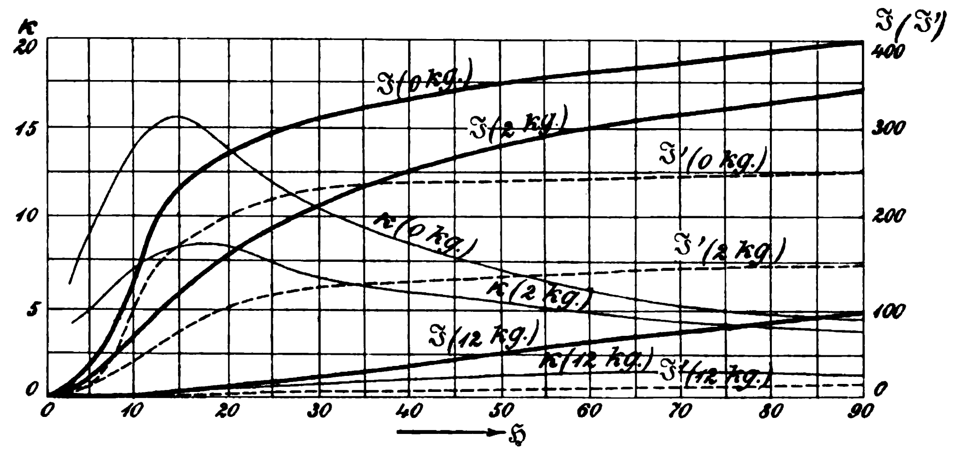
## 1. Beziehung zum longitudinalen Zug und Druck.

**a) Einfluß von Längsspannung auf den Magnetismus.** Die Beobachtung, daß ein Eisenstab, wenn er im magnetischen Felde einem Längszuge unterworfen wird, seinen Magnetismus ändert, ist zuerst von MATTEUCCI[1] gemacht worden; später haben sich WERTHEIM[2], VILLARI[3], W. THOMSON[4], TOMLINSON[5], EWING[6] u. a.[7] hiermit beschäftigt, und die Erscheinung wurde auch bei Nickel und Kobalt konstatiert.

---

[1] C. MATTEUCCI, Compt. rend. 1847; Ann. Chim. Phys. **53**. S. 416. 1858. — [2] A. WERTHEIM, Compt. rend. **35**. S. 702. 1852; Ann. Chim. Phys. **50**. S. 385. 1857. — [3] . VILLARI, Pogg. Ann. **126**. S. 87. 1868. — [4] W. THOMSON, Proc. R. Soc. **23**. S. 445 u. 473. 1875; **27**. S. 439. 1878; Trans. R. Soc. **166** (2) S. 693. 1877; Reprint II. S. 332. — [5] H. TOMLINSON, Phil. Mag. (5) **29**. S. 394. 1890. — [6] J. A. EWING, Trans. R. Soc. 1885 (2) S. 523; bes. Kap. 3, 6, 7; Magn. Ind. S. 182. — [7] Vgl. auch die In.-Diss. von G. KLINGENBERG, Berlin 1897.

Im Nickel erwies sie sich bei den ersten Untersuchungen sogar verhältnismäßig am einfachsten, und es ist daher gut, mit ihm zu beginnen. Die Versuchsmethodik ist meist sehr einfach, der Apparat besteht aus der Magnetisierungsspirale, in welcher der Stab oder der Draht steckt, einer Induktionsspirale zur Messung des Magnetismus resp. seiner Änderungen und einer Zug- resp. Druckvorrichtung. Beim Nickel wird der Magnetismus durch Längszug vermindert, und zwar desto mehr, je kräftiger der Längszug ist. Dies gilt vom temporären Magnetismus ebenso wie vom remanenten, vom letzteren sogar quantitativ in noch höherem Grade; die Figur 129 zeigt dies besser als Zahlenreihen, und sie läßt auch erkennen, daß die Abweichung der Größe $\varkappa$ von der Konstanz, also die Wölbung ihrer Kurve nach oben, immer kleiner wird, und daß mit wachsender Belastung der Inflexionspunkt der Kurve immer weiter nach rechts rückt, d. h. der Maximalwert von $\varkappa$ erst bei einer immer größeren Kraft eintritt; man kann aus alledem schließen, daß die Unterschiede des Magnetismus in stärkeren Feldern immer kleiner werden. Umgekehrt hat Längsdruck auf Nickel zur Folge, daß

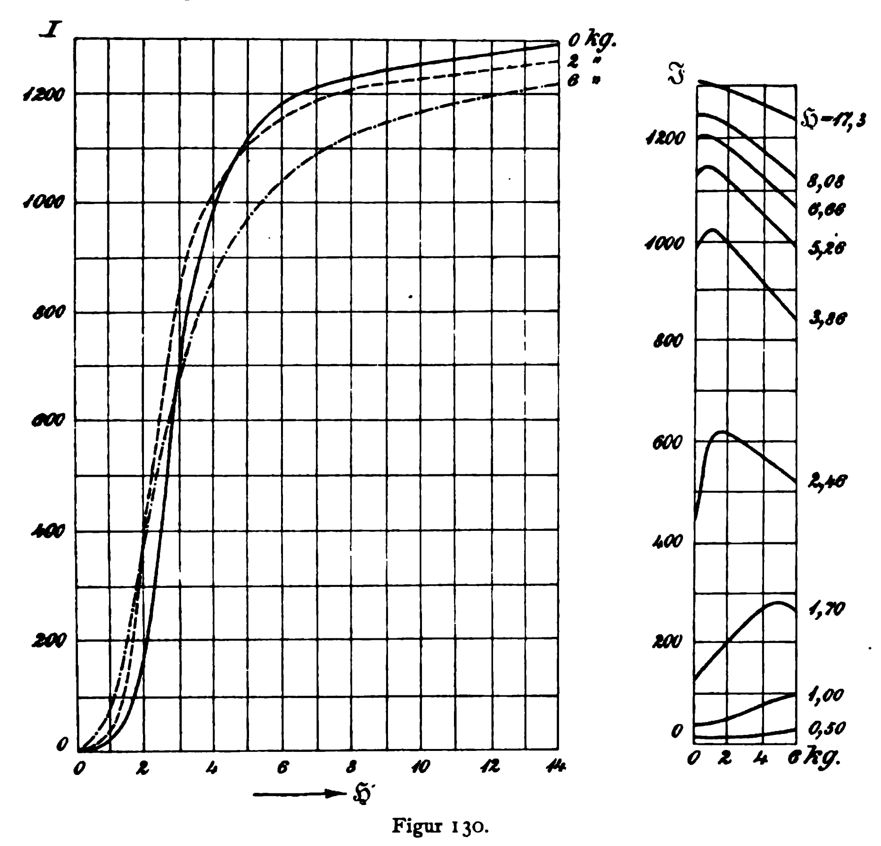



Figur 129.

sich der Magnetismus steigert, das Maximum von $\varkappa$ früher eintritt und das An- und Abschwellen von $\varkappa$ stärker wird. Mit wachsender Feldstärke zeigt sich hier noch deutlicher, daß die Kurven sich nähern, und es ist auch einleuchtend, daß im Zustande der Sättigung der Magnetismus durch den Längsdruck überhaupt nicht mehr gesteigert werden kann. Die Kurven für hohe Belastungen steigen steil an und biegen dann fast scharf in die horizontale Richtung um, der Sättigungszustand tritt also sehr plötzlich ein. Statt der bisher betrachteten Magnetisierungskurven für verschiedene Belastungen kann man sich durch eine kleine Änderung des Beobachtungsverfahrens auch Kurven verschaffen, welche den Magnetismus (Ordinate) als Funktion der Belastung (Abszisse) darstellen, und zwar für verschiedene Feldstärken; bei Zugbelastung fallen sie von links oben nach rechts unten, bei Druckbelastung steigen sie von links unten nach rechts oben.

Beim Eisen ist die Erscheinung verwickelter. Ob Längsdruck hier den Magnetismus steigert oder schwächt, hängt von der Stärke der ursprünglich vorhandenen Magnetisierung ab: schwache Magnetisierung wird gesteigert, starke verringert. Jedoch gilt dies nur für Zugbelastung bis zu einer gewissen Grenze; bei weitergetriebener Belastung wird auch schon schwacher Magnetismus geschwächt. Die obige Umkehrung der Erscheinung beim Übergang von schwachen zu starken Magnetisierungen nennt man nach ihrem Entdecker: „VILLARIsche Wirkung“, den Punkt, wo sie eintritt, VILLARIschen kritischen Punkt. Man kann diesen Punkt verschieden definieren, je nachdem man ihn als kritischen

Zug oder als kritische Magnetisierung auffaßt; im ersten Falle ist er eine Funktion der Magnetisierung, im letzteren eine Funktion des Zuges. Aus den beiden Teilen der Figur 130 geht dies deutlich hervor. Die VILLARIsche Wirkung hat nämlich zur Folge, daß die Magnetisierungskurven für verschiedene Zugbelastungen beim Eisen sich schneiden, wie die Figur links zeigt; im untersten Teile liegt die Kurve für die stärkste Belastung, weiterhin die für die mittlere, zuletzt die für den unbelasteten Draht zu oberst; die Schnittpunkte sind die kritischen Magnetisierungen als Funktion der Zugbelastung. In der rechten Hälfte der Figur ist das merkwürdige Verhalten anders veranschaulicht, nämlich durch die schon



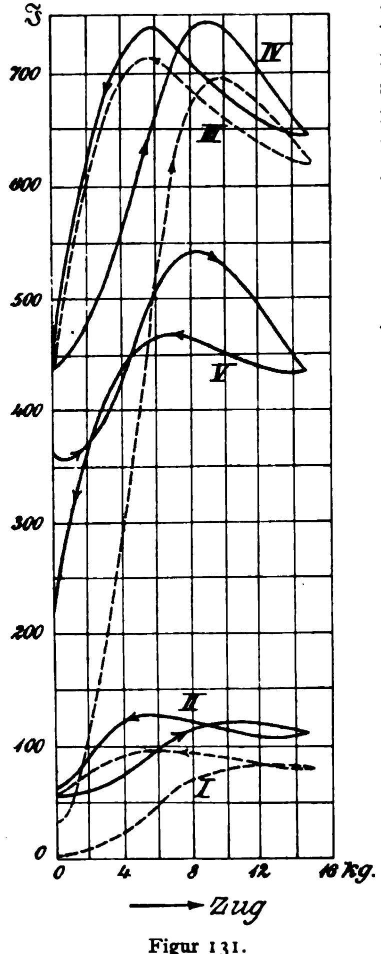

Figur 130.

oben erwähnten Kurven, welche, für verschiedene Feldstärken, die Magnetisierung als Funktion der Belastung darstellen; die unterste dieser Kurven, die der geringsten Feldstärke entspricht, steigt durchweg, die oberste fällt durchweg, die dazwischenliegenden steigen erst und fallen dann; für jede Feldstärke gibt es zunächst eine bestimmte Belastung, bei welcher der Magnetismus am größten ist, und dieser Belastungswert rückt mit wachsender Feldstärke immer weiter abwärts. Wenn dann die Kurve wieder fällt, wird sie unter Umständen bis auf ihr Anfangsniveau herabsinken: dies ist der kritische Zug als Funktion der Magnetisierung. Wie sich der kritische Punkt mit der Belastung und außerdem auch mit der Temperatur ändert, hat des näheren TOMLINSON[1] gezeigt. Auch der remanente Magnetismus wird, wenn die vorausgegangene temporäre Magnetisierung schwach war, durch Zug erhöht, dagegen vermindert, wenn sie stark war. Bei gehärtetem Eisen sind die Änderungen des Magnetismus analog, aber wesentlich größer. Die

[1] H. TOMLINSON, Phil. Mag. (5) **29**. S, 394; Lum. él. **37**. S. 40. 1890.

Kurven in der rechten Hälfte der obigen Figur wurden übrigens nicht etwa erhalten, indem man im magnetischen Felde die Belastung erhöhte, sondern gerade wie die Kurven der linken Hälfte, indem man nach der Belastung das Feld herstellte und wachsen ließ; erstere wurden aus letzteren einfach umgerechnet.

Wenn man direkt Versuche der angedeuteten Art anstellt, erhält man zwar ähnliche Kurven, wie die oben rechts sichtbaren, sie sind aber durch verschiedene Umstände kompliziert, und der kritische Punkt erscheint infolgedessen nicht eindeutig definiert. Erstens ruft nämlich eine erstmalige Belastung oder Entlastung im magnetischen Felde besondere Wirkungen hervor; dehnt man einen Stab, der sich in einem nicht zu starken Felde befindet, nach und nach, so steigt sein Magnetismus oft bis auf das vielfache seines ursprünglichen Wertes; aber dasselbe tritt auch dann ein, wenn man einen vorher auf Zug belasteten Draht im Felde nach und nach entlastet, auch hier wächst der Magnetismus; man hat es also hier nicht mit einer Wirkung zu tun, die mit der Ursache das Vorzeichen wechselt, sondern sich als symmetrische Funktion jedes elastischen Eingriffs kennzeichnet. Erst wenn man den Draht mehrmals belastet und entlastet hat, verliert sich diese besondere Erscheinung. Aber auch dann bleibt noch, und das ist der zweite der erwähnten Punkte, eine ziemlich kräftige magnetisch-elastische Hysteresis geltend, d. h. derselben Belastung entsprechen ganz verschiedene Magnetismen, je nachdem man sich bei der zyklischen Belastung und Entlastung auf dem Hinwege oder Rückwege befindet. Man erhält infolgedessen Hysteresis-Schleifen, aber diese sind nicht so einfach, wie die im Art. Magnetische Induktion S. 218ff. betrachteten; denn während die beiden Zweige der letzteren rein aufsteigend bzw. absteigend sind, ist hier jeder Zweig aus einem auf- und einem absteigenden Zweige zusammengesetzt, die Kurve schneidet sich also selbst. Die Figur 131 zeigt unten die Schleife I für einen erstmaligen Belastungszyklus und II für einen späteren; oben entsprechend für ein stärkeres Feld III und IV; I und III sind ganz offene, II und IV nahezu geschlossene Kurven; endlich ist V die Kurve der Remanenz nach der größeren Feldstärke.



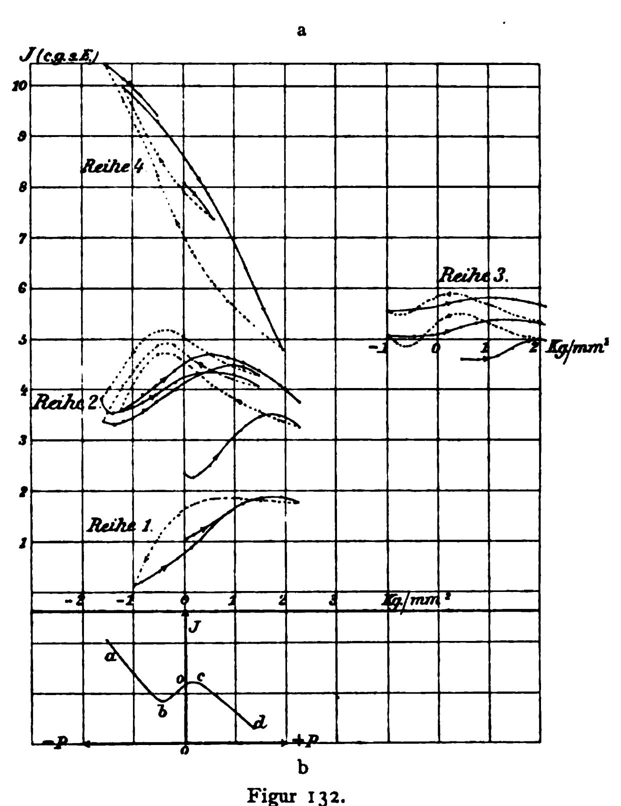
Figur 131.

Man kann übrigens die Wirkung der Hysteresis fast vollständig aufheben, wenn man den Versuchskörper häufigen Erschütterungen aussetzt (vgl. hierzu auch w. u.). Die meisten der erwähnten Erscheinungen kehren sich bei Anwendung von Longitudinaldruck um.

Sieht man von diesen und anderen Sondererscheinungen ab, so würde also in der Hauptsache ein prinzipieller Unterschied zwischen Eisen und Nickel bestehen, für den man vergeblich nach einer Ursache sucht. Diese Erwägung hat HEYDWEILLER[1] veranlaßt, die Frage wieder aufzunehmen. Das Verhalten des Eisens ist nämlich vom Standpunkte der Theorie der Molekularmagnete, ins-

[1] A. HEYDWEILLER, Würzb. Sitz. Ber. 1893. 11. März; Wied. Ann. **52**. 462. 1894.

besondere der EWINGschen Vorstellungen (S. 164) leicht verständlich. Denn die Zugkraft wird einerseits das Umkippen der Gruppen aus der ersten in die zweite Gleichgewichtslage befördern, sie wird aber gleichzeitig infolge der mechanischen Deformation das magnetische Moment jeder Gruppe in der zweiten Gleichgewichtslage herabmindern; solange also noch eine größere Anzahl von Gruppen in der ersten Lage vorhanden ist, d. h. bei nicht zu großer magnetisierender Kraft, wird die Zugkraft den Gesamtmagnetismus verstärken, bei größerer Kraft, wenn die Mehrzahl der Gruppen schon umgekippt ist, wird dagegen der ungünstige Einfluß überwiegen. Ist diese Vorstellung richtig, so ist nicht einzusehen, warum die Erscheinung beim Nickel fehlen solle. In der Tat konnte HEYDWEILLER sie auch hier — nach Überwindung mannigfacher Schwierigkeiten — konstatieren (magnetometrische Methode mit astatischem Nadelpaar). Der Unterschied gegenüber dem Eisen ist nur der, daß die Umkehr hier bei sehr viel kleineren Feldstärken, also auch Magnetisierungen, eintritt als beim Eisen und deshalb bisher übersehen worden war. Die Ergebnisse werden, besser als durch die zahlreichen Tabellen, durch die beistehend wiedergegebenen Figuren 132a und b veranschaulicht; Abszissen sind die Zug- und Druckkräfte (letztere negativ) pro qmm, Ordinaten die Magnetisierungen, die Kurven für wachsende Zugkräfte sind voll, die für abnehmende punktiert gezeichnet. Man sieht die Maxima und Minima sowie die elastisch-magnetische Hysteresis. Als typische Kurve für schwache Belastung kann man etwa die Kurve *a b c d* der Figur 132b betrachten; Maximum und Minimum werden um so flacher und drücken um so näher zusammen, je stärker die Magnetisierung wird; bei einer gewissen Stärke verschwinden sie ganz. Die Lage des der Belastung null entsprechenden Punktes *o* hängt von der Vorgeschichte des Drahtes ab, der magnetischen wie der elastischen; in der Regel liegt er unsymmetrisch. Jede Zugkraft verschiebt ihn nach rechts, jede Druckkraft nach links. Alles in allem sind die Erscheinungen bei Nickel nur quantitativ von denen beim Eisen verschieden. Dieses Ergebnis ist neuerdings von HONDA und SHIMIZU[1] angezweifelt worden; sie wiederholten die Versuche nach einer anderen Methode und vermochten keinen kritischen Punkt aufzufinden. HEYDWEILLER[2] betont aber mit Recht, daß sein positiver Befund schwerer wiege als der negative seiner Gegner und führt zur Unterstützung — außer einer Kritik

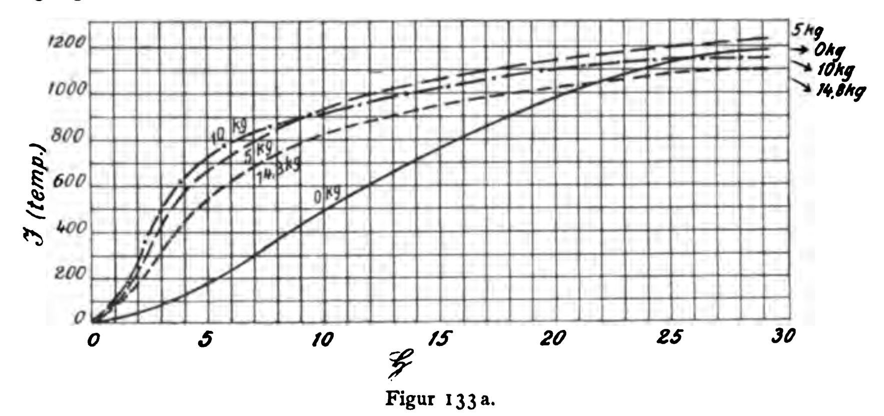



Figur 132.

[1] K. HONDA und S. SHIMIZU, Phys. Z. 5. 254. 1904. — Drude Ann. 14. 791. 1904. —
[2] A. HEYDWEILLER, Phys. Z. 5. 255. 1904.

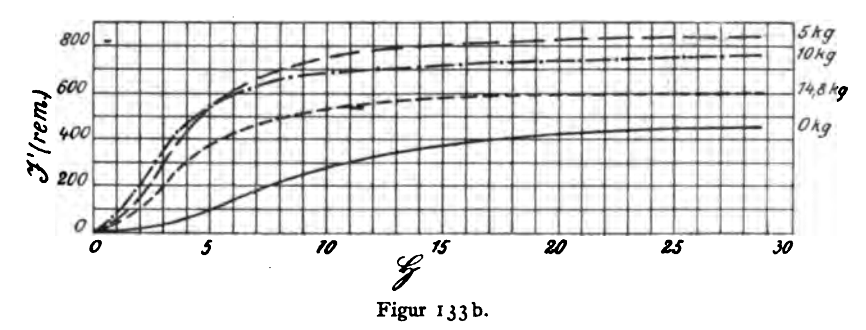
der gegnerischen Versuche — noch an, daß auch G. S. MEYER[1] den kritischen Punkt bei Nickel konstatiert habe.

Was endlich das Kobalt betrifft, so existiert hier die VILLARIsche Wirkung ebenfalls; nur sind die beiden bezüglichen Untersuchungen von CHREE[2] einerseits und von G. S. MEYER[3] andererseits nicht recht in Einklang zu bringen. Während nämlich CHREE zeigt, daß beim Kobalt Druck dieselbe Rolle spielt wie beim Eisen Zug, also schwachen Magnetismus verstärkt, starken schwächt, wobei der Übergang etwa bei einer Feldstärke von 120 stattfände, findet MEYER dieselbe




Figur 133a.

Wirkung beim Zug (so daß also Druck und Zug hier gleichsinnig wirken würden), aber bei sehr geringen Feldstärken. Hier war also weitere Aufklärung erwünscht, und sie ist, wenigstens was die Zugwirkung betrifft, von NAGAOKA und HONDA[4] geliefert worden. Es besteht nämlich ein Gegensatz zwischen gegossenem und




Figur 133b.

geglühtem Kobalt. In gegossenem Kobalt bewirkt Zug eine Verminderung der Magnetisierung in schwachen Feldern, mit wachsender Feldstärke nimmt sie ab und geht zuletzt in eine Vermehrung über; d. h. es gibt hier einen umgekehrten VILLARIschen Punkt. In ausgeglühtem Kobalt bringt Zug ebenfalls Verminderung der Magnetisierung hervor, aber diese wächst mit der Feldstärke. — Schließlich sei noch erwähnt, daß im Nickelstahl Zug die Magnetisierung vergrößert.

Bisher wurde der Einfluß untersucht, den Längszug oder Druck auf gleichzeitige Magnetisierung ausübt. Aber auch vorangegangene Längsdeformation übt einen solchen Einfluß aus, und zwar selbst dann, wenn sie rein temporären Charakters war, wenn sie sich also innerhalb der Elastizitätsgrenze hielt, und der betreffende Körper sich beim Beginn der Magnetisierung wieder in seinem scheinbar

[1] G. S. MEYER, In.-Diss. Straßbg. 1895. — Wied. Ann. **59**. 134. 1896. — [2] C. CHREE, Proc. R. Soc. **47**. 41. 1889; Trans. R. Soc. 1890. A. **329**. — [3] G. S. MEYER, Wied. Ann. **59**. 142. 1896. — [4] H. NAGAOKA und K. HONDA, Phil. Mag. **4**. 45. 1902.

ursprünglichen Zustande befindet; allerdings scheinen diese Wirkungen nur bei hartem Material erheblich zu sein. Man kann diese Wirkungen aufheben, wenn man den vorübergehend deformierten Draht vor Beginn des Magnetisierungsprozesses entweder durch abnehmende Ströme wechselnder Richtung (S. 216) behandelt, also so, als ob er magnetisch wäre und man ihn entmagnetisieren wollte, oder starken Erschütterungen aussetzt. Die folgenden Zahlen zeigen nach Ewing die Magnetisierung eines Eisendrahtes, der vor jeder Versuchsreihe mit 42 Kilo pro qmm belastet wurde; bei der ersten Reihe folgte hierauf unmittelbar die Magnetisierung, bei der zweiten wurde er erst noch „entmagnetisiert", bei der dritten erst noch erschüttert. Die letzte Spalte gibt die Überschüsse der Zahlen unter I über den Durchschnitt der Zahlen in II und III an. Wie man sieht, ist die gedachte Nachwirkung eine für die Magnetisierung günstige, und zwar zeigt sie sich am stärksten für mittlere Magnetisierungen, für starke aber so gut wie gar nicht mehr.

| $\mathfrak{H}$ | I | II | III | $\delta$ | $\mathfrak{H}$ | I | II | III | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8,62 | 176 | 149 | 150 | 27 |
| 1,15 | 8 | 5 | 5 | 3 | 11,50 | 230 | 212 | 214 | 17 |
| 2,01 | 19 | 11 | 10 | 8 | 17,25 | 321 | 314 | 314 | 7 |
| 2,87 | 40 | 19 | 17 | 22 | 23,00 | 394 | 390 | 388 | 5 |
| 4,31 | 73 | 44 | 35 | 34 | 33,12 | 472 | 472 | 471 | 0 |
| 5,75 | 110 | 78 | 70 | 36 | | | | | |

Sehr viel stärker, aber auch weit unmittelbarer verständlich ist die Nachwirkung dann, wenn die vorangegangene Beanspruchung die Elastizitätsgrenze überschritten hatte und die Deformation infolgedessen eine bleibende geworden ist. Beruht doch hierauf eine der einfachsten Methoden zur Härtung von Drähten, und ist doch schon im vorigen Artikel gezeigt worden, wie außerordentlich verschieden sich weiche und harte Eisenkörper dem Magnetismus gegenüber verhalten. Die Figuren 133a und b stellen die Verhältnisse nach Versuchen Ewings dar, und zwar a für den temporären, b für den remanenten Magnetismus. Man sieht, in wie hohem Grade mäßige Zugkräfte die Magnetisierung in schwachen Feldern erhöhen; ist dagegen die Sättigung nahezu erreicht, so wirkt die Zugkraft ungünstig; also auch hier die Villarische Erscheinung. Aber auch in schwachen Feldern tritt die Erhöhung der Magnetisierung nur dann ein, wenn die Belastung mäßig ist; zu starke Belastung wirkt in kleinen und großen Feldern ungünstig — in der Tat liegt die Kurve für 14,5 kg durchweg unter denen für 5 und 10 kg. Außerdem sieht man, daß bei der remanenten Magnetisierung die Verhältnisse in mancher Hinsicht anders liegen wie bei der temporären.

**b) Längenänderung durch Magnetisierung.** Wir betrachten nun die umgekehrte Beziehung: Wie die Längenänderung auf den Magnetismus, so hat auch die Magnetisierung auf die Länge der Körper einen Einfluß. Zuerst festgestellt wurde das von Joule[1], und seitdem hat sich eine sehr große Zahl von Forschern mit dem Problem, zunächst für die drei ferromagnetischen Metalle, beschäftigt; es muß genügen, hier die Arbeiten von A. M. Mayer, Righi, Wertheim, Beetz, Barrett, Bidwell, Berget, Lochner, Nagaoka (allein und mit Honda), Rosing, More, Bachmetjew, Knott, Klingenberg, Taylor-Jones, E. T. Jones, Rhoads, Austin, Shaw und Laws[2] anzuführen.

[1] J. P. Joule, Phil. Mag. **30.** 76 u. 225. 1847. — [2] A. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) **23.** 302. 1848; Pogg. Ann. **77.** 43. — W. Beetz, Pogg. Ann. **128.** 193. 1866. — A. M. Mayer, Phil. Mag. (4) **46.** 177. 1873. — W. F. Barrett, Phil. Mag. (4) **47.** 51. 1874; Nat. **26.** 515 u. 586. 1882. — A. Righi, Mem. di Bologna (4) **1.** 99. 1879. — S. Bidwell, Proc. R. Soc. **38.** 265. 1885; **40.** 109 u. 257. 1886; Trans. R. Soc. 1888. S. 205; Proc. R. Soc. **47.** 469. 1890;

Was zunächst die Methodik betrifft, so ist über das Magnetische nach dem früheren nicht viel zu sagen; es handelt sich also im wesentlichen um die Messung der — meist sehr kleinen — Verlängerung bzw. Verkürzung. Hier sind nun hauptsächlich drei Verfahren zu nennen: 1. die optische Methode der wandernden Interferenzstreifen (mit oder ohne Benutzung des FIZEAUschen oder ABBEschen Dilatometers und in verschiedenen Variationen); 2. die Methode des Hebels, dessen Bewegung optisch — mit Spiegel oder Prisma — beobachtet wird; 3. die Methode des elektrischen Kontaktmikrometers, dessen Berührung mit dem Stabe durch das Telephon signalisiert wird; jede der Methoden scheint für gewisse Fälle Vorzüge zu bieten, für die stetige Verfolgung zyklischer Längenänderungen ist die zweite offenbar am bequemsten, da man hier die Veränderungen gewissermaßen direkt photographieren kann. Sodann handelt es sich um die Beseitigung oder Berücksichtigung der Fehlerquellen, von denen namentlich die elektromagnetischen und die thermischen leicht die zu untersuchende Erscheinung gänzlich verdecken können. Die elektromagnetischen Einflüsse bestehen darin, daß die magnetisierende Spule die Stabenden anzieht und dadurch den Stab, je nach dem Lageverhältnis zwischen Spule und Stab und je nach der Befestigungsart des letzteren, verkürzt oder verlängert; von den bezüglichen Untersuchungen ist schon früher die Rede gewesen, und es wird im Elektromagnetismus auf sie zurückzukommen sein. Hier kann man die Wirkung entweder in Rechnung ziehen, worüber man bei NAGAOKA[1] nähere Darlegungen findet, oder man kann sie durch Anwendung sehr langer Stäbe oder noch besser von Ringen — BIDWELL — ausschließen, in welch letzterem Falle man dann aus der Änderung des großen Ringdurchmessers die Längenänderung seiner Achse berechnen muß. Die thermische Ausdehnung des Probekörpers andererseits — eine Temperaturänderung um 0,2 Grad genügt oft schon, um alles zu verwischen — pflegt man durch Umgebung des Körpers mit einer hölzernen Hülle, hauptsächlich aber dadurch herabzumindern, daß man den Strom jedesmal nur für sehr kurze Zeit (Bruchteile einer Sekunde) schließt. Am besten ist jedenfalls das von CANTONE (s. w. u.) und NAGAOKA benutzte Kompensationsverfahren, bei dem der Stab mit einem Körper aus anderem Metall derart kombiniert wird, daß gegenüber dem festen Stützmaterial Ausgleichung erfolgt. Auf diese Weise kann man zugleich noch eine dritte Fehlerquelle ausschalten, nämlich die Durchbiegung des Stabes infolge seitlicher Asymmetrien.

Als Versuchskörper dienten meist Stäbe oder Drähte, nur NAGAOKA hat, um mit der Theorie in einfacher Relation zu bleiben, auch Rotationsellipsoide untersucht.

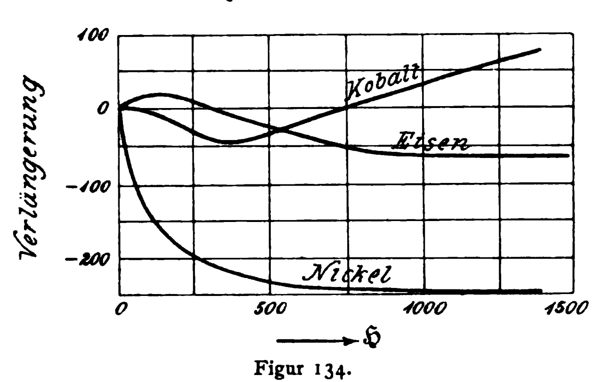
Die Ergebnisse stehen, was die älteren Versuchsreihen betrifft, zum Teil im Widerspruch miteinander. So hat schon JOULE das Gesetz ausgesprochen, daß die Längenänderung im Eisen mit dem Quadrat der Magnetisierung proportional sei, und seine Nachfolger haben mehrfach dieses Gesetz bestätigt gefunden, namentlich für schwache Felder, wo man dann auch an die Stelle der Magnetisierung die magnetisierende Stromstärke setzen kann. So fand z. B. RIGHI folgende Relativzahlen, die sich jedenfalls auf sehr schwache Felder beziehen:

---

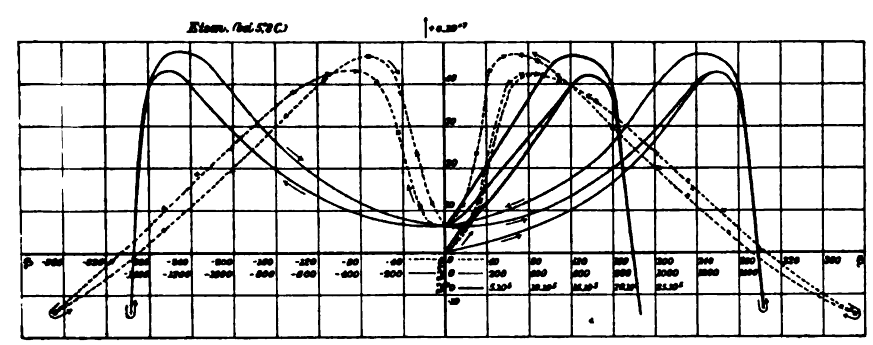
**56**. 94. 1894. — A. BERGET, C. R. **115**. 722. 1892. — S. J. LOCHNER, Phil. Mag. (5) **36**. 498. 1893. — H. NAGAOKA, Phil. Mag. (5) **37**. 131. 1894; Wied. Ann. **53**. 487. 1894. — H. NAGAOKA und K. HONDA, Phil. Mag. (5) **46**. 261. 1898; J. Coll. Science Imp. Univ. Tokyo **13**. 57. 1900; Phil. Mag. **4**. 45. 1902. — K. HONDA und S. SHIMIZU, Phys. Z. **3**. 378. 1902; Phil. Mag. **4**. 338. 1902. — B. ROSING, J. russ. phys. chem. Ges. **26**, 253. 1894. — L. T. MORE, Phil. Mag. **40**. 345. 1895. — C. G. KNOTT, Trans. Edinb. Soc. (3) **38**. 527. 1896. — G. KLINGENBERG, Inaug.-Diss. Berlin 1897. — E. TAYLOR-JONES, Proc. R. Soc. **61**. 19. 1897. — E. T. JONES, ebenda **63**. 44. 1898. — E. RHOADS, Phys. Rev. **7**. 65. 1898. — L. W. AUSTIN, ebenda **10**. 180. 1900. — SHAW und LAWS, Electrician **46**. 649 u. 738. 1901; **48**. 699 u. 765. 1902. — [1] H. NAGAOKA, Wied. Ann. **53**. 492. 1894.

| $i$ | 12,5 | 16,5 | 19,5 | 21 | 26 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $dl$ | 4,5 | 7,5 | 10,5 | 12 | 17 | 22 |
| $i^2 : dl$ | 34,7 | 36,2 | 36,3 | 36,7 | 39,8 | 43,6 |

Immerhin sieht man schon aus diesen Zahlen, daß mit wachsender Feldstärke die Verlängerung allmählich langsamer zunimmt. Nach BIDWELL andererseits wird Eisen durch schwach magnetisierende Kräfte verlängert, anfangs proportional, allmählich schwächer, und bei durchschnittlich $\mathfrak{H} = 100$ tritt das Maximum der Länge ein, wobei die Verlängerung für verschiedene Proben zwischen 0,0000025 und 0,0000050 der Länge schwankte. Dann tritt wieder Verkürzung ein, und zwar schließlich unter die ursprüngliche Länge herab, bis um etwa 0,0000070 ihres Wertes. Bei Stahl ist die Erscheinung ähnlich, aber schwächer. Bei Kobalt ist sie umgekehrt, schwache Felder bringen keine merkliche Wirkung hervor, dann tritt Verkürzung ein, diese wird bei einer gewissen Feldstärke null, und bei stärkeren Kräften tritt Verlängerung ein. Bei Nickel endlich tritt von vornherein Verkürzung ein, die sich für mäßige Feldstärken durch die Formel $dl = -18 \cdot 10^{-8} \mathfrak{H}$ darstellen läßt und bei stärkeren Kräften einem Grenzwert, etwa 0,000025 pro Längeneinheit, nähert (Fig. 134). Beim Nickel wäre also die Wirkung am einfachsten und am kräftigsten.




Figur 134.



Figur 135.

BERGET operierte mit einem 5,2 cm langen, 1,98 cm dicken Eisenstabe und fand in Feldern von 49 bis 540 Einheiten Verlängerungen von 0,000255 bis 0,000562 mm, die sich durch die Formel

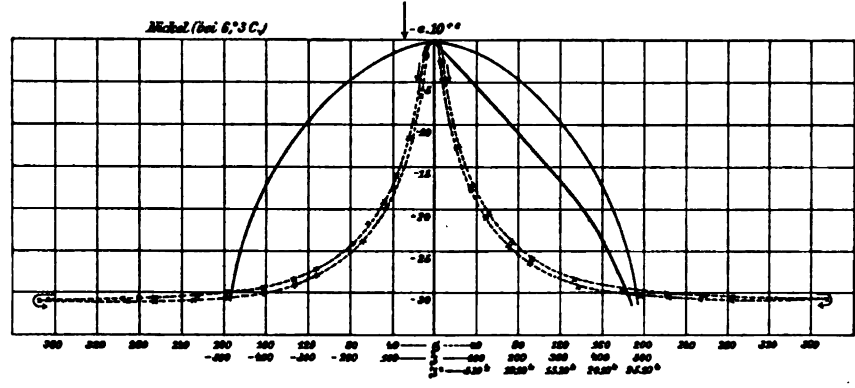
$$y = A\,(1 - e^{-\alpha x})$$

darstellen ließen. LOCHNER fand bei Eisen Zunahme bis zu einem Maximum und dann Abnahme, bei der Rückkehr Zunahme über den vorigen Maximalpunkt hinaus.

Wenn man die Drähte während der Versuche dehnt oder komprimiert, so wird dadurch die Wirkung beeinflußt; die neuesten Versuche auch hierüber rühren von BIDWELL her. Beim Eisen hat Zug zur Folge, daß die anfängliche Verlängerung kleiner und die bei größeren Kräften eintretende Verkürzung größer wird, daß also

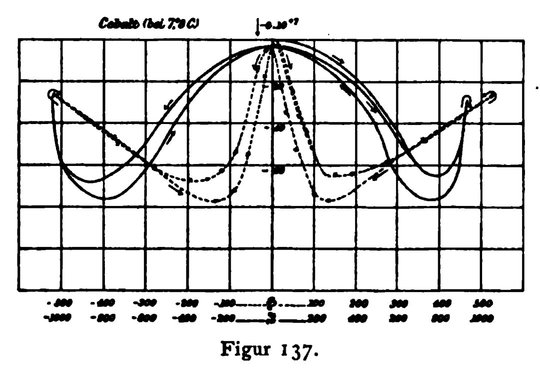
die ganze Längenkurve tiefer zu liegen kommt; bei sehr starken Zugbelastungen verschwindet sogar die Verlängerung ganz, es tritt sofort Verkürzung ein. Bei Nickel ist der Einfluß ein ziemlich verwickelter, bei Kobalt scheint er gar nicht vorhanden zu sein.

Diese und andere Ergebnisse sind dann von NAGAOKA und HONDA teils berichtigt, teils bestätigt, hauptsächlich aber durch Betrachtung des ganzen Kreisprozesses in harmonischen Zusammenhang gebracht und damit die Frage zu einem



Figur 136.

gewissen Abschluß gebracht worden. NAGAOKA stellt seine Hauptresultate, die sich auf alle drei ferromagnetischen Metalle erstrecken, in je drei Kurvensystemen dar, nämlich die Verlängerung $e$ als Funktion 1. der äußeren Feldstärke $\mathfrak{H}$, 2. als Funktion der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ und 3. als Funktion des Quadrates der Magnetisierung. In den beistehend wiedergegebenen Figuren sind die Kurven $[\mathfrak{H}, e]$ punktiert, die Kurven $[\mathfrak{J}, e]$ dünn, die Kurven $[\mathfrak{J}^2, e]$ stark ausgezogen; Figur 135 bezieht sich auf Eisen, Figur 136 auf Nickel, Figur 137 auf Kobalt.



Figur 137.

Bei Eisen nimmt, wie man sieht, die Verlängerung mit wachsender Magnetisierung beschleunigt zu, erreicht einen Inflexionspunkt, nimmt dann immer langsamer zu und erreicht ein Maximum; nun nimmt sie ab, bei einer Feldstärke 305 ist die anfängliche Länge wieder erreicht, der Stab verkürzt sich. Soweit der Hinweg des Zyklus. Läßt man jetzt das Feld abnehmen, so verläuft die punktierte Kurve zunächst, bis $\mathfrak{H} = 120$ über der alten, schneidet diese, d. h. die Verlängerung setzt sich noch weiter fort und erreicht ihr Maximum erst in sehr schwachen Feldern. Bei der Feldstärke null ist noch Verlängerung vorhanden; diese nimmt im negativen Felde zu, und es wiederholt sich ein ähnlicher Verlauf wie auf der positiven Seite. Die ganze Figur ist also — von dem ersten, bei späteren Zyklen nicht mehr wiederkehrenden Stücke abgesehen — symmetrisch. Die $[\mathfrak{J}, e]$-Kurve unterscheidet sich hauptsächlich durch den sanfteren Anstieg und ganz steilen Abstieg; dasselbe gilt auch von der $[\mathfrak{J}^2, e]$-Kurve; diese hat aber die Besonderheit, daß ihr Anstieg — im Einklang mit dem JOULE-RIGHIschen Gesetz geradlinig ist. Schließlich sei bemerkt, daß sich zwischen Drähten und Ellipsoiden kein wesentlicher Unterschied ergab.

Bei Nickel ist die Erscheinung, im Einklang mit BIDWELL, viel einfacher. Es tritt hier Verkürzung, und zwar recht erhebliche Verkürzung ein, sie wächst mit der Magnetisierungsintensität und nähert sich asymptotisch einem Grenzwerte. Auch hier findet Symmetrie in bezug auf die Ordinatenachse statt. Die Hysteresis ist gering für die [$\mathfrak{H}$, $e$]-Kurve und geradezu null für die beiden anderen, d. h. hier fallen steigender und fallender Ast zusammen, die [$\mathfrak{J}$, $e$]-Kurve ist einfach und von der Form einer Parabel, die [$\mathfrak{J}^2$, $e$]-Kurve verläuft auch hier ein großes Stück weit geradlinig.

Bei Kobalt kommt es wieder darauf an, von welcher Art es ist. Gußkobalt zieht sich in schwachen Feldern zusammen, erreicht etwa beim Felde 130 die geringste Länge, dehnt sich dann aus, erreicht bei 740 seine ursprüngliche Länge und verlängert sich dann noch weiter; die Kurve ist also etwa das Spiegelbild derjenigen für Eisen, nur mit anderer Lage des Minimums (Maximums). Ausgeglühtes Kobalt dagegen zieht sich bis zum stärksten Felde zusammen. In beiden Fällen ist das Verhalten reziprok zu dem bei mechanischer Verlängerung.

So sieht man, wie die Verhältnisse bei jedem der drei Metalle einen andern Typus repräsentieren. Gemeinsam ist ihnen jedoch, daß bis zu einer gewissen Feldstärke — die für alle drei verschieden ist — die Längenänderung mit dem Quadrate der Magnetisierung proportional ist.

Übrigens hat NAGAOKA in Gemeinschaft mit HONDA die Versuche auch auf Stahl, besonders Wolframstahl ausgedehnt und Bestätigung des früheren gefunden; nur wird hier die Verlängerung nie negativ.

Die neuesten Arbeiten haben die Ergebnisse von NAGAOKA im allgemeinen bestätigt. Es wird daher genügen, noch einige Besonderheiten aus ihnen herauszugreifen. ROSING arbeitete mit einem weichen Eisendrahte von 39,5 cm Länge und 0,83 mm Dicke, der mit 380 g/qmm gespannt war; seine Verlängerung läßt sich durch die Formel

$$10^9 \frac{dl}{l} = 0{,}000044834\,\mathfrak{J}^2 - 0{,}00365023\,\mathfrak{J}\mathfrak{H} + 0{,}0301531\,\mathfrak{H}^2$$

darstellen. — MORE fand, daß Härten des Drahtes die Verlängerung vermindert und das Maximum nach links rückt; ähnliche Wirkung hat Zug. — BACHMETIEW untersuchte die Verteilung der Verlängerung und fand, allerdings durch indirekte Schlüsse, daß sie an den Polen am größten ist. — KLINGENBERG fand, daß die remanente Verlängerung des Eisens durch Belastung nicht beeinflußt wird, wohl aber die des Stahls. — AUSTIN arbeitete sowohl mit Gleichstrom als auch mit Wechselstrom von der Wechselzahl 10 bis 120; er fand, daß die [$\mathfrak{H}$, $e$]-Kurven desto tiefer liegen, je höher die Zykelzahl ist, was wohl mit der Variation der Permeabilität zusammenhängt (leider sind die [$\mathfrak{J}$, $e$]-Kurven nicht ermittelt, wodurch diese Frage entschieden worden wäre). — Verschiedene Autoren haben sich mit dem Einflusse der Dicke der Stäbe auf die Erscheinung befaßt; die Resultate stimmen aber nicht überein; nach den einen wäre der Einfluß ein direkter, nach den anderen ein inverser; so findet z. B. BIDWELL umgekehrte Proportionalität mit den Quadratwurzeln der Durchmesser, LOCHNER dagegen (durch sukzessives Abdrehen) direkte Proportionalität mit der Wurzel aus dem Verhältnis Dicke : Länge. Nach der neuesten bezüglichen Arbeit von SHAW und LAWS ist der Einfluß ziemlich verwickelt: das Maximum ist für dicken (0,49 cm) Draht viel größer als für dünnen (0,10 cm), nämlich etwa sechsmal so groß; es liegt aber nach der Seite stärkeren Feldes (Stromstärke etwa viermal so groß) verschoben, und folglich schneidet die Kurve für dicken die für dünnen Draht; und ähnlich beim Minimum. Nickel verhält sich in dieser Hinsicht ebenso wie Eisen. Nach dem, was im vorigen Artikel über die Stellung gerader Stäbe zur einfachen Theorie gesagt ist, sind diese Komplikationen nicht zu verwundern.

Schließlich ist noch die Frage nach einer etwaigen, mit der Verlängerung verknüpften Querkontraktion naheliegend, und in der Tat hat schon JOULE seine ersten Versuche, um dies festzustellen, in ganz analoger Weise angeordnet wie seinerzeit CAGNIARD-LATOUR seine entsprechenden elastischen Versuche. Indessen sind diese Versuche inzwischen überholt und die Frage wird besser im Zusammenhange mit der Volumenänderung behandelt.

Von anderen Stoffen sind nur noch zwei auf ihre Längenänderung geprüft worden. Erstens, von NAGAOKA und HONDA[1], Nickelstahl in verschiedenen Legierungen, also ein in magnetischer Hinsicht sehr merkwürdiges Material (vgl. S. 242). Es fand sich stets, bis zu Feldern vom Werte 1800, Verlängerung, also ein sowohl vom Eisen als auch vom Nickel abweichendes Verhalten; eine Legierung von 29%, die merklich magnetisch ist, ändert sich proportional dem Felde, eine stark magnetische von 46% verlängert sich anfangs stark, um sich dann einem Grenzwerte zu nähern, die nahezu unmagnetische von 25% zeigt sich auch hier indifferent. Bei ausgeglühtem Material ist die Verlängerung beträchtlicher als bei hartgezogenem. Mit wachsender Belastung nimmt die Verlängerung ab; und wenn man sich der Elastizitätsgrenzé nähert, erhält man in schwachem Felde sogar Verkürzung. — Diese Resultate sind von GUILLAUME einer Kritik unterworfen und in anderem Sinne auch von OSMOND[2], mit Hinweisen auf ergänzende Beobachtungen, besprochen worden.

In Anbetracht der schon bei den ferromagnetischen Stoffen sehr geringen Größe der Längenänderung erscheint die Untersuchung para- und diamagnetischer Stoffe von vornherein aussichtslos. In der Tat haben TYNDALL und GRIMALDI beim Wismut, das in dieser Hinsicht wegen seiner sonstigen Eigenschaften noch am ehesten Aussicht auf Erfolg bietet, nichts gefunden; und wenn dann BIDWELL wirklich eine Verlängerung fand — und zwar die sehr erhebliche von 0,00000015 in ziemlich schwachem Felde —, so wird dieses Resultat wieder mehr als zweifelhaft durch das Ergebnis der Experimente von E. van AUBEL[3], der mit kräftigem Felde arbeitete, mittels der Methode der Interferenzstreifen noch eine Verlängerung von 0,000000008 hätte konstatieren können, aber nichts fand. Auch WILLS[4] hat trotz empfindlicher Methode nichts gefunden. Die sonstigen typischen Erscheinungen im Wismut müssen also anders als durch Deformationen erklärt werden.

Sehr mannigfaltig und kompliziert sind die Erscheinungen, welche auftreten, wenn ein Stab oder Draht durch einen axial hindurchgeleiteten Strom zirkular — und ev. gleichzeitig noch von außen longitudinal — magnetisiert wird. So findet RIGHI[5], daß ein vom Strom durchflossener Eisendraht sich verkürzt und daß diese Verkürzung größer ist, wenn der Stab vorher longitudinal magnetisiert war — ein Verhalten, das man sich auf Grund der Molekulartheorie des longitudinalen und zirkularen Magnetismus (s. in früheren Artikeln und w. u. bei Elektromagnetismus) zurechtlegen kann. — Andererseits gelangt aber BIDWELL[6] bei seinen ausgedehnten Untersuchungen zu folgendem Ergebnis: Die maximale Verlängerung, die ein Eisendraht bei der Magnetisierung in relativ schwachem Felde erfährt, wird durch den Stromdurchgang erhöht, und die Verkürzung in starken Feldern wird durch Stromdurchgang vermindert; dazwischen gibt es eine Feldstärke, die ohne Einfluß ist, und diese wird durch den Stromdurchgang vergrößert. Die folgenden Zahlen geben hiervon ein Bild:

---

[1] H. NAGAOKA und K. HONDA, C. R. **134**. 536. 1902. — [2] C. E. GUILLAUME, C. R. **134**. 538. 1902. — F. OSMOND, ebenda 596. — [3] E. VAN AUBEL, J. de Phys. (3) **1**. 424. 1892. — [4] A. P. WILLS, Phys. Review **15**. 1. 1902. — [5] A. RIGHI, Mem. di Bologna (4) **1**. 99. 1879. — [6] S. BIDWELL, Proc. R. Soc. **51**. 495. 2892.



| Stromstärke (relativ) | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Maximale Verlängerung ($\mathfrak{H} = 40$) . . . | 11,5 | 14,5 | 20 |
| Verkürzung durch $\mathfrak{H} = 315$ . . . . | 22,5 | 17,5 | 12 |
| Einflußlose Feldstärke . . . . . . . . | 130 | 170 | 200 |

Bei Nickel und Kobalt ließ sich nichts Deutliches konstatieren.

## 2. Beziehung zur Biegung.

Hierüber ist nicht viel zu sagen. In älterer Zeit sind viele bezügliche Versuche angestellt worden; so glaubte WERTHEIM einen Einfluß der Biegung auf den Magnetismus, andererseits derselbe Physiker sowie GUILLEMIN u. a. einen Einfluß der Magnetisierung auf die Biegung eines Stabes konstatieren zu können. Indessen muß man bedenken, daß solche Versuche sehr schwer einwandfrei durchzuführen sind, weil die Biegung die gegenseitige Lage von Körper und Feld ändert, und weil die elektromagnetischen Spannungen und ihre Wirkungen, die schon bei der Verlängerung eine wichtige Fehlerquelle ausmachten, hier kaum zu eliminieren sind. Auf der anderen Seite bietet das Problem auch nicht das Interesse dar wie die auf Dehnung und Torsion bezüglichen, da die Biegung keine eigentlich elementare elastische Erscheinung ist. Es mag daher an diesem Hinweise genügen[1].

## 3. Beziehung zur Torsion.

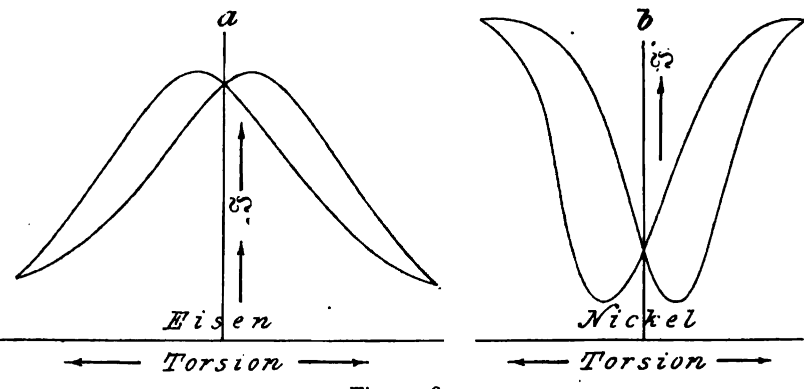
Diese Beziehungen, welche besonderes Interesse darbieten, sind von MATTEUCCI[2], WERTHEIM[3], G. WIEDEMANN[4], BECQUEREL, Sir W. THOMSON[5], HUGHES[6], KNOTT[7], CHREE, EWING[8], ZEHNDER[9], NAGAOKA[10], TOMLINSON[11], BANTI[12], F. J. SMITH[13], GROESSER[14], DRUDE[15], MOREAU[16], CANTONE[17], DAY[18], NAGAOKA und HONDA[19], SCHREBER[20], BARUS[21] u. a. erforscht worden: insbesondere haben G. WIEDEMANN, EWING und NAGAOKA die Erscheinungen nach den verschiedensten Richtungen hin verfolgt und auf diese Weise relative Übersichtlichkeit in das Gewirr der Tatsachen gebracht. Hier kann nur das Allerwichtigste angeführt werden. Die experimentellen Anordnungen sind so naheliegend, daß sie hier nicht ausführlich behandelt zu werden brauchen; es sei nur bemerkt, daß man die Stäbe oder Drähte longitudinal durch Spiralen oder (in der Inklinationsrichtung) durch den

---

[1] A. WERTHEIM, C. R. **22**. 336. 1846; Ann. chim. phys. (3) **23**. 302. 1848. — GUILLEMIN, C. R. **22**. 264 u. 432. 1846. — Aus neuerer Zeit: LABATUT, Hysteresis und Viskosität bei der Biegung. Grenoble 1893. — [2] C. MATTEUCCI, Compt. rend. **24**. S. 301. 1847; Ann. Chim. Phys. (3) **53**. S. 385. 1858. — [3] W. WERTHEIM, Compt. rend. **35**. S. 702. 1852; Ann. Chim. Phys. (3) **50**. S. 385. 1857. — [4] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **103**. S. 563. 1858; **106**. S. 161. 1859; Verh. Basler Nat. Ges. **2**. S. 169. 1860; Berl. Mon.-Ber. 1860; Pogg. Ann. **117**. S. 195. 1862; Wied. Ann. **27**. S. 376. 1886; **37**. S. 610. 1889; Elektr. **3**. S. 671. — [5] W. THOMSON, Proc. R. Soc. **27**. S. 439. 1878; Trans. R. Soc. 1878. — [6] D. E. HUGHES, Proc. R. Soc. **31**. S. 525. 1880; **32**. S. 25 u. 213. 1881. — [7] C. G. KNOTT, Trans. R. Edinb. Soc. **35** (2). S. 377. 1889; **36** (2). S. 485. 1891. — Phil. Mag. (5) **37**. 141. 1894; Proc. Ed. Soc. **22**. 586. 1899. — [8] J. A. EWING, vgl. Magn. Induktion, S. 211. — [9] L. ZEHNDER, Wied. Ann. **41**. S. 210. 1890. — [10] H. NAGAOKA, Journ. of the Coll. of Science Tokio **2**. S. 304. 1888; **3**. S. 189 u. 335. 1889; **4**. S. 323. 1891; Wied. Ann. **53**. 481. 1894. — [11] H. TOMLINSON, Proc. R. Soc. **42**. S. 224. 1887. — [12] A. BANTI, Mem. Ac. Linc. 1890 u. 1891. — [13] F. J. SMITH, Phil. Mag. (5) **32**. S. 383. 1891. — [14] D. GRÖSSER, Inaug.-Diss. Rostock 1896. — [15] P. DRUDE, Wied. Ann. **63**. 9. 1897. — [16] G. MOREAU, C. R. **122**. 1192. 1896; C. R. **126**. 463. 1898; J. de phys. (3) **7**. 125. 1898. — [17] M. CANTONE, N. Cim. (4) **5**. 110 u. 267. 1897. — [18] H. DAY, Sill. J. (4) **3**. 449. 1897. — [19] H. NAGAOKA und K. HONDA, J. Coll. Science Imp. Univ. Tokyo **13**. 263. 1900. — [20] K. SCHREBER, Phys. Z. **2**. 18. 1900. — [21] C. BARUS, Sill. J. **10**. 407. 1900; **11**. 97. 1901.

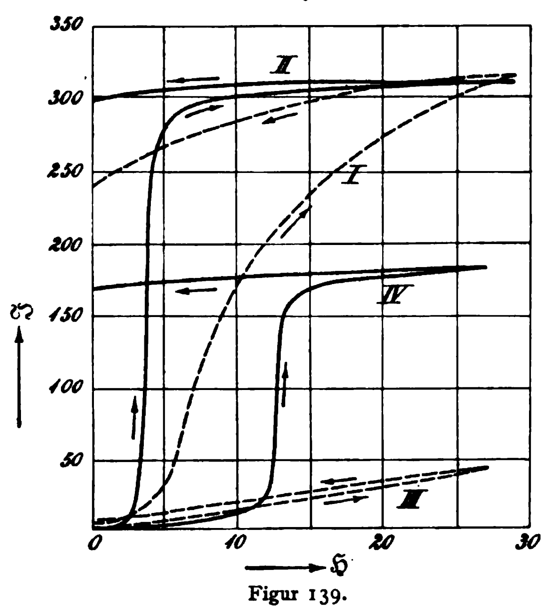
Erdmagnetismus, zirkular durch hindurchgeleitete Ströme magnetisiert und sie, wo dies erforderlich ist, vor den Versuchen glüht oder ablöscht.

**a) Wirkung der Torsion auf den Magnetismus.** Wie bei der Dehnung muß man auch hier zwischen den ersten elastischen Eingriffen und den späteren




Figur 138.

unterscheiden. Wendet man zunächst nur schwache, im wesentlichen innerhalb der Elastizitätsgrenze bleibende Torsionen an, so findet man bei Eisen, daß die ersten Torsionen den Magnetismus erhöhen, die späteren aber vermindern, und zwar so stark, daß im zyklischen Zustande der tordierte Stab schwächer magnetisch ist, als der torsionsfreie. Die Erscheinung ist bei weichem Eisen am kräftigsten, bei hartem schwächer, bei Stahl am schwächsten. Bei Nickel bewirkt die Torsion umgekehrt eine Erhöhung des Magnetismus, wenigstens in mäßigen Feldern; in starken Feldern tritt eine Umkehrung der Erscheinung, ja sogar — nach ZEHNDER — eine Umkehr des Magnetismus überhaupt ein. Wieder anders scheinen die Verhältnisse bei Kobalt zu liegen.




Figur 139.

Auch bei der Einwirkung der Torsion auf den Magnetismus findet Hysteresis statt, d. h. die Kurven des Magnetismus als Funktion der Torsion und der Detorsion sind gegeneinander verschoben, wovon Figur 138 (a bezieht sich auf Eisen, b auf Nickel) ein anschauliches Bild gibt[1]; zahlreiche derartige Kurven sind von Sir W. THOMSON, WIEDEMANN, NAGAOKA und ZEHNDER mitgeteilt worden. Durch gleichzeitige Zugbelastung gehen diese symmetrischen Kurven in unsymmetrische und schließlich sogar in einseitige Hysteresisschleifen über, worüber man in EWINGS Buch (S. 224 f.) zahlreiche Angaben und Abbildungen findet. Von NAGAOKA rühren auch die in Figur 139 wiedergegebenen Magnetisierungs-

[1] Die Grundlinien entsprechen nicht dem Werte $\mathfrak{J} = 0$, sondern einem schon beträchtlichen Werte von $\mathfrak{J}$.

kurven (Hin- und Rückweg) her, welche für einen langen, ausgeglühten Nickeldraht $\mathfrak{J}$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ in gewöhnlichem Zustande (I), in tordiertem Zustande ($3^0$ für 1 cm, III), in gespanntem Zustande (10 kg, III) und endlich in tordiertem und gespanntem Zustande (IV) darstellt. Betrachtet man zunächst nur die beiden ersten Kurven, so findet man die obigen Angaben über die Wirkung der Torsion und Spannung bestätigt, man sieht aber weiter, daß die Torsion noch eine ganz charakteristische Wirkung hat, nämlich die, daß die drei Stücke der Magnetisierungskurve, das schwach, das stark und das wieder schwach ansteigende, die im gewöhnlichen Zustande sanft ineinander übergehen, hier scharf voneinander getrennt sind. Auch erkennt man, daß der remanente Magnetismus im ungespannten Zustande, wo er ohnehin groß ist, durch die Torsion immer noch, wenn auch nur mäßig, gesteigert wird.

Wesentlich anders und noch komplizierter ist die Wirkung der Torsion auf den permanenten Magnetismus. Sieht man von den Anfangserscheinungen ab und betrachtet gleich den stationären Zustand, so erhält man nach Wiedemann das merkwürdige Ergebnis, daß der Vorgang ein asymmetrischer ist und zwar nicht nur der Größe, sondern auch dem Vorzeichen nach, d. h. daß Torsion nach der einen Seite vergrößernd, nach der anderen Seite verkleinernd wirkt; die der Figur 138 entsprechenden Kurven verlaufen also hier nicht an- und absteigend, sondern nur entweder ansteigend oder absteigend, und zwar wieder bei Nickel umgekehrt wie bei Eisen.

Wenn man Stahlstäbe magnetisiert und dann mehr oder weniger wieder entmagnetisiert, so treten auch hier besondere Wirkungen auf, wie folgende auszüglich nach Wiedemann gegebene Tabelle zeigt, in der die erste Spalte den ursprünglichen, die zweite den nach der teilweisen Entmagnetisierung verbliebenen, die übrigen den Magnetismus nach Ausübung der darüber stehenden Torsion angeben.

| $M$ | $m$ | $10^0$ | $20^0$ | $40^0$ | $60^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 205 | **174** | 154 | 137 | 118 | 109 |
| 185 | 71 | **74** | 73 | 66 | 64 |
| 190 | 51 | 57 | **60** | 58 | 57 |
| 180 | 37 | 42 | 46 | **47** | 46 |
| 180 | 1 | 2 | 14 | **22** | — |

Wie man sieht, wird nach geringer Entmagnetisierung der Magnetismus durch Torsion geschwächt, bei mittlerer durch kleine Torsion gesteigert, durch größere wieder geschwächt, endlich nach fast vollständiger Entmagnetisierung durchweg gesteigert.

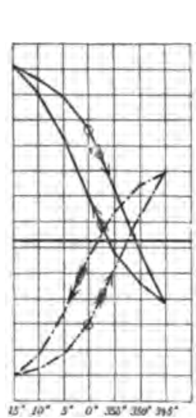
Bisher war von Torsionen innerhalb der Elastizitätsgrenze die Rede. Bei größeren Torsionen, die zum Teil bleibenden Charakters sind, wird natürlich die Wirkung stärker, aber zugleich auch so verwickelt, daß hier nur auf die einschlagende Literatur (Wertheim und Matteucci) verwiesen werden kann.

Die Wirkung der Torsion auf den Magnetismus zeigt sich auch, wenn letzterer nicht durch eine umgewickelte Spule, sondern durch einen den Stab selbst durchfließenden Strom erzeugt wird, also vom zirkularen Typus ist. Hier ist diese Wirkung sogar besonders merkwürdig; Wiedemann hat nämlich nachgewiesen, daß, wenn man einen solchen Draht während oder nach dem Stromdurchgang tordiert, er magnetisch wird[1]. Das will besagen: Der Draht, der bisher nach außen hin nicht magnetisch war, ist es durch die Torsion geworden; mit anderen Worten: Der Magnetismus hat sich aus rein zirkularem teilweise in longitudinalen

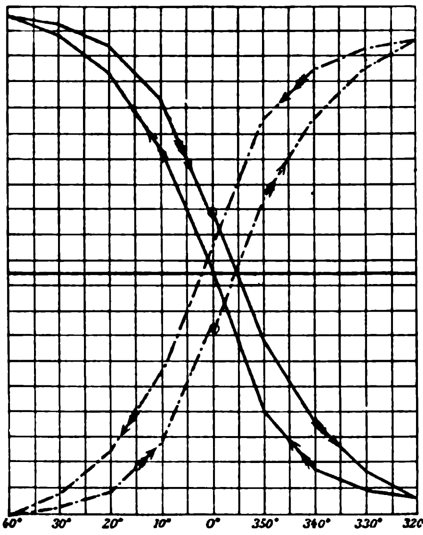
[1] G. Wiedemann, Berl. Mon.-Ber. 1860; Pogg. Ann. **117**. 203. 1862.

verwandelt. Dabei erhält der Draht an der Eintrittsstelle des Stromes einen Südpol, wenn er schraubenrechts gedreht wird und umgekehrt. Bei Nickel ist die entstehende Magnetisierung jedesmal die entgegengesetzte.

In neuester Zeit hat GERDIEN[1] auf Anregung von VOIGT die Frage genauer und besonders auch im Hinblick auf die zyklischen Prozesse studiert und, außer

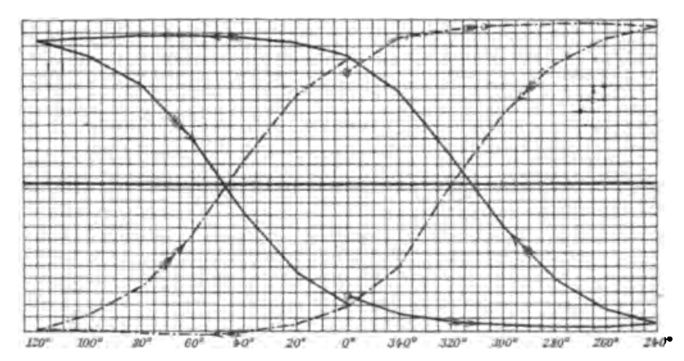


Figur 140a.




Figur 140b.

der Bestätigung des obigen, noch folgendes gefunden: 1. Zyklisch variierende Torsion erzeugt zyklisch variierende Longitudinalmagnetisierung. 2. In kleinen Torsionsintervallen bleibt das Moment zurück, in großen — bei merklich unelastischen Deformationen — eilt es voran. 3. Das Momentintervall wächst bei gleicher Stromstärke mit dem Torsionsintervall anfangs rasch, später nur langsam;



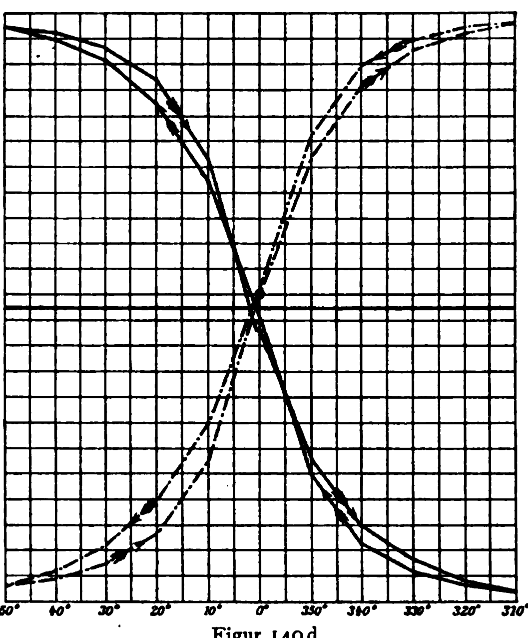

Figur 140c.

bei torsionshartem Drahte ist es größer als bei weichem. 4. Die Änderung des Moments mit dem Torsionswinkel ist bei kleinen Torsionsintervallen nahe der Torsion null stärker als nahe den Grenzen, besonders bei gehärteten Drähten. 5. Bei großen Torsionsintervallen wird der größte Teil des Momentintervalls schon im ersten kleinen Torsionsbereich durchlaufen, im großen weiteren Verlauf ändert es sich nur noch wenig. 6. Das zirkulare Feld hat kaum einen Einfluß auf den Verlauf, wohl aber auf das Intervall des Moments; dieses wächst mit

[1] H. GERDIEN, Drude Ann. 14. 51. 1904; Gött. Inaug.-Diss. 1903.

jenem, aber langsamer. 7. Die Zyklusschleifen zeigen eine mit wachsendem Torsionsintervall abnehmende Asymmetrie der Lage und Gestalt. — Von den drei Figuren, die diese Verhältnisse für Nickel erläutern — Abszissen: Torsionswinkel, Ordinaten: Magnetismen — zeigt 140a die Asymmetrie, b das Zurückbleiben, c das Voraneilen, d den Übergang.

Nach der Molekulartheorie ist es leicht zu übersehen, daß die Torsion den Typus des vorhandenen Magnetismus umgestalten muß, indem sie eine vorhandene longitudinale zum Teil in zirkulare, eine vorhandene zirkulare zum Teil in longitudinale, beide also, wenn man die Resultante betrachtet, in eine „schraubenförmige Magnetisierung" verwandelt. Sir W. THOMSON[1] einerseits und WIEDEMANN[2] andererseits haben dies des Näheren erläutert. Dabei zeigt sich einmal — man vergleiche insbesondere die Betrachtungen von MAXWELL[3] und CHRYSTALL[4] — der Zusammenhang des Torsionseinflusses mit dem Einflusse einer Beanspruchung auf Zug und Druck (aus denen sich die Torsion zusammensetzen läßt) und sodann auch der Zusammenhang mit einer im Art. „Magnetische Induktion" erwähnten Erscheinung, wonach Magnetisierung in einer bestimmten Richtung den Magnetismus in der darauf senkrechten Richtung beeinflußt. Den Zustand, in welchem ein Stab infolge von Scherung oder Torsion (Zug in einer Richtung, Druck senkrecht dazu) verschiedene Suszeptibilitäten in verschiedenen Richtungen hat, nennt W. THOMSON magnetische Aeolotropie; sie spielt bei den meisten der hier vorkommenden Erscheinungen eine zweifellos sehr wichtige Rolle, z. B. bei der Asymmetrie der GERDIENschen Kurven; es muß aber G. WIEDEMANN recht gegeben werden, wenn er der Überzeugung Ausdruck gibt, daß damit allein nicht immer auszukommen ist. Man kann auch sehr wohl die Fälle charakterisieren, wo das eine und das andere der Fall sein wird; DRUDE hat das experimentell gezeigt. Unterwirft man einen ausgeglühten, also unmagnetischen Eisenkörper einer Torsion und dann erst magnetischen Kräften, so genügt, wie sich rechnerisch begründen läßt, die Aeolotropie; wird dagegen ein schon magnetisiertes Eisenstück tordiert, so wird sich die Torsion noch in spezifischer Weise, nämlich durch eine Umlagerung der Molekularmagnete äußern, und die Wirkung ist tatsächlich kräftiger. Wenn übrigens die Torsionswirkung auf die Wirkung von Zug und Druck zurückführbar ist, so müßte sich auch hier die VILLARIsche Umkehrerscheinung zeigen; daß dies nicht der Fall ist, erklärt sich wahrscheinlich daraus, daß die Richtung, in welcher bei der Torsion Zug stattfindet, eine schiefe (diagonale) Richtung ist, in dieser Richtung aber die Magnetisierung unterhalb des kritischen Punktes von VILLARI bleibt, auch wenn die Magnetisierung sehr weit getrieben ist.

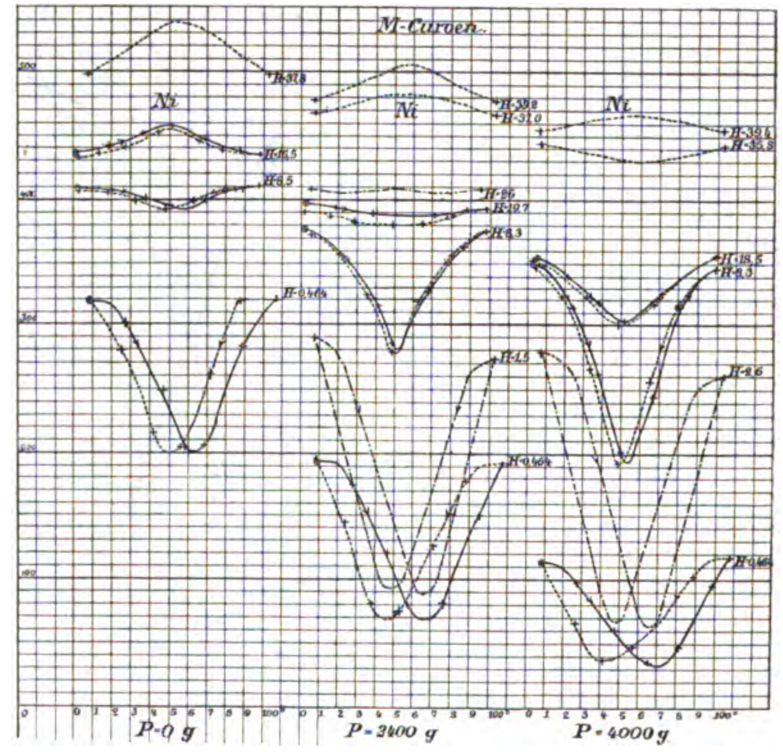


Figur 140d.

[1] W. THOMSON, Proc. R. Soc. **17**. S. 442. 1878. — [2] G. WIEDEMANN, a. a. O.; bes. Wied. Ann. **27**. S. 376. — [3] J. C. MAXWELL, El. u. Mag. **2**. S. 109. — [4] G. CHRYSTALL, Encycl. Metr. **15**. S. 270.

Unter diesen Umständen bietet es offenbar ein besonderes Interesse dar, die gleichzeitige Wirkung von Zug und Torsion zu studieren; dies haben verschiedene Physiker getan, und es sind die Arbeiten von ZEHNDER, NAGAOKA, CANTONE und BANTI besonders hervorzuheben. Im einzelnen sind die Erscheinungen sehr verwickelt, wie bei der großen Zahl von Faktoren — Material, Zustand desselben, Zug, Torsion, Feldstärke, Feldrichtung, temporäre und permanente Magnetisierung — auch gar nicht anders zu erwarten ist. In der Hauptsache aber lassen sich, wenn wir zunächst ZEHNDER folgen, folgende merkwürdige Tatsachen herausschälen.

Bei Eisen wird der Einfluß der Torsion auf den Magnetismus durch Zug herabgemindert, und die maximale Wirkung tritt schon in schwächeren Feldern




Figur 141.

ein (z. B. ohne Belastung erst bei der Feldstärke 2,4, bei der Belastung mit 2400 g schon bei 1,0); und die Magnetisierung nimmt mit zunehmender Belastung bei einer bestimmten, geringen, Feldstärke am stärksten zu, stärker als in schwächeren und in stärkeren Feldern; bei ganz starker Belastung nimmt sie sogar ab; die Hysteresis ist von der Feldstärke nicht sehr erheblich abhängig.

Weit interessanter sind die Erscheinungen beim Nickel. Was zunächst das Verhalten in schwachen Feldern (Erdmagnetismus) betrifft, so kann man die Magnetisierung eines belasteten Nickeldrahtes durch Torsionen, die die Elastizitätsgrenze kaum überschreiten, geradezu umkehren; tordiert man bei erst zu- und dann abnehmenden Belastungen, so erhält man Hysteresis der Magnetisierung; mit zunehmender Belastung nimmt die Magnetisierung bei gleichartiger Torsion stets ab. — Während nun im schwachen Felde die Magnetisierung ein Minimum bei der Torsion null, ein Maximum bei der größten Torsion aufweist, kehrt sich im starken Felde die Sache um, der Torsion null entspricht die stärkste

Magnetisierung; und zwar findet die Umkehr ohne Belastung bei $\mathfrak{H} = 16{,}5$, bei 2400 g bei $\mathfrak{H} = 37{,}0$ und bei 4000 g bei $\mathfrak{H} = 39{,}4$ statt. Andererseits findet die Maximalwirkung der Torsion ohne Belastung bei $\mathfrak{H} = 0{,}47$, bei 2400 g bei $\mathfrak{H} = 1{,}5$, bei 4000 g bei $\mathfrak{H} = 2{,}6$ statt; im letzten Falle fand sich die Magnetisierung bei einer Torsion um $\pm 40$ Grad etwa viermal so groß wie ohne Torsion. Die Figur 141 veranschaulicht alles das ohne nähere Erläuterung[1].

Die Versuche von BANTI bestätigen das Gesagte im wesentlichen; insbesondere zeigt sich hier die Torsion als die notwendige und hinreichende Bedingung für die Polaritätsumkehr. Dagegen war bei den Versuchen NAGAOKAs die Umkehr an die gleichzeitige Belastung gebunden, und es bleibt noch offen, woher diese Differenz stammt. NAGAOKA hat dann ferner die Verteilung der Magnetisierung über die Länge des Drahtes untersucht und speziell für den belasteten Draht gefunden, daß bei schwacher Magnetisierung die Verteilung sehr verwickelt ist; der Draht scheint dann aus drei getrennten Magneten zu bestehen.

Sehr reichhaltig ist auch das von CANTONE zu dem Falle gesammelte Material, auf Nickel bezüglich; insbesondere wird der Verlauf der Zyklen und der Nachwirkungsverlauf eingehend besprochen. Einzelnes läßt sich aber schwer herausgreifen, und es sei daher nur angeführt, daß bei 1° Torsion im Erdfelde das Vierfache derjenigen Magnetisierung erzielt wurde, die ohne Torsion im 18mal so starken Felde stattfand.

b) **Wirkung des Magnetismus auf die Torsion.** Wie der Magnetismus durch Torsion, so wird auch die Torsion durch Magnetisierung geändert, und zwar wird sie im allgemeinen verringert, desto stärker, je stärker die Magnetisierung ist; jedoch nur bis zu einem gewissen Maximum; bei Stahl ist die Abnahme kleiner als bei Eisen; gleichzeitige Spannung scheint keinen Einfluß auf die Größe der Detorsion auszuüben. Entgegengesetzte Magnetisierungen wirken wiederum zu Anfang in gleichem Sinne, später aber zyklisch. Auch permanente Torsion wird durch Magnetismus vermindert; nur wenn sie sehr klein ist, tritt für starke Felder bei Nickel wieder von neuem Torsion auf, derart, daß ihr Endwert unter Umständen den ursprünglichen übertreffen kann. Bei vorheriger Torsion und teilweiser Detorsion treten auch hier wiederum eigentümliche Erscheinungen auf, wie oben bei vorhergehender Magnetisierung und teilweiser Entmagnetisierung.

MOREAU hat Formeln entwickelt, die die magnetische Torsion als Funktion der mechanischen, der Feldstärke, der Magnetisierung und der Dimensionen darstellen; sie werden aber durch die Messungen nur in beschränktem Maße bestätigt.

Der interessanteste Spezialfall — „Wiedemann-Effekt" — ist auch hier derjenige, in welchem von vornherein überhaupt keine Torsion vorhanden ist; magnetisiert man aber einen Draht durch eine umgebende Spirale longitudinal und durch einen hindurchgeschickten Strom zirkular, so erhält er eine Torsion, deren Richtung dadurch bestimmt ist, daß, wenn der Nordpol und der Eintritt des Stromes am oberen Ende des Drahtes liegen, von hier gesehen, die Torsion des anderen Endes im Uhrzeigersinne erfolgt, und daß sie sich umkehrt, wenn eine der beiden Magnetisierungen, dagegen dieselbe bleibt, wenn beide umgekehrt werden[2]. Man sieht auch hier sofort ein, daß durch die Übereinanderlagerung beider Magnetisierungen Schiefstellung der Molekularmagnete und schraubenförmige Magnetisierung erzeugt wird: man kann sich daraufhin wenigstens in großen Zügen vorstellen, wie durch diese Drehung der Molekeln sowie in zweiter Linie infolge der Verlängerung in der Schraubenrichtung, Verkürzung in der darauf senkrechten Richtung Torsion entstehen muß. Auch hier hat sich gezeigt,

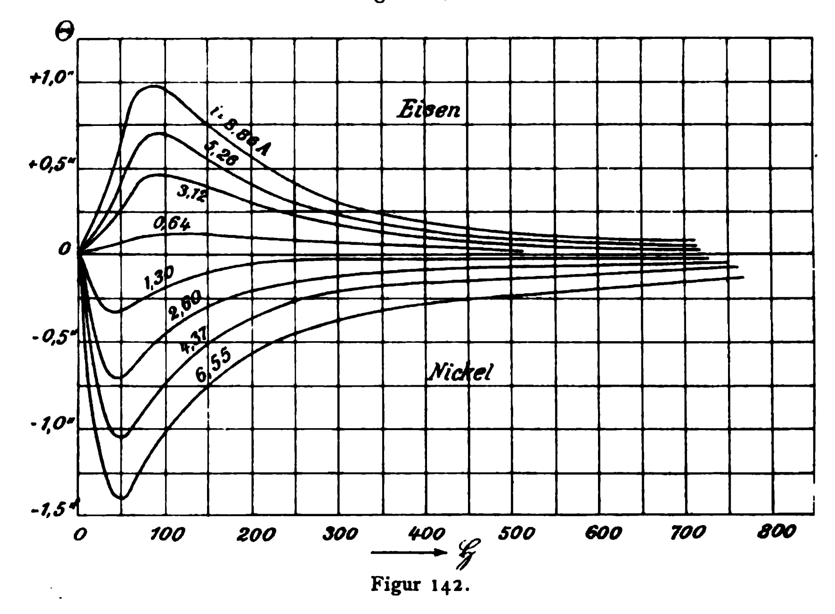
[1] $M$ = magnetisches Moment, $H$ = Feldstärke, $P$ = Belastung. — [2] G. WIEDEMANN, a. a. O. — E. VILLARI, Pogg. Ann. **137**. S. 569. 1869.

daß bei Nickel eine entgegengesetzte Torsion hervorgerufen wird, wie beim Eisen[1]. Man kann also ganz allgemein auf eine entgegengesetzte molekularmagnetische Struktur bei Eisen und Nickel schließen. Dagegen verhält sich Nickelstahl[2] wie Eisen. — Man vergleiche hierzu auch die reichhaltige neueste Arbeit von HONDA und SHIMIZU[3].

In neuester Zeit ist die Erscheinung u. a. von KNOTT sowie von NAGAOKA und HONDA noch genauer studiert worden. KNOTT vergleicht seine Versuchsergebnisse an Röhren mit der theoretischen Formel

$$\tau = \frac{2(\lambda - \mu)}{r} \frac{HH'}{H^2 + H'^2} ,$$

wo $\tau$ die Verdrehung, $r$ der Röhrenradius, $\lambda$ und $\mu$ die axiale und tangentiale Elongation, $H$ die longitudinale und $H'$ die zirkulare magnetisierende Kraft ist; die beobachteten Werte sind aber größer, und ihr Maximum tritt früher ein —




Figur 142.

Ursache vermutlich wieder Äolotropie. — NAGAOKA und HONDA stellen zunächst die Richtung der Torsion wie oben fest und finden dann noch folgendes: wenn bei konstantem zirkularem Felde das longitudinale wächst, nimmt die Torsion zuerst zu, dann aber, wenn der Wert $\mathfrak{H} = 20$ erreicht ist, wieder ab (und geht sogar ev. in die entgegengesetzte über). Nimmt umgekehrt bei konstantem Längsfelde das zirkulare zu, so wächst die Torsion, und zwar beim Eisen durchweg, beim Nickel wenigstens in mäßigen und starken Feldern. — Figur 142 gibt eine Anschauung von diesen Verhältnissen (Abszissen Längsfeld $\mathfrak{H}$, Ordinaten Torsionen $\Theta$, jede Kurve einem anderen Längsstrom $i$, d. h. Zirkularfeld, entsprechend). — Ferner ist noch auf die interessanten Untersuchungen von BARUS sowie auf die von MOREAU über die Verteilung der Torsion hingewiesen.

Übrigens entsteht nach GRÖSSER Torsion auch schon — wenigstens unter gewissen Umständen — wenn ausschließlich longitudinal magnetisiert wird; und zwar permanente wie temporäre. Die permanente ist dem Vorzeichen nach unabhängig von der Richtung der Magnetisierung (also wohl durch mangelnde Symmetrie bestimmt), mit wachsender Feldstärke strebt sie einem Maximum zu;

[1] C. G. KNOTT, Proc. R. Soc. Edinb. 1882, S. 225. — [2] H. NAGAOKA und K. HONDA, Phil. Mag. 4. 45. 1902. — [3] K. HONDA und S. SHIMIZU, Phys. Z. 3. 577. 1902.

der Größe nach beim Eisen für beide Magnetisierungsrichtungen gleich, beim Stahl verschieden, jedoch ohne erkennbare Beziehung der Differenz zum Vorzeichen der Magnetisierung. Dazu kommt nun noch eine temporäre Torsion, die, sobald die permanente ihr Maximum erreicht hat, mit der Feldstärke wächst; ihr Vorzeichen ist stets dasselbe, nämlich (vgl. o.) für ein in der Richtung der Kraftlinien schauendes Auge stets Uhrzeigerdrillung.

Daß durch Längsmagnetisierung eines gedrillten oder durch Drillung eines längsmagnetisierten Drahtes eine zirkulare Komponente des Magnetismus erzeugt wird, läßt sich direkt durch den Induktionsstrom nachweisen, den man erhält, wenn man die Enden des Drahtes mit einem Galvanometer verbindet; und zwar fließt der Strom, wenn der Draht im Sinne einer rechtsgängigen Schraube tordiert wird, beim Eisen vom Nordpol zum Südpol, beim Nickel vom Südpol zum Nordpol; diese Erscheinung haben für Eisen MATTEUCCI[1], für Nickel ZEHNDER[2] und NAGAOKA[3] unabhängig voneinander nachgewiesen, man kann solche Ströme Torsionsströme nennen. In neuerer Zeit sind dieselben von verschiedenen Autoren studiert worden. Sehr nahe verwandt sind ihnen die von BRAUN[4] entdeckten Deformationsströme, die beim Ausziehen einer Nickelspule entstehen, und für die, da ein Zusammenhang mit magnetischen Zuständen anscheinend nicht vorhanden war, BRAUN begreiflicherweise nach anderen Erklärungen suchte; indessen hat sich doch herausgestellt (und BRAUN hat selbst Beweise dafür erbracht), daß die Ströme durch die teilweise Umwandlung in Zirkularmagnetismus verursacht sind, welche der vom Nickeldraht bei der Bearbeitung erworbene Längsmagnetismus beim Strecken der Spule erfährt. Im Übrigen gehört die Verfolgung dieser Ströme, die Induktionsströme besonderer Art sind, nicht hierher[5].

## 4. Beziehung zum Volumen.

Nachdem wir die einzelnen mechanischen Lineardeformationen behandelt haben, bleibt uns noch die Frage übrig, wie sich dabei das Volumen der Körper im ganzen verhält. Da diese Frage auch für die allgemeine Theorie der mechanisch-magnetischen Beziehungen (s. w. u.) von großer Bedeutung ist, wird es verständlich, daß sie zum Gegenstande sehr zahlreicher Arbeiten gemacht worden ist; anzuführen sind besonders die von JOULE, KNOTT, KNOTT und SHAND, BARRETT, WASSMUTH, BIDWELL, HURMUSESCU, NAGAOKA und HONDA, QUINCKE, MAURAIN[6].

Schon JOULE hatte seine ersten Versuche über die Längenänderung nach dem Vorbilde der betreffenden elastischen Untersuchungen von CAGNARD-LATOUR u. a. so eingerichtet, daß er zugleich die etwaige Volumenänderung konstatieren konnte; der Eisenstab befand sich nämlich in einer mit Flüssigkeit gefüllten und in eine Kapillare auslaufenden Röhre. Da sich nun trotz der Verlängerung des Stabes der Stand des Meniskus nicht änderte, mußte man schließen, daß die Längenänderung mit einer genau halb so großen Dickenänderung verbunden war, so

---

[1] C. MATTEUCCI, Ann. Chim. Phys. (3) **53**. S. 385. 1858. — S. auch G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **129**. S. 616. 1867. — [2] L. ZEHNDER, Wied. Ann. **38**. S. 68. 1889. — [3] H. NAGAOKA, Phil. Mag. (5) **29**. S. 123. 1890. — [4] F. BRAUN, Wied. Ann. **37**. S. 97 u. 107. 1889; **38**. S. 53. 1889; **39**. S. 159. 1890; vgl. hierzu L. ZEHNDER, Wied. Ann. **38**. S. 68 u. 496. 1889. — [5] Über den Zusammenhang zwischen Torsions- und Deformationsströmen vgl. auch CAMPETTI, Atti di Torino **26**. S. 553. 1891. — [6] J. P. JOULE, Phil. Mag. **30**. 76. 225. 1847. — C. G. KNOTT, Proc. Edinb. Soc. **18**. 315. 1891; Trans. R. Soc. Edinb. (3) **38**. 527. 1896; **39**. 457. 1898; Proc. Edinb. Soc. **22**. 216. 1898; KNOTT und SHAND, Proc. Edinb. Soc. **19**. 249. 1892; **20**. 295. 1893/4. — S. BIDWELL, Proc. R. Soc. **56**. 94. 1894. — W. F. BARRETT, Nature **26**. 585. 1882. — A. WASSMUTH, Wien. Ber. **86**. 539. 1882. — HURMUZESCU, Arch. des sciences phys. et nat. **4**. 431. 1897. — H. NAGAOKA und K. HONDA, Phil. Mag. (5) **46**. 261. 1898; J. Coll. Science Imp. Univ. Tokyo **13**. 57. 1900; Nature **65**. 246. 1902; C. R. **134**. 536. 1902; Phil. Mag. **4**. 45. 1902. — G. QUINCKE, Berl. Sitz. Ber. **20**. 391. 1900. — E. RHOADES, Phil. Mag. **2**. 463. 1901. — C. MAURAIN, Ecl. électr. **32**. 325. 1902.

daß das Volumen ungeändert blieb. Auch CANTONE fand das Volumen eines Eisenellipsoids bei kräftiger Magnetisierung ungeändert (näheres w. u.). Dagegen ist es NAGAOKA gelungen, die — freilich sehr geringfügige — Wirkung zu konstatieren und zwar sowohl an einem Ellipsoid aus schwedischem Eisen als auch an einem Zylinder aus Lowmore-Eisen; die Wirkung besteht in einer Vergrößerung. Bei Nickel war es schon BARRETT und CANTONE, letzterem ebenfalls an einem Ellipsoid, gelungen, die Wirkung nachzuweisen, und zwar wäre sie auch hier wieder der bei Eisen entgegengesetzt, d. h. sie bestände in einer Volumenverminderung. NAGAOKA und HONDA haben das bei ihrer ersten Untersuchung bestätigt, in der neuesten machen sie aber die Angabe, daß sich Nickel ebenfalls kubisch ausdehnt; und dasselbe soll für Nickelstahl gelten. Dagegen finden sie für Kobalt wieder einen Unterschied zwischen den Arten: gegossenes zieht sich in schwachen Feldern rasch zusammen, dann langsamer, bei $\mathfrak{H} = 900$ ist das Minimum erreicht und nun nimmt das Volumen wieder zu; ausgeglühtes Kobalt dagegen zieht sich immer mehr zusammen. — Bei Nickelstahl ist die Volumenzunahme nahezu proportional der Feldstärke und bei 29% Ni am größten, nämlich 51 milliontel, d. h. 40 mal so groß wie bei Eisen in starken Feldern. — Hiervon abgesehen ist, alles in allem, die Wirkung, selbst wenn man sie als gesichert ansieht, sehr geringfügig, nämlich meist nur von der Größenordnung 0,0000001; die Querkontraktion ist also, im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der elastischen Deformation, von $^1/_2$ nicht wesentlich verschieden.

Besonders zu erwähnen sind noch die ausgedehnten Untersuchungen von KNOTT, zum Teil in Gemeinschaft mit SHAND, an Röhren aus ferromagnetischem Material. Die Hauptergebnisse waren schließlich folgende: 1. Der innere Hohlraum von Eisen-, Stahl- und Nickelröhren wird in starken Feldern merklich geändert. 2. Bei Eisen und Stahl wird der Hohlraum in schwachen Feldern verkleinert, in starken vergrößert (nur eng ausgebohrte Röhren zeigen stets Verkleinerung). 3. Nickel verhält sich entgegengesetzt, und die Änderung ist viel stärker. 4. Die Größenordnung ist bei Eisen $10^{-6}$, bei Nickel $10^{-5}$. 5. Je weiter die Bohrung, desto größer die Änderung. 6. Die Hysteresis weist sehr verwickelte Verhältnisse auf, und infolgedessen erhält man bei wiederholter Prüfung zuweilen den früheren geradezu entgegengesetzte Resultate. — Später wurden die Versuche derart wieder aufgenommen, daß auch Kobalt hinzugenommen wurde, daß Vollstäbe der verschiedenen Stoffe durch sukzessive Ausbohrung immer dünnwandiger gemacht wurden, und daß die Messung auf alle Dimensionen einzeln erstreckt wurde. Nunmehr fand sich folgendes ($l$ longitudinale, $m$ radiale, $n$ tangentiale, $D$ kubische Dehnung): 1. Bei Eisen und Stahl war $l$ positiv in schwachen, negativ in starken Feldern, $m$ und $n$ immer entgegengesetzt wie $l$, $D$ immer positiv, aber klein; ein kreisförmiges Element im Wandquerschnitt wird in eine Ellipse von bestimmter Lage und Exzentrizität verwandelt. 2. Bei Nickel ist $l$ immer negativ, $m$ und $n$ im allgemeinen positiv, bei dicker Wandung $n > m$, bei sehr dünner $m > n$; $D$ ist immer so gut wie null. 3. Bei Kobalt sind die Lineardehnungen nur etwa $^1/_8$ von denen bei Nickel, $D$ ist immer negativ.

Wie KNOTT Röhren, so hat BIDWELL Ringe aus Eisen untersucht, die längsmagnetisiert waren. Sie werden in schwachem Felde dünner, in stärkerem dicker. Nimmt man die schon früher (S. 307) ermittelte Längenänderung hinzu, so findet man für die Volumenänderung (in erster Annäherung gleich der Summe der drei linearen): bei gekühltem Eisen tritt stets Volumenverminderung ein, ein Maximum bei etwa $\mathfrak{H} = 50$; gehärtetes Eisen zeigt auch zuerst Volumenverminderung, dann aber Zunahme, erreicht bei etwa $\mathfrak{H} = 90$ sein Anfangsvolumen und nimmt dann weiter zu.

Alles in allem ist, wie man sieht, das Ergebnis sehr verworren und schwankend.

Die Aussicht, die Volumenänderung auch bei Flüssigkeiten, namentlich bei

Eisensalzlösungen, festzustellen, ist offenbar sehr gering, da die Magnetisierbarkeit hier viel kleiner, die Veränderlichkeit des Volumens aber ebenfalls sehr zweifelhaft ist. Trotzdem ist es sowohl HURMUZESCU wie QUINCKE gelungen, die Wirkung zu konstatieren, wobei QUINCKE freilich nicht unterläßt, auf den störenden Einfluß der Fehlerquellen hinzuweisen. Im gleichförmigen Felde findet stets Verkleinerung des Volumens statt, sowohl bei $FeCl_3$ als auch bei $K_4Fe(CN)_6$; im ungleichförmigen Felde spielen die Druckdifferenzen an den Oberflächen mit, und es kann hier eine scheinbare Ab- wie Zunahme auftreten.

Soweit die Wirkung des Magnetismus auf das Volumen. Was nun die reziproke (in den früheren Fällen vorangestellte) Wirkung betrifft, so ist diese Wirkung jedenfalls äußerst klein. So erhielten NAGAOKA und HONDA zwar eine deutliche Wirkung, und zwar bei kubischem Druck eine Verringerung der Magnetisierung bei Eisen, eine Verstärkung bei Nickel; die Änderung betrug jedoch bei einer Feldstärke 30, wo sie am größten war, nur 0,1.

Größere Änderungen hat schon vor längerer Zeit WASSMUTH bei Eisen erhalten, allerdings bei sehr starker Druckanwendung. Er verfuhr so, daß er den betreffenden Stab in einem einerseits zu einer Kapillarröhre ausgezogenen und überall geschlossenen Gefäße durch Erhitzung des Quecksilbers komprimierte, den Stab durch eine Spirale magnetisierte und den Magnetismus mittels einer Tangentenbussole maß. Es zeigte sich, daß die in der oberen Reihe verzeichneten, ursprünglichen Magnetismen (relative Zahlen) durch einen Druck von 10 Atmosphären sich in die darunter befindlichen verwandelten:

| $m_0$ | 1,8 | 6,5 | 43,7 | 96,3 | 150,6 | 181,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 1 | 5,1 | 45 | 98 | 152,2 | 183,5 |

Schwache Magnetisierungen werden also durch den allseitigen Druck geschwächt, starke dagegen erhöht.

Wie man sieht, bestehen hier noch Widersprüche, und es wäre die Durchführung einwandfreier Versuche wünschenswert.

## 5. Magnetostriktion.

### Allgemeine Theorie und Beobachtungen über Druckwirkung und Formänderung bei magnetisierten Körpern.

Unter Magnetostriktion versteht man die mechanischen Zustände und Vorgänge in Körpern, die sich im magnetischen Felde befinden; die Erscheinung ist ganz analog der im Bd. IV, S. 162 behandelten Elektrostriktion, und es kann daher für die Grundlagen auf das dort Gesagte verwiesen werden. Die Erscheinung hat erstens an sich ein großes theoretisches und experimentelles Interesse, letzteres auch im Hinblick auf die unter 1. bis 4. erwähnten Tatsachen; zweitens ist sie neuerdings besonders im Hinblick auf die FARADAY-MAXWELLsche Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, die ja auf den mechanischen Spannungszuständen der betreffenden Medien beruht, mit großem Eifer behandelt worden. Welche Bewandtnis es mit diesem Zusammenhange und mit der angeblichen Stütze habe, welche die Erscheinungen der Striktion jener Theorie gewähren sollen, darüber sei auf die Ausführungen von POCKELS[1] verwiesen; hier wird die Erscheinung nur als solche dargestellt werden.

In den beiden vorangegangenen Artikeln ist schon von der Energie im magnetischen Felde im Anschlusse an die Abhandlung W. THOMSONS die Rede gewesen; allgemeiner ist die Theorie der Striktion besonders von MAXWELL[2],

[1] F. POCKELS, Arch. Math. Phys. (2) **12**. S. 57. 1892. — [2] J. C. MAXWELL, Trans. R. Soc. 1865.

v. HELMHOLTZ[1], BOLTZMANN[2], KIRCHHOFF[3], STEFAN, LORBERG[4], ADLER[5], CANTONE[6] und DUHEM[7] behandelt worden. Da es hier unmöglich ist, auf alle diese Darstellungen, die übrigens im wesentlichen von gleichem Charakter sind, einzugehen, erscheint es angezeigt, die KIRCHHOFFsche Theorie zu skizzieren, da diese, wie am Schlusse sich herausstellen wird, am allgemeinsten ist und die meisten übrigen als Spezialfälle in sich enthält. Noch allgemeiner ist freilich die Rechnung von SANO[8], insofern er die Magnetisierungskonstanten $\varkappa$ durch Funktionen der Magnetisierung ersetzt; diese Rechnung ist aber bisher über die allgemeinen Ansätze nicht hinausgekommen. Auch auf Kristalle hat SANO[9] seine Betrachtungen ausgedehnt.

**KIRCHHOFFsche Theorie.** Wenn eine Eisenkugel die unendlich kleinen Dilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ erfahren hat, so kann man die Komponenten der Magnetisierung, die sie durch eine äußere magnetische Kraft von den Komponenten $L_1 L_2 L_3$ in den Richtungen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ erfährt, setzen:

$$A = [p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_1] L_1 \quad ,$$
$$B = [p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_2] L_2 \quad ,$$
$$C = [p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_3] L_3 \quad .$$

Man kann sie aber, statt durch die Komponenten der äußeren Kraft, auch durch die Komponenten der wahren Kraft, also, wenn $V$ das Gesamtpotential (S. 124) ist, durch dessen Differentialquotienten nach den Richtungen $\lambda$ ausdrücken, indem man statt der Konstanten $p p' p''$ mit Hilfe von Gleichungen von der Form der Gleichung (8) auf S. 125 die Konstanten $\varkappa \varkappa' \varkappa''$ einführt, deren erste die Suszeptibilität in normalem Zustande ist, während die beiden letzten der Änderung der Magnetisierungszahl durch die Deformation Rechnung tragen; handelt es sich lediglich um Ermittelung der auf den Körper als starres Ganze wirkenden Verschiebungskräfte, so kommen diese letzteren natürlich nicht in Betracht. Man erhält nunmehr:

$$-A = [\varkappa - \varkappa'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \varkappa''\lambda_1] \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} \quad ,$$
$$-B = [\varkappa - \varkappa'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \varkappa''\lambda_2] \frac{\partial V}{\partial \lambda_2} \quad ,$$
$$-C = [\varkappa - \varkappa'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \varkappa''\lambda_3] \frac{\partial V}{\partial \lambda_3} \quad .$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann man nun die Energie des aus einem beliebigen Eisenkörper und beliebigen Feldmagneten bestehenden Systems ableiten, und aus diesem dann die auf das Eisen wirkenden magnetischen Kraftkomponenten $XYZ$ in der bekannten Weise. Die betreffenden Formeln werden natürlich sehr kompliziert: sie vereinfachen sich aber bedeutend, wenn die Größen $\varkappa \varkappa' \varkappa''$ als im Eisenkörper konstant angesehen werden; man erhält alsdann für ein beliebiges Koordinatensystem $xyz$:

---

[1] H. v. HELMHOLTZ, Berl. Mon.-Ber. 1881; Wied. Ann. **13**. S. 385. Wiss. Abh. **1**. S. 810. — [2] L. BOLTZMANN, Wien. Ber. **80** (2). 1879; **82** (2). S. 826 u. 1157. 1880. — Vgl. hierzu die Bemerkungen von KIRCHHOFF, Wied. Ann. **24**. S. 70. 1885. — [3] G. KIRCHHOFF, Wied. Ann. **24**. S. 52. 1885; **25**. S. 601. 1885. — [4] H. LORBERG, Wied. Ann. **21**. S. 300. 1884. — [5] G. ADLER, Wien. Ber. **100** (2). S. 477; **101** (2). S. 1537. 1892. — Vgl. auch Wied. Ann. **28**. S. 509. 1886. — [6] M. CANTONE, Mem. Acc. Linc. **6**. 1890. — [7] P. DUHEM, Compt. rend. **112**. S. 157. 1891; Leçons s. l'Electr. Paris 1892. Bd. **2**. S. 427. — [8] S. SANO, Tokyo J. **8**. 229. 1901; Phys. Review **13**. 158. 1902. — [9] S. SANO, Phys. Z. **3**. 401. 1902.

$$X = \frac{1}{2}\left(\varkappa' + \frac{\varkappa''}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \quad ,$$

$$Y = \frac{1}{2}\left(\varkappa' + \frac{\varkappa''}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \quad ,$$

$$Z = \frac{1}{2}\left(\varkappa' + \frac{\varkappa''}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] \quad .$$

Zu diesen Kräften, welche auf das Innere des Eisens wirken, kommen nun noch Oberflächenkräfte hinzu, zu deren Ermittelung die Grenzbedingungen (vgl. namentlich S. 128) dienen; wenn $n$ die Richtung der nach dem Eiseninneren gezogenen Normalen des betreffenden Oberflächenelementes ist, so findet man:

$$A_0 = -2\pi\varkappa^2\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 \cos nx - \frac{\varkappa - \varkappa'}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\cos nx + \frac{\varkappa''}{2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial n}$$

und analog für $B_0$ und $C_0$. Diese Ausdrücke lassen einen wichtigen Schluß zu. Da nämlich $\varkappa$ selbst zwar in $A_0\,B_0\,C_0$, nicht aber in $X\,Y\,Z$ vorkommt, so werden für starre Körper wegen $\varkappa' = 0$ und $\varkappa'' = 0$ auch $X,\ Y,\ Z = 0$, d. h. die auf starre Körper wirkenden Verschiebungskräfte können als reine Oberflächenkräfte aufgefaßt werden. Dies gilt nach der obigen Annahme, wenn die Suszeptibilität $\varkappa$ im Eiseninnern konstant ist; es gilt aber, wie ADLER[1] gezeigt hat, auch für variables $\varkappa$ in dem Falle noch, wenn die Variabilität von $\varkappa$ lediglich daher rührt, daß die magnetische Kraft variiert und $\varkappa$ eine Funktion von ihr ist.

**Zug und Druck.** Die Kräfte für das Innere kann man noch in einer anderen Form schreiben, in der sie erkennen lassen, daß man sie durch Druckkräfte ersetzen kann; durch Anwendung der bekannten Gleichungen der Elastizitätslehre (vgl. Bd. I) findet man für die Normaldrucke, wenn jetzt die Glieder mit $\varkappa'$ und $\varkappa''$ fortgelassen werden, also von Deformationen abgesehen wird:

$$A_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + \varkappa\right)\left[-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]$$

usw., für die Tangentialkomponenten

$$B_z = C_y = -\left(\frac{1}{4\pi} + \varkappa\right)\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}$$

usw. Oder, wenn die Gesamtkraft in die $x$-Richtung fällt, wobei die Tangentialkomponenten verschwinden:

$$A_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + \varkappa\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \quad ,$$

$$B_y = C_z = +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + \varkappa\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \quad ,$$

in Worten: der Körper erfährt in der Richtung der magnetischen Kraft einen Zug, in jeder darauf senkrechten Richtung einen ebenso großen Druck, und dieser Druck resp. Zug ist dem Quadrate der magnetischen Gesamtkraft proportional. Der betreffende Proportionalitätsfaktor läßt sich einfacher, als es in der obigen Formel geschehen ist, schreiben, er darf nämlich geradezu der halben Suszeptibilität gleichgesetzt werden, weil es nämlich bei dem tatsächlich stattfindenden Zug und Druck auf eine Differenzwirkung gegenüber dem umgebenden Medium ankommt, für welches $\varkappa$ im Vergleich zum Werte im Eisen sehr klein, das konstante Glied $1/8\pi$ aber dasselbe ist; ähnlich verhält es sich bei schwach

[1] G. ADLER, Wien. Ber. **101** (2). S. 1537. 1892.

magnetischen Körpern, nur muß dann unter $\varkappa$ die scheinbare Suszeptibilität in dem betreffenden Medium verstanden werden. Bei diamagnetischen Stoffen kehrt sich die Erscheinung wegen des Vorzeichens von $\varkappa$ natürlich um, hier findet in der Kraftrichtung Druck, senkrecht darauf Zug statt. Damit wird aber unsere Formel mit der Gleichung (7) auf S. 252 dem Wesen nach identisch.

Die KIRCHHOFFschen Formeln sind, wie gesagt, die allgemeinsten bisher entwickelten, einmal weil sie für elastisch-feste Körper gelten, zweitens, weil sie die $\varkappa$ als veränderlich, und drittens, weil sie diese Größen als beliebig groß annehmen. Für Flüssigkeiten und Gase kann man $\varkappa'' = 0$ setzen und gelangt damit zu den v. HELMHOLTZschen Formeln; man kann auch $\varkappa' = 0$ setzen, wenn man die Flüssigkeit als inkompressibel betrachtet, d. h. die Änderungen der Dichte vernachlässigt, außer insofern als sie Druckänderungen bedingen, man kommt dann auf die Theorie von THOMSON und MAXWELL. Endlich kann man, wenn man sich auf schwach magnetische Stoffe beschränkt, $\varkappa$ unendlich klein setzen und folglich die Glieder, in denen sein Quadrat vorkommt, vernachlässigen. In diesem einfachsten Fall tritt gemäß den obigen Ergebnissen an der im magnetischen Felde belegenen Grenzfläche zweier Flüssigkeiten, die auf der anderen Seite aus dem Felde herausragen, eine magnetische Druckdifferenz

$$dp = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{2} \mathfrak{H}^2$$

auf, wo $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die beiden Suszeptibilitäten und $\mathfrak{H}$ die bei der Kleinheit der $\varkappa$ mit der Gesamtkraft identische Feldstärke ist.

**QUINCKES Versuche**[1]. Diese, auf anderem Wege auch von ADLER[2] abgeleitete Gleichung bildet die Grundlage der Versuche, welche QUINCKE zuerst an Flüssigkeiten, später an Gasen angestellt hat, einerseits um die Gesetze der magnetischen Druckkräfte experimentell festzustellen, andererseits um daraufhin die Suszeptibilität von Flüssigkeiten und Gasen zu messen. In letzterem Hinblick sind die Untersuchungen schon früher (S. 181 und 261) berücksichtigt worden, und es ist auch schon wiederholt erwähnt worden, daß man hierauf umgekehrt auch eine Methode der Feldstärke-Messung gründen kann (S. 116). Die Druckgesetze wurden teils an flachen Luftblasen in einer magnetisierten Flüssigkeit, teils an U-förmigen, mit den Flüssigkeiten gefüllten und als Manometer dienenden Röhren (und zwar sowohl senkrecht als parallel zu den Kraftlinien), angestellt; bei den Flüssigkeitsversuchen wurden die verschiedenen Flüssigkeiten mit demselben Gase, bei den Gasversuchen dieselbe Flüssigkeit mit verschiedenen Gasen in Verbindung gebracht; auch wurde der Einfluß der Temperatur und (bei Gasen) der des Druckes studiert. Die Ergebnisse der Theorie fanden dabei der Hauptsache nach volle Bestätigung, insbesondere verhielten sich die Steighöhen, also die magnetischen Drucke, wie die Quadrate der Feldstärken, und für diamagnetische Stoffe trat Depression ein; bei Sauerstoff nahm der magnetische Druck proportional der Dichte zu, ebenso bei Luft. Auf die Einzelheit der QUINCKEschen Versuche, sowie auf die anschließenden von TÖPLER und HENNIG (deren messender Teil ebenfalls schon oben S. 272 berücksichtigt worden ist) kann hier nicht eingegangen werden. Nur sei zur Charakteristik der Kleinheit der in Rede stehenden Druckkräfte, zumal in Gasen und schwachen Feldern, angeführt, daß die Fläche, auf die unsere Atmosphäre infolge des Erdmagnetismus einen magnetischen Druck von 1 g ausübt, ungefähr eine halbe Quadratmeile groß ist. In neuester Zeit hat QUINCKE[3] auch auf feste Körper seine Versuche ausgedehnt, aber noch keine ausführliche Veröffentlichung darüber gemacht.

**Formänderung magnetisierter Kugeln.** KIRCHHOFF hat eine weitere Anwendung seiner Theorie gegeben, indem er die Formänderungen einer Kugel

[1] G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. S. 347. 1885; **34**. S. 401. 1888. — [2] G. ADLER, Wien. Ber. **92** (2). S. 1439. 1885. — [3] G. QUINCKE, Tagebl. Naturf.-Vers. Heidelberg 1889. S. 209.

vom Radius $\varrho$ bei Magnetisierung durch eine konstante Kraft ableitete. In diesem Falle gelten die Gleichungen (38) auf S. 141, und die Kräfte auf das Innere $ABC$ verschwinden. Aus den Gleichungen für die Oberflächenkräfte $A_0 B_0 C_0$ erhält man dann mit Hilfe der Gleichungen der Elastizitätslehre die Verrückungen $uvw$ des Punktes $xyz$ der Kugel, und zwar in folgender Form:

$$u = \frac{\mathfrak{H}^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}\varkappa\right)^2}\left(2\pi\varkappa^2 u_1 + \frac{(\varkappa-\varkappa')}{2}u_2 - \frac{\varkappa''}{2}u_3\right)$$

und analog für $v$ und $w$; hierin ist

$$u_1 = a_1 x^3 + b_1 (y^2+z^2)x + c_1 \varrho^2 x \quad ,$$
$$u_2 = a_2 x \quad ,$$
$$u_3 = a_3 x \quad ,$$

und die Konstanten $a_1 a_2 a_3 b_1 c_1$ stehen mit den beiden KIRCHHOFFschen Elastizitätskonstanten $K$ und $\Theta$ in den Beziehungen:

$$a_1 = -\frac{1}{K\varrho^2}\frac{2\Theta}{7+19\Theta}\,, \qquad b_1 = \frac{7+8\Theta}{4\Theta}a_1 \quad ,$$
$$a_2 = \frac{1}{2K(1+3\Theta)}\,, \qquad c_1 = \frac{7+31\Theta+32\Theta^2}{4\Theta(1+3\Theta)}a_1 \quad ,$$
$$a_3 = \frac{1+2\Theta}{2K(1+3\Theta)}\;;$$

ferner wird

$$v_1 = a_1' x^2 y + b_1'(y^2+z^2)y + c_1'\varrho^2 y \quad ,$$
$$v_2 = a_2 y \quad ,$$
$$v_3 = b_3 y \quad ,$$

und ganz entsprechend, nur mit $z$ statt $y$, die $w$-Gleichungen; endlich ist

$$a_1' = -\frac{7+6\Theta}{4\Theta} \quad ,$$
$$b_1' = -\frac{1}{2}a_1\,, \qquad b_3 = -\frac{\Theta}{2K(1+3\Theta)} \quad ,$$
$$c_1' = \frac{3\Theta+8\Theta^2}{2\Theta(1+3\Theta)}a_1$$

Um die Verrückungen numerisch angeben zu können, muß man $\varkappa$ kennen, und zwar, da es in Wahrheit von $\mathfrak{H}$ abhängt, seinen Wert für den konstanten bei den Versuchen benutzten Wert von $\mathfrak{H}$; ferner aber muß man auch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ kennen, wofür bisher keine Anhaltspunkte vorliegen (s. jedoch w. u.); darf man sie als nicht groß im Vergleich zu $\varkappa$ ansehen, so kann man in den Gleichungen für $uvw$ alle Glieder gegen dasjenige mit $\varkappa^2$ und im Nenner 1 gegen $\frac{4\pi}{3}\varkappa$ vernachlässigen und erhält dann für die Längs-, Querverschiebung und räumliche Dilatation $\sigma$ ($E$ ist der Elastizitätsmodul)

$$u = \frac{9}{8\pi}\mathfrak{H}^2 u_1 = \frac{3}{176\pi}\frac{\mathfrak{H}^2}{E\varrho^2}[-10x^3 - 55(y^2+z^2)x + 61\varrho^2 x] \quad ,$$

$$v = \frac{9}{8\pi}\mathfrak{H}^2 v_1 = \frac{3}{176\pi}\frac{\mathfrak{H}^2}{E\varrho^2}[50x^2 y + 5(y^2+z^2)y - 14\varrho^2 y] \quad ,$$

$$\sigma = \frac{3}{176\pi}\frac{\mathfrak{H}^2}{E\varrho^2}[70x^2 - 35(y^2+z^2) - 33\varrho^2] \quad .$$

Hiernach wird der Längsradius der Kugel verlängert, der Querradius verkürzt, entsprechend dem oben für die Verteilung von Zug und Druck gefundenen; die Verkürzung ist nicht der Verlängerung gleich, sondern es ist

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho}(\parallel) = +\frac{153}{176\pi}\frac{\mathfrak{H}^2}{E} \, , \qquad \frac{\delta\varrho}{\varrho}(\perp) = -\frac{27}{176\pi}\frac{\mathfrak{H}^2}{E} \quad ;$$

in Worten: Die Längsdilatation ist 5 bis 6mal so groß wie die Querkontraktion, beide sind mit dem Quadrat der magnetisierenden Kraft direkt und mit dem Elastizitätsmodul umgekehrt proportional. Hieraus erklärt sich, daß die mechanischen Wirkungen des Magnetismus bei Nickel stärker sind, als bei Eisen. Ihren Zahlenwerten nach sind diese Deformationen außerordentlich klein; da nämlich $E$ in absolutem Maße für Eisen rund 2 Billionen ausmacht, so müßte die Feldstärke, wenn die Verlängerung ein Zehnmilliontel der Länge ausmachen soll, immerhin schon den hohen Betrag von über 800 Einheiten erreichen; man wird also diese Verlängerung, und erst recht die Verkürzung, kaum je sicher nachweisen können.

**Ermittelung von $\varkappa$ und $\varkappa''$; Deformation eines Ellipsoids.** Es ist auch einleuchtend, daß die Kugel in dem vorliegenden Betrachte gerade die ungünstigste Form ist. Viel günstiger sind gestreckte Körper, am günstigsten natürlich lange Drähte, und es ist daher erklärlich, daß die von JOULE, BIDWELL u. a. gefundenen Verlängerungen hier wesentlich größer und der Beobachtung sehr wohl zugänglich gewesen sind. Leider ist auf sie die Theorie nicht streng anwendbar, und es ist daher verständlich, daß CANTONE[1] den Versuch gemacht hat, die Erscheinung bei einem gestreckten und doch theoretisch einfachen Körper, dem Ellipsoid, zu studieren, wobei selbstverständlich ein Rotationsellipsoid gewählt wurde; das Achsenverhältnis war 16,7 : 1. Hier wird nach der Theorie für beliebig $\varkappa\varkappa'\varkappa''$:

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\mathfrak{J}^2}{E}\left(\pi + \frac{\varkappa - \varkappa'}{4\varkappa^2} - \frac{\varkappa''}{2\varkappa^2}\right) \quad ,$$

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\mathfrak{J}^2}{E}\left(\pi + 3\frac{\varkappa - \varkappa'}{4\varkappa^2} - \frac{\varkappa''}{2\varkappa^2}\right) \quad ,$$

wo $l$ die Länge des Ellipsoids, $\mathfrak{J} = \varkappa\mathfrak{H}/(1 + L\varkappa)$ und $L$ der bekannte Ausdruck [S. 141, Gleichung (39)] ist. Bei den Versuchen wurde das Feld durch eine lange Spirale hergestellt, die Verlängerung wurde durch die Interferenz-Streifen zwischen zwei Glasplatten ermittelt, die mit den beiden Enden des Ellipsoids fest verbunden waren, die Volumenänderung mit Hilfe eines Dilatometers. Aus den gefundenen Werten von $\delta l$ und $\delta V$ können — bei bekanntem $\varkappa$ — die Konstanten $\varkappa'$ und $\varkappa''$ aus den obigen Gleichungen berechnet werden. Es fand sich für Eisen zunächst $\delta V = 0$, d. h. eine merkliche Volumenänderung findet nicht statt, ferner fand sich für verschiedene Stromstärken $i$ (die Feldstärken sind etwa 80mal so groß):

[1] M. CANTONE, Mem. Acc. Linc. 1890.

| $i$ | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^6 \cdot \delta l/l$ | 0,216 | 0,393 | 0,587 | 0,707 | 0,825 |
| $\varkappa$ | 56 | 57 | 58 | 60 | 62 |
| $\varkappa'$ | 44000 | 46000 | 46000 | 42000 | 39000 |
| $\varkappa''$ | −92000 | −97000 | −97000 | −82000 | −70000 |

Diese Resultate sind von außergewöhnlichem Interesse. Sie zeigen nämlich, daß $\varkappa'$ und $\varkappa''$ enorm groß im Vergleich mit $\varkappa$ selbst sind, womit sich der letzte Teil der KIRCHHOFFschen Theorie als hinfällig erweist, abgesehen vielleicht von sehr schwachen magnetischen Kräften. Die Deformation wird eben fast gar nicht durch $\varkappa$, sondern weit überwiegend durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ bestimmt. Ferner ist $\varkappa''$ von entgegengesetztem Vorzeichen und fast genau doppelt so groß wie $\varkappa'$, hieraus folgt, daß die Querkontraktion halb so groß wie die Längsdilatation ist (nicht wie bei KIRCHHOFF erhalten wurde, $^1/_5$ bis $^1/_6$ so groß); endlich zeigen $\varkappa'$ und $\varkappa''$ mit wachsender Kraft analog wie $\varkappa$ selbst ein anfängliches Steigen und späteres Fallen.

Dieselben Versuche wurden nun auch mit einem Ellipsoid aus Nickel angestellt und gefunden:

| $i$ | 0,3 | 0,5 | 0,7 |
|---|---|---|---|
| $10^6 \cdot \delta l/l$ | −3,18 | −8,25 | −15,06 |
| $10^6 \cdot \delta V/V$ | −0,05 | −0,11 | − 0,16 |
| $\varkappa$ | 33 | 29 | 22 |
| $\varkappa'$ | −265000 | −155000 | −125000 |
| $\varkappa''$ | 790000 | 467000 | 375000 |

Bei Nickel ist also umgekehrt wie beim Eisen $\varkappa'$ negativ, $\varkappa''$ positiv, außerdem letzteres nicht doppelt, sondern dreimal so groß wie ersteres; im Vergleich mit $\varkappa$ selbst sind hier $\varkappa'$ und $\varkappa''$ noch enormer als beim Eisen. Die Folgen hiervon sind: 1. Die Verlängerungen sind negativ, d. h. es tritt Verkürzung ein; 2. die Längenänderungen sind unvergleichlich größer als beim Eisen (15 bis 20mal so groß); 3. das Volumen bleibt nicht ungeändert, sondern erleidet eine — wenn auch sehr geringfügige — Abnahme; 4. das Verhältnis der Querdilatation zur Längskontraktion ist nicht genau $^1/_2$, sondern etwas kleiner.

Die dritte Konstante $\varkappa''$ kann man, worauf DRUDE[1] aufmerksam gemacht hat, auch durch Torsionsversuche bestimmen, und zwar, da hier $\varkappa'$ keine Rolle spielt, in der bequemsten Weise. DRUDE selbst hat einen bezüglichen Versuch ausgeführt und für einen Eisendraht rund −30000 gefunden bei einem mittleren Felde gleich 2; der Wert ist, wie man sieht, wesentlich kleiner als bei CANTONE; aber das kann auch am Material liegen.

Auch NAGAOKA, E. T. JONES[2] u. a. haben auf verschiedenen Wegen die KIRCHHOFFsche Theorie geprüft; in den meisten Fällen hat sich aber nur sehr rohe Übereinstimmung herausgestellt.

**Theorie von KOLAČEK.** Ganz neuerdings hat KOLAČEK[3] eine Theorie der Magnetostriktion bekannt gemacht, die sich auf dem Energieprinzip aufbaut und somit die hysteretischen Erscheinungen ausschließt, die aber insofern allgemeiner ist als die KIRCHHOFFsche, als sie über die Natur der Medien keinerlei Voraus-

[1] P. DRUDE, Wied. Ann. **63**. 9. 1897. — [2] H. NAGAOKA und K. HONDA, Phil. Mag. (5) **46**. 261. 1898. — E. T. JONES, Proc. R. Soc. **63**. 44. 1898. — H. NAGAOKA, Tokyo Sugaku **2**. 55. 1903. — Festschr. f. BOLTZMANN 1904. 916. — [3] F. KOLAČEK, Drude Ann. **13**. S. 23. 1904.

setzungen macht, so daß auch Kristalle einbegriffen sind; erst zum Schluß wird die Verbindung mit den KIRCHHOFFschen Ansätzen für isotrope Stoffe hergestellt. Anwendungen werden auf das Rotationsellipsoid und das dünne Toroid gemacht, und es wird gezeigt, inwiefern die experimentellen Ergebnisse von VILLARI, NAGAOKA und THOMSON zum Ausdruck gelangen. Die Rechnungen der Theorie können im Auszuge nicht wiedergegeben werden.

**Thermodynamische Theorie.** Während die KIRCHHOFFsche und die ihr verwandten Theorien sich an die Theorie der Elastizität anlehnen, kann man auch von einem ganz anderen Gesichtspunkte ausgehen, nämlich von der energetischen Reziprozität der in Rede stehenden Beziehungen. So baut DUHEM, wie die übrigen elektrischen und magnetischen Erscheinungen, so auch die Magnetostriktion auf dem Begriffe des thermodynamischen Potentials auf und entwickelt sie dann getrennt für Flüssigkeiten und feste Körper; leider ist eine kurze Skizze dieser Theorie nicht möglich, und es muß daher auf das Buch verwiesen werden.

Dagegen sei noch auf eine einfache mathematische Entwickelung dieser Art hingewiesen, die ganz neuerdings HEYDWEILLER[1] gegeben hat, und die er durch RENSING[2] experimentell prüfen ließ. Es handelt sich um die energetische Beziehung zwischen der relativen Änderung der Länge einerseits und der Magnetisierung andererseits; sieht man diese Änderungen — was natürlich nur eine formale Bedeutung hat — als Folge einer Änderung des Elastizitätsmoduls einerseits und der Suszeptibilität andererseits an, so kann man aus jener Beziehung leicht eine Beziehung zwischen diesen Konstanten ableiten, die erste — $E$ — als Funktion des Feldes — $\mathfrak{H}$ —, die andere — $\varkappa$ — als Funktion des Zuges pro Flächeneinheit — $p$ — betrachtet. Diese Beziehung lautet nun bei HEYDWEILLER, wenn ein nicht in Betracht kommendes Glied weggelassen wird:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = -E\mathfrak{H}\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial p^2}$$

oder, wenn $\mathfrak{B}$ die Induktion ist:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = -\frac{E^2}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial p^2} \quad .$$

Die von RENSING an Eisen und Nickel durchgeführte Messung gibt nun nach HEYDWEILLERs Ansicht eine unter Berücksichtigung aller Umstände befriedigende Bestätigung der Formel.

Dagegen hat nun GANS[3] eine Formel entwickelt, die außer obigem Gliede noch zwei andere enthält; sie lautet, wenn $\sigma$ die Elastizitätszahl, $\mu_0$ die normale und $\mu$ die veränderte Permeabilität ist:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{H}} = \begin{cases} -\dfrac{E^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial p^2} \\ -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial p}\left(\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mathfrak{H}} - 2\sigma\right) - \dfrac{\mathfrak{H}(\mu-\mu_0)}{4\pi\mu_0}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial p\,\partial \mathfrak{H}} \end{cases} \quad .$$

Für größere Feldstärken sind nun allerdings die beiden Zusatzglieder sehr klein, die HEYDWEILLERsche Formel also unbedenklich; für kleine Feldstärken können sie aber, wie GANS an den RENSINGschen Zahlen selbst zeigt, größer als das Hauptglied werden; und in der Tat findet GANS, daß die RENSINGschen Messungen die einfache Formel nur der Größenordnung bestätigen.

Hiergegen hat nun HEYDWEILLER[4] seinerseits Widerspruch erhoben; er erklärt die GANSschen Formeln für unrichtig und hält die seinigen aufrecht, wobei er sich noch auf die Übereinstimmung mit KOLAČEK[5] beruft.

[1] A. HEYDWEILLER, Drude Ann. **12**. 602. 1903. — [2] H. RENSING, Drude Ann. **14**. 363. 1904. — [3] R. GANS, Drude Ann. **13**. 634; **14**. 638. 1904. — [4] A. HEYDWEILLER, Drude Ann. **14**. 1036. 1904. — [5] F. KOLAČEK, Drude Ann. **13**. 23; **14**. 177. 1904.

Wie dem auch sei, der hier betretene einfache Weg muß als sehr aussichtsreich bezeichnet werden.

Auf thermodynamischer Grundlage baut sich übrigens auch die Ableitung auf, die KOLAČEK in der zweiten der vorhin zitierten Abhandlungen für die Deformation eines ferromagnetischen Drahtes im Magnetfelde gibt.

## 6. Beziehungen zu den elastischen Konstanten der Körper.

Die im vorstehenden skizzierten Erscheinungen lassen natürlich zum Teil die Deutung zu, daß sich durch Magnetisierung die elastischen und durch elastische Beanspruchung die magnetischen Konstanten der betreffenden Körper ändern; denn diese Änderung muß sich doch in einer Änderung der elastischen Deformation bzw. der Magnetisierung kundgeben. Man hat nun vielfach versucht, die Änderung der Konstanten, namentlich der elastischen, auch direkt festzustellen oder gar zu messen; es hat sich dabei aber in den meisten Fällen herausgestellt, daß letzteres kaum möglich und selbst ersteres infolge der vielen störenden Einflüsse schwierig ist.

Was zunächst den Elastizitätsmodul $E$ betrifft, so fanden WERTHEIM[1] und TOMLINSON[2] übereinstimmend, daß Magnetisierung die Längsschwingungen, also $E$, nicht affiziert. BRACKETT[3] fand bei Dehnungen eine Zunahme um $^1/_2$ % im gesättigt-magnetischen Zustande. Auch bei Biegungsversuchen fanden STEVENS und DORSAY[4] eine Zunahme sowohl für Schmiedeeisen als für Stahl. Später hat STEVENS[5] auch Zugversuche durchgeführt und eine Zunahme von $E$ gefunden, die der Feldstärke ungefähr proportional, mit der Belastung veränderlich und bei dünnen Drähten stärker ist; der Kompressionsmodul von Stäben wies dagegen keine Änderung auf. Endlich finden HONDA, SHIMIZU und KUSAKABE[6] eine Zunahme mit der Feldstärke nach demselben Gesetze wie die Magnetisierung für Eisen, Stahl, Wolframstahl und Kobalt, nur für Nickel eine Abnahme in schwachen, eine Zunahme in starken Feldern. Daß und in welchem Sinne $E$ sich mit $\mathfrak{H}$ ändern muß, wenn $\mathfrak{J}$ durch Zug beeinflußt wird, hat HOULLEVIGUE[7] auch theoretisch begründet; das Verhalten des Nickelstahls, bei dem $E$ mit dem Übergange in den magnetischen Zustand abnimmt, liefert ein treffendes Beispiel.

Kräftiger scheint der Einfluß auf den Torsionsmodul zu sein; hierher gehören Untersuchungen von TOMLINSON, BARUS, DAY, LÖFFLER sowie HONDA, SHIMIZU und KUSAKABE[8]. Aus der Angabe von TOMLINSON, daß kräftige Torsionsschwingungen durch die Magnetisierung etwas verlangsamt werden, ist freilich noch kein sicherer Schluß zu ziehen. Die folgenden Autoren stimmen aber darin überein, daß der Torsionsmodul vergrößert wird. Nach BARUS ist ferner die relative Zunahme bei Stahl kleiner als bei Eisen. Nach DAY wächst die Zunahme mit der Feldstärke und mit der anfänglichen Torsion, in höheren Feldern jedoch weniger als in niedrigen, so daß zuletzt die Zunahme mit der Drillung proportional wird. Andererseits finden HONDA usw. Parallelismus mit der Magnetisierung, dagegen kaum einen Einfluß des wirkenden Kräftepaares; außerdem finden sie zwar bei Eisen, Stahl und Kobalt Zunahme, bei Nickel aber wieder Abnahme. — Am eingehendsten hat LÖFFLER die Frage studiert, und es seien

---

[1] A. WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) **12**. 610. 1842. — [2] H. TOMLINSON, Proc. R. Soc. **40**. 447. 1886; Trans. R. Soc. **179**. 1. 1888; vgl. auch Proc. R. Soc. **47**. 13. 1889. — [3] B. B. BRACKETT, Phys. Rev. **5**. 257. 1897. — [4] STEVENS und DORSAY, Phys. Rev. **9**. 116. 1899. — [5] J. S. STEVENS, Phys. Rev. **11**. 95. 1900. — [6] K. HONDA, S. SHIMIZU und S. KUSAKABE, Phys. Zs. **3**. 380. 1902; Phil. Mag. **4**. 459. 1902. — [7] L. HOULLEVIGUE, J. de Phys. (3) **8**. 89. 1899. — [8] H. TOMLINSON, a. a. O. — C. BARUS, Sill. J. (3) **34**. 175. 1887. — H. D. DAY, Electrician **39**. 480. 1897; Sill. J. (4) **3**. 449. 1897. — S. LÖFFLER, In.-Diss. Zürich 1901. — K. HONDA, S. SHIMIZU und S. KUSAKABE, Phys. Zs. **3**. 381. 1902; Phil. Mag. **4**. 537. 1902.

aus seinen reichen Ergebnissen folgende herausgehoben: 1. Konstante Längsmagnetisierung hat keinen meßbaren Einfluß. 2. Zyklische Längsmagnetisierung bewirkt für wachsende Feldstärke zunächst rasche Abnahme bis zu einem Minimum, dann Zunahme und Annäherung an ein Maximum. 3. Der Verlauf ist mit dem der Permeabilität fast völlig parallel; insbesondere tritt die größte Änderung bei dem Felde ein, wo $\mu$ ein Maximum ist. 4. Von der Frequenz des Wechselfeldes ist die Änderung unabhängig; nur bei immer länger werdenden Perioden nimmt sie ab und nähert sich dem minimalen Werte für konstante Magnetisierung. 5. Bei Belastung ist die Änderung kleiner.

Von Interesse ist noch das Verhalten der Elastizitätszahl, d. h. des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längsdilatation; man darf den Einfluß der Magnetisierung auf diese Größe nicht verwechseln mit dem Verhältnis der durch Magnetisierung erzeugten Verlängerung zu der gleichzeitigen Querkontraktion, ein Verhältnis, welches (s. o.) von 1/2 nicht wesentlich abweicht; es handelt sich hier vielmehr um den Einfluß der Magnetisierung auf die durch elastische Beanspruchung bestimmte Elastizitätszahl. Da der Torsionsmodul stärker beeinflußt wird als der Dehnungsmodul, d. h. der Volumenwiderstand nicht so stark wächst wie der Gestaltswiderstand, darf man vermuten, daß die Elastizitätszahl bei Magnetisierung kleiner wird. Die einzigen Beobachtungen hierüber, von BOCK[1], führen nun freilich zu einer Zunahme: da aber diese Beobachtungen allein stehen und inbezug auf die anderen gemessenen Größen inzwischen überholt sind, ist die Frage als unentschieden zu betrachten.

Auch hinsichtlich der Beziehungen des Magnetismus zur Zug-, Druck- und anderen Arten der Festigkeit läßt sich nichts bestimmtes angeben; die gelegentlichen Beobachtungen hierüber widersprechen sich vielfach und lassen im Hinblick auf die vielen Fehlerquellen und Nebenfragen keine einheitliche Deutung zu.

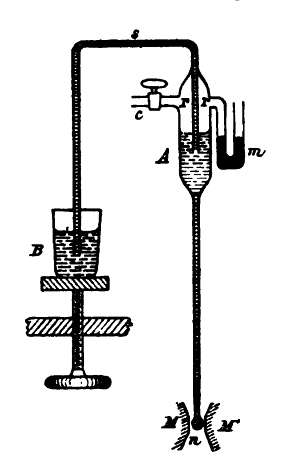
Die innere Reibung oder Zähigkeit hat TOMLINSON (a. a. O.) durch Beobachtung der Torsionsschwingungen eines Eisendrahts und ihres logarithmischen Dekrements verfolgt; bei kleinen Schwingungen ließ sich, wenigstens nachdem der stationäre Zustand erreicht war, keine Wirkung der Magnetisierung feststellen; bei kräftigen nimmt die innere Reibung zu. Andererseits fanden GRAY und WOOD[2], daß bei Eisen das logarithmische Drekrement mit steigender Magnetisierung stetig abnahm, während es bei Nickel anfangs zunahm, bei einer gewissen Feldstärke ein Maximum erreichte und dann wieder abnahm; die Ergebnisse hängen aber sehr von der Vorgeschichte des Drahtes ab und ändern sich auch mit der Amplitude der Schwingungen; darauf dürfte auch der Widerspruch gegen TOMLINSON zurückzuführen sein, der nur bis 10° ging, während hier bis 90° gegangen wurde. — Wenn schon die Wirkung im Ferromagnetikum so gering ist, darf man sich nicht wundern, daß W. KÖNIG[3] bei den schwach magnetischen Flüssigkeiten und zwar bei dem verhältnismäßig stark magnetisierbaren Mangansulfat keine Wirkung erhielt, obgleich die Feldstärke bis über 7000 hinausging. Später hat CARPINI[4] die Versuche nach derselben Methode — Strömung durch Kapillarröhren im Felde eines Elektromagneten — mit mehreren Flüssigkeiten wiederholt und auch keine unzweideutige Abweichung vom Normalwerte erhalten.

Nach Wirkungen des Magnetismus auf die Kristallisation ist schon von FARADAY, PLÜCKER und G. WIEDEMANN[5] gesucht worden; ersterer erhielt nur negative Ergebnisse; die letzteren fanden bei Wismut, daß es die Orientierung, in der es zwischen den Magnetpolen erstarrt ist, auch bei Aufhängen als starre Masse zu erkennen gibt; WIEDEMANN gibt aber selbst zu, daß die Deutung der Versuche sehr zweifelhaft ist. Auch die zahlreichen Angaben über die veränderte

[1] A. BOCK, Wied. Ann. **54**. 442. 1895. — [2] A. GRAY und A. WOOD, Proc. R. Soc. **70**. 294. 1902. — [3] W. KÖNIG, Wied. Ann. **25**. 618. 1885. — [4] C. CARPINI, Rend. Acc. Linc. **12** (2). 341. 1903. — [5] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **76**. 584. 1849. — G. WIEDEMANN, ebenda, **77**. 537. 1849. — Vgl. auch v. QUINTUS ICILIUS, Gött. Nachr. 1860. **296**.

Abscheidung von Kristallen aus ihren Lösungen besagen nicht viel[1]. Aussichtsreicherer ist die Sache natürlich bei stark magnetischen Stoffen; und in der Tat hat kürzlich ST. MEYER[2] Kristallformen von Kobaltsulfat, Kobaltchlorid und Mangansulfat photographisch wiedergegeben, einmal bei Kristallisation ohne Magnetfeld, das andere Mal im Felde von 10000 Einheiten; und es ist ein deutlicher Unterschied in der Anordnung, auch mit Rücksicht auf die Zeit, erkennbar.

Bei Flüssigkeiten steht ferner eine Beziehung des Magnetismus zur Oberflächenkonstante bzw. zur Kapillarkonstante in Frage. Dabei ist wieder zwischen der scheinbaren Änderung, wie sie durch den QUINCKEschen Effekt (S. 323) vorgetäuscht wird, und einer etwaigen wirklichen Änderung zu unterscheiden. Von ersterer ist schon früher die Rede gewesen; ihr Nichteintreten bildet ein feines Kriterium für die magnetische Indifferenz einer Lösung. Zur Untersuchung der eigentlichen Wirkung eignet sich viel besser als der statische Zustand der kinetische, d. h. das Abtropfen der Flüssigkeit im Felde. Die ersten derartigen Versuche hat QUINCKE[3] mit stark paramagnetischen Mangan- und Eisenlösungen angestellt; er fand das Tropfengewicht im gleichförmigen Felde durchaus unveränderlich; im ungleichförmigen Felde dagegen wurden die Tropfen größer oder kleiner, je nachdem sie sich unter oder über der kürzesten Kraftlinie bildeten. Sodann ist eine Arbeit von UMOW[4] zu erwähnen, wonach das Fallen der Tropfen bei einer paramagnetischen Flüssigkeit im zunehmenden Felde verzögert, im abnehmenden beschleunigt wird, während es sich bei einer diamagnetischen Flüssigkeit umgekehrt verhält. Am genauesten ist die Erscheinung von LIEBKNECHT und WILLS[5] untersucht worden, und zwar mit Hilfe des Apparats, Figur 143, in der $n$ die Rohrmündung mit dem Tropfen, $MM'$ die Kegelpole, $A$ das Gefäß, $B$ das Reservoir, $m$ das Manometer bedeutet und $c$ behufs Druckregulierung mit einer Pumpe verbunden werden konnte. Die (zum Teil von den früheren abweichenden) Ergebnisse sind folgende: Paramagnetische Lösungen zeigen im gleichförmigen Felde beschleunigtes Tropftempo, indem die elektromagnetische Zugkraft abwärts wirkt; wird durch Druckverminderung das ursprüngliche Tempo wiederhergestellt, so erleidet das Tropfengewicht keine Änderung; dagegen wird der Tropfen im ungleichförmigen Felde an Größe und Gestalt verändert, in ersterer Hinsicht vergrößert, in letzterer je nach der Feldverteilung verschieden. Diamagnetisches Wasser andererseits zeigte im gleichförmigen Felde infolge des Zuges nach oben verzögertes Tropftempo, ja gänzliches Aufhören des Tropfens; bei Wiederherstellung des Tempos zeigt sich das Tropfengewicht ungeändert; im ungleichförmigen wird es aber verringert.



Figur 143.

Soweit die Einflüsse des Magnetismus auf mechanische Konstanten. Was umgekehrt den Einfluß betrifft, den mechanische Eigenschaften auf den Magnetismus ausüben, so ist über die interessantesten dieser Beziehungen schon gesprochen worden (vgl. den vorhergehenden und diesen Artikel). Es sei hier noch auf eine Arbeit von ASCOLI[6] über den Einfluß des Sprödewerdens auf den Magnetismus des Eisens sowie auf eine solche von ABT[7] über den Magnetismus von Stahlzerreißungsproben aufmerksam gemacht.

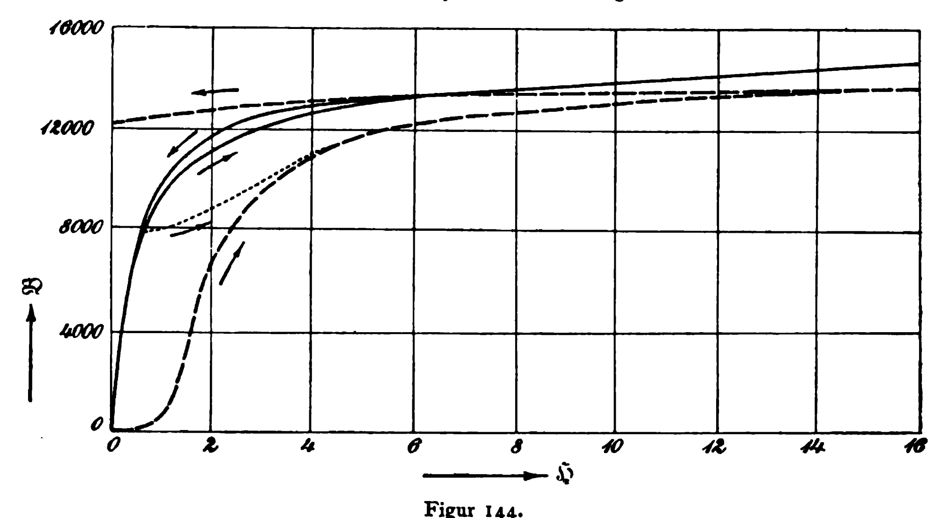
---

[1] Vgl. u. a. DECHARME, Lum. él. **26**. 69. 1887. — [2] ST. MEYER, Wien. Ber. **108** (2a). 513. 1899. — [3] G. QUINCKE, Pogg. Ann. **160**. 586. 1877; Wied. Ann. **24**. 375. 1885. — Vgl. auch H. DUFOUR, Lum. él. **23**. 337. 1887; G. JÄGER und ST. MEYER, Wied. Ann. **67**. 711. 1899. — [4] N. UMOW (OUMOFF), Bull. Soc. Franc. de phys. **382**. 3. 1896. — [5] O. LIEBKNECHT und A. P. WILLS, Drude Ann. 1. 182. 1900. — [6] M. ASCOLI, Rend. Acc. Linc. (5) **2**. (2) **30**. 1893. — [7] A. ABT, Sizt.-Ber. Siebenb. Museumsverein 2. Abt. **17**. 1895.

## 7. Beziehung zu Bewegungsvorgängen.

Es kommen hauptsächlich drei Arten von Bewegungsvorgängen hinsichtlich ihres Einflusses auf den Magnetismus in Betracht: Erschütterungen, Stöße und Schwingungen.

**Einfluß von Erschütterungen.** Dieser Einfluß läßt sich allgemein durch den Satz charakterisieren: Die Induktion wird gesteigert, die Remanenz abgeschwächt. Oder noch allgemeiner für beliebige Zustandsänderungen: Die Erschütterung wirkt auf den Magnetismus verstärkend bei Stärkung des Feldes, schwächend bei Schwächung des Feldes. Hierbei ist natürlich angenommen, daß die Erschütterung in dem einen Falle bei vorhandenem resp. starkem Felde, im anderen Falle nach Aufhebung resp. bei schwachem Felde vorgenommen wird; es hat also hiermit nichts zu tun, daß die Erschütterung bei vorhandenem Felde, eben weil sie den temporären Magnetismus steigert, auch den remanenten Magnetismus, der ein Bruchteil von jenem ist, steigert; von dieser sekundären




Figur 144.

Wirkung auf die Remanenz wird im folgenden abgesehen. Das Gemeinsame der beiden genannten, einander scheinbar entgegengesetzten Wirkungen liegt offenbar darin, daß die Erschütterung den Widerstand der Teilchen gegen die Annahme des neuen Zustandes überwinden hilft, daß sie die (bei Einbringung in das Feld negativen, bei Aufhebung des Feldes positiven) Nachwirkungen mehr oder weniger beseitigt und somit den Magnetismus demjenigen Werte näher bringt, welcher der ausschließlichen Wirkung der augenblicklichen Kräfte entspricht und oben als Normalmagnetismus (S. 216) bezeichnet wurde. Auch bei den hier in Rede stehenden Erscheinungen erkennt man leicht eine durchgehende Analogie mit den entsprechenden Erscheinungen bei der Elastizität der Körper.

Wenn hiernach der unmittelbare Einfluß der Erschütterungen sich auf die Nachwirkungserscheinungen erstreckt, so ist einleuchtend, daß alle diejenigen Erscheinungen, welche von der Nachwirkung abhängen, wesentlich verschieden ablaufen werden, je nachdem sie ohne oder mit Erschütterungen vorgenommen werden. Das ist in der Tat bei den im Artikel „Magnetische Induktion" angeführten Untersuchungen von WIEDEMANN, FROMME[1], AUERBACH usw., desgleichen bei der Hysteresis in hohem Maße der Fall, worüber man z. B. bei WARBURG[2] einige Zahlen findet; dasselbe gilt von den Einflüssen der Dehnung und Torsion

[1] Über besondere hierbei auftretende Erscheinungen vgl. C. FROMME, Wied. Ann. **4**. S. 98. 1878. — [2] E. WARBURG, Wied. Ann. **13**. S. 141. 1881.

auf den Magnetismus, insoweit sich hier Hysteresis geltend macht. Die von den beiden Zweigen der Hysterisiskurve eingeschlossene Fläche wird durch Erschütterung während des Prozesses erheblich verkleinert, und sie kann unter Umständen geradezu annulliert werden. Über alle diese Punkte findet man z. B. bei Ewing[1] interessante Details. Er benutzte bei einigen seiner Versuche ganz weiches Eisen, und er führt an, wie empfindlich dies gegen Schläge ist: bei der leisesten Berührung mit der Hand nach Aufhebung des Feldes verliert es den größten Teil seines Magnetismus. Man hat hierin, neben der entmagnetisierenden Kraft den wichtigsten Erklärungsgrund für die frühere Meinung, weiches Eisen behalte fast gar keinen Magnetismus zurück; man muß es nur in gänzlicher Ruhe belassen, um sich zu überzeugen, wie stark der remanente Magnetismus ist (vgl. z. B. S. 210). Entsprechend groß ist der erwähnte Einfluß auf die Hysteresis, wie er in Figur 144 dargestellt ist; die gestrichelte Kurve wurde ohne, die ausgezogene mit Erschütterungen erhalten, die eingeschlossene Fläche ist, wie man sieht, auf einen ganz kleinen Bruchteil reduziert, zugleich ist der Inflexionspunkt weggefallen, das Maximum erhöht; die punktierte Linie zeigt den plötzlich veränderten Verlauf, wenn man vom Operieren mit Erschütterungen plötzlich zum Operieren ohne solche übergeht. Wenn die meisten der aus älterer Zeit stammenden Magnetisierungs-Kurven nicht brauchbar sind, so mag das zum Teil in diesen Verhältnissen seinen Grund haben.

Nach G. Wiedemann[2] kann man ferner durch Erschütterung einen Stab geradezu magnetisch machen, nämlich wenn sein scheinbar unmagnetischer Zustand eine Folge vorangegangener Magnetisierung und Entmagnetisierung war; jedoch gilt das nur dann, wenn die Entmagnetisierung durch einen einzigen, dem ersten entgegengesetzten Strom oder eine zur wirklichen Entmagnetisierung nicht geeignete Folge von Strömen geschah; bei den von Gaugain und Auerbach empfohlenen Entmagnetisierungsverfahren ist dies nicht der Fall. Dagegen kann nach Wiedemann ein Stab, der erst magnetisiert und dann durch einen entgegengesetzten Strom von geeigneter Stärke ummagnetisiert worden war, durch Erschütterungen den Magnetismus der früheren Richtung wiedergewinnen.

Von Frommes[3] Resultaten seien folgende angeführt: 1. Erschütterungen üben eine spezifische, von etwa durch sie hervorgerufenen Deformationen unabhängige Wirkung aus. 2. Die Wirkung findet nicht nur nach vorangegangener Magnetisierung, sondern auch frisch nach dem Ausglühen statt. 3. Die Wirkung besteht in einer Gruppierung und eventuellen Rückdrehung der Molekularmagnete. 4. Die temporäre und namentlich die remanente Suszeptibilität nimmt für kleine Kräfte ab. 5. Erschütterungen, die vor der Magnetisierung angewandt werden, vermögen, noch so zahlreich, nicht das Minimum der remanenten Suszeptibilität herbeizuführen; hierzu ist vielmehr öftere Abwechselung zwischen Erschütterung und Magnetisierung erforderlich. 6. Das Minimum ist unabhängig von den Anfangswerten, es ist dagegen größer, wenn mit Magnetisierung, kleiner, wenn mit Erschütterung begonnen wurde. 7. Je größer die magnetisierende Kraft, desto geringer wird der Einfluß der Abwechselung zwischen Magnetisierung und Erschütterung auf die remanente Suszeptibilität; dagegen wächst die prozentische Schwächung eines bestehenden remanenten Momentes mit der Größe desselben. — Sonst ist noch auf eine Arbeit von Krüse[4] hinzuweisen.

**Stoßversuche.** Genauere Versuche über den Einfluß von Stößen haben insbesondere Wiedemann, Villari[5], Streintz[6], Brown[7], Berson[8] und Ascoli[9] an-

[1] J. A. Ewing, Tr. R. Soc. 1885 (2). S. 535 u. 564. — [2] G. Wiedemann, Pogg. Ann. **100**. S. 241. 1857. — [3] C. Fromme, Wied. Ann. **4**. 76; **5**. 345. 1878; **45**. 798. 1892; **61**. 55. 1897; **63**. 314. 1898. — [4] K. Krüse, Wien. Ber. **109**. 195. 1900. — [5] E. Villari, N. Cim. **27**. 1868; Pogg. Ann. **137**. S. 569. 1869. — [6] H. und F. Streintz, Wien. Ber. **76** (2). S. 946. 1877. — [7] W. Brown, Phil. Mag. (5) **23**. S. 420. 1887. — [8] G. Berson, Compt. rend. **106**. S. 592. 1888; **108**. S. 94. 1889. — [9] M. Ascoli, N. C. (5) **3**. 5. 1902. — Auf diese versehentlich übersehene, interessante Arbeit sei noch besonders hingewiesen.

gestellt; dabei wurden die Stöße bald während der Wirkung der magnetischen Kraft, bald erst nachher ausgeübt, also in jenem Falle der günstige Einfluß auf den temporären, in diesem der ungünstige Einfluß auf den remanenten Magnetismus studiert; bei einigen Versuchen handelte es sich um longitudinalen, bei anderen um zirkularen Magnetismus, also um Magnetismus, wie er in Stäben durch Hindurchleitung von Strömen oder in Röhren durch Ströme entsteht, die durch einen in der Achse verlaufenden Draht geschickt werden; von Materialien wurden Eisen, Stahl und Nickel verwandt. Die Stöße wurden nach Heftigkeit und Zahl variiert, die Magnetisierung nach Intensität und Charakter (häufige Wiederholung, Hin- und Hermagnetisierung). Bei allen diesen Versuchen tut man gut, den Einfluß des Erdmagnetismus durch geeignete Aufstellung der Körper zu eliminieren. Unter den Ergebnissen seien folgende angeführt. Der günstige Einfluß auf den temporären Magnetismus ist für schwach magnetisierende Kräfte natürlich relativ bedeutender als für große; bei Nickel stieg das Maximum des Magnetismus bis zum zehnfachen Betrage des Wertes ohne Erschütterung. Die ungünstige Wirkung auf den remanenten Magnetismus andererseits ist desto größer, je größer er selbst ist. Eine Reihe von Schlägen verringert den Magnetismus um abnehmende Beträge, das Gesetz dieser Abnahme ist entweder das einer Exponentialfunktion mit negativem Exponenten (STREINTZ) oder das eines fallenden Zweiges einer gleichseitigen Hyperbel (BERSON). Bei weichem Eisen ist der Verlust größer als bei Stahl, und bei letzterem ist er desto größer, je länger der Magnet vorher unberührt gelegen hat und je weniger Mangan er enthält.

Zum Schlusse sei auf die Analogie hingewiesen, welche zwischen der Wirkung von Erschütterungen und gewissen magnetisierenden Wirkungen selbst besteht, nämlich Magnetisierungen in entgegengesetztem Sinne oder in der auf der ersten senkrechten Richtung oder endlich dem Einflusse der Geschwindigkeit, mit welcher die Magnetisierung oder Entmagnetisierung erfolgt. Je plötzlicher man die einen Stab magnetisierende Kraft aufhebt, desto größer fällt der remanente Magnetismus aus, und namentlich FROMME[1] hat in seinen Arbeiten den Nachweis geliefert, daß man in vielen Fällen ganz denselben Effekt erzielt, ob man nun eine Erschütterung anwendet oder eine der bezeichneten Maßnahmen in Betreff der Entmagnetisierung trifft. Jede nicht unendlich langsam sich vollziehende Änderung der magnetischen Kraft ist eben für den Körper gleichbedeutend mit einem mechanischen Stoße.

## 8. Beziehungen zum Schall.

**Einfluß von Schwingungen auf den Magnetismus.** Zunächst ist auf einen von WARBURG[2] herrührenden Versuch hinzuweisen, bei dem ein langer Eisendraht in magnetischem Zustande in Longitudinalschwingungen versetzt wurde; ein Elektrodynamometer, das mit der über eine Stelle des Drahtes geschobenen Induktionsspule verbunden war, gab dann einen Ausschlag, ließ also die periodische Änderung des temporären Magnetismus erkennen.

Daß man auf diese Weise auch unmagnetische Stäbe zu Magneten machen kann, hat ST. MEYER[3] gezeigt. Streicht man einen in die Richtung des Erdfeldes oder seiner Horizontalkomponente gehaltenen Eisenstab mit einem mit Kolophonium eingeriebenen Lappen an, so erhält man gewöhnlich schon nach einmaligem Streichen einen relativ kräftigen Magnetismus, der sich nach ein- bis zweimaligem entgegengesetzten Streichen umkehrt. Dabei liegen aber die Pole nicht an den Enden, ihre Lage hängt vielmehr von dem gewählten Tone ab,

[1] C. FROMME, Magnetische Untersuchungen Abh. I—VII, Wied. Ann. 1877—91. — [2] E. WARBURG, Pogg. Ann. **139**. S. 499. 1870. — [3] ST. MEYER, Boltzmann-Festschrift S. 68. 1904.

indem sie beim Grundton ziemlich weit von den Enden liegen und für die Obertöne immer mehr nach den Enden hin wandern; außerdem liegen sie bei dünnen Stäben den Enden näher. Auch transversale Schwingungen sind wirksam.

**Einfluß des Magnetismus auf Schwingungen.** MAURAIN[1] hat die Schwingungen von Stimmgabeln im Felde beobachtet, und zwar in drei verschiedenen Fällen. Liegt erstens die Achse der Gabel senkrecht und die Schwingungsrichtung parallel zum Felde, so nimmt die Schwingungszahl $n$ mit wachsendem Felde $\mathfrak{H}$ ab, bei 6350 beträgt die Abnahme 3,8%. Liegt zweitens die Achse und die Schwingungsrichtung senkrecht zum Felde, so nimmt $n$ mit $\mathfrak{H}$ zu, bei 6530 um $^3/_4$%. Ist drittens die Gabelachse dem Felde parallel, so erfolgt, gleichviel wie die Schwingungen gerichtet sind, Zunahme von $n$, und zwar um 0,38% im Felde 1090. — Es wäre erwünscht, wenn diese Versuche wiederholt und ausgedehnt würden.

**Erzeugung von Schall durch Magnetismus.** Nach dem Vorhergegangenen liegt die Vermutung nahe, daß die Magnetisierung der Körper unter Umständen Schall erzeugen, insbesondere Töne hervorrufen könne. Dabei kann man einmal an die innere Deformation (Verlängerung, Verkürzung usw.) des magnetischen Körpers denken, dann aber auch an die Anziehungen und Abstoßungen, die er von seiten der magnetisierenden Spule erfährt; in der Tat scheinen bei den vorliegenden Beobachtungen beide Ursachen tätig zu sein, und es läßt sich meist nicht entscheiden, auf welche der wesentliche Anteil entfällt.

Am einfachsten verständlich ist die Entstehung solcher Töne in einem Falle, in welchem der magnetisierende Strom, also auch die Magnetisierung eine periodische ist, sei es daß sie zwischen einem gewissen Werte und null oder zwischen einem gewissen positiven und demselben negativen Werte hin und her schwankt; der Stab gerät alsdann eben in Längsschwingungen. Aber auch bei einmaligem Schließen oder Öffnen des Stromes erhält man Töne, und mit Hilfe eines am Ende des Stabes angebrachten Schreibstiftes, unter dem man eine berußte Platte wegzieht, kann man erkennen, daß auch hier der Stab Longitudinalschwingungen, wenn auch rasch erlöschende, ausführt. Bei der Magnetisierung oder Entmagnetisierung tritt also ein oszillatorischer Vorgang auf, nur ist schwer zu sagen, ob nur die Anziehung durch die Spule oder ob auch die eigentliche magnetische Deformation oszillatorisch erfolgt; mancherlei Wahrnehmungen lassen immerhin auch das letztere möglich erscheinen. Die Stärke der auftretenden Töne wächst natürlich mit der Stärke der Magnetisierung, ihre Tonhöhe folgt im großen Ganzen den betreffenden akustischen Gesetzen, d. h. bei verschieden langen Stäben erhält man umgekehrt proportionale Tonhöhen, und wenn man eine kurze Magnetisierungsspule benutzt, so kann man durch Aufschieben derselben über verschiedene Stellen des Stabes nach Belieben seinen Grundton oder einen seiner Obertöne erhalten. Über die Einzelheiten aller dieser Erscheinungen, die man außer an Stäben und Drähten auch an Scheiben und Spiralen, und außer bei der gewöhnlichen auch bei der zirkularen Magnetisierung durch hindurchgeleitete Ströme beobachten kann, sei auf die Versuche von MATTEUCCI[2], WERTHEIM[3], BUFF[4], DE LA RIVE[5] und FERGUSON[6] verwiesen, besonders aber auf eine neuere Arbeit von BACHMETJEW[7], worin u. a. gezeigt wird, daß ein stark gedehnter Stab keine Töne mehr gibt, und aus dieser und anderen Erscheinungen geschlossen wird, daß das Tönen eine unmittelbare Folge der Längenänderungen sei.

---

[1] M. MAURAIN. C. R. **121**. 248. 1895. — [2] C. MATTEUCCI, vgl. Wied. Elektr. **3**. S. 730. — [3] W. WERTHEIM, Ann. Chim. Phys. (3) **23**. S. 302. 1848; Pogg. Ann. **77**. S. 43. — [4] H. BUFF, Ann. Chem. Pharm. Suppl. Bd. **3**. S. 129. 1864—65. — [5] A. DE LA RIVE, Compt. rend. **20**. S. 1287. 1845; Pogg. Ann. **65**. S. 637. — [6] R. M. FERGUSON, Proc. R. Soc. Edinb. 1878. — [7] P. BACHMETJEW, Rep. d. Phys. **26**. S. 137. 1890.

Die neueste hierher gehörige Arbeit ist eine von HONDA und SHIMIZU[1]. Ferromagnetische Metalle ertönen auf intermittierende oder Wechselströme und geben in beiden Fällen dieselbe Tonhöhe. Die Amplitude ist im allgemeinen viel größer, als nach der Längenänderung zu erwarten wäre, auch zeigen sich bei Änderung der Frequenz unter Aufrechterhaltung der Feldstärke eigentümliche Maxima und Minima der Amplitude, so daß es sich hier vielleicht um eigenartige nystereticsche Vorgänge handelt, die noch der weiteren Aufklärung bedürfen.

**Telephon von REISS[2].** Bekanntlich beruht auf der periodischen Längenänderung eines periodisch magnetisierten Stabes die Idee des ersten jemals konstruierten elektromagnetischen Telephons, des Telephons von REISS, das heute freilich nur historisches Interesse hat. Bei ihm singt oder spricht man gegen eine Membran, die in der Mitte ein Platinscheibchen trägt, während diesem gegenüber eine feste Platinspitze sich befindet; hierdurch bewirkt man, daß ein Stromkreis abwechselnd geschlossen und unterbrochen wird, dieser Stromkreis geht durch eine Spule, in deren Achse sich eine Stricknadel befindet; letztere wird dadurch periodisch deformiert und läßt demgemäß Töne von summendem Charakter und wechselnder Tonhöhe und Klangfarbe hören. Von einer wirklichen Wiedergabe des Hineingesprochenen oder -gesungenen kann schon deshalb nicht die Rede sein, weil während eines Teiles der Periode der Strom unterbrochen ist; aber auch nach der leicht zu erzielenden Beseitigung dieses Fehlers würde die Natur der Deformationsschwingungen als entscheidendes Hindernis im Wege bleiben. Die jetzigen Telephone beruhen demgemäß gerade auf der anderen der beiden hier in Frage kommenden Einwirkungen, auf der elektromagnetischen Anziehung und Abstoßung des Reproduktionskörpers durch die auf ihn einwirkende Spule[3].

---

[1] K. HONDA und S. SHIMIZU, Phil. Mag. 4. 645. 1902. — [2] P. REISS, Jahresber. d. phys. Ver. Frankfurt a. M. 1860 u. 1861. — [3] Vielfache Versuche, die Vorzüge des BELLschen Telephons mit denen des REISSschen zu vereinigen, sind praktisch erfolglos geblieben.



# Beziehungen des Magnetismus zur Wärme.

Von F. AUERBACH.

**Übersicht.** Es sind hier wiederum die zueinander reziproken Beziehungen zu untersuchen: 1. Die Wirkung der Wärme, also der Temperatur, auf den Magnetismus; dabei sind wieder die ferromagnetischen Stoffe von den para- und diamagnetischen zu sondern, und bei ersteren ist der Wirkung auf den temporären die auf den permanenten Magnetismus sowie auf die Hysteresis anzugliedern; den Beschluß bilden einerseits theoretische, andererseits praktische Bemerkungen. 2. Die Wirkung der Magnetisierung auf den Wärmezustand der Körper, also die Erzeugung von Magnetisierungswärme — ein Abschnitt, der offenbar die weitere Ausführung dessen darstellt, was schon früher (S. 153) über die Magnetisierungsarbeit gesagt worden ist. Endlich handelt es sich 3. um die Wirkung der Magnetisierung auf das sonstige thermische bzw. kalorische Verhalten der Körper — Wärmeleitung, spezifische Wärme, chemische Wärme usw.

## 1. Einfluß der Temperatur auf den Magnetismus.

**Methodik.** Wie auf fast alle physikalische Vorgänge, so hat die Temperatur auch auf den Magnetismus einen ebenso erheblichen wie merkwürdigen Einfluß. Die Methodik der experimentellen Untersuchung dieses Einflusses zerfällt in zwei Teile, den magnetischen und den thermischen. In bezug auf jenen ist einfach auf die früheren Angaben zu verweisen; die dort genannten Methoden sind auch hier verwendbar, ev. mit zweckentsprechender Abänderung; z. B. im Sinne des Differentialprinzips, indem man die Wirkung bei gewöhnlicher Temperatur kompensiert und so die besondere Wirkung der abnormen Temperatur kräftiger herausschält. Der thermische Teil der Methodik andererseits besteht in der Erzielung und Messung der abnormen — sei es nun besonders hohen oder besonders tiefen — Temperaturen; es würde aber zu weit führen, hierauf einzugehen, und es muß deshalb auf die Originalabhandlungen verwiesen werden[1].

Bei ferromagnetischen Stoffen erheben sich aber noch weitere methodische Fragen. Denn hier ist, wie wir wissen, die Intensität der Magnetisierung keine einfache, der Kraft proportionale Größe, sondern eine komplizierte Funktion; und diese Funktion verwickelt sich nunmehr noch weiter dadurch, daß außer der Kraft noch die Temperatur als Argument eintritt. Man kann nun offenbar zwei Wege einschlagen: nämlich entweder die Temperaturfunktion für eine bestimmte Feldstärke ermitteln und dies dann für andere Feldstärken wiederholen, oder bei einer bestimmten Temperatur die Magnetisierungskurve, d. h. den Magnetismus

[1] Außer den früher und w. u. zitierten Arbeiten seien hier noch folgende, auf die Methodik bezügliche, genannt: H. WILDE, Mem. Manch. Soc. (4) **9**. 2. 1894. — PITCHER, El. World **30**. 250. 1897.

als Funktion der Feldstärke ermitteln und dieser Kurve dann andere, auf andere Temperaturen bezügliche, an die Seite stellen. In älterer Zeit schlug man meist das erstere Verfahren ein, in neuerer Zeit gibt man dem letzteren den Vorzug, hauptsächlich, weil es mühseliger ist die Temperatur als das Feld immer wieder von neuem zu variieren. Wäre übrigens der Magnetismus eines Körpers lediglich eine Funktion, und zwar eine eindeutige, der Feldstärke und der Temperatur, so müßten offenbar beide Methoden im ganzen zu dem gleichen Ergebnisse führen. Infolge der Nachwirkungserscheinungen ist das aber nicht der Fall, und hierdurch komplizieren sich die Verhältnisse ganz wesentlich. Denn einerseits wird bei der Temperaturfunktion die Rückkurve anders ausfallen wie die Hinkurve, und ebenso wird es sich andererseits bei der Magnetisierungsfunktion verhalten; es wird also darauf ankommen, die Resultate richtig zu interpretieren. Insbesondere fallen die Ergebnisse verschieden aus, je nachdem man es mit erstmaligen Temperaturänderungen zu tun hat oder aber die thermische Einwirkung bereits den zyklischen Charakter angenommen hat — ganz analog wie bei den Veränderungen der Feldstärke.

### a) Ferromagnetische Stoffe.

**Wirkung auf den temporären Magnetismus.** Eine erstmalige Temperaturerhöhung auf 100° hat nach KUPFFER[1] eine Verstärkung des Magnetismus zur Folge, die bei Wiederabkühlung nicht vollständig verschwindet, eine nochmalige Erwärmung bringt den Magnetismus weiter in die Höhe, und nach der zweiten Abkühlung ist er wiederum größer als nach der ersten usw. G. WIEDEMANN[2] hat ferner gezeigt, daß eine Vergrößerung des Magnetismus auch dann eintritt, wenn die erste Temperaturänderung in einer Abkühlung besteht, wenn also der Körper bei 100° magnetisiert und dann auf Zimmertemperatur abgekühlt wird. Man kann hiernach sagen, daß jeder erstmalige thermische Eingriff, unabhängig von seinem Vorzeichen, günstig auf den Magnetismus wirkt.

Von diesen Anfangserscheinungen abgesehen, ist nun die Wirkung der Temperatur auf den Magnetismus die, daß der unter Wirkung einer bestimmten Kraft vorhandene Magnetismus mit wachsender Temperatur zunimmt, allmählich aber langsamer, daß er dann ein Maximum erreicht und von diesem aus sehr rasch abnimmt, um schließlich gänzlich zu verschwinden; bei der Wiederabkühlung erscheint er dann wieder, steigt, erreicht wieder das Maximum und fällt dann auf den normalen Wert herab. Von älteren Beobachtungen seien hier die SCORESBYS[3] angeführt, der die Erscheinung zuerst beobachtet zu haben scheint; die Zahlen bedeuten Ablenkungen einer Nadel:

| Material | kalt | dunkelrot | weißglühend |
|---|---|---|---|
| Schmiedeeisen . . . . . . . | 40° | 55° | 0° |
| Gußeisen . . . . . . . . . | 21° 30′ | 62° | 0° |
| Weiches Eisen . . . . . . . | 15° 10′ | 41° 11′ | 0° |
| Weicher Stahl . . . . . . . | 11° 8′ | 48° | 0° |
| Harter Stahl . . . . . . . | 8° 0′ | 47° 30′ | 0° |

Bei Dunkelrotglut ist also der Magnetismus größer als im kalten Zustande, bei Weißglut ist er hingegen gänzlich verschwunden. Auf die übrigen älteren Arbeiten braucht hier nicht eingegangen zu werden, da aus neuerer und neuester

[1] A. T. KUPFFER, Kastners Archiv **6**. S. 194. 1825. — Pogg. Ann. **17**. 405. 1829. — [2] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **122**. S. 346. 1864. — [3] SCORESBY, Pogg. Ann. **10**. S. 49. 1827.



Zeit sehr sorgfältiges und reiches Material vorliegt, insbesondere von Rowland [1], C. Baur [2], Ewing [3], Perkins [4], Trowbridge [5], Hopkinson [6], H. E. J. G. du Bois [7], Tomlinson [8], H. Wilde [9], A. W. Rücker [10], P. Curie [11], Nils Grane [12], C. Fromme [13], D. K. Morris [14], Ch. Guillaume [15], L. Houllevigue [16], F. Osmond [17], L. Dumas [18], E. Dumont [19], R. L. Wills [20], E. H. Barton [21], J. Rinne [22], Pitcher [23], Le Chatelier [24], Mazotto [25] u. a.

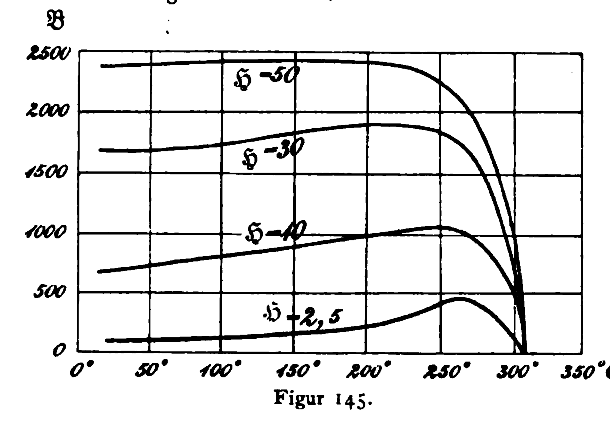
Nach diesen Versuchen existiert für den Magnetismus als Funktion der Temperatur (bei einer bestimmten magnetisierenden Kraft) eine „kritische Temperatur", unterhalb deren der Magnetismus wächst, oberhalb deren er fällt; und ebenso existiert für den Magnetismus als Funktion der magnetisierenden Kraft (bei einer bestimmten Temperatur) eine „kritische magnetisierende Kraft" [26], unterhalb deren der Magnetismus für höhere Temperaturen größer, oberhalb deren er für höhere Temperaturen kleiner ist als für gewöhnliche Temperatur, vorausgesetzt, daß die hier genannte höhere Temperatur unterhalb der kritischen liegt (denn oberhalb der kritischen ist der Magnetismus für beliebige Kräfte bei höherer Temperatur kleiner als bei normaler). Man kann dieses Verhalten auch in folgender Weise aussprechen: Bei kleinen, magnetisierenden Kräften nimmt der Magnetismus mit wachsender Temperatur erst bis zu einem Maximum zu und dann ab, bei großen nimmt er von vornherein ab. Dabei ist die Zunahme bei kleinen Kräften eine desto beträchtlichere und der dann folgende Absturz ein desto plötzlicherer, je kleiner die magnetisierende Kraft ist; je größer die Kraft ist, desto sanfter wird also der Bogen der Kurve, und bei der kritischen Kraft fällt ihr ansteigender Zweig ganz fort, sie besteht lediglich aus einem anfangs wenig, allmählich schneller und schließlich steil abfallenden Zweige. Der Zahlenwert der kritischen Temperatur ist für verschiedene Materialien und bei demselben Stoffe für verschiedene Feldstärken verschieden, für Eisen liegt er zwischen 700 und 800°, bei hartem Stahl zwischen 600 und 700°, bei Nickel zwischen 250 und 350°, bei Magnetit (Curie) etwa bei 535°. Der Temperaturwert, bei welchem der Magnetismus verschwindet, ist hiervon in Anbetracht des raschen Abfalls der Kurve nicht erheblich verschieden; nach Baur bedingt dabei der Wert der magnetischen Kraft nur kleine Verschiedenheiten, indem nämlich das Wiederauftreten des Magnetismus bei Eisen zwar allgemein bei sehr heller Rotglut stattfindet, bei großen Kräften jedoch bei noch hellerer als bei kleinen. Zahlreiche hierher gehörige Beobachtungen hat auch Berson [27] gemacht, sie beziehen sich aber nur auf eine bestimmte Kraft und haben daher nur beschränkten Wert. Einige besondere Beobachtungen über das mehr oder weniger plötzliche Verschwinden und Wiederauftreten des Magnetismus rühren von Gore her, er

---

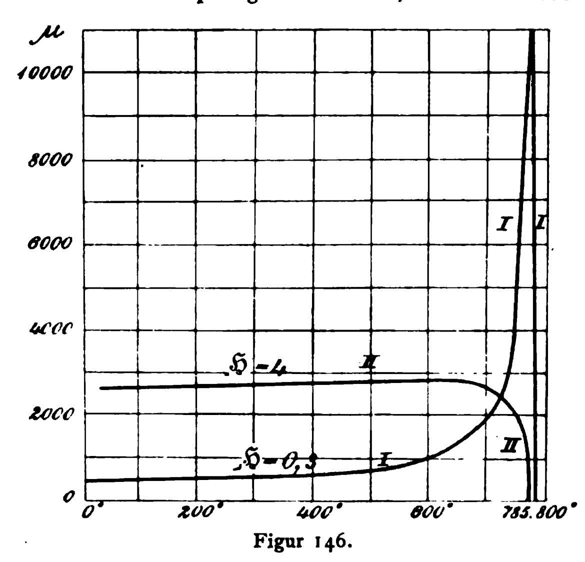
[1] H. Rowland, Phil. Mag. (4) **48**. S. 321. 1874. — [2] C. Baur, Wied. Ann. **11**. S. 394. 1880. — [3] J. A. Ewing, Trans. R. Soc. 1885 (2). S. 523, insbesondere Kap. 8 u. 9 (§ 114, S. 630). — [4] C. A. Perkins, Sill. Journ. (3) **30**. S. 218. 1885. — [5] J. Trowbridge, Pr. Am. Ac. 1885. S. 462. — [6] J. Hopkinson, Proc. R. Soc. **45**. S. 318; Trans. R. Soc. 1889 A. S. 443. — [7] H. du Bois, Phil. Mag. (5) **29**. S. 293. 1890. — [8] H. Tomlinson, Phil. Mag. (5) **25**. S. 372; **26**. S. 18. 1888. — [9] H. Wilde, Proc. R. Soc. **50**. 109. 1891. — [10] A. W. Rücker, Lum. électr. **46**. 37. 1892. — [11] P. Curie, C. R. **118**. 796. 859. 1134. — [12] Nils Grane, Acta Univ. Lund **30**. 1893/94. — [13] C. Fromme, Wied. Ann. **61**. 55. 1897. — [14] D. K. Morris, Phil. Mag. **44**. 213. 1897. — [15] Ch. Guillaume, C. R. **124**. 1515. 1897. — Arch. Sciences phys. et nat. (4) **5**. 305. — J. de phys. (3) **7**. 262. 1898. — J. de phys. (3) **8**. 94. 1899. — [16] L. Houllevigue, J. de phys. (3) **8**. 89. 1899. — [17] F. Osmond, C. R. **128**. 304. 1899. — C. R. **128**. 1513. 1899. — [18] L. Dumas, C. R. **129**. 42. 1899. — [19] E. Dumont, C. R. **126**. 741; Arch. Genève **5**. 1898. — [20] R. L. Wills, Phil. Mag. **50**. 1. 1900. — [21] E. H. Barton, Trans. Edinb. Soc. **38**. 567. 1897. — [22] F. Rinne, Cbl. f. Min. 1902. 294. — [23] J. A. Pitcher, Phil. Mag. **47**. 421. 1899. — [24] H. Le Chatelier, C. R. **119**. 272. 1894. — [25] D. Mazotto, N. C. (5) **3**. 417. 1902. — [26] J. Hopkinson versteht unter kritischer Temperatur vielfach denjenigen Wert, bei welchem der Magnetismus völlig verschwindet; die obige Nomenklatur ist aber wegen der angegebenen Reziprozität der beiden kritischen Begriffe bei weitem vorzuziehen. — [27] G. Berson, Ann. Chim. Phys. (5) **8**. S. 433. 1886.

hat u. a. gefunden, daß die Erscheinung von stoßartigem Charakter ist, und es lassen sich daraus weitere Schlüsse ziehen (s. w. u.).

**Versuche von HOPKINSON.** Nur auf einige von den zitierten Arbeiten kann hier etwas näher eingegangen werden. Zunächst seien die allgemeinen Verhältnisse in Figur 145 bis 147 nach HOPKINSON für einen Ring aus Nickel (Figur 145) resp. Schmiedeeisen (Figur 146 und 147) anschaulich dargestellt; es sei bemerkt, daß die Kurven für Eisen, Stahl und Nickel ganz ähnlich ausfallen. Figur 145 stellt die Induktion 𝔅 als Funktion der Temperatur dar, und zwar für vier verschiedene Kräfte ℌ; je größer letztere, desto weniger ist das der kritischen Temperatur entsprechende Maximum ausgebildet. Figur 146 stellt in derselben Weise die Permeabilität $\mu$ als Funktion der Temperatur dar, und zwar für eine kleine, magnetisierende Kraft ℌ = 0,3 (Kurve 1) und für eine größere Kraft ℌ = 4 (Kurve II); erstere steigt erst langsam, dann rapide an, und zwar bis auf das 30fache der ursprünglichen Höhe, um dann noch plötzlicher auf null abzufallen, die zweite Kurve steigt nur ganz wenig an und fällt dann ab. Ähnliche Kurven würden auch hier für die magnetische Induktion selbst gelten, nur müßte man dann die Ordinate der zweiten Kurve, um sie mit der ersten vergleichbar zu machen, im Verhältnis von 4 : 0,3 (wegen 𝔅 = $\mu$ ℌ) größer darstellen. Die einzigen Unterschiede zwischen Eisen und Nickel sind, wie man sieht, das frühere Verschwinden des Magnetismus und der sanftere Charakter der Erscheinung bei Nickel. Bei Kobalt senkt sich die Kurve noch später als bei Eisen zur Nullachse hinab. In Figur 147a ist die andere der beiden Darstellungsarten gewählt, d. h. es ist hier die magnetische Induktion 𝔅 als Funktion der Kraft ℌ, also die Magnetisierungskurve gezeichnet und zwar für vier verschiedene Temperaturen (I : 10°, II : 670°, III : 742°, IV : 771°); diese Kurven schneiden sich, wie man sieht, sämtlich untereinander, so daß die ursprünglich unterste schließlich die oberste wird und umgekehrt; um die Art der Kreuzung deutlicher zu zeigen, sind in Figur 147b die ersten Stücke der Kurven in 20mal vergrößertem Abszissenmaßstabe wiedergegeben. Der Effekt gesteigerter Temperatur ist hiernach, daß der Sättigungswert des Magnetismus kleiner ist und ebenso wie der Inflexionspunkt früher erreicht wird; der Inflexionspunkt der Kurve, d. h. der Punkt, bis zu welchem der Magnetismus stärker und von dem

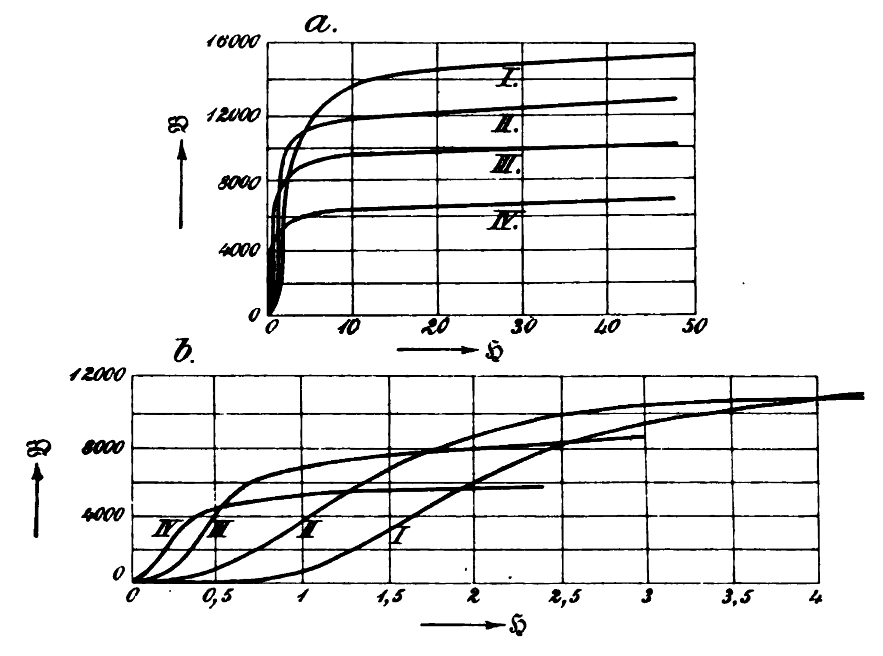


Figur 145.

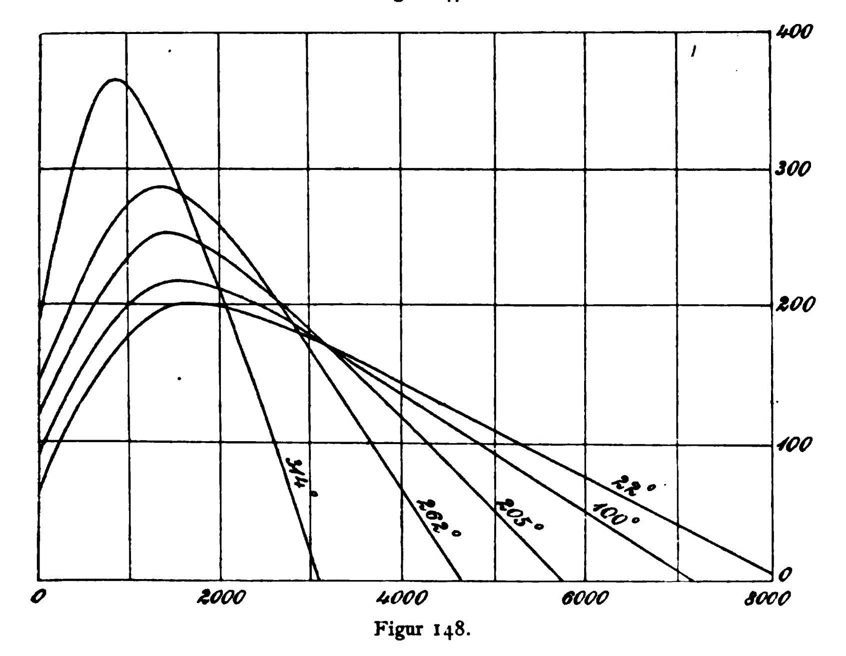


Figur 146.

an er langsamer als die Kraft wächst, liegt für das den obigen Darstellungen zugrunde liegende Versuchsobjekt für 10° bei $\mathfrak{H} = 1{,}6$, für 670° bei $\mathfrak{H} = 1{,}1$, für 742° bei $\mathfrak{H} = 0{,}4$ und für 771° bei $\mathfrak{H} = 0{,}2$.




Figur 147.




Figur 148.

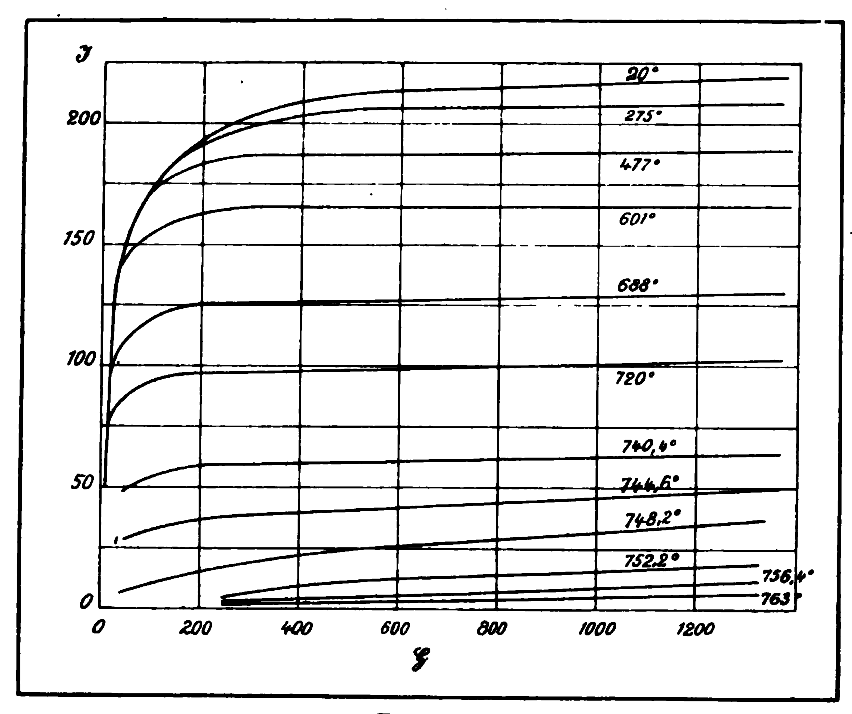
**Versuche von du Bois und Perkins.** Die weitere Fortsetzung dieser Magnetisierungskurven für sehr große magnetisierende Kräfte verdankt man du Bois (nach der optischen Methode erhalten). du Bois vergleicht, um den Einfluß der verschiedenen Materiale zu eliminieren, nicht die Suszeptibilitäten

oder Permeabilitäten miteinander, sondern die spezifischen Magnetismen $\sigma$ und findet die höchsten erreichten Grade (Zahlen sind nicht angegeben, nur Kurven):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eisen ($\mathfrak{H}$ = 1150) : | $\sigma$ = 219 | bei 0°, 215 | bei 100° |
| Stahl ($\mathfrak{H}$ = 3750) : | $\sigma$ = 211 | „ 0°, 207,5 | „ 100° |
| Kobalt ($\mathfrak{H}$ = 7900) : | $\sigma$ = 154 | „ 0°, 149 | „ 100° |
| Nickel ($\mathfrak{H}$ = 12100) : | $\sigma$ = 68,5 | „ 0°, 60 | „ 100°. |

Die Differenz ist also bei Nickel absolut (und erst recht relativ) am größten, bei Stahl am kleinsten. Für $\mathfrak{H} = 900$ wurden außerdem die Kurven der Magnetismen als Funktion der Temperatur ermittelt, sie fallen natürlich sämtlich von Beginn an, erst langsam, dann schneller, aber doch sehr viel sanfter als bei kleinen oder mäßigen Kräften.

Statt $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$ oder $\sigma$ kann man auch $\varkappa$ oder $\mu$ als Funktion von $\mathfrak{H}$ darstellen und daraus Schlüsse ziehen, wie dies z. B. PERKINS getan hat; seinen Arbeiten ist die auf Nickel bezügliche Figur 148 entlehnt. Wie man sieht, rückt das Maximum mit steigender Temperatur immer mehr nach links.




Figur 149.

**Untersuchungen von P. CURIE.** Die wichtigsten Ergebnisse sind in den Figuren 149 bis 151 dargestellt; Figur 149 zeigt die Magnetisierungskurven für verschiedene Temperaturen, Figur 150 hingegen die Temperaturkurven für verschiedene Feldstärken. Wie man aus Figur 149 ersieht, werden die Kurven desto eher geradlinig und desto später horizontal, je höher die Temperatur ist; schließlich — oberhalb 756° — werden sie durch den Anfangspunkt gehende Gerade, d. h. das Eisen verhält sich wie ein schwach magnetischer Stoff. In Figur 150 sind die den verschiedenen Feldstärken entsprechenden Temperaturkurven nur bis etwa 600° gezogen, von da ab, da sie hier dicht zusammenfallen, nur die beiden für $\mathfrak{H} = 25$ und $\mathfrak{H} = 1000$; bei etwa 750° nimmt der Magnetismus rapide ab. Für höhere Temperaturen ist, da hier zwischen Feld und Mag-

netismus nahezu Proportionalität besteht, nur noch die oberste Kurve gezeichnet, diese aber, um die Einzelheiten besser hervortreten zu lassen, in fünf verschiedenen Ordinatenmaßstäben, nämlich 1-, 10-, 100-, 1000- und 5000-fach. Da zeigt sich nun, daß das Eisen außer dem kritischen noch zwei weitere ausgezeichnete Temperaturpunkte besitzt, nämlich einen Inflexionspunkt bei 860° — sichtbar bei der Kurve (3) — und ein ganz plötzliches Anwachsen des Magnetismus bei 1280°. Noch deutlicher zeigt sich dieses seltsame Verhalten in Figur 151, wo lg$\varkappa$ als Funktion von lg$T$ dargestellt ist [$T$ die absolute Temperatur, vgl. hierüber und über den sonstigen Inhalt der Figur w. u.]. Hier sieht man, daß man den Kurvenzweig *ab* mit dem Zweig *ef* durch die gestrichelte Linie ganz normal verbinden kann; d. h. das Eisen kehrt, nachdem es bei *b* einen abnormen Zustand angenommen hat, bei *e* wieder in den normalen zurück. Zugleich sieht man, daß bei Nickel und Magnetit diese Abnormitäten fehlen. Letzteres Material empfiehlt sich durch seine Stabilität überhaupt sehr zum Studium der vorliegenden Beziehungen; sein kritischer Punkt liegt bei 535°, von da ab ist $\varkappa$ konstant und nimmt mit steigender Temperatur gleichförmig ab.

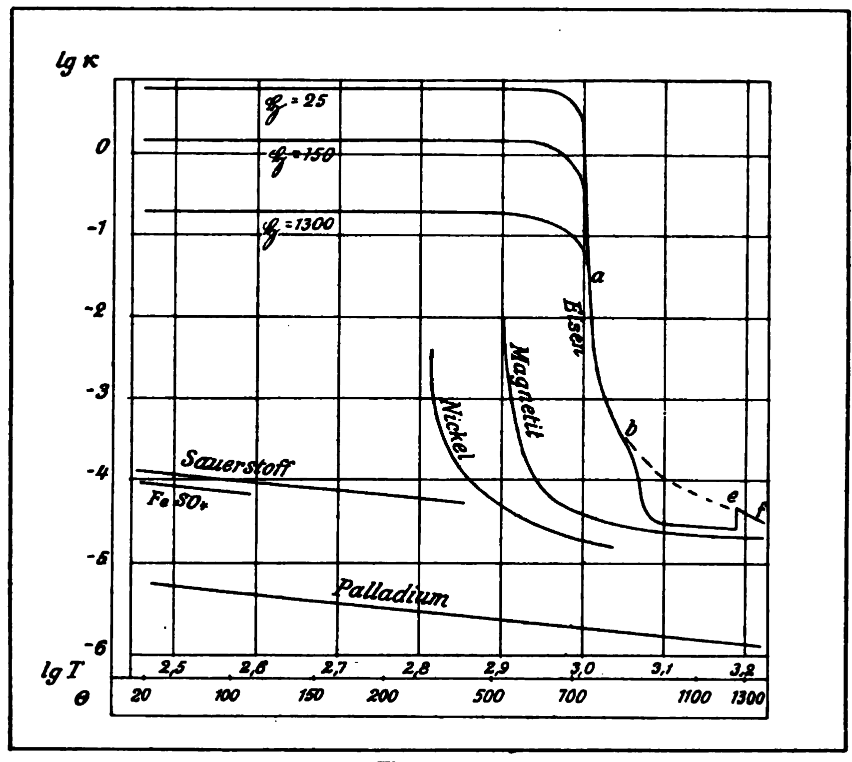
Figur 150.

**Untersuchungen von Morris.** Dieser Autor hat bei seinen ausgedehnten Versuchen, abgesehen von der Bestätigung der Resultate anderer, namentlich den Einfluß des Ausglühens bei verschiedenen Temperaturen — Rotglut und Weißglut — studiert; für einen bei 1150° geglühten Ring aus schwedischem Eisen erhielt er dabei die in Figur 152 wiedergegebenen Permeabilität-Temperatur-Kurven. Dabei zeigt sich nun eine neue Abnormität: bei 550° buchtet sich die Kurve mehr oder weniger stark ein, am stärksten bei einem Felde von der Stärke 1; es ist das eine Temperatur, bei der das Eisen nach Tomlinson auch andere abnorme Eigenschaften verrät; übrigens hat Morris bei anderen Sorten die Einbuchtung weniger deutlich oder gar nicht gefunden.

**Untersuchungen von R. L. Wills.** Diese Messungen erstrecken sich, außer auf Eisen, auch auf einige wichtige Legierungen desselben mit Wolfram, Aluminium, Nickel, Chrom und Mangan. Für jeden dieser Stoffe werden die Magnetisierungs- und die Temperatur-Kurven sowie die Kurven abgebildet, welche die, die größte Permeabilität liefernde, Feldstärke als Funktion der Temperatur

darstellen. Als Beispiel für die Temperaturkurven diene die Figur 153, die sich auf Wolfram-Eisen und vier verschiedene Feldstärken bezieht. Die Feldstärke der größten Permeabilität ist durch Kombination der Originalfiguren in Figur 154 als Funktion der Temperatur für verschiedene Stoffe wiedergegeben; man sieht, daß die Werte für die Legierungen (abgesehen von einer) viel größer sind als für reines Eisen, der Verlauf ist aber ein ganz ähnlicher; 1 ist Eisen, 2 enthält 4,5% Wolfram, 3 enthält 2,6% Aluminium (und Spuren von C, Si, P), 4 enthält 5% Nickel, 5 enthält 9% Chrom, 3% Mangan und 1% Kohle; 2 und 5 sind fast geradlinig, die anderen etwas stärker gekrümmt.

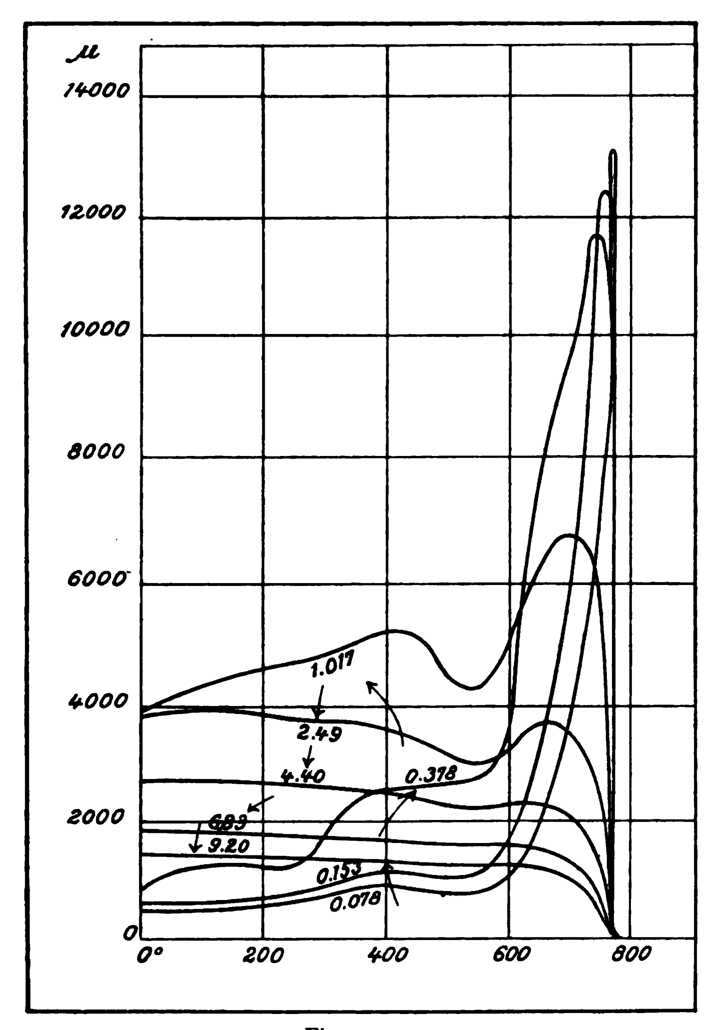
Von den übrigen Arbeiten sei noch folgendes erwähnt: Nach GRANE verschwindet der Magnetismus bei Eisen zwischen 735 und 831, bei Nickel zwischen




Figur 151.

368 und 481 Grad, und zwar bei stärkeren Kräften später als bei schwächeren. — Nach WILDE hängt der Magnetismus von den Dimensionen, besonders von der Massigkeit des Versuchskörpers ab, weil die inneren Teile nicht die volle Temperatur annehmen; ein offenbar mehr methodisches als tatsächliches Resultat. — Über die Eigenschaften von Eisen-Nickel-Legierungen liegen Untersuchungen von GUILLAUME, OSMOND, HOULLEVIGUE und L. DUMAS vor. Dabei ist (vgl. o. S. 243) zu unterscheiden zwischen „umkehrbaren" Legierungen mit mehr als 25% Nickel und nicht umkehrbaren mit weniger Nickel; letztere gewinnen bei der Abkühlung ihren Magnetismus bei einer anderen Temperatur wieder als bei der sie ihn verloren haben, und zwar bei einer desto höheren, je geringer der Nickelgehalt ist. Nach E. DUMONT gilt dabei für umkehrbare Legierungen das Gesetz: Wenn die Temperatur um einen bestimmten Betrag niedriger ist als die, bei welcher sie ihren Magnetismus vollständig verliert, so hat die Permeabilität einen bestimmten,

von dem Nickelgehalt unabhängigen Wert: bei gleicher Temperatur nimmt also die Permeabilität mit dem Nickelgehalt zu. Bei Legierungen mit 25 bis 68% Nickel ist die Übergangstemperatur — gleichviel ob hin- oder rückwärts — um so höher, je mehr Nickel vorhanden ist; geht man aber über 68% hinaus, so sinkt die Transformationstemperatur wieder. Ein Zusatz von Chrom erniedrigt beträchtlich die Temperatur, bei der nichtumkehrbare Legierungen wieder mag-

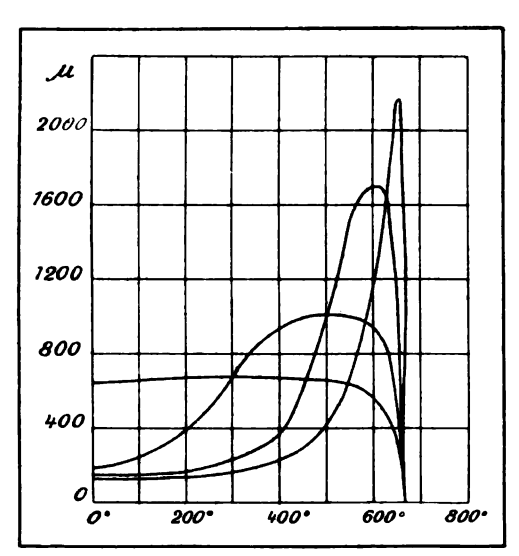



Figur 152.

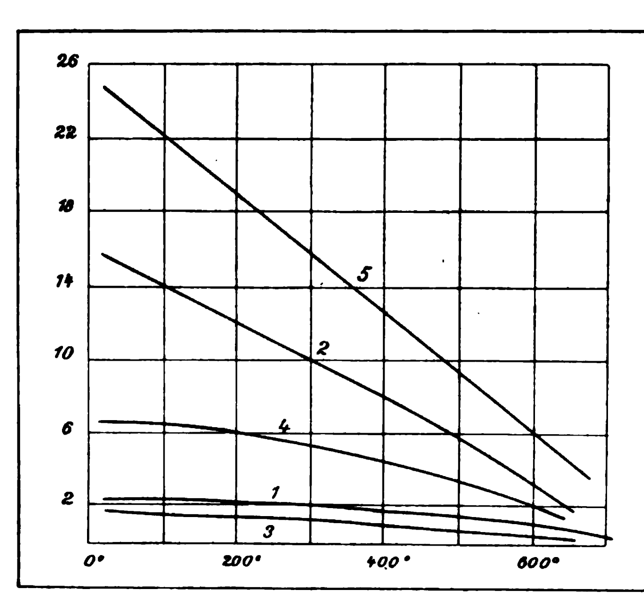
netisch werden; eine Legierung von 22% Ni und 3% Cr bleibt selbst in flüssiger Luft unmagnetisch. Auch durch Zusatz von Mangan kann man Nickelstahl erhalten, der selbst bei tiefen Temperaturen unmagnetisch ist. Die theoretische Diskussion, die sich zwischen den genannten Autoren über die Deutung der Erscheinungen entsponnen hat, scheint zu keinem entscheidenden Ergebnisse geführt zu haben. — Bei Manganstahl (vgl. S. 238) hat Le Chatelier beobachtet, daß dieses kaum magnetisierbare Material, wenn man es bei hoher Temperatur anläßt, in eine magnetische Modifikation übergeht; bei schneller Abkühlung tritt wieder der alte Zustand ein. Endlich sei noch auf eine Arbeit

von RINNE hingewiesen, die den Magnetit betrifft und sein mit dem Eisen in der Hauptsache analoges Verhalten bestätigt.

Eine besondere Erwähnung verdienen die Arbeiten über die Wirkung sehr tiefer Temperaturen auf den Magnetismus, namentlich die von PICTET, FLEMING und DEWAR, DUMAS, CLAUDE, OSMOND, MANZETTI und SELLA sowie von TROWBRIDGE[1]. Nach PICTET wächst von +30 bis −105° die Anziehungskraft eines vertikalen, in einem Alkoholbade stehenden Magneten von 57 auf 77°. CLAUDE findet bei Schmiedeeisen von +25 bis −185° eine kleine Abnahme der Permeabilität. Vom Nickelstahl ist schon oben die Rede gewesen. Gewisse Mn-Ni-Stahlsorten werden in flüssiger Luft magnetisch und bleiben es dann auch bei Erwärmung bis auf 650°. Platin ließ in flüssiger Luft keinen deutlichen Magnetismus erkennen. Am wichtigsten sind jedenfalls die Arbeiten von FLEMING und DEWAR. Bei weichem Eisen zeigt die Magnetisierungskurve bei −185° an allen Stellen, d. h. für alle Feldstärken, ziemlich dieselbe negative Differenz gegenüber der Kurve für Zimmertemperatur; auch die Permeabilität wird durch Kälte verringert. Ähnlich verhält sich Stahldraht, während ausgeglühtes und namentlich gehärtetes Eisen zum Teil gerade entgegengesetzte Erscheinungen aufweisen; es ist hier nämlich zwischen den Erscheinungen bei plötzlicher Abkühlung und dem stationären Kälte-Zustand zu unterscheiden; dort findet Abnahme (am stärksten bei 19-prozentigem Nickelstahl), hier Zunahme statt (nur bei 19- bis 29prozentigem Nickelstahl auch Abnahme). Auch für Kohle- und



Figur 153.



Figur 154.

[1] R. PICTET, C. R. **120**. 263. 1895. — J. A. FLEMING und J. DEWAR, Proc. R. Soc. **60**. 57. 1897. — L. DUMAS, C. R. **129**. 42. 1899. — G. CLAUDE, C. R. **129**. 409. 1899. — F. OSMOND, C. R. **128**. 1395. 1899. C. R. **128**. 1513. 1899. — R. MANZETTI und A. SELLA, L'Elettricista **9**. 241. 1900. — C. C. TROWBRIDGE, Phys. Review **14**. 181. 1902.

Wolfram-Magnetstahl erhielt TROWBRIDGE teilweise stark abweichende Resultate. Es scheint also hier nicht leicht zu sein, ein Gesamtbild des Verhaltens zu gewinnen.

**Temperaturkoeffizient.** Nach dem mitgeteilten Resultaten ist es einleuchtend, daß es für die magnetische Induktion nicht, wie bei vielen anderen physikalischen Erscheinungen, möglich ist, einen »Temperaturkoeffizienten« anzugeben, d. h. zu sagen, um welchen Bruchteil seines Wertes sich der induzierte Magnetismus pro Temperaturgrad ändert; es ist dies nicht möglich, einmal, weil die Änderung nicht nur nicht immer mit der Temperatur proportional ist, sondern unter Umständen, wie wir sahen, sogar ihr Vorzeichen ändert, und zweitens weil der Temperaturkoeffizient, selbst wenn man ihn für den Augenblick als angebbar betrachtet, für verschieden starke Magnetismen ganz verschiedene Werte hat. Der Temperaturkoeffizient wird also erstens nur für ein bestimmtes Temperatur-Intervall ($t_1$ bis $t_2$) gelten, und zweitens nur für eine bestimmte magnetisierende Kraft; über eine gewisse Temperatur wird man überhaupt nicht hinausgehen dürfen. Zur Gewinnung derartiger Zahlen bieten die Kurven oder Tabellen von BAUR, EWING und DU BOIS das beste Material. Dabei ist es offenbar wegen der thermischen Ausdehnung des Versuchskörpers nicht völlig gleichgültig, durch welche der folgenden Gleichungen man den Temperaturkoeffizienten $\varepsilon$ definiert, wenn die Indices 2 und 1 die Grenzen des Temperatur-Intervalls bezeichnen:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_1}{(t_2 - t_1)\mathfrak{J}_1} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{(t_2 - t_1)\varkappa_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(t_2 - t_1)\sigma_1} \quad ;$$

EWING gibt die $\mathfrak{J}$, BAUR die $\varkappa$, DU BOIS die $\sigma$ an; ebenso könnte man natürlich auch die $\mu$ benutzen. Die Differenzen werden indessen bei den ferromagnetischen Stoffen nicht erheblich sein. Die folgenden Zahlen gelten zwischen gewöhnlicher Temperatur (7° resp. 15° resp. 0°) und 100°.

| BAUR (Eisen) | | EWING (Eisen) | | | DU BOIS | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{H}$ | $\varepsilon$ | $\mathfrak{H}$ | $\varepsilon$ (weich) | $\varepsilon$ (gehärtet) | $\mathfrak{H}$ | $\varepsilon$ |
| | | | | | Eisen | |
| 0,81 | +0,0019 | 2 | +0,0006 | +0,0025 | 500 | −0,00010 |
| 1,61 | 0,0028 | 4 | 0,0004 | 0,0018 | 1000 | −0,00015 |
| 2,02 | 0,0018 | 6 | 0,0003 | 0,0017 | Stahl | |
| 4,85 | 0,0024 | 8 | 0,0002 | 0,0014 | 500 | −0,00010 |
| 8,07 | 0,0010 | 10 | 0,0001 | 0,0013 | 1000 | −0,00020 |
| 16,11 | 0,0008 | 12 | +0,0000 | 0,0012 | 3750 | −0,00025 |
| 24,11 | 0,0002 | 14 | −0,0000 | 0,0010 | Kobalt | |
| 32,02 | +0,0000 | 20 | −0,0001 | 0,0005 | 8000 | −0,00035 |
| 39,84 | −0,0000 | 30 | −0,0002 | 0,0002 | Nickel | |
| 62,47 | −0,0001 | 40 | | 0,0001 | 12000 | −0,00135 |
| | | 50 | | 0,0000 | | |

Der Temperaturkoeffizient ist also für kleine Kräfte positiv, nimmt bei wachsender Kraft ab und wird für große Kräfte negativ; der Durchgang durch Null findet bei weichem Eisen bei $\mathfrak{H} = 10$ bis 15, bei härterem bei $\mathfrak{H} = 40$ bis 50 statt. Für schwache Kräfte, etwa bis zu $\mathfrak{H} = 1$, kann man für weiches Eisen zwischen 0° und 100° rund $\varepsilon = +\,0{,}001$, bei gehärtetem $\varepsilon = +\,0{,}002$ bis 0,003 setzen. Will man dem Temperatureinfluß besser gerecht werden, als es durch diese variablen Koeffizienten geschieht, so muß man eine mindestens quadratische Funktion von $t$ einführen und deren Koeffizienten überdies mit der magnetisierenden

Kraft in Verbindung bringen; BAUR hat dies durch folgende aus seinen Zahlen abgeleitete Formel getan:

$$x_2 = x_1 \left[1 + \frac{a + b\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}(t_1 - t_2) + \frac{c}{\mathfrak{H}}(t_1 - t_2)^2\right] ,$$

in welcher

$$a = 0{,}005685 \qquad b = 0{,}0001122 \qquad c = 0{,}0000072$$

zu setzen ist; leider verlieren diese Zahlen deshalb viel von ihrem Werte, weil in der ganzen Arbeit BAURS nicht angegeben ist, aus was für Eisen sein Versuchskörper bestand.

Auch aus den Arbeiten neuerer Autoren, z. B. von MORRIS, könnte man Zahlenwerte und Formeln für $\varepsilon$ ableiten; man findet aber, daß hierbei wenig allgemein interessantes herauskommt.

**Einfluß der Temperatur auf den permanenten Magnetismus.** Daß die Temperatur den permanenten Magnetismus von Magnetstäben beeinflußt, ist schon seit langer Zeit bekannt. Dieser Einfluß besteht in der Verringerung des Magnetismus bei der Erwärmung, und bei starker Erhitzung geht er sogar ganz verloren. Dabei ist wiederum zwischen erster Erwärmung und späterer Erwärmung zu unterscheiden, letztere ist von umkehrbarem Einfluß, erstere aber nicht; d. h., nach einer erstmaligen Erwärmung gewinnt der Magnet bei Wiederabkühlung seinen früheren Magnetismus nur teilweise wieder, auch bei der zweiten Abkühlung bleibt noch ein weiterer Verlust zurück, bei späteren Erwärmungen ist jedoch der Verlust ein vorübergehender, der durch Wiederabkühlung vollständig ausgeglichen wird. Natürlich ist auf dieses Verhalten die erreichte höchste Temperatur, die Art der Erwärmung und Abkühlung usw. von wesentlichem Einfluß, und es sei hier nochmals an die Untersuchung von BARUS und STROUHAL (S. 231) erinnert[1]. Wenn die äußerste Temperatur sehr hoch ist, insbesondere wenn der Stab kräftig geglüht wird, verliert er auch nach wiederholten Zyklen seinen Magnetismus dauernd, und man hat hier somit ein vorzügliches Entmagnetisierungsmittel, das in der Tat von allen das üblichste ist. Andere ältere Versuche über diesen Gegenstand rühren von KUPFFER[2], RIESS und MOSER[3], DUFOUR[4], LAMONT (Handb. d. Magnetismus) und G. WIEDEMANN[5] her. Von den Ergebnissen, zu denen der letztgenannte Physiker gelangte, seien zunächst folgende relative Zahlen für die Magnetismen bei $0^0$ und $100^0$ angeführt; $m_0'$ ist der Magnetismus nach der ersten Abkühlung, $M_0$ und $M_{100}$ sind die endgültigen Magnetismen nach einer hinreichenden Anzahl von Zyklen; endlich ist $\varepsilon = \frac{M_{100} - M_0}{100\, M_0}$ der endgültige Temperaturkoeffizient, sein stets negatives Vorzeichen ist der Kürze halber fortgelassen. Der erstmalige Temperaturkoeffizient ist natürlich viel größer, bietet aber kein tieferes Interesse dar, weil er noch mit den „Anfangserscheinungen" behaftet ist.

Nach den folgenden Angaben bewegt sich der Temperaturkoeffizient für den permanenten Magnetismus zwischen den Grenzen 0,0007 und 0,0023, für harten Stahl kann man ihn rund zu einem Tausendstel des Wertes ansetzen; für kräftigere Magnete ist er nach WIEDEMANN größer, nach einer Angabe von F. KOHLRAUSCH[6] jedoch im allgemeinen kleiner. Ähnliche Bestimmungen hat CANCANI[7] ausgeführt.

---

[1] Ferner sei noch angeführt: STROUHAL und BARUS, Wied. Ann. **20**. S. 662. 1883. — El. Z. 1891. 558. — J. M. GAUGAIN, Compt. rend. **82**. S. 1422; **83**. S. 661. 1876; **86**. S. 536. 1878. — POLONI, Beibl. z. Wied. Ann. 1878. S. 67; 1881. S. 67 u. 802. — J. TROWBRIDGE, Beibl. 1881. S. 614. — C. FROMME, Wied. Ann. **22**. S. 371. 1884. — [2] T. A. KUPFFER, Kastners Archiv **6**. S. 185. 1825. — [3] RIESS und MOSER, Pogg. Ann. **17**. S. 403. 1829. — [4] H. DUFOUR, Arch. de Genève **34**. S. 295. 1857. — [5] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **100**. S. 235. 1852; **103**. S. 563. 1858; **122**. S. 355. 1864. — [6] F. KOHLRAUSCH, Leitfaden d. pr. Physik (7. Aufl. S. 249). [7] — A. CANCANI, Atti Acc. Linc. (4) **3**. 501. 1887. — Rend. Acc. Linc. **4**. 334. 1888.

| Material | $m_0$ | $m_{100}$ | $m_0'$ | $M_0$ | $M_{100}$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Harter Stahl | 72 | 42 | 45 | 37 | 33 | 0,0010 |
| | 135 | 89 | 96 | 86 | 78 | 0,0009 |
| | 195 | 134 | 146 | 133 | 120 | 0,0010 |
| Angelassener Stahl | 44 | 27 | 30 | 29 | 27 | 0,0007 |
| | 148 | 107 | 115 | 110 | 101 | 0,0008 |
| | 317 | 239 | 261 | 251 | 226 | 0,0010 |
| Weicher Stahl I | 85 | 45 | — | 38 | 33 | 0,0013 |
| | 141 | 74 | — | 69 | 57 | 0,0017 |
| | 210 | 110 | — | 115 | 88 | 0,0023 |
| Weicher Stahl II | 96 | 50 | 54 | 45 | 39 | 0,0013 |
| | 175 | 93 | 108 | 93 | 76 | 0,0019 |
| Sehr weicher Stahl, oft geglüht und langsam erkaltet | 52 | 35 | 37 | — | — | — |
| | 81 | 55 | 58 | — | — | — |
| | 113 | 76 | 82 | — | — | — |
| | 181 | 114 | 131 | — | — | — |

Die besonderen Erscheinungen, welche auch hier auftreten, wenn der permanente Magnetismus des Stabes die Folge vorübergegangener stärkerer Magnetisierung und partieller Entmagnetisierung ist, sind ebenfalls von WIEDEMANN erforscht worden, und es haben sich dabei ähnliche Beziehungen herausgestellt, wie bei den analogen Beziehungen des Magnetismus zur Elastizität; als Beispiel diene die folgende Tabelle, in der $M$ den ursprünglichen, $m$ den bei der Entmagnetisierung übrig gebliebenen Magnetismus, $m_{100}$ den nach der Erwärmung auf $100^0$ und $m_0$ den nach der Wiederabkühlung auf $0^0$ bezeichnet:

| | $M$ | $m$ | $m_{100}$ | $m_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 70,5 | 70,5 | 42,2 | 54,5 |
| 2 | 72 | 40,1 | 27 | 40,5 |
| 3 | 70 | 25 | 18 | 39,5 |
| 4 | 72 | 2 | 2 | 9 |
| 5 | 75 | 0 | 0 | 9,5 |

Dem einfach magnetisierten Stabe gibt also die Abkühlung nach der Erwärmung nur einen Teil des verlorenen Magnetismus wieder, dem vorher zur Hälfte entmagnetisierten gibt die Abkühlung den vollen vor der Erwärmung besessenen Magnetismus wieder, bei noch stärkerer Entmagnetisierung ist der Magnetismus nach der Abkühlung sogar größer als vor der Erwärmung, und in einem infolge von Entmagnetisierung scheinbar gänzlich unmagnetischen Stabe kann man durch Erwärmung und Wiederabkühlung geradezu Magnetismus wieder zum Vorschein bringen.

Aus neuester Zeit liegen zahlreiche Arbeiten über den Gegenstand vor, so die von CHISTONI (zum Teil mit DE VECCHI), ANDREAS, GUTHE, ASHWORTH, H. FRANK, KLEMENČIČ, PRODINGER, PEIRCE, DURWARD und LOOMIS[1].

[1] C. CHISTONI, Mem. Acc. Modena (2) **9**. 1893. — N. Cim. (4) **1**. 257. 1895. — C. CHISTONI und G. G. DE VECCHI, Mem. Acc. Modena (3) **2**. 1899. — E. ANDREAS, El. Z. **18**. 485 u. 497. 1897. — K. E. GUTHE, Trans. Am. El. Eng. **14**. 59. 1897; Proc. Lond. Phys. Soc. **15**. 268. 1897. — J. R. ASHWORTH, Proc. R. Soc. **62**. 210. 1898. — B. O. PEIRCE, Sill. J. **5**. 334. 1898; Proc. Am. Acad. **38**. 551. 1903. — A. DURWARD, Sill. J. **5**. 245. 1898. — H. FRANK, Diss. Freib. 1899; Drude Ann. **2**. 338. 1900. — J. KLEMENČIČ, Wien. Ber. **108**. 989. 1899. — M. PRODINGER, Wien. Ber. **109**. 34. 1900. — H. B. LOOMIS, Sill. J. **15**. 179. 1903.

CHISTONIS Untersuchungen bewegen sich, seinen mehr praktischen Zielen entsprechend, in mäßigem Temperaturbereich, meist zwischen 0 und 50 Grad; es zeigt sich, daß der Temperaturkoeffizient erstens für steigende und sinkende Temperaturen verschieden und zweitens an sich nicht konstant, sondern von der Temperatur abhängig ist, so daß man ihn durch eine lineare, das Moment durch eine quadratische Funktion ausdrücken muß:

$$\varepsilon = 0{,}000240 + 0{,}00000309\,\Theta \quad ,$$
$$M = M_0\,(1 - 0{,}000240\,\Theta - 0{,}000001545\,\Theta^2) \quad .$$

Aber auch diese Formel reicht nicht immer aus; und alsdann muß man zwischen dem mittleren Temperaturkoeffizienten zwischen 0 und $\Theta$ Grad und dem wahren bei $\frac{1}{2}\Theta$ Grad unterscheiden. — Später hat dann CHISTONI in Gemeinschaft mit DE VECCHI eine Reihe von Wolframstahlmagneten eingehend auf ihr thermisches Verhalten geprüft und, von verwickelten Details abgesehen, gefunden, daß der Temperaturkoeffizient desto kleiner ist, je größer der Wolframgehalt und je besser die Härtung ist. — Über den Wert der BARUS-STROUHALschen Behandlungsweise sprechen sich die Autoren nur sehr bedingt günstig aus.

Das letztere gilt auch von ANDREAS, der nicht immer einen Abnahme-Grenzwert des Magnetismus infolge von Wärmebehandlung findet, sondern unter Umständen ein Überschreiten dieses Grenzwertes und nachheriges Zunehmen. Im übrigen gelangt er u. a. zu folgenden Sätzen: Der T.-K. (Temperaturkoeffizient) nimmt ab mit der Dauer der Gluterhitzung und mit der Zunahme der Glutintensität beim Härten; der Grenzmagnetismus nimmt zu mit der Zunahme der Glutintensität und mit der Abnahme der Glutdauer; der Grenzzustand wird leichter durch Abschrecken als Abkochen erreicht, und desto leichter, je niedriger der T.-K. ist; der T.-K. ist bei einem bestimmten Magneten desto größer, je kleiner der spezifische Magnetismus ist.

GUTHE trieb die Erhitzung bis über 900 Grad und fand u. a.: Der Punkt, bei dem Stahl durch Abschrecken in Wasser magnetisch gehärtet wird, liegt tiefer bei hohem als bei niedrigem Kohlegehalt und entspricht etwa dem Rekaleszenzpunkt. Beim Wiedererwärmen gehärteten Stahls nimmt die Permeabilität und die Maximalinduktion zu und die Koerzitivkraft ab. Die größte Änderung in der maximalen Induktion findet bei hohem Kohlegehalt zwischen 200 und 300, bei niedrigem zwischen 300 und 450 Grad statt; um starke Magnete zu erzeugen, sollte man demgemäß zuerst auf 450 Grad wiedererwärmen.

ASHWORTH untersuchte Stahlsorten mit Mangan-, Kobalt- und Nickelzusätzen sowie Guß- und Roheisen. Der T.-K. fiel für gehärtetes Gußeisen besonders klein und für gewisse gehärtete Nickel-Stahl-Legierungen sogar negativ aus, ebenso für Saitendraht; auch kann der T.-K. durch Härten, Dimensionsänderung usw. zum Zeichenwechsel und somit auch zum Verschwinden gebracht werden.

PEIRCE sowie DURWARD haben festgestellt, daß und in welcher Weise der T.-K. abnimmt, wenn die Länge des Magneten zunimmt. Auch konnte PEIRCE bestätigen, daß sich gehärtetes Gußeisen durch sehr kleinen und, wie er hinzufügt, lange konstant bleibenden T.-K. auszeichnet; das Material ist also für Meßinstrumente sehr geeignet.

KLEMENČIČ, über dessen Arbeiten übrigens schon im Artikel Magnetismus berichtet wurde, hat, wie hier hinzugefügt sei, die Abhängigkeit des T.-K. von den Dimensionen verfolgt und gefunden, daß das Produkt aus T.-K. und Dimensionsverhältnis (Länge zu Dicke) annähernd konstant ist.

FRANK gelangt zu folgenden Hauptergebnissen: Mit steigender Intensität der Härtungsglut nimmt das magnetische Moment des Stahls bis zu der Glut normalhellrot zu, dann fällt es; von der Glutdauer ist es unabhängig. Bei tiefer Magnetisierungstemperatur ist es höher als bei hoher. Der T.-K. nimmt mit steigender Härtungsglut bzw. mit steigendem Härtegrade stetig ab; mit zunehmendem



Dimensionsverhältnis nimmt er ebenfalls stetig ab. Zum Konstantmachen der Magnete sind die Methoden des Abschreckens und des Abkochens gleich wirksam.

Aus den Resultaten, zu denen PRODINGER gelangte, seien die folgenden hervorgehoben: Bei Magneten mit großem Dimensionsverhältnis (20 bis 40) und geringer Dicke findet ein ausgesprochenes Wachsen des T.-K. mit dem Momente statt; bei kleinerem Dimensionsverhältnisse (etwa 10) und mittleren Dicken ist das Anwachsen nur noch gering; bei kleinem Dimensionsverhältnisse und beträchtlicher Dicke scheint der T.-K. konstant zu sein.

LOOMIS hat eine Reihe gleich dicker, aber verschieden langer Stäbe bei 11 und 99 Grad untersucht und folgendes gefunden:

| Länge | 11° | 99° | $\varepsilon$ | $\mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|---|
| 21,53 | 232,92 | 219,88 | 0,056 | 427 |
| 22,00 | 207,08 | 193,64 | 0,065 | 372 |
| 16,40 | 146,64 | 136,80 | 0,067 | 352 |
| 16,31 | 139,76 | 129,28 | 0,075 | 338 |
| 11,23 | 94,76 | 88,04 | 0,071 | 333 |
| 10,80 | 72,41 | 65,72 | 0,092 | 249 |
| 8,15 | 43,04 | 38,48 | 0,105 | 208 |
| 8,17 | 40,48 | 35,92 | 0,112 | 196 |
| 5,49 | 16,72 | 14,44 | 0,141 | 117 |
| 5,40 | 12,04 | 9,84 | 0,220 | 88 |

Die Einbuße an Magnetismus durch Temperatursteigerung ist also für starke Magnete geringer als für schwache und für lange geringer als für kurze; das Produkt $l\varepsilon$ ist im groben konstant, das Gesetz von KLEMENČIČ also erfüllt. Ferner wurde der Einfluß der Temperatur auf die Verteilung des Magnetismus studiert und gefunden, daß die Enden mehr verlieren als die Mitte, daß also die Attraktionszentren mit steigender Temperatur gegen die Mitte hinrücken; man vergleiche die graphische Darstellung in Figur 155, die keiner weiteren Erläuterung bedarf (die mit „14°—99,5° [10 fach]" bezeichnete Kurve stellt die Differenz der freien Magnetismen bei 14° und bei 99,5° im — verglichen mit den anderen Kurven — zehnfachen Ordinatenmaßstabe dar).

Im Anschluß hieran ist noch auf eine umfangreiche Arbeit von HOLBORN[1] zurückzukommen, die den Einfluß der Härtungstemperatur auf den Magnetismus von Stahlsorten, namentlich kohle- und wolframhaltigen, betrifft. Wie sich zeigte, bleiben die Stäbe, solange die Härtungstemperatur unter 750° liegt, unverändert weich; zwischen 750° und 850° als Härtungstemperatur steigt der permanente Magnetismus etwa auf das Vierfache (während der temporäre gleichzeitig abnimmt); über 850° sinkt auch der permanente Magnetismus, so daß er nach Härtung bei 1000° kaum noch $^2/_3$ seines Maximalwertes beträgt. Auch in bezug auf lange Konstanz des Magnetismus ist das Intervall 750° bis 850° das zur Härtung günstigste. Schließlich wird noch der Einfluß des Überhitzens sowie des starken Abkühlens durch Eintauchen in feste Kohlensäure erörtert, wobei sich indessen verschiedene Sorten verschieden verhalten.

Über die Berücksichtigung des Temperaturkoeffizienten von Stahlstäben bei magnetischen Untersuchungen ist schon im Artikel „Magnetische Messungen" einiges gesagt worden; hier sei kurz folgendes hinzugefügt. Um größere Empfindlichkeit zu erzielen, als wenn man einfach die Ablenkungen einer Nadel unter der Einwirkung des auf zwei verschiedene Temperaturen gebrachten Stabes vergleichen wollte, tut man nach W. WEBER gut, die Ablenkung bei der einen Tem-

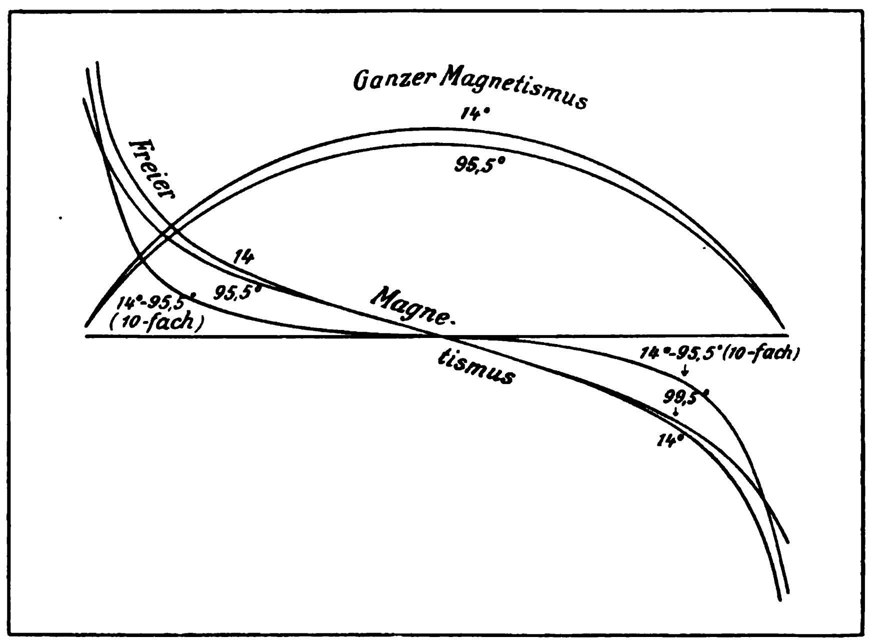
[1] L. HOLBORN, Ber. Verb. int. El.-Kongr. Frankf. 1892.





peratur durch einen Hilfsstab gänzlich oder größtenteils zu kompensieren. Statt der Ablenkungen kann man auch die Schwingungszeiten bei den beiden Temperaturen miteinander vergleichen. Ferner kann man nach WILD die Einstellung des bifilar aufgehängten Stabes bei verschiedenen Temperaturen ermitteln. Endlich hat KOHLRAUSCH folgendes sehr empfindliche Verfahren angegeben. Man stellt den Stab so auf, daß er im Verein mit dem Erdmagnetismus eine Nadel ostwestlich stellt; bildet er dabei mit dem Meridian den Winkel $\varphi$, und dreht sich bei seiner Erwärmung um $t^0$ die Nadel um den Winkel $\alpha$, so ist der Temperaturkoeffizient

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varphi \frac{\alpha}{t} .$$




Figur 155.

Näheres hierüber und über die erforderlichen Korrekturen sehe man bei F. KOHLRAUSCH[1].

Schließlich sei auf den Zusammenhang unserer Frage mit dem magnetischen Verhalten des Meteoreisens hingewiesen, das ja meist einen kräftigen Glühungsprozeß durchgemacht hat[2].

**Einfluß der Temperatur auf die Hysteresis.** Nach der temporären Magnetisierung und der Remanenz haben wir nun die Hysteresis und die durch sie dargestellte Energievergeudung zu betrachten und zu sehen, ob die Temperatur auch hier von Einfluß ist. Daß und in welchem Sinne dies der Fall sein muß, ist nun, wenigstens im großen ganzen, ohne weiteres klar. Da nämlich, für nicht zu hohe Temperaturen, der aufsteigende Zweig der Magnetisierungskurve durch die Wärme in die Höhe getrieben, der absteigende aber wegen der Verminderung der Remanenz herabgedrückt wird, und da letzterer über ersterem liegt, so ergibt sich, daß beide Zweige einander genähert werden und folglich die von ihnen eingeschlossene Fläche verkleinert wird. Dieser Schluß ist durch

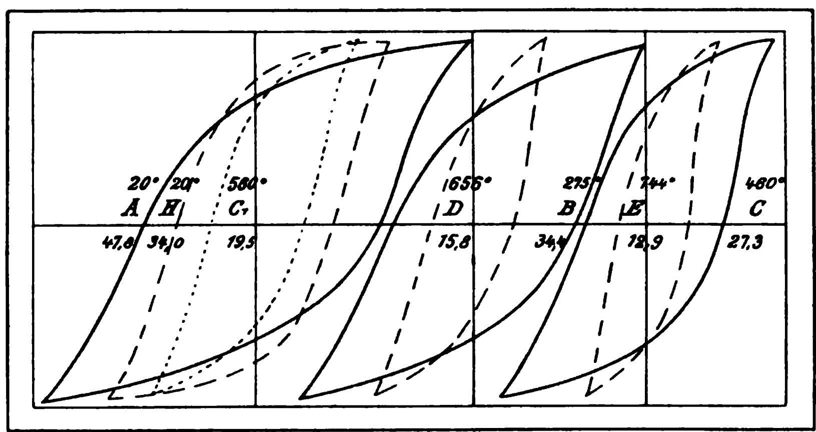
[1] F. KOHLRAUSCH, Leitfaden 7. Aufl. S. 249. — Wied. Ann. **22**. S. 420. 1884. — Ferner vgl. J. LAMONT, Erdmagn. S. 28. — [2] Vgl. E. COHEN, Ann. k. k. nat. Hofmus. Wien **10**. 81. 1895.

die Erfahrung bestätigt worden, und es haben sich dabei noch mancherlei interessante Einzelheiten ergeben. Zu nennen sind hier, außer einigen der schon oben zitierten, auch die Hysteresis berücksichtigenden Arbeiten, so besonders der von MORRIS, hauptsächlich folgende: W. KUNZ, LAWS und WARREN, ROGET, THIESSEN, sowie R. L. WILLS[1].

W. KUNZ hatte schon bei Vorversuchen ermittelt, daß der Energieumsatz durch Temperatursteigerung bei weichem Eisen von 24000 auf 19000, bei Stahl sogar von 90000 auf 43000 herabgedrückt wird. Die eigentlichen Versuche wurden dann auf vier Eisen-, zwei Stahl- und eine Nickelsorte ausgedehnt. Das Hauptergebnis war: bei weichem Eisen nimmt der Umsatz für beliebige Amplitude des Kreisprozesses mit steigender Temperatur ab, und zwar gleichförmig, so daß man

$$U = a - b\,\Theta$$

setzen kann, wo aber $a$ und $b$ nicht nur von der Sorte, sondern auch von den Grenzen der Induktion abhängen. Für eines der Materiale, nämlich Puddeleisen-




Figur 156.

draht, ist in Figur 156 eine Veranschaulichung der Hysteresisschleifen gegeben, wobei der Raumersparnis halber immer mehrere um denselben Anfangspunkt herum gezeichnet wurden; jeder der sieben Schleifen ist die Temperatur und die Schleifenfläche in qcm beigefügt; wie man erkennt, ist $A$ (20°) am größten, $E$ (744°) am kleinsten, und es ist ferner $H$, obgleich es wieder derselben Temperatur wie $A$ entspricht, doch wesentlich kleiner und schlanker; der Umsatz erreicht also nach der Wiedererkaltung nicht wieder den ursprünglichen Wert. — Verwickelter ist der Verlauf bei den anderen Stoffen; bei Stahl bleibt der Umsatz bis etwa 300° konstant oder steigt sogar etwas an, erst dann nimmt er ab, und zwar erst rasch, dann langsamer; bei Nickel nimmt er zwar gleich ab, aber auch erst rasch, dann langsam; einfache Formeln lassen sich daher hier nicht aufstellen. — Endlich ist hervorzuheben, daß durch wiederholte Zyklen bei Hitze, auch vielleicht durch einen einzigen Zyklus bei sehr großer Hitze der Umsatz bei Kälte sich bedeutend reduzieren läßt, was offenbar praktisch bedeutungsvoll ist.

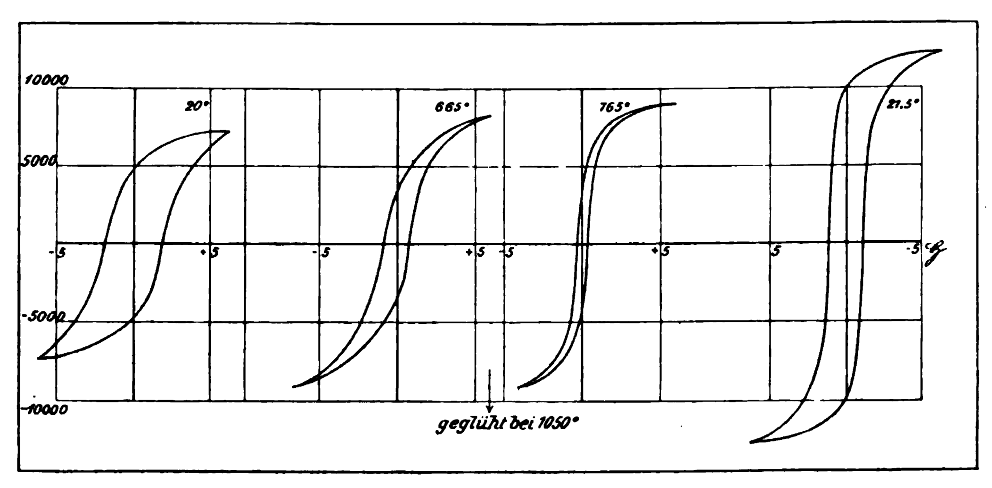
Die Messungen von THIESSEN beziehen sich auf eine normale, eine hohe und eine tiefe Temperatur; die wichtigsten Resultate sind hier übersichtlich zusammengestellt:

---

[1] W. KUNZ, El. Z. 1892. 245; Progr. Darmstadt 1893; El. Z. 1894. 194. — LAWS und WARREN, Proc. Amer. Acad. **30**. 490. 1894. — S. R. ROGET, Proc. R. Soc. **63**. 258. 1898. — A. H. THIESSEN, Phys. Review **8**. 65. 1899. — R. L. WILLS, Phil. Mag. (6) **5**. 117. 1902.

| Temperatur | Maximales Feld | Maximale Induktion | Umsatz Erg |
|---|---|---|---|
| | Weiches Schmiedeeisen | | |
| 95 | 11,9 | 9930 | 4010 |
| 21 | 14,9 | 9950 | — |
| 63 | 11,9 | 10200 | 5100 |
| 97 | 1,29 | 2320 | 433 |
| 21 | 1,28 | 1920 | 371 |
| 78 | 1,28 | 1460 | 266 |
| 97 | 2,59 | 5430 | 1710 |
| 22 | 2,59 | 4980 | 1610 |
| 80 | 2,62 | 4670 | 1530 |
| | Werkzeugstahl | | |
| 99 | 57,6 | 14280 | 28400 |
| 17 | 58,1 | 14700 | 31300 |
| 52 | 57,9 | 14350 | 32500 |
| 99 | 4,42 | 2940 | 1650 |
| 18 | 4,42 | 2480 | 1370 |
| 55 | 4,42 | 1680 | 690 |
| | Nickelstahl | | |
| 99 | 52,7 | 14160 | 36500 |
| 23 | 52,9 | 14900 | 41800 |
| 65 | 52,9 | 15180 | 44800 |

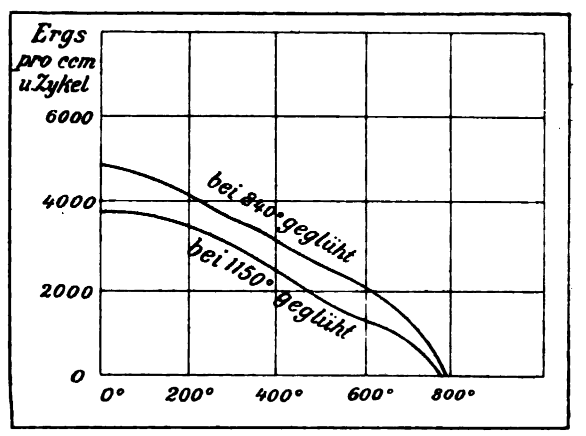
Auf gleiche Induktion bezogen ergibt sich, daß für Schmiedeeisen die Verluste in der Kälte stets am größten sind; für große und kleine Induktion sind sie in




Figur 157.

der Hitze, für mittlere dagegen bei normaler Temperatur am kleinsten. Bei Stahl und Nickelstahl nimmt bei großer Induktion der Verlust nach der Kälte zu stetig ab, bei Stahl und geringer Induktion ist es eher umgekehrt.

Die Ergebnisse, zu denen MORRIS (vgl. o. S. 345) gelangte, stimmen mit denen von KUNZ im wesentlichen überein; nur wird hier noch besonders der Einfluß des Ausglühens und nachherigen Abkühlens verfolgt. In Figur 157 ist dieser Prozeß (für Holzkohle-Eisen) wenigstens in den Hauptphasen dargestellt, während Figur 158 den Umsatz als Funktion der Temperatur (für schwedisches Eisen) nach Ausglühen in Rot- oder Weißglut wiedergibt; wie man sieht, sind die Kurven nicht ganz geradlinig, sondern etwas nach unten konkav.




Figur 158.

ROGET untersuchte die Hysteresis von schwedischem Transformatoreisen nach längerem Erhitzen und fand für Zyklen bis zur Induktionsgrenze ±4000 die folgenden Hysteresiswerte nebst ihren prozentischen Steigerungen, je nach der darüber stehenden Temperatur und der links stehenden Dauer der Erhitzung in Tagen:

| | 50° | | 65° | | 87° | | 135° | | 160° | | 260° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 635 | 0 | 620 | 0 | 600 | 0 | 610 | 0 | 590 | 0 | 595 | 0 |
| 1 | — | — | 635 | 2 | 695 | 16 | 960 | 57 | 1480 | 151 | 1030 | 73 |
| 2 | — | — | 695 | 12 | 770 | 29 | 1020 | 67 | 1600 | 172 | 940 | 58 |
| 3 | 643 | 1,3 | — | — | — | — | 1090 | 78 | — | — | — | — |
| 4 | — | — | 710 | 14 | 885 | 48 | — | — | 1700 | 188 | 920 | 55 |
| 6 | 645 | 1,6 | 740 | 19 | 910 | 52 | 1325 | 117 | 1710 | 190 | 940 | 58 |
| 9 | — | — | 830 | 33 | 930 | 55 | — | — | 1590 | 170 | 910 | 53 |
| 12 | — | — | 855 | 37 | 960 | 61 | 1450 | 138 | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 875 | 40 | 975 | 63 | 1465 | 140 | 1470 | 149 | 900 | 51 |
| 20 | 660 | 4 | 940 | 51 | 1090 | 82 | — | — | — | — | — | — |
| 25 | — | — | 945 | 53 | 1135 | 89 | 1465 | 140 | — | — | — | — |
| 27 | 690 | 9 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

Die größten Steigerungen kommen also bei 160° vor, darunter und darüber sind sie kleiner; bei 160° geht die Steigerung fast bis zum dreifachen des ursprünglichen Wertes. Wie man ferner sieht, geht bei den niedrigeren Temperaturen die Steigerung sehr allmählich mit der Zeit vonstatten, und noch nach einem Monat setzt sie sich fort; je höher aber die Temperatur, desto rascher vollzieht sich die Steigerung, um dann sogar wieder in eine Abnahme überzugehen; der größte Teil der Steigerung entfällt hier auf den ersten Tag, ja auf die ersten Stunden, und ein erheblicher sogar auf die ersten Minuten; bei 260° wird das (oben nicht verzeichnete) Maximum von 91% schon nach 15 Minuten erreicht.

**Temperatur-Hysteresis.** Von der betrachteten Erscheinung wohl zu unterscheiden ist eine andere, die man als möglich hinstellen wird und die darin besteht, daß in bezug auf die Wärme selbst Hysteresis stattfindet, d. h. daß die Kurven, die für eine bestimmte Kraft den Magnetismus als Funktion der Temperatur darstellen, einmal für Erwärmung, das andere Mal für Abkühlung, nicht miteinander zusammenfallen. Es scheint jedoch, daß diese Hysteresis im allgemeinen sehr geringfügig ist (auch FRANK, vgl. S. 352, fand kaum Spuren von ihr) und

nur in bezug auf einen bestimmten Punkt erheblich wird, nämlich in bezug auf diejenige Temperatur, bei welcher der Magnetismus verschwindet resp. wieder auftritt. Bei gewöhnlichem Eisen und Stahl ist übrigens auch diese Differenz[1] nicht groß, sie beträgt bei Eisen vielleicht 10°, bei Stahl 20 bis 30°, was bei der Höhe der betreffenden Temperaturen (600—800°) nicht viel besagen will und überdies schwer genau festzustellen ist. Dagegen hat HOPKINSON[2] für eine Legierung von Eisen und 5% Nickel gefunden, daß der Magnetismus bei 800° verschwindet und auf dem Rückwege erst bei 600—650° wieder auftaucht; bei einer Legierung von 25% Nickel kehrte sogar der bei 580° verschwundene Magnetismus bei der Wiederabkühlung überhaupt nicht wieder, so daß es bei diesen Materialien ganz von der Vorgeschichte abhängt, ob sie überhaupt magnetisierbar sind. Man wird hier sofort an das früher (S. 242) über die Unmagnetisirbarkeit dieser Legierungen Gesagte erinnert. Bei noch stärkerem Nickelgehalte wird die Erscheinung wieder weniger markant.

**Legierungen.** Von verschiedenen Autoren sind Arbeiten über das Verhalten von Legierungen des Eisens und Stahls mit anderen Metallen bekannt gemacht worden; einiges ist hiervon schon oben gelegentlich erwähnt worden, anderes hat rein praktisches Interesse; nur weniges sei hier erwähnt. So hat RICHARDSON[3] Eisen-Aluminium-Legierungen untersucht, und zwar zwischen —83° und +900°; der Gehalt betrug 3,64; 5,44; 9,89; 18,47% Aluminium. Die Hauptergebnisse sind: Die Legierungen verhalten sich, als ob sie aus zwei übereinandergelagerten Medien beständen; die Abrundung der Kurven und ihre geringe Steilheit in der Nähe des kritischen Punktes scheinen auf heterogene Struktur hinzuweisen. Die Permeabilität nimmt in der Nähe des kritischen Punktes bis zu einem Minimum ab, andererseits nach der Kälte hin bis zu einem Maximum zu; bei der stärksten Legierung liegt der kritische Punkt bei etwa 25°, das Maximum liegt bei ihr unter —90°, bei den schwächeren etwa bei —90°. — Bald darauf hat dann RICHARDSON in Verbindung mit LOWNDS[4] auch die Hysteresis dieser Legierungen mit der Temperatur verfolgt und ein sehr abnormes Verhalten gefunden. Ganz besonders merkwürdig ist aber eine Legierung mit nur 2,42% Aluminium; hier verändert sich die Kurve bei jeder Erwärmung, und die Permeabilität wächst dabei; anfangs zeigen die Kurven drei ausgesprochene Maxima, die sich aber nach jeder Erwärmung abschwächen, bis sich später ein neues bildet — alles Anzeichen für innere Umbildungen im Material.

Ferner sei noch auf eine Arbeit von E. WILSON[5] über den Einfluß von Manganeisen auf Eisenfeilspäne hingewiesen.

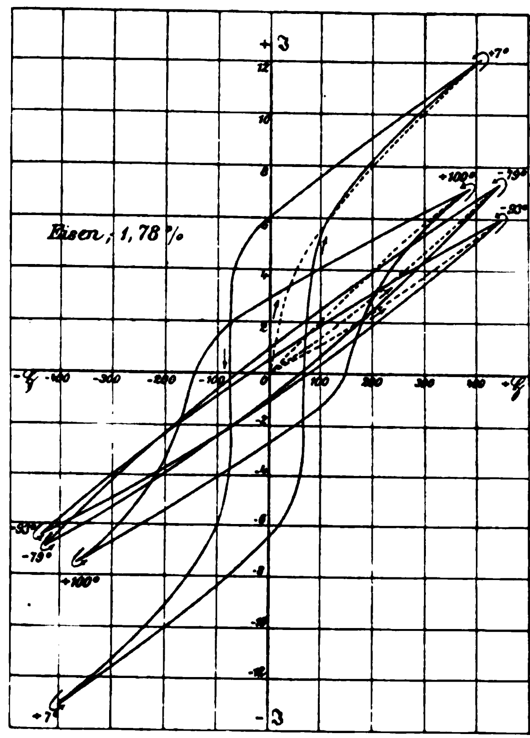
**Mangan-Aluminium-Kupfer-Legierungen**[6]. Diese wegen ihres ferromagnetischen Charakters besonders interessanten Legierungen (vgl. S. 244) verhalten sich auch gegen Wärmeeingriffe sehr sonderbar. Die Temperatur, bis auf welche man sie erhitzen muß, um ihren Magnetismus im kalten Zustande auf den höchsten Stand zu bringen, ist nämlich sehr niedrig, etwa 110°, aber nur für frische Proben; bei Stücken, die bereits eine längere Vorgeschichte der Erhitzung und Magnetisierung hinter sich haben, kommt der bei der Erhitzung verschwindende Magnetismus bei der Abkühlung wenig oder gar nicht mehr zum Vorschein; Erhitzung auf wesentlich höhere Temperaturen endlich zerstört den Magnetismus auch bei frischen Proben fast vollständig, und zwar liegt der Umwandlungspunkt zwischen 150° und 350°, nämlich desto höher, je höher der Gehalt an Mangan und Aluminium ist. Da andererseits Zusätze anderer Metalle den Umwandlungspunkt stark herabdrücken, so ist man in der Lage, magnetisier-

---

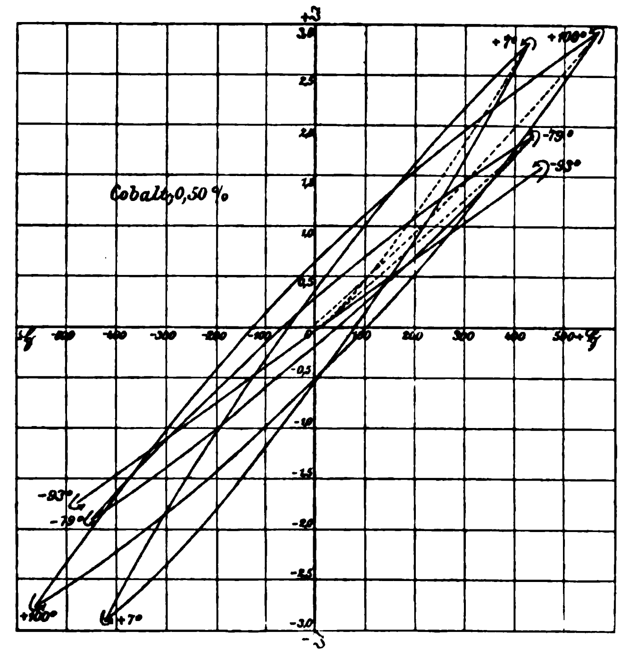
[1] NEWALL und TROUTON, Rep. Brit. Ass. 1889 S. 517. Proc. R. Soc. Dublin 1886. — [2] J. HOPKINSON, Proc. R. Soc. 1889 und 1890. — Vgl. auch EWING, Magn. Ind. S. 177 ff. — [3] S. W. RICHARDSON, Phil. Mag. (5) **49**. 125. 1900. — [4] S. W. RICHARDSON und S. C. LOWNDS, Phil. Mag. (6) **1**. 296 und 601. 1901. — [5] E. WILSON, Electrician **45**. 894. 1900. — [6] FR. HEUSLER, Verh. D. Phys. Ges. 1903 220. — ERICH HAUPT, In.-Diss. Marburg 1904.

bare Bronzen mit beliebigem Umwandlungspunkte zwischen 60° und 350° herzustellen.

**Ferromagnetische Amalgame.** NAGAOKA[1] hat seine schon früher (S. 247) besprochene Arbeit über ferromagnetische Amalgame auch auf den Temperatureinfluß ausgedehnt, indem er die Magnetisierungskurven und Hysteresisschleifen, außer für +7°, auch für +100° einerseits sowie für −79° und −93° andererseits bestimmte; das Ergebnis ist in Figur 159 für 1,78% Eisenamalgam (die Figur enthält noch einige hier irrelevante Linien) und in Figur 160 für 0,50% Kobaltamalgam dargestellt. Für die Magnetisierung ergibt sich, daß sie, wenigstens in kräftigen Feldern, ein Maximum beim Schmelzpunkt aufweist, zu dem sie von höheren Temperaturen her stetig, von tieferen her mit einem Sprunge beim Schmelzpunkt ansteigt; dagegen wird die Hysteresis mit wachsender Temperatur immer größer, ebenso die Koerzitivkraft. Die Amalgame verhalten sich, wie man sieht, im Vergleich mit den anderen ferromagnetischen Stoffen ganz abnorm, worauf indessen NAGAOKA nicht eingeht.




Figur 159.




Figur 160.

**b) Schwach magnetische Stoffe.**

Hier handelt es sich, da die übrigen Erscheinungen fehlen, lediglich um den Einfluß der Temperatur auf die Magnetisierung. Genauere Bestimmungen dieses Einflusses hat zuerst G. WIEDEMANN[2] bei einer großen Anzahl magnetischer Salze ausgeführt und gefunden, daß der Magnetismus mit steigender Temperatur abnimmt, und zwar bei allen im gleichen Verhältnisse, nämlich nach der Formel

$$m = m_0 (1 - 0{,}00325\, t);$$

[1] H. NAGAOKA, Wied. Ann. **59**. 66. 1896. — [2] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **126**. S. 1. 1865.

der Temperaturkoeffizient ist also negativ, was verständlich ist, da die hier angewandten magnetisierenden Kräfte naturgemäß sehr groß sind, und bei so großen Kräften der Koeffizient auch bei den ferromagnetischen Körpern negativ ist. Im Anschlusse an WIEDEMANN hat PLESSNER[1] genauere Messungen durchgeführt, und zwar zwischen den Temperaturen von 10 bis 20° einerseits und 30 bis 70° andererseits. Für Salzlösungen (Eisenchlorid, Mangansulfat, Nickelsulfat, Kobaltnitrat) fand sich übereinstimmend $\varepsilon = -0{,}00356$; bei den festen Salzen hingegen ergab sich für jedes eine andere Zahl, nämlich für

Mangansulfat . . . . . . . $\varepsilon = -0{,}00311$
„ (andere Probe) . $\varepsilon = -0{,}00268$
Kobaltsulfat . . . . . . . . . $\varepsilon = -0{,}00275$ .

Bei Nickelsulfat endlich nimmt $\varepsilon$ mit wachsendem Temperaturintervall zu, so daß man den spezifischen Magnetismus $\sigma$ durch eine quadratische Funktion $1 + \alpha t + \beta t^2$ darstellen muß, und zwar wird in einer Versuchsreihe $\alpha = -0{,}00150$, $\beta = -0{,}000033$, in der anderen $\alpha = -0{,}00097$, $\beta = -0{,}000040$.

Ferner hat QUINCKE[2] nach seiner schon wiederholt erwähnten Steighöhenmethode die Temperaturkoeffizienten $\varepsilon$ der Suszeptibilität und $\varepsilon'$ des Atommagnetismus gemessen und zwischen 10 bis 18° einerseits und 40 bis 85° andererseits folgende Zahlen gefunden:

| Flüssigkeit | Spez.-Gew. | Proz. Geh. | $-\varepsilon$ | $-\varepsilon'$ |
|---|---|---|---|---|
| Mangansulfat . . . . . . . . . | 1,4165 | 35,74 | 0,00284 | 0,00281 |
| Manganchlorür . . . . . . . . | 1,3695 | 33,48 | 301 | 298 |
| „ in Salzsäure . . . | 1,3384 | 20,78 | 162 | 158 |
| „ in Alkohol . . . | 1,0258 | 20,65 | 320 | 315 |
| Eisensulfat . . . . . . . . . | 1,2825 | 23,70 | 192 | 186 |
| Eisenchlorür . . . . . . . . . | 1,2900 | 21,89 | 369 | 361 |
| Eisenchlorid . . . . . . . . . | 1,5083 | 48,18 | 290 | 288 |
| Kobaltsulfat . . . . . . . . . | 1,2584 | 21,05 | 306 | 295 |
| Kobaltchlorür . . . . . . . . | 1,1290 | 12,63 | 262 | 244 |

Hierzu ist zweierlei zu bemerken. Erstens beziehen sich die $\varepsilon$ auf gleiche Volumina bei beiden Temperaturen, zur Umrechnung auf die spezifischen Magnetismen müßte man also die Ausdehnung der Flüssigkeiten berücksichtigen und würde dann statt obiger Zahlen noch kleinere, also auch kleinere als die WIEDEMANN-PLESSNERschen Zahlen, erhalten. Zweitens sind die Zahlen Mittelwerte aus mehreren, verschiedenen Endtemperaturen entsprechenden Einzelzahlen, und die letzteren einander nicht gleich, sondern mit wachsendem Temperaturintervall teils abnehmend, teils zunehmend; man müßte also, wenn die Zahlen nicht doch etwas unsicher wären, noch ein zweites Temperaturglied einführen.

Bei diamagnetischen Stoffen nimmt nach PLÜCKER[3], MATTEUCCI[4] u. a. der Diamagnetismus ebenfalls bei der Erwärmung ab, was theoretisch insofern interessant ist, als dies scheinbar gegen die differentielle Theorie des Diamagnetismus spricht, nach der man erwarten sollte, daß bei allen Körpern der algebraische Wert des Magnetismus in demselben Sinne wüchse; es ist aber doch dabei die gleichzeitige Erwärmung des umgebenden Mediums und noch manches andere, was diesen Gedanken hinfällig machen kann, zu berücksichtigen. Auch ist die Abnahme des Diamagnetismus meist schwächer als bei den paramagnetischen Stoffen. Für feste Körper liegen keine exakten Angaben vor, wohl aber für

[1] P. PLESSNER, Wied. Ann. **39**. S. 336. 1890. — [2] G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. S. 347. 1885. — [3] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **74**. S. 370. 1848; **75**. S. 177. 1848. — [4] C. MATTEUCCI, Compt. rend. **36**. S. 740. 1853.

Flüssigkeiten und Gase. So findet HENRICHSEN[1] für die von ihm untersuchten organischen Verbindungen (vgl. o. S. 268) Werte, deren Differenzen er bei der Schwierigkeit der Messungen keine weitere Bedeutung beilegt, und deren Mittelwert, auf das Volumen bezogen,

$$\varepsilon_v = -0{,}00134$$

ist; da nun für diese Stoffe im Mittel der thermische Ausdehnungskoeffizient 0,00118 ist, so ergibt sich als Temperaturkoeffizient des spezifischen Magnetismus (und ebenso des Molekularmagnetismus)

$$\varepsilon_m = -0{,}00016$$

also eine sehr kleine Zahl. Für Wasser, Alkohol und Salzsäure konnte QUINCKE sogar überhaupt keine Abnahme des Volumen-Magnetismus mit steigender Temperatur wahrnehmen, woraus folgen würde, daß deren spezifischer Magnetismus mit steigender Temperatur zunimmt.

Von den neueren Untersuchungen sind am wichtigsten die von CURIE, TOWNSEND, JÄGER und MEYER, MOSLER und PIAGGESI[2].

Nach CURIE nimmt der Magnetisierungskoeffizient der paramagnetischen Stoffe mit steigender Temperatur ab, und zwar nach einem hyperbolischen Gesetze, also allmählich langsamer. Bei den meisten diamagnetischen Stoffen dagegen ist er von der Temperatur nahezu unabhängig, nur bei Wismut und Antimon nimmt er mit steigender Temperatur rasch ab; für Wismut gilt die Formel ($\sigma$ spezifischer Magnetismus, auf 1 g bezogen, $\Theta$ Temperatur):

$$\sigma = -1{,}35\,[1 - 0{,}00115\,(\Theta - 20)]\,10^{-6} \quad ;$$

beim Schmelzpunkt (273°) ist er nur 0,7 von dem Wert bei 20° und sinkt beim Schmelzen auf 1/25, dann bleibt er bis 400° konstant, nämlich $-0{,}038 \cdot 10^{-6}$.

JÄGER und MEYER finden für Wasser[3] und eine größere Anzahl von Salzen die nebenstehenden Temperaturkoeffizienten (sämtlich negativ, Intervall meist 0 bis 80, die Zahl unter dem Salz bedeutet die Konzentration):

| Salz | Konzentration | Koeffizient |
|---|---|---|
| Wasser | | 0,00164 |
| Eisenchlorid | 3,62 | 0,00252 |
| | 2,23 | 0,00219 |
| | 1,76 | 0,00254 |
| | 1,31 | 0,00232 |
| | 0,79 | 0,00290 |
| | 0,40 | 0,00274 |
| Ferrosulfat | 1,09 | 0,00258 |
| | 0,88 | 0,00251 |
| | 0,53 | 0,00315 |
| | 0,28 | 0,00278 |
| Eisennitrat | 1,88 | 0,00290 |
| | 0,96 | 0,00287 |
| Manganchlorid | 3,55 | 0,00260 |
| | 2,25 | 0,00259 |
| | 1,08 | 0,00263 |
| Manganosulfat | 2,01 | 0,00281 |
| | 1,00 | 0,00266 |
| Manganonitrat | 1,58 | 0,00287 |
| | 0,77 | 0,00311 |
| Kobaltchlorür | 2,02 | 0,00238 |
| | 1,06 | 0,00281 |
| Kobaltsulfat | 1,75 | 0,00247 |
| | 1,03 | 0,00250 |
| Kobaltnitrat | 2,03 | 0,00254 |
| | 1,00 | 0,00251 |
| Nickelchlorür | 1,97 | 0,00272 |
| | 1,07 | 0,00272 |
| Nickelsulfat | 1,92 | 0,00278 |
| | 1,00 | 0,00305 |
| Nickelnitrat | 2,47 | 0,00233 |
| | 1,21 | 0,00322 |

[1] S. HENRICHSEN, Wied. Ann. **45**. S. 38 (insb. 41—43). 1892. — [2] P. CURIE, C. R. **116**. 136. 1892. — C. R. **118**. 1134. 1894. — J. S. TOWNSEND, Proc. R. Soc. 1896. — G. JÄGER und ST. MEYER, Wied. Ann. **63**. 83. 1897. — H. MOSLER, Drude Ann. **6**. 84. 1901. — G. PIAGGESI, N. Cim. (5) **4**. 247. 1902; Phys. Z. **4**. 347. 1903. — [3] Schon früher hatte H. DU BOIS die Abnahme bei Wasser festgestellt, wenn auch sein Wert (0,0025) nicht sicher war.

Eine deutliche Abhängigkeit von der Konzentration findet, wie man sieht, nicht statt, und auch die Werte für die verschiedenen Salze sind nicht sehr verschieden; im Mittel kann man etwa 0,0027 annehmen. Es ist das einerseits erheblich mehr als für Wasser, was mit der Unabhängigkeit von der Konzentration nicht stimmt, so daß hier noch eine Lücke auszufüllen bleibt; andererseits sind die Zahlen sämtlich wesentlich kleiner als der Ausdehnungskoeffizient der Gase; das von G. Wiedemann, Plessner und P. Curie aufgestellte Gesetz, wonach das Produkt aus Magnetisierungskoeffizient und absoluter Temperatur für magnetische Salzlösungen oder für bestimmte Gruppen von Stoffen konstant sein sollte, ist also jedenfalls nicht von umfassender Gültigkeit.

Dies erfährt eine weitere Stütze durch die folgenden Messungen von Mosler (die ersten Zahlen sind Prozentgehalte):

| Eisenchlorid | | Kobaltnitrat | |
|---|---|---|---|
| 10,3 | 0,00268 | 9,9 | 0,00276 |
| 23,0 | 0,00267 | 20,0 | 0,00283 |
| 28,5 | 0,00277 | 27,6 | 0,00265 |
| 29,3 | 0,00339 | 37,7 | 0,00269 |
| 29,9 | 0,00337 | **Mangansulfat** | |
| 33,1 | 0,00358 | 13 | 0,00288 |
| 37,0 | 0,00306 | 23 | 0,00261 |
| 38,5 | 0,00277 | 30,1 | 0,00259 |
| 43,3 | 0,00261 | 40,2 | 0,00255 |
| **Eisennitrat** | | **Nickelsulfat** | |
| 12,1 | 0,00273 | 14,8 | 0,00295 |
| 16,4 | 0,00287 | 23,5 | 0,00256 |
| 21,2 | 0,00286 | 28,9 | 0,00292 |
| 28,2 | 0,00287 | 30,8 | 0,00284 |

Die Zahlen stimmen mit denen von Jäger und Meyer recht gut; auch sie zeigen keine deutliche Abhängigkeit von der Konzentration, mit Ausnahme von Eisenchlorid, wo bei einer Konzentration von 33% ein ausgesprochenes Maximum auftritt — eine Erscheinung, die Mosler noch weiter verfolgt; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

Endlich hat Piaggesi ausgedehnte Experimentalreihen durchgeführt; für Wasser findet er $\varepsilon = -0{,}00175$, also etwas größer als Jäger und Meyer, aber immer noch viel kleiner als für Lösungen; für letztere findet er, im Gegensatze zu jenen, den Gaskoeffizienten und das konstante Produkt von der Konzentration abhängig; es liegen also hier Widersprüche vor, die noch der Erledigung bedürfen.

Für sehr tiefe Temperaturen haben u. a. Fleming und Dewar[1] Messungen angestellt und das Wiedemann-Curiesche Gesetz für mehrere paramagnetische Stoffe bestätigt gefunden, während für Wismut folgende Zahlen gelten:

$$\begin{array}{rl} +15^0 & 13{,}7 \\ -182^0 & 15{,}9 \end{array} \; ,$$

also eine relativ geringe Zunahme stattfindet.

Von Gasen hat Quincke[2] Luft und Sauerstoff untersucht und gefunden, daß der Temperaturkoeffizient auch hier negativ ist, sein Wert aber mit steigendem Temperaturintervall abnimmt; da die Zahlen für beide Gase durcheinander gehen, kann man Mittelwerte bilden und erhält dann für folgende obere Temperaturgrenzen die darunterstehenden Werte:

[1] J. A. Fleming und J. Dewar, Proc. R. Soc. **63**. 311. 1898. — [2] G. Quincke, Wied. Ann. **34**. 401. 1888.

| | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\varepsilon_v =$ | 0,0080 | 0,0072 | 0,0066 | 0,0060 | 0,0057 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0050 | 0,0048 |

Da sich diese Zahlen auf das Volumen beziehen, der Ausdehnungskoeffizient aber 0,00367 ist, erhält man für die Temperaturkoeffizienten des spezifischen Magnetismus:

| | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\varepsilon_m =$ | 0,0043 | 0,0035 | 0,0029 | 0,0023 | 0,0020 | 0,0017 | 0,0015 | 0,0013 | 0,0011 , |

so daß die Abnahme des $\varepsilon$ mit steigender Temperatur eine sehr kräftige wird. Bei Stickstoff, Wasserstoff und Kohlensäure war kein Temperatureinfluß wahrzunehmen. Als jedoch feste Kohlensäure in Scheibenform zwischen die Magnetpole gebracht wurde, stellte sie sich anfangs axial und erst nach einiger Zeit, als sie wärmer geworden war, äquatorial ein.

Neuerdings hat CURIE[1] den Sauerstoff sorgfältig untersucht und zwischen 20 und 450° den spezifischen Magnetismus umgekehrt proportional der absoluten Temperatur (konstantes Produkt 0,0337) gefunden; in Figur 151 (S. 346) ist die Sauerstoffkurve mit verzeichnet. Auch sieht man, daß die Sauerstoff- und Palladiumlinien parallel laufen, und daß die ferromagnetischen Kurven sich für hohe Temperaturen derselben Richtung anpassen — woraus CURIE schließt, daß sein Gesetz $\sigma T =$ konst für genügend hohe Temperaturen auch für diese Stoffe gelte.

Hier ist auch der Ort, um des Verhaltens von Flammen Erwähnung zu tun, wie es zuerst von BANCALARI[2] und dann eingehender von FARADAY[3] studiert worden ist. Die Grundtatsache ist die, daß eine Flamme zwischen den Polen sich in äquatorialer Richtung verbreitert und unter Umständen zu Spitzen verlängert; sie ist also diamagnetisch. Auch heißer Rauch (nicht aber kalter) wird beim Aufsteigen zwischen Polen seitlich abgelenkt.

Was endlich Kristalle betrifft, so folgt aus zahlreichen Versuchen FARADAYS[4], daß in einem magnetisch anisotropen Kristall die Differenzen der Suszeptibilitäten in verschiedenen Richtungen mit steigender Temperatur merklich abnehmen, z. B. die Differenz der Hauptsuszeptibilitäten bei Wismut zwischen 40 und 140° auf weniger als die Hälfte, bei Eisenspat zwischen 20 und 150° auf den dritten Teil.

Die eingehendste einschlägige Arbeit rührt von LUTTEROTH[5] her; er untersuchte die Änderung des Drehungsmomentes mit der Temperatur für folgende Kristalle: Schwefelsaures Nickelkalium, schwefelsaures Kobaltkalium, schwefelsaures Zinkkalium, schwefelsaures Zinkammonium, (diese vier bilden eine isomorphe monokline Gruppe); Nickelsulfat und Zinkvitriol (isomorphe rhombische Gruppe); endlich Kobaltvitriol (monoklin). Das Hauptergebnis läßt sich in folgende Sätze zusammenfassen: 1. Bei sämtlichen, teils para-, teils diamagnetischen Kristallen ändert sich von 0° bis 50° die Differenz irgend zweier Hauptmagnetisierungskonstanten linear mit der Temperatur. 2. Bei sämtlichen einer und derselben isomorphen Reihe angehörenden Kristallen stehen die drei, je nach der zur Aufhängungsrichtung gewählten Achse, verschiedenen Temperaturkoeffizienten in konstantem Verhältnis zueinander. 3. Für die erste Gruppe ist der T.-K. negativ, gleichviel ob die Achse mittlerer oder die Achse schwächster Magnetisierbarkeit zur Aufhängerichtung gewählt wird; für die zweite Gruppe und Kobaltvitriol dagegen ist der T.-K. positiv, wenn die Achse größter, negativ, wenn die Achse mittlerer Magnetisierbarkeit zur Aufhängerichtung gewählt wird. Der FARADAYsche Satz ist hiernach teilweise abzuändern. — Die Mittelwerte der T.-K. selbst sind folgende, wobei $x$ die stärkste, $y$ die mittlere und $z$ die schwächste Richtung bezeichnet:

---

[1] P. CURIE, C. R. **115**. 803 u. 1292. 1892. — [2] BANCALARI, Pogg. Ann. **73**. S. 286. 1848. — [3] M. FARADAY, Phil. Mag. (3) **31**. S. 401. 1847. — Exp. Unt. Bd. **3**. — Vgl. auch J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **73**. S. 559. 1848. — [4] M. FARADAY, Exp. Res. **22**. § 2570. 1848; **30**. § 3394. 1855. — [5] A. LUTTEROTH, In.-Diss. Leipzig 1898; Wied. Ann. **66**. 1081. 1898.

| Stoff | $x$ | $y$ | $z$ | $y:z$ | $x:y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_2Ni(SO_4)_2$ | | $-0{,}006739$ | $-0{,}005512$ | $+1{,}223$ | |
| $K_2Co(SO_4)_2$ | | $-0{,}006210$ | $-0{,}005037$ | $+1{,}232$ | |
| $K_2Zn(SO_4)_2$ | | $-0{,}000521$ | $-0{,}000426$ | $+1{,}223$ | |
| $(NH_4)_2Zn(SO_4)_2$ | | $-0{,}000406$ | $-0{,}000331$ | $+1{,}227$ | |
| $NiSO_4$ | $+0{,}001887$ | $-0{,}005087$ | | | $-0{,}371$ |
| $ZnSO_4$ | $+0{,}0004985$ | $-0{,}001341$ | | | $-0{,}372$ |
| $CoSO_4$ | $+0{,}002302$ | $-0{,}004000$ | | | $-0{,}575$ |

**Theoretisches.** Aus der Gesamtheit der geschilderten Verhältnisse und aus der Gegensätzlichkeit ihrer Einzelheiten geht ohne weiteres hervor, daß der Einfluß der Temperatur auf den Magnetismus nicht aus einer einzigen Quelle stammen kann, sondern daß er sich aus verschiedenen Faktoren zusammensetzt, die für sich genommen entgegengesetzte Wirkungen haben würden, und von denen je nach den Umständen der eine oder der andere überwiegt. Welche Möglichkeiten hierbei in Betracht kommen, haben insbesondere G. WIEDEMANN[1], HOPKINSON[2] und EWING[3] erörtert. Nach der Theorie der drehbaren Molekularmagnete ist zunächst, wie DU BOIS[4] mit Recht hervorhebt, zwischen zwei Wirkungen zu unterscheiden, nämlich zwischen der auf die mehr oder meniger axialen Einstellungen der Molekeln und der auf den spezifischen, dauernd vorhandenen Magnetismus der Molekeln selbst; in schwachen Feldern wird die erstere Wirkung die hauptsächliche sein, weil sie jedenfalls leichter vonstatten geht, in sehr starken Feldern aber, in denen die Molekeln schon sämtlich so gut wie axial gestellt sind, kommt die zweite Wirkung in Betracht; vielleicht hängt es hiermit zusammen, daß (vgl. o.) die Wirkung der Wärme in starken Feldern eine gleichmäßigere, in schwachen Feldern eine heftigere, stoßartige ist. Aber auch die Wirkung auf die Orientierung der Molekeln ist keine einfache, es kommt hier der direkte Einfluß und die entmagnetisierende Kraft der umgebenden Teilchen in Betracht. Endlich ist die thermische Ausdehnung in Rücksicht zu ziehen und zu erwägen, daß, wenn die Wärme kinetische Energie ist, ihre Zufuhr die Beweglichkeit der Teilchen erhöht und ähnlich wie mechanische Erschütterung wirken muß, was in der Tat oben betont wurde.

Eine spezielle Betrachtung fordert noch das seltsame Verhalten heraus, welches z. B. beim Eisen in der Nähe von 800° auftritt: das starke Anwachsen des Magnetismus und das darauf folgende fast plötzliche Verschwinden desselben. Es würde diese Tatsache kaum verständlich sein, wenn sie nicht mit mehreren anderen interessanten Erscheinungen zusammenfiele, dem GOREschen Phänomen[5] und der Rekaleszenz. Das GOREsche Phänomen besteht darin, daß ein Eisendraht, der erhitzt wird, bei dunkler Rotglut eine plötzliche Zusammenziehung, durch welche die regelmäßige Ausdehnung vorübergehend unterbrochen wird, und ebenso bei der Abkühlung an derselben Stelle eine plötzliche Ausdehnung erfährt; GORE selbst hat diese Erscheinung, die vielleicht durch den Kohlengehalt des Eisens hervorgerufen wird, mit der plötzlichen Änderung der Magnetisierbarkeit bei dieser Temperatur in Verbindung gebracht. Die von BARRETT[6] aufgefundene Rekaleszenz, die ebenfalls bei jener kritischen Temperatur auftritt, besteht darin, daß die Abkühlung sich selbst überlassenen Eisens

[1] G. WIEDEMANN, Elektr. (3. Aufl.) 3, S. 769. — [2] J. HOPKINSON, a. a. O. — [3] J. A. EWING, Magn. Ind., Kap. 8; Tr. R. Soc. 1885 (2), S. 523. — [4] H. DU BOIS, Phil. Mag. (5) **29**. S. 297. 1890. — [5] G. GORE, Proc. R. Soc. 17, S. 260. 1869. — Vgl. auch C. HEIM, Unt. üb. die GOREschen Phänomene, In.-Diss. Münch. 1885. — [6] W. F. BARRETT, Phil. Mag. (4) **46**. S. 472. 1873.

oder Stahls an dieser Stelle eine plötzliche Unterbrechung erleidet, ja sogar in vorübergehende Erwärmung übergehen kann, die man unter Umständen als Hellerwerden der Rotglut auch mit dem Auge wahrnehmen kann; es ist daraus zu schließen, daß durch innere Vorgänge, also durch Strukturänderung, Wärme erzeugt wird. Den Zusammenhang der Erscheinung mit dem Wiederauftritt des Magnetismus hat besonders HOPKINSON studiert und u. a. gefunden, daß bei dem vollständig unmagnetischen Manganstahl die Erscheinung der Rekaleszenz fehlt. Das GOREsche Phänomen und die Rekaleszenz sind aber nicht die einzigen, hier in Betracht kommenden Tatsachen; es ist ferner an die von HOLBORN konstatierten Härtungstemperaturen (S. 353) zu erinnern und darauf hinzuweisen, daß auch für die Beziehungen des Magnetismus zur Dehnung und Torsion nach TOMLINSON[1], ferner für das elektrische und thermoelektrische Verhalten die in Rede stehende Temperatur einen kritischen Charakter hat. Man hat deshalb diesen ausgezeichneten Punkt als „Umwandlungstemperatur" bezeichnet.

Für Kristalle hat LUTTEROTH (a. a. O., vgl. S. 363) den Temperatureinfluß auf Grund der Theorie der drehbaren Molekularmagnete analysiert und Beziehungen zu den thermischen Ausdehnungskoeffizienten gefunden; es kann aber hier nicht näher darauf eingegangen werden.

**Thermomagnetische Motoren.** Die Abhängigkeit des Magnetismus von der Temperatur gibt die Möglichkeit einer eigenartigen Methode zur Leistung von Arbeit an die Hand, indem nämlich kaltes Eisen in das Feld hineingezogen, warmes aber ohne oder mit geringerem Arbeitsaufwande aus ihm herausgezogen werden kann. Dieser Gedanke ist u. a. von EDISON[2], THOMSON und HOUSTON[3], SCHWEDOFF[4], STEFAN[5] und F. S. SMITH[6] zur Konstruktion thermomagnetischer Motoren benutzt worden. Für die Praxis haben dieselben bis jetzt keine Bedeutung erlangt, zur Demonstration sind jedoch namentlich die STEFANschen Apparate vortrefflich geeignet. Der eine von ihnen, das thermomagnetische Pendel, schwingt mit seinem als Pendelkörper dienenden Nickel- oder (Eisen-)blech zwischen den Magnetpolen hin und her, der andere, das thermomagnetische Rad, rotiert zwischen ihnen.

## 2. Wärmewirkung der Magnetisierung.

**Notwendigkeit der Wärmewirkung.** Bei der Magnetisierung wird irgend eine Energie, z. B. elektrische, in magnetische Energie verwandelt. Es ist nun nach den bei anderen derartigen Umwandlungen gemachten Erfahrungen und den aus ihnen gezogenen Prinzipien zu vermuten, daß hierbei nicht die gesamte aufgewandte Energie in magnetische, sondern daß ein Teil in die minderwertige thermische Energie, also in Wärme, umgesetzt wird; das Verhältnis der erzielten magnetischen zur ganzen aufgewandten Energie würde alsdann der Wirkungsgrad des Magnetisierungsprozesses sein. Einfacher als in dem hier gedachten Falle liegen die Verhältnisse, wenn man einen Körper erst magnetisiert und dann gleich wieder entmagnetisiert, ohne daß er seinen Magnetismus irgendwie zur Wirkung nach außen bringen könnte. Es ist dann bei diesem Zyklus Arbeit aufgewandt worden, ohne daß am Schlusse überhaupt Magnetismus vorhanden wäre. Damit man hiergegen nicht einwende, daß am Schlusse doch remanenter Magnetismus vorhanden sei, muß angenommen werden, daß der betreffende Körper den Zyklus schon oft durchgemacht habe und infolgedessen einen gewissen remanenten Magnetismus besitze; diesen selben remanenten Magnetismus wird er dann auch

[1] H. TOMLINSON, Proc. Phys. Soc. Lond. 1887, S. 67. — TOMLINSON und NEWALL, Phil. Mag. (5) **24**. S. 256 u. 435. 1887. — [2] TH. EDINSON, Lum. él. 1887. S. 554. — [3] E. J. HOUSTON und E. THOMSON, J. of the FRANKLIN Inst. 1879. S. 39. — [4] TH. SCHWEDOFF, J. de Phys, (2) **5**. S. 362. 1886. — [5] J. STEFAN, Wied. Ann. **38**. S. 427. 1889. — [6] F. S. SMITH, Lum. él. **43**. 391. 1892.

am Schlusse eines neuen identischen Zyklus besitzen, es hat sich also magnetisch nichts in ihm geändert. Daraus folgt, daß in diesem Falle die gesamte aufgewandte Arbeit in Wärme umgesetzt sein muß, der Körper muß sich also relativ kräftig erwärmt haben. Diese Forderung ist durch die Erfahrung vollkommen bestätigt worden. Man hat die in Rede stehende Erwärmung durch zyklische Magnetisierung beobachtet und nach zwei verschiedenen Methoden gemessen.

**Messungsmethoden.** Nach dem Gesagten liegt es nahe, die Erwärmung durch die aufgewandte Arbeit zu messen, der sie äquivalent ist. Nun ist schon im Art. „Magnetische Induktion" (S. 155) angegeben worden, daß diese Arbeit (für die Volumeneinheit) dargestellt wird durch den Inhalt der Flächen zwischen den aufsteigenden und den absteigenden Zweigen der jenem Zyklus entsprechenden Magnetisierungskurve (Figur 70 oder 71); man braucht also nur diese Fläche, also nur die Werte des Magnetismus $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ bei aufsteigender und absteigender Kraft $\mathfrak{H}$ zu messen und den Ausdruck

$$W = \frac{1}{a}\int(\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_1)\, d\mathfrak{H}$$

zu bilden, um, wenn $a$ das Arbeitsäquivalent der Wärme ist, die Magnetisierungswärme $W$ zu finden. Diese Methode, die u. a. WARBURG[1], EWING[2] und WASSMUTH und SCHILLING[3] benutzt haben, ist entschieden die einfachste.

Andererseits kann man die Erwärmung auf direktem thermischem Wege bestimmen. Indessen treten hierbei leicht ersichtliche Schwierigkeiten auf, die auf der Mitwirkung freier, in der Umgebung des Eisenkörpers erzeugter Wärmemengen, z. B. der Magnetisierungsspule, und anderen Fehlerquellen beruhen und die Erlangung zuverlässiger und genauer Ergebnisse zweifelhaft erscheinen lassen. Trotzdem ist die Methode, die übrigens naturgemäß älter als die erstgenannte ist, vielfach angewandt worden, und insofern mit Recht, als ihr ein selbständiger Wert zukommt. Die Arbeitsmethode ist nämlich insofern von beschränkter Anwendbarkeit, als man bei ihr den Zyklus nur sehr langsam durchlaufen lassen kann, weil man in möglichst vielen seiner Punkte magnetische Messungen ausführen muß. Gerade umgekehrt bietet die thermische Methode die Möglichkeit, den Zyklus sehr schnell, nämlich durch Benutzung eines intermittierenden Erregungsstromes, auszuführen; und da man ihn hierbei überdies sehr oft wiederholen kann, wobei sich die Erwärmungen durch jeden einzelnen summieren, wird man immerhin auf relativ gute Resultate rechnen dürfen. Die beiden Methoden ergänzen sich also, sie erlauben eine direkte Prüfung der Äquivalenz von Wärme und Arbeit (also, wenn diese vorausgesetzt wird, auch eine Bestimmung des Wärmeäquivalents), und sie lassen zugleich die Frage entscheiden, ob die Wärmewirkung zyklischer Magnetisierung von der Geschwindigkeit abhängt.

Die ersten Versuche über die Erwärmung durch Magnetisierung hat JOULE[4] mit Hilfe der Rotation eines Bündels von Eisenlamellen über den Polen eines Magneten angestellt und, was zu erwarten war, gefunden, daß die erzeugte Wärme mit dem Quadrat des Magnetismus proportional ist. Von den späteren thermischen Beobachtungen[5] können am besten die von CAZIN[6], bei denen ein intermittierender Strom (bis zu 300 Unterbrechungen in der Minute) benutzt wurde, zur Ermittelung des absoluten Wertes der Wärmewirkung dienen; nach der Umrechnung von WARBURG findet man, daß in einem Falle, in welchem das magnetische Moment im CGS-System 28,7 beträgt, die in einem Zyklus ent-

[1] E. WARBURG, Wied. Ann. **13**. S. 141. 1881. — [2] J. A. EWING, Tr. R. Soc. 1885. — [3] A. WASSMUTH und G. A. SCHILLING, Wien. Ber. **94**. (2). S. 280. 1886. — [4] J. P. JOULE, Phil. Mag. **23**. S. 263, 347 und 435. 1843. — [5] J. VAN BREDA, Pogg. Ann. **68**. S. 552. 1846. — W. R. GROVE, Pogg. Ann. **78**. S. 567. 1849. — Für zirkulare Magnetisierung: E. VILLARI, N. Cim. (2) **4**. S. 287 und 389. 1870. — [6] A. CAZIN, Compt. rend. **78**. S. 845; **79**. S. 290, 1874; Ann. Chim. Phys. (5) **6**. S. 493. 1875; J. de Phys. **5**. S. 111. 1876.

wickelte Wärme gleich 20,3 Milliontel Kalorien ist. Vergleicht man mit dieser Zahl, die sich auf eiserne Röhren bezieht, einige Zahlen, welche WARBURG[1] für Eisendrähte nach der Arbeitsmethode ermittelt hat[2], nämlich 1) $W = 2{,}23 \times 10^{-6}$ für $M = 25$ und 2) $W = 6{,}05 \times 10^{-6}$ für $M = 40$, so findet man als Wärmemenge pro Einheit des magnetischen Moments

bei CAZIN; $2{,}5 \times 10^{-8}$
bei WARBURG: 1) $0{,}3 \times 10^{-8}$
„ „ 2) $0{,}4 \times 10^{-8}$
} Mittel $0{,}35 \times 10^{-8}$ .

Es stimmt also nur die Größenordnung der gefundenen Wärmemenge überein, der wirkliche Betrag ist bei CAZIN etwa siebenmal so groß wie bei WARBURG. Auch HERWIG[3] hat derartige Bestimmungen ausgeführt, aber leider keine Angaben über die benutzten Kräfte und die erreichten Magnetismen gemacht, so daß sich ein Vergleich nicht durchführen läßt. Auch auf eine Arbeit von BORGMANN[4] kann hier nicht eingegangen werden. Von großem Interesse sind hingegen die Versuche von WARBURG und HÖNIG[5], bei welchen dieselben Versuchskörper einmal dem langsamen Zyklus unter Anwendung der Arbeitsmethode, ein zweites Mal der raschen Zyklenfolge des intermittierenden Stromes unter Anwendung der thermischen Methode unterworfen wurden, bei letzterer wurde ein allen Bedenken möglichst gerecht werdendes Kalorimeter von besonderer Konstruktion benutzt. Als Versuchskörper dienten:

1. Bündel I von 370, je 0,01 cm dicken Eisendrähten, Gesamtgewicht 14,77 g,
2. Bündel II von 150, je 0,034 cm dicken Drähten, Gew. 14,47 g,
3. Eisenstab I, 0,4 cm dick, 13,01 g schwer,
4. Eisenstab II, 0,7 cm dick, 39,32 g schwer,
5. Bündel von dünnen Eisenblechstreifen, 13 g schwer.

Alle Objekte waren 12 cm lang. Es wurden entweder einfache Zyklen ausgeführt, bei denen die Kraft zwischen null und einem äußersten Werte variierte, oder Doppelzyklen, bei denen sie zwischen jenem positiven und einem gleich großen negativen Werte variierte; auf den einfachen Zyklus bezieht sich der Index 1, auf den doppelten der Index 2. Das äußerste erreichte Moment entsprach ungefähr dem Inflexionspunkte der Magnetisierungskurve, und die Suszeptibilität war hierbei bei

| Bündel I | Bündel II | Stab I | Stab II | Bündel III |
|---|---|---|---|---|
| 21,7 | 20,8 | 12,9 | 7,2 | 20,1. |

In der folgenden Tabelle bedeutet $A$ die nach der Arbeitsmethode, $W$ die nach der thermischen Methode erhaltenen Wärmemengen, beide für einen Zyklus und in Milliontel Gramm-Kalorien ausgedrückt:

| Material | $A_1$ | $W_1$ | $A_2$ | $W_2$ | $A_2 : A_1$ | $W_2 : W_1$ | $W_1 : A_1$ | $W_2 : A_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bündel I . . | 9,2 | 5,3 | 28,0 | 17,6 | 3,0 | 3,3 | 0,6 | 0,6 |
| Bündel II . . | 4,9 | 5,2 | 17,6 | 17,4 | 3,6 | 3,4 | 1,1 | 1,0 |
| Stab I . . . | 5,1 | 13,3 | 18,9 | 46,0 | 3,7 | 3,5 | 2,6 | 2,4 |
| Stab II . . . | 0,4 | 5,6 | 1,6 | 10,1 | 4,0 | 1,8 | 14,0 | 6,3 |
| Bündel III . . | 3,7 | 2,4 | 12,0 | 7,8 | 3,2 | 3,3 | 0,7 | 0,7 |

[1] E. WARBURG, Wied. Ann. 13. S. 141. 1881. — [2] Diese Zahlen wurden natürlich ebenfalls vom GAUSSschen auf das obige Maßsystem umgerechnet. — [3] H. HERWIG, Wied. Ann. 4. S. 177. 1878. — [4] J. BORGMANN, J. d. russ. phys. Ges. 14. S. 67. 1883. — [5] WARBURG und HOHNIG, Wied. Ann. 20. S. 814. 1883. — Vgl. hierzu auch WASSMUTH und SCHILLING, a. a. O., sowie E. WARBURG, Wien. Ber. 96 (2). S. 1256. 1888.

Diese Zahlen lassen erkennen, daß die Verhältnisse ziemlich verwickelt sind. Bald ist die Wärmeentwicklung bei langsamem, bald die bei schnellem Verfahren größer; bei langsamem Verfahren gibt das Bündel dünner Drähte, bei raschem der dünne Stab die größte Wärmemenge. Daß die entwickelte Wärme bei dem Doppelzyklus nicht bloß doppelt so groß ist wie die beim einfachen Zyklus, sondern erheblich größer (außer beim Stab II, rascher Prozeß), ist verständlich, weil bei dem einfachen Zyklus zwar die Kraft zwischen null und einem Maximum, der Magnetismus aber nur zwischen seinem Remanenzwerte und dem Maximum variiert, während er im Doppelzyklus zwischen dem positiven und negativen Maximum hin- und hergeht.

In neuerer Zeit ist die Äquivalenz der erzeugten Wärme mit der aufgewandten Arbeit durch zahlreiche Experimentaluntersuchungen, bei denen die Verhältnisse möglichst vereinfacht wurden, nachgewiesen worden[1].

**Bestandteile der Magnetisierungswärme.** Daß die Verhältnisse von der geschilderten Komplikation sind, hat seinen Grund jedenfalls zum Teil in dem Umstande, daß die Magnetisierungswärme keine einfache Größe, sondern aus verschiedenen Größen zusammengesetzt ist. Erstens erzeugt die Magnetisierung selbst, also die Umlagerung der Teilchen, Wärme („Friktionswärme" nach WARBURG), zweitens entstehen bei jeder Magnetisierung, Entmagnetisierung und Ummagnetisierung Induktionsströme in der Masse des Eisens und hierdurch wiederum Wärme („elektromagnetische Wärme", nach WARBURG, „Wirbelstromwärme" der Technik); drittens endlich muß nach THOMSON[2], EWING[3] u. a. Wärme entwickelt oder absorbiert werden, weil die Suszeptibilität des Eisens eine Funktion der Temperatur ist. Die beiden letzteren Punkte bedürfen also einer besonderen Erörterung[4].

Die elektromagnetische Wärme tritt bei langsamer Zustandsänderung nicht in erheblichem Maße auf, geht also in die nach der Arbeitsmethode erhaltenen Zahlen nicht ein. Bei der thermischen Methode würde sie sich absondern lassen, wenn man die Wirbelströme in der Masse des Eisens beseitigen könnte; durch alle dahin zielenden Versuche, z. B. EDLUNDS[5], welcher den Versuchen erst aufgeschlitzte, dann zusammengeschlossene Eisenröhren unterwarf, ferner HERWIGS u. a. läßt sich aber, wie die betreffenden Autoren zum Teil selbst zugeben, die elektromagnetische Wärme nur etwas vermindern, aber bei weitem nicht ausschließen. Es bleibt also nur der Weg, aus der Theorie der elektrischen Induktion diese Wärme zu berechnen. WARBURG hat dies versucht und gefunden, daß bei seinem Bündel I 10 bis 11, bei Bündel II 20 bis 25% der entwickelten Wärme auf die elektromagnetische entfallen; dabei ist aber die Selbstinduktion vernachlässigt; und wie beträchtlich diese wahrscheinlich die gefundenen Werte herabdrücken würde, geht am deutlichsten daraus hervor, daß sich bei den Stäben die berechnete elektromagnetische Wärme größer als die ganze durch den Versuch ermittelte ergab. Immerhin läßt sich jetzt aus den Zahlen der obigen Tabelle schließen, daß die eigentlichen Magnetisierungswärmen bei schneller Zustandsänderung kleiner sind als bei langsamer; auch TANAKADATÉ[6] hat gefunden, daß bei schneller Durchlaufung des Zyklus nur 80% so viel Wärme entwickelt werden, wie bei langsamer, daß es hingegen gleichgültig ist, ob 25 oder 400 Zyklen in der Sekunde durchlaufen werden. Diese Resultate müssen aber erst noch weitere Bestätigung finden, ehe es rätlich erscheint, Schlüsse daraus zu ziehen[7].

---

[1] Vgl. u. a. B. STRAUSS, Inaug.-Diss. Zürich 1896. — G. W. MEYER, El. Z. 1896. — L. TRYLSKI, Inaug.-Diss. Zürich 1900. — [2] W. THOMSON, Phil. Mag. (5) **5**. S. 25. 1878. — [3] J. A. EWING, Proc. R. Soc. **24**. S. 39. 1882. — [4] Vgl. hierüber auch die Abhandlung von WASSMUTH, Wiener Ber. **89** (2). S. 104. 1884. — [5] EDLUND, Pogg. Ann. **123**. S. 205. 1864. [6] TANAKADATÉ, Phil. Mag. (5) **28**. S. 207. 1889. — [7] Vgl. auch die Arbeit von J. J. THOMSON über Wirbelstromwärme in einer Eisenplatte im magnetischen Wechselfelde. Electrician **28**. 599. 1892.

Was andererseits die THOMSONsche Wärme betrifft, so hat W. THOMSON[1] aus der Thermodynamik folgende Sätze abgeleitet: Wenn man einen Körper mit positivem Temperaturkoeffizienten Magneten nähert, so kühlt er sich ab, entfernt man ihn, so erwärmt er sich; bei einem Körper mit negativem Temperaturkoeffizienten bringt umgekehrt Annäherung Erwärmung und Entfernung Abkühlung hervor. Um die Bedeutung dieses Satzes verfolgen zu können, muß man sich erinnern, daß der Temperaturkoeffizient für einen und denselben Körper positiv oder negativ ist, je nach der Intensität der Magnetisierung, die er annimmt, und je nach der Temperatur, bei der der Prozeß sich abspielt (s. o.); man sieht dann z. B. ein, daß ein Körper sich bei Annäherung an Magnete, oder, was dasselbe ist, bei Steigerung des Feldes, zuerst abkühlen und dann bei weiterer Annäherung oder weiterer Steigerung des Feldes wieder erwärmen kann[2]. WARBURG hat sich der Mühe unterzogen, für einen der von ihm experimentell untersuchten Fälle den numerischen Betrag der THOMSONschen Wärme zu berechnen und eine so außerordentlich kleine Zahl gefunden, daß sie ohne weiteres unberücksichtigt bleiben darf.

Für die Praxis, insbesondere bei den dynamoelektrischen Maschinen, ist die Wärmewirkung von doppeltem Nachteil; erstens weil sie eine Vergeudung von Arbeit darstellt, und es ist schon oben auf S. 232 f. der Betrag dieser Vergeudung zahlenmäßig für verschiedene Materialien angegeben und gezeigt worden, daß er bei weichem Schmiedeeisen am kleinsten ist; zweitens weil diejenigen Eisenteile, welche den wechselnden Magnetisierungen ausgesetzt sind, warm werden, was dem Betriebe schadet. Den letzteren Übelstand kann man durch Kühlvorrichtungen beseitigen, die ungünstige Ökonomie des Prozesses wird dadurch aber natürlich nicht vermindert. Um von der bezüglichen Temperaturerhöhung eine Vorstellung zu bekommen, braucht man nur die verbrauchte Arbeit durch die Dichte des Eisens (7,7) und durch seine spezifische Wärme (0,11) zu dividieren und findet dann[3]

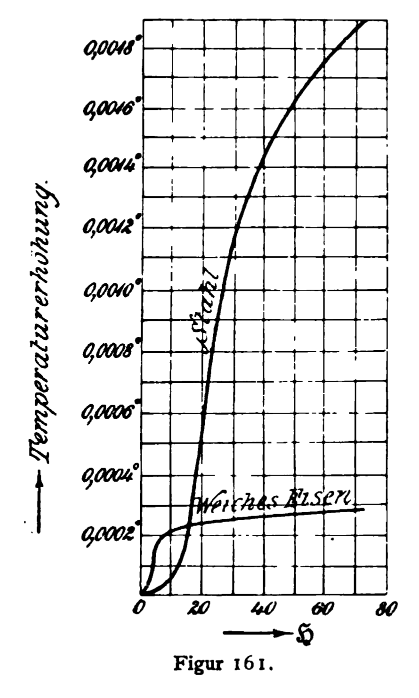
$$\delta t = 2{,}81 \times 10^{-8} \int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{J} \quad ;$$

nun beträgt für weiches, ausgeglühtes Eisen der Wert des Integrals bei einem vollständigen Kreisprozeß, d. h. wenn das Eisen seinen positiven und negativen Sättigungszustand nahezu erreicht, rund 10000 Erg, die Temperatur würde also für je 4000 Umdrehungen der Maschine um 1° steigen, also, wenn sie 1000 Touren in der Minute macht, ohne Berücksichtigung der Zerstreuung der Wärme in die Umgebung, in der Stunde um 15°. In Wahrheit ist die Erwärmung wegen der Wirbelströme in der Ankermasse noch sehr viel größer, wenigstens war sie es bei den älteren Maschinen; bei den jetzigen hat man die diesen Wirbelströmen entsprechende elektromagnetische Wärme durch möglichste „Zerteilung“ des Ankereisens auf einen mäßigen Betrag herabgedrückt. Um auch die eigentliche magnetische Erwärmung zu mindern, darf man den Kreisprozeß nicht in seiner vollständigen Ausdehnung ausführen, d. h. man muß das Eisen nur bis zu einem mäßigen Betrage magnetisieren; daß man dabei günstiger arbeitet, ist schon oben aus der Gestalt der Magnetisierungskurve geschlossen worden, aus dieser Gestalt folgt aber eben gleichzeitig, daß die Vergeudung von Energie nicht nur absolut, sondern auch relativ wächst, wenn man die Magnetisierung zwischen weiteren Grenzen vornimmt. Zur Veranschaulichung diene die folgende Tabelle, in welcher die Kraft $\mathfrak{H}$, die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$, die Vergeudung $V$, die Vergeudung

[1] W. THOMSON, Phil. Mag. (5) **5**. 4. 1878. — Vgl. auch P. DUHEM, Leç. s. l'El. et le Magn. **2**. 278. 1892. — [2] P. DUHEM, (Th. de l'aim., S. 95 u. 109) hat aus seiner thermodynamischen Theorie des Magnetismus einen Satz abgeleitet, welcher sich mit dem THOMSONschen zum Teil deckt, ihm zum anderen Teil aber widersprechen soll. Dieser Widerspruch beruht jedoch auf einem leicht ersichtlichen, von JANET (Journ. de Phys. (2) **8**. S. 312. 1889) aufgeklärten Mißverständnis. JANET gibt auch einen Versuch an, durch den man die THOMSONsche Wärme vielleicht würde ermitteln können. — [3] J. A. EWING, Magn. Ind. S. 101.

in Bruchteilen der Induktion ($V:\mathfrak{B}$) und die entsprechende Temperaturerhöhung $\delta t$ pro Zyklus angegeben ist.

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{B}$ | $V$ | $V:\mathfrak{B}$ | $\delta t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,50 | 1974 | 410 | 0,21 | 0,000012° |
| 1,95 | 3830 | 1160 | 0,30 | 0,000033° |
| 2,56 | 5950 | 2190 | 0,37 | 0,000062° |
| 3,01 | 7180 | 2940 | 0,41 | 0,000083° |
| 3,76 | 8790 | 3990 | 0,45 | 0,000112° |
| 4,96 | 10590 | 5560 | 0,53 | 0,000156° |
| 6,62 | 11480 | 6160 | 0,54 | 0,000173° |
| 7,04 | 11960 | 6590 | 0,55 | 0,000185° |
| 26,5 | 13720 | 8690 | 0,63 | 0,000244° |
| 75,2 | 15560 | 10040 | 0,65 | 0,000282° |




Figur 161.

In Figur 161 sind nach TANAKADATÉ die Temperaturerhöhungen dargestellt, welche in Eisen und Stahl bei einem Kreisprozeß zwischen den als Abszissen angegebenen Kraftgrenzen (±) auftreten. Daß die Stahlkurve anfangs unter der Eisenkurve liegt, ist offenbar eine Folge der viel geringeren Suszeptibilität des Stahls; die Stahlkurve würde überall über der Eisenkurve liegen, wenn als Abszissen statt der $\mathfrak{H}$ die $\mathfrak{J}$ gewählt worden wären.

### c) Einfluß des Magnetismus auf das thermische und chemische Verhalten.

**Wärmeleitung.** Zahlreiche Physiker haben experimentell festzustellen versucht, ob die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens durch die Magnetisierung geändert wird, insbesondere sind MAGGI[1], NACCARI und BELLATI[2], TOMLINSON[3], TROWBRIDGE[4], BATTELLI[5] und FOSSATI[6] zu nennen. MAGGI fand nach der bekannten Abschmelzungsmethode von SÉNARMONT, daß sich die Wärmeleitungsfähigkeiten in äquatorialer und axialer Richtung wie 6 : 5 verhalten, also entweder letztere abgenommen oder erstere zugenommen hatte. Die übrigen Beobachter bestimmten den Wärmefluß in Stäben nach verschiedenen Methoden. TOMLINSON benutzte verschiedene Versuchsanordnungen und fand bei longitudinaler Magnetisierung Abnahme, bei transversaler Zunahme des Leitungsvermögens um einige Prozent. TROWBRIDGE fand in einem Falle Zunahme, in einem anderen keine Änderung. BATTELLI nahm die Frage unter Vermeidung der möglichen Fehlerquellen wieder auf und fand wenigstens bei einer seiner verschiedenen Versuchsreihen eine Abnahme, jedoch von nur 0,002 des Wertes. Zu rein negativen Ergebnissen gelangten NACCARI und BELLATI, sowie FOSSATI.

[1] MAGGI, Arch. de Genève **14**. S. 132. 1850. — [2] NACCARI und BELLATI, N. Cim. (3) **1**. S. 72 u. 107. 1877. — [3] H. TOMLINSON, Pr. R. Soc. **27**. S. 109. 1878. — [4] TROWBRIDGE und PENROSE, Proc. Am. Ac. 1883. S. 210. — [5] A. BATTELLI, Atti Ac. Tor. **21**. S. 559. 1886. — [6] E. FOSSATI, Beibl. z. Wied. Ann. 1891. S. 55.

Aus neuester Zeit liegen zwei eingehende Untersuchungen über den Gegenstand vor, nämlich die von KORDA und von SCHWEITZER[1]. KORDA arbeitete mit einer Scheibe, SCHWEITZER mit der Ringform; jener wandte das SÉNARMONTsche Verfahren der Schmelzkurven an, dieser die NEUMANNsche Methode, bei der der stationäre Zustand abgewartet und alsdann an zwei gegenüberliegenden Stellen des Ringes Summe und Differenz der Temperaturen gemessen wird. Eine exakte Messung der Magnetisierung ist natürlich nur bei der Ringform möglich. KORDA fand als Schmelzkurve statt des Kreises eine Ellipse (bei kleinen Scheiben schließlich Lemniskaten); er berechnet eine Abnahme der Wärmeleitung in der Feldrichtung von etwa 12%, dagegen keinen Einfluß senkrecht zum Felde. Diese beiden Punkte bestätigt SCHWEITZER; er findet aber, im Gegensatz zu ihm, Proportionalität der Wirkung mit der Feldstärke, nicht mit ihrem Quadrat, was doch zu erwarten wäre, da entgegengesetzte Feldrichtungen die gleiche Wirkung haben. Es bleibt also noch einzelnes auf die Frage bezügliches aufzuklären.

Auch bei einem diamagnetischen Material, dem Wismut, ist, und zwar fast gleichzeitig durch RIGHI[2] und LEDUC[3], die Abnahme der Wärmeleitungsfähigkeit festgestellt worden, die eintritt, wenn es transversal in ein Feld gebracht wird. In einem Felde von 2338 Einheiten beträgt die Abnahme nach RIGHI 2,2%, und es findet gleichzeitig eine Verschiebung der Isothermen statt. Diese Erscheinung steht jedenfalls in engem Zusammenhange mit den anderen Besonderheiten, welche das Wismut darbietet, und von welchen im Artikel „Elektromagnetismus" die Rede sein wird.

**Bestrahlung.** Daß Magnetnadeln und insbesondere astatische Paare durch Bestrahlung abgelenkt werden, ist oft beobachtet worden; es ist aber sehr schwer, hieraus einwandsfreie Schlüsse zu ziehen. Neuerdings hat nun MELANDER[4] sorgfältige Messungen angestellt und folgendes gefunden: Die Ablenkung ist wirklich die Folge einer Veränderung des magnetischen Momentes; und zwar wird sowohl das temporäre wie das permanente Moment geschwächt. Es liegt nahe, die Temperaturerhöhung als Ursache dieser Schwächung anzusehen; da aber z. B. auch Magnesiumlicht eine starke Wirkung ausübt, muß noch eine zweite Ursache vorhanden sein.

**Spezifische Wärme.** STEFAN[5] hat aus dem Prinzip von der Erhaltung der Arbeit in Verbindung mit den obigen Tatsachen den Schluß gezogen, daß die spezifische Wärme des magnetisierten Eisens größer sein muß, als die des unmagnetischen, oder korrekter gesagt: daß die spezifische Wärme des Eisens im magnetischen Felde größer ist als außerhalb desselben. Die betreffende Formel läßt sich nach WASSMUTH[6] in der Form

$$C = c + \frac{1}{a\,t}\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{J}$$

schreiben, wenn $t$ die Temperatur ist, bei welcher das Eisen unmagnetisch wird. Durch Kombination solcher Gleichungen und graphische Darstellung von Kreisprozessen bei verschiedenen Temperaturen kann man $t$ eliminieren und $C - c$ erhalten; in zwei Fällen ergab sich auf diese Weise im Mittel $2{,}7 \times 10^{-8}$. Berechnet man hieraus rückwärts $t$, so findet man 1200 bis 1500°, was aber nach den obigen Angaben zu hoch ist. Jedenfalls ergibt sich hieraus, daß die Differenz außerordentlich klein ist und daß man für normale Fälle sagen kann: Die spezifische Wärme des Eisens wird durch Magnetisierung nicht geändert.

---

[1] D. KORDA, C. R. **128**. 418. 1899. — J. de Phys. (4) **1**. 307. 1902. — A. SCHWEITZER, Inaug.-Diss. Zürich 1900. — [2] A. RIGHI, Rend. Acc. Linc. 1887 (12. Juli); Compt. rend. **105**. S. 168. 1887; Atti Ac. Linc. (4) **4**. S. 433. 1888. — [3] A. LEDUC, Compt. rend. **104**. S. 1783. 1887. — [4] G. MELANDER, Acta Soc. Fenn. **20**. 1900. — [5] J. STEFAN, Wien. Ber. **64** (2). S. 219. 1871. — [6] A. WASSMUTH, Wien. Ber. **85** (2). S. 997. 1882; vgl. auch Wien. Ber. **86** (2). S. 539. 1882; **87** (2). S. 82. 1883.

Dagegen hat B. HILL[1] für einen besonderen Fall, nämlich für die irreversiblen Eisen-Nickel-Legierungen (vgl. S. 243), die spezifische Wärme im magnetischen Zustande (vor der Erhitzung) und im unmagnetischen Zustande (nach der Wiederabkühlung) gemessen und verschieden befunden; folgendes die Zahlen für zwei Proben (*m* magnetisch, *u* unmagnetisch, die Zahlen links die Temperaturgrenzen):

| | I | | II | |
|---|---|---|---|---|
| | *m* | *u* | *m* | *u* |
| 0 und 18 | 0,1021 | 0,1086 | 0,0924 | 0,0992 |
| 20 und 100 | 0,1126 | 0,1180 | 0,1136 | 0,1158 |
| 20 und 270 | 0,1239 | 0,1243 | 0,1222 | 0,1235 |

Die spezifische Wärme ist also im unmagnetischen Zustande stets größer als im magnetischen, aber der Überschuß nimmt mit steigender Temperatur ab. Zugleich ergibt sich nach einer einfachen Formel die latente Umwandlungswärme zu 13,5. Schließlich zeigte sich, daß die spezifische Wärme des Eisens durch Härtungsprozesse vergrößert, durch Steigerung seiner Induktionsfähigkeit herabgemindert wird.

**Siedepunktsänderung.** Den Einfluß des magnetischen Feldes auf die Lage des Siedepunktes einer Flüssigkeit hat H. DU BOIS[2] theoretisch behandelt. Ist nämlich $T$ die absolute Temperatur, $d$ die Dichte und $L$ die Verdampfungswärme, so ist die zu erwartende Änderung des Siedepunktes

$$\delta T = \frac{T}{dL}\int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{J}\, d\mathfrak{H} = \frac{\varkappa T \mathfrak{H}^2}{2\, d L},$$

wo der einfachere zweite Ausdruck für konstante Suszeptibilität gilt. Die Erhöhung des Siedepunktes für paramagnetische bzw. seine Erniedrigung für diamagnetische Flüssigkeiten ist daher um so größer, je größer die Suszeptibilität und je kleiner Dichte und Verdampfungswärme ist. Für Sauerstoff ist etwa $^1/_{100}$ Grad zu erwarten, für Wasser usw. weniger als beobachtbar ist. Bei Lösungen muß man etwaige Konzentrationsänderungen beachten; ohne das würde z. B. ein von NAGAOKA untersuchtes Eisenamalgam $^1/_{20}$ Grad ergeben.

**Drehung der Polarisationsebene der strahlenden Wärme.** Die Erwartung, daß sich, wie sonst, auch hinsichtlich der Drehung der Polarisationsebene die strahlende Wärme ganz wie das Licht (vgl. den nächsten Artikel) verhalten werde, ist, nach vorangegangenen Versuchen von WARTMANN[3] und von DE LA PROVOSTAYE und DESAINS[4], besonders durch eine Arbeit von GRUNMACH[5] bestätigt worden. Bei allen von ihm geprüften Stoffen (Gläser, Schwefelkohlenstoff, Terpentinöl, Wasser und Alkohol) erwies sich die Drehung der Polarisationsebene der strahlenden Wärme als positiv, für den größeren Brechungsindex war sie meist auch größer, mit der magnetisierenden Kraft war sie proportional. Näheres findet man in dem Artikel über Wärmestrahlung (Bd. 3).

**Einfluß des Magnetismus auf chemische und physikalisch-chemische Vorgänge.** Ein ganz analoger Gedankengang wie bei der spezifischen Wärme zeigt, daß die Verbindungswärme des Eisens im magnetischen Felde eine andere sein muß, als unter gewöhnlichen Umständen. Während aber NICHOLS und JANET schlossen, daß sie kleiner sein müsse, kam GROSS zu dem entgegengesetzten Ergebnisse. Dieser Widerspruch wurde durch DUHEM gelöst, indem gezeigt wurde,

[1] B. HILL, Verh. Deutschen Phys. Ges. **3**. 113. 1901. — [2] H. DU BOIS, Verh. D. Phys. Ges. **17**. 148. 1898. — [3] WARTMANN, Compt. rend. **22**. S. 745. 1846; Pogg. Ann. **71**. S. 573. 1847. — [4] DE LA PROVOSTAYE und DESAINS, Ann. Chim. Phys. (3) **27**. S. 232. 1849. — [5] L. GRUNMACH, Wied. Ann. **14**. S. 85, 1881.

von welchen Umständen das Ergebnis abhängt. Experimentell ist die Frage u. a. von GROSS behandelt worden, und es zeigte sich dabei weiter, daß zwischen den Teilen eines in Säure tauchenden Eisenkörpers elektrische Ströme entstehen, falls sie verschieden magnetisiert sind (s. w. u.).

**Ein Einfluß auf chemische Reaktionen** selbst ist lange gesucht, aber erst von IRA REMSEN und alsdann auch von ROWLAND aufgefunden worden. REMSEN zeigte, daß in einer mit Kupfervitriollösung gefüllten Eisenschale, die auf einem kräftigen Magneten steht, das Kupfer sich ungleichförmig niederschlägt, am schwächsten an den Polen, am stärksten je weiter man sich von ihnen entfernt, und daß die Linien gleicher Dicke des niedergeschlagenen Kupfers den Äquipotentiallinien analog sind. Entsprechend zeigte ROWLAND, daß, wenn man ein kräftig magnetisiertes Stück Eisen in der Säure auflöst, die am stärksten magnetisierten Teile desselben teilweise gegen die Auflösung geschützt sind und schwächer angegriffen werden als die übrigen. JANET und ROWLAND haben diese Erscheinung durch die Prinzipien der Thermochemie erklärt, also in leicht ersichtlicher Weise auf die oben berührten Verhältnisse der Verbindungswärme zurückgeführt; daß diese Erklärung nur bis zu einem gewissen Grade richtig ist, hat dann DUHEM gezeigt, indem er sie vervollständigte und eine allgemeine Theorie der Lösung eines magnetischen Salzes entwickelte.

Weitere Einflüsse des Magnetismus beziehen sich auf andere chemische Erscheinungen[1], auf die Kristallisation und auf die elektromotorische Kraft von Eisenketten; jedoch muß es hier an diesem Hinweise genügen; man vergleiche indes den Artikel „Elektromagnetismus".

[1] Über Beziehungen zum Atomgewicht s. o. S. 278f.



# Beziehungen des Magnetismus zum Licht.

Von F. AUERBACH.

**Übersicht.** Die Beziehungen des Magnetismus zum Licht sind sehr mannigfacher Natur; es sind sämtlich Wirkungen des Magnetismus auf das Licht — von den umgekehrten Wirkungen weiß man wenig oder gar nichts[1].

Die wichtigsten Wirkungen des Magnetismus sind die Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang durch und der Reflexion an magnetisierten Stoffen sowie einiges, was sich hieran anschließt; sodann die um das ZEEMANsche Phänomen sich gruppierenden Erscheinungen; endlich der Einfluß auf die elektrischen Leuchterscheinungen in Gasen (Kathoden- und andere Strahlen). Nur die erste Gruppe soll hier behandelt werden; wegen der beiden anderen ist auf die betreffenden Artikel der Optik und der Elektrizitätslehre zu verweisen.

## 1. Drehung der Polarisationsebene des Lichts beim Durchgange durch magnetische Körper.

**Grunderscheinung.** Eine der merkwürdigsten Wirkungen des Magnetismus ist die Drehung der Polarisationsebene des Lichts in Substanzen, welche von Natur eine solche Drehung nicht hervorrufen. Diese Tatsache wurde von FARADAY[2] entdeckt, welcher damit nach langwierigen, vergeblichen Versuchen, eine Beziehung zwischen Magnetismus und Licht aufzufinden, zum Ziele gelangte und damit zugleich einen anderen Zweck zum ersten Male erreichte, nämlich zu zeigen, daß alle Körper magnetisierbar sind. Die Empfindlichkeit optischer Beobachtungen hat sich also, wie so oft, auch hier glänzend bewährt. Alle bisher untersuchten Stoffe, wenigstens soweit sie einfach brechend sind, zeigen die Drehung der Polarisationsebene, mögen sie nun fest, flüssig oder gasförmig sein. In Gasen ist die Drehung zuerst von KUNDT und RÖNTGEN[3] aufgefunden worden, und zwar bei Schwefelkohlenstoffdampf, gasförmiger schwefliger Säure und Schwefelwasserstoffgas. Von besonderem Interesse sind natürlich die ferromagnetischen Substanzen, die bedauerlicherweise ihrer Undurchsichtigkeit wegen in der üblichen Weise dem Experimente nicht unterworfen werden konnten. In neuester Zeit ist es jedoch KUNDT[4] gelungen, durchsichtige Schichten von ihnen herzustellen und in ihnen die Drehung nachzuweisen (s. w. u.). Die Erscheinung ist im übrigen der natürlichen Drehung der Polarisationsebene bis auf einzelne Punkte so vollkommen analog, daß genau dieselben optischen Methoden wie dort zur Anwendung gelangen können und tatsächlich gelangt sind; es sei daher in

[1] Vgl. O. M. CORBINO, N. Cim. (4) **10**. 408. 1899, und A. RIGHI, Rend. Acc. Linc. (5) **8**. 325. 1899, wo frühere Beobachtungen von S. SHELDON (Shill. J. (3) **40**. 196. 1890) widerlegt werden. — [2] M. FARADAY, Exp. Res. **19**. 1845. — Exp. Unt. Bd. **2**. — [3] A. KUNDT und W. C. RÖNTGEN, Wied. Ann. **6**. S. 332. 1879. — [4] A. KUNDT, Wied. Ann. **23**. S. 228. 1884; **27**. S. 191. 1886.



dieser Hinsicht auf die Optik (Bd. 6), in bezug auf die besonderen Einrichtungen und Modifikationen bei Spezialuntersuchungen aber auf die unten zitierten Abhandlungen verwiesen.

Am einfachsten ist die Erscheinung natürlich für geradlinig polarisiertes Licht, das denn auch fast ausnahmslos benutzt worden ist; ganz ähnlich muß sie aber auch für elliptisch polarisiertes ausfallen, hier ist es eben die große Ellipsenachse, die gedreht wird. Daß endlich auch natürliches Licht in entsprechender Weise beeinflußt wird, hat SOHNCKE[1] in einer Arbeit, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, nachgewiesen.

Die Erscheinung tritt auf, gleichviel auf welche Weise der Körper magnetisiert wird. Man kann ihn entweder in die Nähe von Stahlmagneten oder in die Nähe von Elektromagneten bringen, man braucht ihn aber auch lediglich nur der Einwirkung des Erdmagnetismus[2] zu unterwerfen; statt das Feld, wie in diesem Falle, durch Magnete, kann man es auch durch eine vom Strom durchflossene Drahtspule oder endlich durch eine Spule erzeugen, durch welche man statische Elektrizität, z. B. von einer Leydener Batterie[3], sich entladen läßt. Die kräftigste Wirkung erhält man natürlich durch Elektromagnete, die denn auch meist benutzt werden; am geeignetsten ist dabei die ihnen durch RUHMKORFF gegebene Gestalt (S. 7), die man dadurch modifiziert, daß man die beiden Eisenkerne, welche mit den magnetisierenden Spulen umwunden sind, durchbohrt, so daß ein Lichtstrahl ungehindert die ganze Länge des Magneten durchlaufen kann (in Figur 2 ist diese Durchbohrung bereits ausgeführt). Die zu untersuchenden Substanzen bringt man dann zwischen die beiden Polflächen, den Polarisator verbindet man mit dem äußersten Ende des einen, den Analysator und seinen Drehkreis mit dem Ende des anderen Schenkels. Flüssigkeiten und Gase schließt man in Röhren ein und diese letzteren durch Glasplatten ab, muß dann aber berücksichtigen, daß diese Platten ebenfalls eine Drehung veranlassen. Zur Verdoppelung der Wirkung und um gewisse Fehlerquellen auszuschließen, vergleicht man meist nicht die Einstellung des Analysators vor und nach Herstellung des Feldes, sondern bei Erregung des Feldes in den beiden entgegengesetzten Richtungen. Um die Erscheinung in Fällen, wo sie sehr schwach ist, noch weiter zu verstärken, kann man nach FARADAY[4] ein Multiplikationsverfahren anwenden, indem man dem Lichte nur an einer Randstelle der vorderen Fläche der Substanz den Eintritt und nur an einer entgegengesetzten Randstelle der hinteren Fläche den Austritt erlaubt, so daß es gezwungen ist, wiederholt (10 bis 20 mal) in dem Körper hin- und herzugehen, ehe es austreten und sich weiter fortpflanzen kann; über die Berechtigung dieser Methode vergleiche man w. u.

Die Aufgabe, welche die in Rede stehende Erscheinung darbietet, ist eine sehr zusammengesetzte. Es ist zunächst der Sinn der Drehung (in Beziehung zur Richtung des Feldes) festzustellen, dann sind die Faktoren zu untersuchen, von denen die Drehung abhängt, und schließlich ist der Betrag der Drehung für die verschiedenen Körper und unter verschiedenen Umständen zu messen. Von jenen Faktoren sind die wichtigsten: die Dicke der vom Lichte durchlaufenen Schicht der Substanz, die Neigung, welche diese Richtung gegen die Richtung des magnetischen Feldes hat, die Stärke des magnetischen Feldes, die Wellenlänge des Lichts, um dessen Drehung es sich handelt, endlich die Temperatur, der Druck usw. Schließlich ist dann ein absolutes Maß für die erhaltenen Zahlen zu wählen und in diesem wenigstens *eine* der gefundenen Zahlen auszudrücken.

---

[1] L. SOHNCKE, Wied. Ann. **27**. S. 203. 1886. — [2] H. BECQUEREL, Compt. rend. **86**. S. 1075. 1878; **89**. S. 838. 1880. — [3] BICHAT und BLONDLOT, Compt. rend. **94**. S. 1590. 1882. — O. LODGE, Phil. Mag. (5) **27**. S. 339. 1889. — [4] M. FARADAY, Phil. Mag. (3) **29**. S. 153. 1846.

**Sinn der Drehung.** Die ersten Stoffe, die man untersuchte, zeigten sämtlich eine Drehung in demselben Sinne, nämlich in demjenigen Sinne, in welchem der Strom die Substanz umkreist, der das Feld erzeugt oder den man als felderzeugend substituieren könnte. Später fand sich aber, daß manche Substanzen entgegengesetzt drehen, so daß man die zuerst bezeichnete Drehung eine positive, die zuletzt genannte eine negative Drehung nannte, und es zeigte sich, daß diamagnetische Stoffe eine negative, paramagnetische eine positive Drehung besitzen. — Aber auch diese Regel bestätigt sich nicht allgemein, und so hat man denn vier Klassen von Körpern zu unterscheiden, je nachdem bei ihnen die Suszeptibilität $\varkappa$ positiv oder negativ und je nachdem bei ihnen die Drehung $\omega$ positiv oder negativ ist. Eine Übersicht über die wichtigsten Vertreter dieser vier Klassen gewährt die folgende, einer Arbeit von H. DU BOIS[1] entlehnte Tabelle; das Zeichen usw. bezieht sich auf ähnliche Stoffe:

| $\varkappa$ negativ | | $\varkappa$ positiv | |
|---|---|---|---|
| $\omega$ positiv (I) | $\omega$ negativ (II) | $\omega$ positiv (III) | $\omega$ negativ (IV) |
| Ferrocyankalium | Titanchlorid | Kobalt | Ferrosalze |
| Bleiborat usw. | | Nickel | Ferrisalze |
| Wasser usw. | | Eisen | Ferricyankalium |
| Wasserstoff usw. | | Sauerstoff | Chromsäure-Anhydrit |
| Die meisten festen, | | Stickoxyd | Kaliumbichromat |
| flüssigen und gas- | | Kobaltsalze | Kaliumchromat |
| förmigen Körper | | Nickelsalze | Cersalze |
| | | Mangansalze | Lantansalze |
| | | Cuprisalze | Didymsalze |

Die meisten Körper gehören, wie man sieht, der Gruppe I an, während von der Gruppe II das Titanchlorid der einzige bisher bekannte Vertreter ist. Die ferromagnetischen Stoffe und ihre Salze bieten ein sehr buntes Bild dar, die drei Metalle selbst gehören der Gruppe III an, ebenso die Salze von Nickel und Kobalt, von den Verbindungen des Eisens dagegen einige der Gruppe IV, eines der Gruppe I; man vergleiche hiermit das schon früher über den Para- oder Diamagnetismus dieser Salze Gesagte. Auch sei auf eine Vermutung KUNDTs hingewiesen, wonach wahrscheinlich Elemente stets positiv drehen.

In bezug auf den Sinn der Drehung besteht nun aber ein wichtiger Unterschied zwischen der magnetischen und der natürlichen Drehung. Die natürliche Drehung findet nämlich in einer bestimmten Substanz stets in demselben Sinne, vom Beobachter aus, statt, in bezug auf den absoluten Raum also bei, in dem einen oder anderen Sinne erfolgenden, Durchgange des Lichtes in entgegengesetztem Sinne. Die magnetische Drehung erfolgt dagegen, unabhängig von der Durchstrahlungsrichtung, stets in demselben Sinne, sie hängt nur von der Feldrichtung ab. Ein durch den Körper hin- und hergehender Strahl bringt also gar keine natürliche, dagegen die doppelte magnetische Drehung hervor. Ferner ergibt sich hieraus, daß, wenn man einen schon von Natur drehenden Körper in ein magnetisches Feld bringt, die magnetische Drehung sich je nach der Durchstrahlungs- und Feldrichtung zu der natürlichen addiert oder von ihr subtrahiert.

**Einfluß der Strecke.** Daß die Drehung proportional der Länge der durchstrahlten Schicht ist, ließ sich erwarten und ist wiederholt konstatiert worden. Fraglich einerseits, andererseits aber auch schwieriger festzustellen ist dieses Gesetz für jene ganz dünnen Schichten, in denen KUNDT und seine Nachfolger

[1] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. S. 160. 1888.

die ferromagnetischen Metalle anwenden mußten, um dem Lichte den Durchgang zu ermöglichen; schwierig, weil die Dicke der betreffenden Niederschlagsschichten (bei KUNDT bewegte sie sich zwischen 4 und 22 Milliontel cm) nicht durch Messung, sondern nur durch Wägung ermittelt werden kann, und weil sie überhaupt nicht an allen Stellen der Schicht die gleiche ist. Infolgedessen weichen die Werte der für die Längeneinheit umgerechneten Drehungen für Eisen (KUNDT) und für Nickel und Kobalt (DU BOIS) nicht unerheblich voneinander ab[1]. Da die Abweichungen aber ganz unregelmäßige sind und keinen Zusammenhang mit der Dicke der Schichten aufweisen, kann man auch hier schließen, daß die Drehung mit der Länge der durchstrahlten Schicht proportional ist.

**Schiefer Durchgang.** Es läßt sich voraussehen, daß, wenn das Licht die Substanz nicht in der Richtung der magnetischen Kraftlinien, sondern unter einem Winkel $\alpha$ mit dieser Richtung durchsetzt, die Drehung kleiner sein wird, und man wird auch von vornherein vermuten dürfen, daß, da hier von der Magnetisierung eben nur die in die Richtung des Strahls fallende Komponente in Betracht kommt, die Drehung mit $\cos\alpha$ proportional sein wird. VERDET[2] hat dies durch zahlreiche Versuche mit großer Genauigkeit bestätigt gefunden. Hieraus folgt schließlich, daß, wenn das Licht senkrecht zu den Kraftlinien hindurchgeht, überhaupt keine Drehung der Polarisationsebene stattfindet. Man vergleiche hierzu auch die Betrachtungen von CORNU[3].

**Einfluß der Intensität der Magnetisierung.** Von vornherein ist ferner anzunehmen, daß die Drehung desto stärker sein werde, je stärker die Substanz magnetisiert ist. Man suchte daher bald nach Entdeckung der Erscheinung die Größe der Drehung mit der magnetisierenden Kraft, also mit der Stärke des Feldes, in Beziehung zu setzen und fand, daß zwischen beiden Proportionalität stattfindet (VERDETsches Gesetz). Derartige Untersuchungen haben in exakter Weise zuerst G. WIEDEMANN[4] und VERDET[5] durchgeführt, jener für Magnetisierung durch eine Spule, dieser für die durch einen Elektromagneten, wobei dort die Stromstärke, hier außerdem auch der Abstand der Polflächen variiert wurde. Indessen zeigte sich doch in einigen Fällen, daß bei Steigerung des Feldes über eine gewisse Grenze hinaus die Drehung nicht mehr wesentlich zunahm, und es ist auch klar, daß sich das so verhalten muß. Denn die für die Drehung maßgebende Größe ist ja gar nicht die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$, sondern die durch sie erzeugte Intensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}$. Nun besteht für die schwach magnetischen Stoffe allerdings im allgemeinen Proportionalität zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$, aber es sind doch von verschiedenen Seiten Messungen bekannt gemacht worden, welche Abweichungen davon wahrscheinlich machen (S. 283 ff.); und völlig hinfällig wird jene Proportionalität für die ferromagnetischen Substanzen. So ist es denn nicht zu verwundern, daß KUNDT[6] für Eisen und im Anschlusse an ihn DU BOIS[7] für Kobalt und Nickel[8] Werte fanden, welche nur zu Anfang proportional, später aber langsamer wachsen als die Kraft. Dies zeigt die folgende, auf Eisen bezügliche Tabelle, in der $\mathfrak{H}_0$ die durch die Drehung in Glas bestimmte Feldstärke und $\Omega$ die Drehung ist:

| $\mathfrak{H}_0$ | $\Omega$ | $10^5 \Omega : \mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{H}_0$ | $\Omega$ | $10^5 \Omega : \mathfrak{H}_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4420 | 1,72° | 39 | 18500 | 4,45° | 24 |
| 8060 | 3,47° | 43 | 30100 | 4,36° | 14 |
| 14100 | 4,41° | 31 | | | |

[1] A. KUNDT, Wied. Ann. **27**. S. 191. 1886. — H. DU BOIS. Wied. Ann. **31**. S. 941. 1887. — [2] E. VERDET, Compt. rend. **39**. S. 548. 1854; Ann. Chim. Phys. (3) **43**. S. 37. 1854. — [3] CORNU und POTIER, Compt. rend. **102**. S. 385. 1886. — [4] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **82**. S. 215. 1851. — [5] E. VERDET, Ann. Chim. Phys. (3) **41**. S. 370. 1854. — [6] A. KUNDT, a. a. O. — [7] H. DU BOIS, Wied. Ann. **31**. 941. 1887. — [8] Wegen der sehr heiklen Herstellung dieser Schichten muß auf die Abhandlungen selbst verwiesen werden.

In derselben Weise wie hier nimmt auch in den DU BOISschen Tabellen für Nickel und Kobalt das Verhältnis $\Omega : \mathfrak{H}_0$ mit wachsender Kraft ab. Erinnert man sich nun daran, daß auch das Verhältnis $\mathfrak{J} : \mathfrak{H}_0$ bei größeren Kräften mit Steigerung derselben abnimmt, so wird man naturgemäß zu der Vermutung geführt, es möchte $\Omega$ mit $\mathfrak{J}$ proportional sein. Die Prüfung dieser Vermutung ist früher nicht möglich gewesen, weil man keine Methoden besaß, die Itensität der Magnetisierung unter so schwierigen Verhältnissen zu ermitteln. Das ferromagnetische Material kann nämlich nur in Form sehr dünner, der Dicke nach magnetisierter Platten verwendet werden, für welche besondere Versuche nicht vorliegen. Es ist dies gegenwärtig aber auch nicht nötig, da man $\varkappa$ für die betreffenden Stoffe durch die Versuche ROWLANDS und anderer als Funktion von $\mathfrak{H}$ kennt und hiernach $\mathfrak{J}$ auf Grund der Theorie der magnetischen Induktion berechnen kann, wenn man bedenkt, daß in der die Größen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{H}$ verbindenden Gleichung der Gestaltskoeffizient $\varepsilon$ den Wert $4\pi$ hat (vgl. S. 136). Auf diese Weise hat DU BOIS z. B. die folgenden Zahlen für $\mathfrak{J}$ erhalten und mit den Drehungen $\Omega$ zusammenstellen können:

Nickel

| $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{J}$ | $\Omega$ | $1000\,\Omega : \mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|
| 2160 | 172 | 12,6′ | 74 |
| 4100 | 326 | 18,7′ | 57 |
| 5550 | 436 | 23,0′ | 53 |
| 7290 | 488 | 24,9′ | 50 |
| 11600 | 492 | 27,8′ | 56 |
| 14600 | 492 | 28,7′ | 57 |
| 17100 | 493 | 29,3′ | 59 |

Kobalt

| $\mathfrak{H}_0$ | $\mathfrak{J}$ | $\Omega$ | $1000\,\Omega : \mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|
| 2030 | 161 | 17,7′ | 110 |
| 4570 | 365 | 37,3′ | 102 |
| 6720 | 532 | 45,2′ | 86 |
| 8620 | 671 | 65,0′ | 97 |
| 11300 | 830 | 77,5′ | 93 |
| 13700 | 864 | 89,4′ | 104 |
| 17100 | 871 | 88,3′ | 101 |

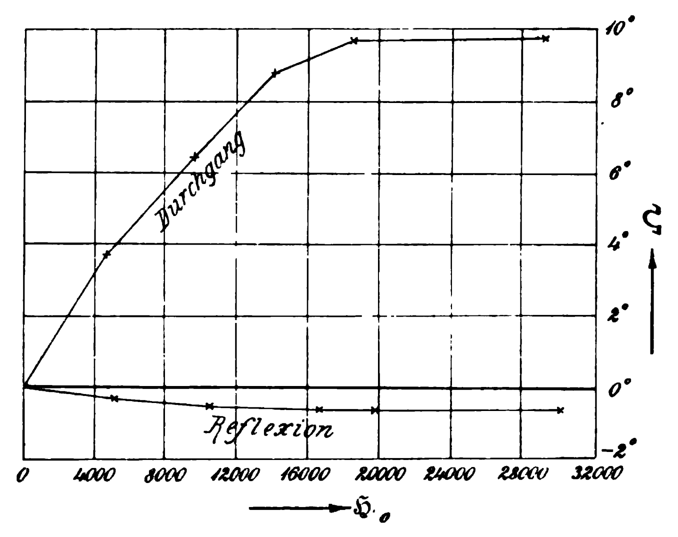
Die Zahlen weisen ziemlich erhebliche, bei der Schwierigkeit der Verhältnisse aber erklärliche Unregelmäßigkeiten auf, eine Abweichung von der durchschnittlichen Proportionalität läßt sich aber nicht erkennen. In Figur 162 ist durch die obere Kurve die Drehung als Funktion der Feldstärke für Eisen nach KUNDT veranschaulicht; von der unteren wird später die Rede sein.

Man muß hiernach das Gesetz, wonach die Drehung der Polarisationsebene der magnetisierenden Kraft proportional ist, wenn man es auch auf ferromagnetische Stoffe ausdehnen will, in folgende Form bringen: Die Drehung der Polarisationsebene ist der Intensität der Magnetisierung proportional. MAXWELL[1] hatte seiner Zeit die Abhängigkeit von der Kraft und von der Länge der durchstrahlten Schicht durch den gemeinsamen Satz ausgesprochen: Die Drehung ist proportional mit der Abnahme des magnetischen Potentials von der Eintritts- zur Austrittstelle des Lichts; man muß jetzt statt dessen sagen: Die Drehung

[1] J. C. MAXWELL. El. u. Magn. 2. S. 561.

ist proportional der Abnahme des Magnetisierungspotentials (über magnetisches Potential $V$ und Magnetisierungspotential $\Phi$ vgl. S. 17 und 61.

Nachträglich hat sich übrigens, wie es scheint, auch für eine schwach magnetische Substanz, nämlich Eisenchloridlösung, nachweisen lassen, daß die Drehung nicht wie das Feld, sondern wie die Magnetisierung ansteigt, also für starke Felder hinter diesen zurückbleibt, für schwache ihnen voraneilt (wenigstens für konzentrierte Lösungen). Man vergleiche hierüber die Arbeit von STSCHEGLAJEFF [1], aber auch die Einwände von DU BOIS [2]. Das Eisenchlorid ist also, wie hinsichtlich der konstanten oder variabeln Suszeptibilität (S. 283), so auch hinsichtlich




Figur 162.

der Drehung noch umstritten, und der Zusammenhaug beider Punkte ist einleuchtend.

**Maßeinheiten.** Auf Grund der bisher gemachten Feststellungen kann man nun an die Aufgabe herantreten, das Verhalten einer bestimmten Substanz in Hinsicht auf die magnetische Drehung durch eine diesem Stoffe charakteristische Konstante auszudrücken. In der ersten Zeit begnügte man sich damit, irgend eine Vergleichseinheit zu wählen, z. B. unter gleichen Umständen befindliches Wasser oder Schwefelkohlenstoff. Als man dann die Proportionalität mit der Strecke und der Kraft festgestellt zu haben glaubte, führte man den Faktor $\omega$ in der Gleichung ($l$ Länge der durchstrahlten Strecke, $V_1$ und $V_2$ magnetische Potentialwerte an der Eintritts- und Austrittsstelle)

$$\Omega = \omega l \mathfrak{H} = \omega (V_1 - V_2)$$

als charakteristische Größe ein und nennt sie seitdem VERDETsche Konstante. Inzwischen hat sich aber gezeigt, daß diese Größe für die ferromagnetischen Stoffe keine Konstante ist, daß es aber auch für sie eine charakteristische Konstante gibt, nämlich den Faktor $\psi$ in der Gleichung

$$\Omega = \psi l \mathfrak{J} = \psi (\Phi_1 - \Phi_2)$$

wo $\mathfrak{J}$ an die Stelle von $\mathfrak{H}$ gesetzt ist, bzw. wo die beiden $\Phi$ jetzt die Magnetisierungspotentiale sind. Zwischen $\omega$ und $\psi$ besteht offenbar die einfache Beziehung

[1] STSCHEGLAJEFF, Wied. Ann. **28.** S. 168. 1886. — [2] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35.** S. 157. 1888.

$$\psi = \frac{\omega}{\varkappa} \quad .$$

Die Größe $\psi$ heißt auf DU BOIS' Vorschlag KUNDTsche Konstante. Bei DU BOIS findet man auch Ausführungen, welche zeigen, daß für Gemenge, also z. B. Lösungen, $\psi$ keine einfache Bedeutung mehr hat. Beide Größen, $\omega$ resp. $\psi$ charakterisieren übrigens eine Substanz erst dann deutlich, wenn man hinzufügt, für welche Wellenlänge und für welche Temperatur sie gelten sollen, und erst dann vollständig, wenn man sie als Funktionen dieser beiden Einflüsse angibt.

Die VERDETsche — bzw. die KUNDTsche — Konstante bezieht sich wegen der in der Definitionsgleichung vorkommenden Größe $l$ auf die Längeneinheit, also, bei gleichem Querschnitt, auf die Volumeneinheit der Substanz. Statt dessen kann man, wie beim Magnetismus selbst, auch auf die Masse Bezug nehmen, indem man mit der Dichte dividiert; die so erhaltene Größe nennt man dann die „spezifische Drehung". Endlich kann man diese Größe noch mit dem Molekulargewicht der Substanz multiplizieren und erhält alsdann die „molekulare Drehung" und entsprechend, falls man noch einen Schritt weiter geht, die Atomdrehung. Man hat hiernach für die beiden neuen Größen $S$ und $M$, wenn $d$ die Dichte und $m$ das Molekulargewicht ist, die Beziehungen:

$$S = \frac{\omega}{d} \,, \quad M = S m = \frac{\omega m}{d} \quad .$$

Für Lösungen ist noch zu unterscheiden zwischen der Drehung der ganzen Lösung, derjenigen der gelösten Substanz (Salz usw.) und derjenigen des Lösungsmittels; nennt man die betreffenden spezifischen Drehungen $S$, $S_0$ und $s$, so hat man für den Fall additiven Verhaltens (s. w. u.) offenbar die Gleichung ($d$ Dichte der Lösung, $p$ Gramm Salz im ccm):

$$S = p \cdot S_0 + [d - p] \cdot s \,, \quad \text{also} \quad S_0 = \frac{1}{p}(S - [d - p] \cdot s) \quad .$$

Dies ist dann wieder noch mit $m$ zu multiplizieren, um $M$ zu erhalten. — In den meisten Fällen bezieht man alle diese Größen auf Wasser, d. h. auf die entsprechende Konstante (spezifische oder molekulare) des Wassers als Einheit; die letzte Formel wird dann für den Fall, daß das Lösungsmittel Wasser, also $s$ gleich 1 zu setzen ist, einfacher:

$$S_0 = \frac{1}{p}(S + p - d) \quad .$$

**Einfluß der Wellenlänge. Magnetische Rotationsdispersion.** Für verschiedene Farben ist, wie die natürliche Drehung, so auch die magnetische verschieden groß, und zwar nimmt sie mit abnehmender Wellenlänge stark zu. Nachdem dies schon FARADAY, WIEDEMANN[1] u. a. festgestellt hatten, wobei die farbige Auflösung entweder mit Hilfe von Spektralapparaten oder durch Einschaltung farbiger Absorptionskörper erzielt wurde, hat besonders VERDET[2] die Erscheinung sehr genau untersucht und für die wichtigsten FRAUNHOFERschen Linien folgende Zahlen erhalten, die auf die für die Linie $E$ geltenden Zahlen als Einheit bezogen sind und denen in der ersten Horizontalreihe die entsprechenden relativen Zahlen für das reziproke Quadrat der Wellenlänge $\lambda$ vorangestellt sind.

[1] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **82**. S. 215. 1851. — [2] E. VERDET, Ann. Chim. Phys. (3) **41**. S. 370. 1854.

| | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda^{-2}$ = | 0,64 | 0,80 | 1,00 | 1,18 | 1,50 |
| Destilliertes Wasser . . . | 0,63 | 0,79 | 1 | 1,19 | 1,56 |
| Chlorcalciumlösung . . . | 0,61 | 0,80 | 1 | 1,19 | 1,54 |
| Chlorzinklösung . . . . | 0,61 | 0,78 | 1 | 1,19 | 1,61 |
| Zinnchlorürlösung . . . . | — | 0,78 | 1 | 1,20 | 1,59 |
| Bittermantelöl . . . . . . | 0,61 | 0,78 | 1 | 1,21 | — |
| Anisöl . . . . . . . . . | 0,58 | 0,75 | 1 | 1,25 | — |
| Schwefelkohlenstoff . . . | 0,60 | 0,77 | 1 | 1,22 | 1,65 |
| Kreosot . . . . . . . . . | 0,60 | 0,76 | 1 | 1,23 | 1,70 |

Wie man sieht, variiert $\Omega$ etwas stärker als $\lambda^{-2}$, und zwar für verschiedene Flüssigkeiten in verschiedenem Maße. Bei einer späteren, noch genaueren Beobachtungsreihe fand dann VERDET[1] für Schwefelkohlenstoff und Kreosot folgende relative Zahlen für das Produkt $\Omega\lambda^2$, denen die betreffenden Brechungsexponenten $n$ beigefügt sind.

| | C | D | E | F | G | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega\lambda^2$ | 0,909 | 0,949 | 0,987 | 1,032 | 1,119 | Schwefelkohlenstoff |
| $n$ | 1,6147 | 1,6240 | 1,6386 | 1,6487 | 1,6728 | |
| $\Omega\lambda^2$ | 0,886 | 0,942 | 0,992 | 1,043 | 1,137 | Kreosot |
| $n$ | 1,5369 | 1,5420 | 1,548 | 1,5555 | 1,5678 | |

Das Produkt $\Omega\lambda^2$ ist also nicht konstant, sondern es wächst für diese beiden Substanzen mit abnehmender Wellenlänge noch recht beträchtlich, und zwar noch stärker als das Quadrat des Brechungsexponenten. H. BECQUEREL[2] hat dann gezeigt, daß die relativen Zahlen für die verschiedenen Wellenlängen zwischen den relativen Zahlen für $\lambda^{-2}$ und $\lambda^{-4}$ liegen, so daß man vielleicht, mit Rücksicht auf die bekannte Formel für den Brechungsexponenten als Funktion der Wellenlänge, allgemein $\Omega \sim a\lambda^{-2} + b\lambda^{-4}$ setzen könnte; für die diamagnetischen Stoffe würde dann vielfach $a$ groß gegen $b$, für manche magnetische $b$ groß gegen $a$ sein, ohne daß indessen darin ein Gesetz von größerer Allgemeinheit zu erblicken wäre.

Für ein DOLLONDsches Glas und für Wasser hat VAN SCHAIK[3], für letzteres auch SIERTSEMA[4], die Dispersion in weitem Bereiche geprüft und gefunden:

| | C | D | E | b | F | G | M | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Glas . . . . . . . . | 0,630 | 0,789 | 1 | 1,040 | 1,199 | 1,573 | 2,231 | 2,457 |
| Wasser (VAN SCHAIK) . . | 0,630 | 0,795 | 1 | — | 1,192 | 1,559 | 2,172 | 2,389 |
| Wasser (SIERTSEMA) . . | 0,615 | 0,786 | 1 | — | 1,188 | 1,544 | — | — |

Die beiden letzten Reihen stimmen unter sich und mit VERDET (v. S.) gut überein.

Den Schwefelkohlenstoff hat auch MOREAU[5] untersucht, und zwar für infrarote Strahlen; dabei fand er zwischen den Wellenlängen 0,792 und 1,419 $\mu$ eine

[1] E. VERDET, Ann. Chim. Phys. (3) **69**. 1. 1863. — [2] H. BECQUEREL, namentlich Pogg. Ann. Erg. **7**. 171. — C. R. **83**. 251. 1876. — Ann. chim. phys. (5). **12**. 5. 1877. — C. R. **85**. 1227. 1877. — [3] W. C. L. VAN SCHAIK, Arch. Néerl. **17**. 373. 1882. — [4] L. H. SIERTSEMA, Arch. Néerl. (2) **6**. 825. Comm. Leiden Nr. 73. 1901. — [5] G. MOREAU, Ann. Chim. Phys. **30**. 227 u. 433. 1893. — Inaug.-Diss. Paris 1893.

Abnahme der Drehung im Verhältnis von 0,52 zu 0,32, also die Änderung nur knapp umgekehrt wie die Wellenlänge.

Für Quarz liegt eine Untersuchung von BOREL[1] vor; es wurden zwei gleich dicke Quarze benutzt, von denen der eine rechts-, der andere linksdrehend war; als Licht dienten Natrium- ($D$-Linie) und Cadmium-Strahlen. Es fanden sich folgende Werte:

| Strahlen | Wellenlänge | $\Omega$ | $\lambda^2\Omega/10$ |
|---|---|---|---|
| $Cd_1$ | 643,9 | 0,01385 | 57 |
| $D$ | 589 | 0,01684 | 58 |
| $Cd_4$ | 508,6 | 0,02285 | 59 |
| $Cd_5$ | 480 | 0,02605 | 60 |
| $Cd_6$ | 467,9 | 0,02785 | 60 |
| $Cd_9$ | 360,9 | 0,04684 | 61 |
| $Cd_{18}$ | 257,3 | 0,10725 | 70 |
| $Cd_{25}$ | 219,4 | 0,16032 | 77 |

Wie man sieht, nimmt die Drehung anfangs ziemlich genau zu, wie das Quadrat der Wellenlänge abnimmt; für kleine Wellenlängen wird aber die Zunahme noch viel stärker.

Verflüssigte Gase hat u. a. SIERTSEMA[2] untersucht, und zwar bei atmosphärischem Druck. Für Chlormethyl ergaben sich z. B. folgende Relativzahlen:

| $\lambda =$ 420 | 446 | 458 | 510 | 536 | 554 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega =$ 2,00 | 1,81 | 1,72 | 1,36 | 1,22 | 1,14 |
| $\lambda =$ 575 | 589 | 604 | 616 | 643 | 659 |
| $\Omega =$ 1,06 | 1,00 | 0,95 | 0,90 | 0,82 | 0,79 |

Das Produkt $\lambda^2\Omega$ ist, wie man sieht, nahezu konstant.

Sehr ausgedehnte Arbeiten über die Gase liegen namentlich von SIERTSEMA[3] vor. Er maß die Drehung in Luft, Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Kohlensäure und Stickoxydul zwischen weiten Grenzen der Wellenlänge und versuchte die Darstellung durch verschiedene empirische Formeln, nämlich

$$\text{I.}\quad \Omega = \frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_3}{\lambda^3} = \frac{c_1}{\lambda}\left(1 + \frac{d_1}{\lambda^2}\right) \quad ,$$

$$\text{II.}\quad \Omega = \frac{c_2}{\lambda^2} + \frac{c_4}{\lambda^4}\left(+ \frac{c_6}{\lambda^6}\right) = \frac{c_2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{d_2}{\lambda^2}\right) \quad ,$$

$$\text{III.}\quad \Omega = a + \frac{b}{\lambda^2} = a\left(1 + \frac{d_3}{\lambda^2}\right) \quad ;$$

die beiden ersten haben den Vorzug, sich theoretisch mehr oder weniger (s. w. u.) begründen zu lassen, die dritte gibt aber in fast allen Fällen bessere Übereinstimmung. Im folgenden sind die Konstanten der Formeln zusammengestellt (Drehungen in milliontel Minuten, $\lambda$ in tausendtel Millimetern):

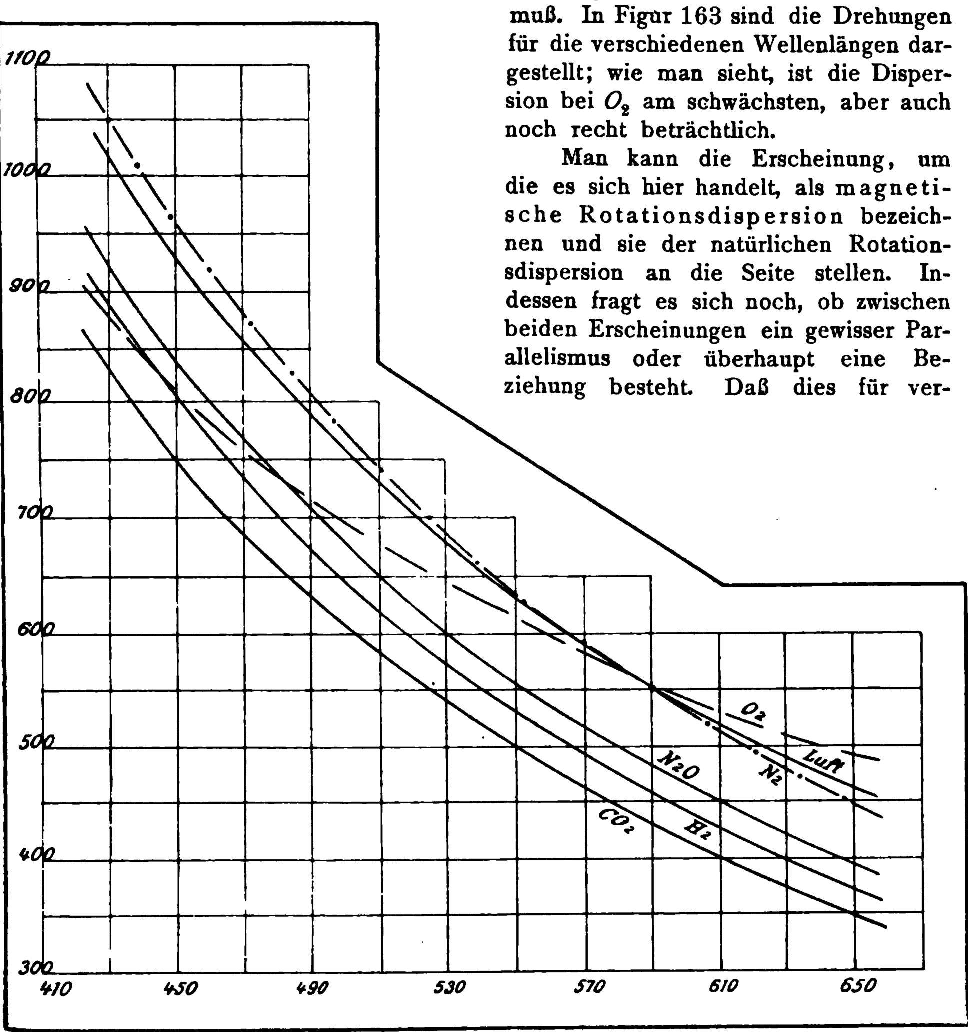
---

[1] A. BOREL, C. R. **128**. 1095. 1899. — In einer neueren Arbeit (Arch. Gen. [4] **16**. 24 u. 157. 1903) sind die Zahlen nur wenig abweichend. — [2] L. H. SIERTSEMA, Versl. Akad. Wet. 1900/01. 57; 1902/03. 250. Comm. Leiden Nr. 57 u. 80. — [3] L. H. SIERTSEMA, Zitt. Akad. Wet. Amst. 1893/94. — Versl. Akad. Wet. 1894/95. 230. — Zitt. Akad. Wet. 1895/96. 29 u. 317. — Comm. Lab. Leiden, Nr. 24 u. 31. — Arch. Néerl. (2) **2**. 291. 1898. — Comm. Lab. Leiden, Suppl. **1**. — Ebenda Nr. 46. — Zitt. Akad. Wet. 1898/99. 289.

| Gas | $c_1$ | $d_1$ | $c_2$ | $d_2$ | $a$ | $d_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sauerstoff . . . | 272,2 | 0,0704 | 296,7 | — | 191,9 | 0,657 |
| Luft . . . . . . | 191,5 | 0,241 | 216,3 | — | 15,6 | 11,89 |
| Stickstoff . . . . | 171,2 | 0,309 | 183,6 | 0,0124 | −34,7 | −5,82 |
| Wasserstoff . . . | 138,8 | 0,325 | 151,5 | 0,0157 | −36,5 | −4,68 |
| Kohlensäure . . . | 2,7 | 0,310 | 2,89 | 0,0116 | −55,6 | −5,72 |
| Stickoxydul . . . | 75,4 | 0,303 | 81,26 | 0,0101 | −14,0 | −6,29 |

Man sieht übrigens, wie kolossal verschieden diese Konstanten, besonders in der dritten Formel sind, und wie labil infolgedessen deren Charakter sein muß. In Figur 163 sind die Drehungen für die verschiedenen Wellenlängen dargestellt; wie man sieht, ist die Dispersion bei $O_2$ am schwächsten, aber auch noch recht beträchtlich.

Man kann die Erscheinung, um die es sich hier handelt, als magnetische Rotationsdispersion bezeichnen und sie der natürlichen Rotationsdispersion an die Seite stellen. Indessen fragt es sich noch, ob zwischen beiden Erscheinungen ein gewisser Parallelismus oder überhaupt eine Beziehung besteht. Daß dies für verschiedene Stoffe nicht der Fall ist, folgt schon daraus, daß es Stoffe gibt, die natürliche Drehung überhaupt nicht, dagegen eine sehr starke magnetische aufweisen; für solche kann man also auch die Dispersionen nicht vergleichen. Dagegen hat G. WIEDEMANN[1] das Gesetz aufgestellt, daß der Gang der



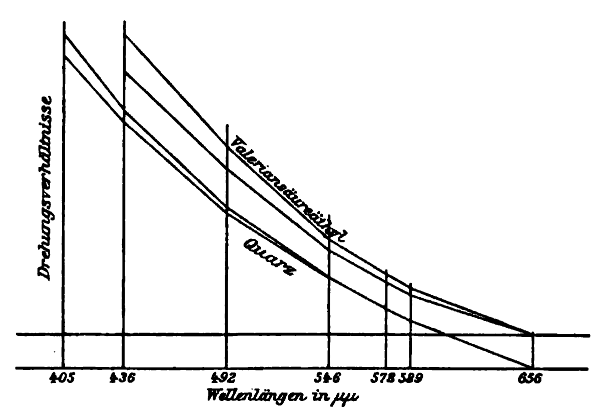
Figur 163.

[1] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. 82. 215. 1851.

Dispersion für einen und denselben Stoff in beiden Fällen der gleiche sei, daß also das Verhältnis der natürlichen (*n*) zur magnetischen (*m*) Drechung für alle Farben dasselbe sei. Dieses Gesetz ist neuerdings von DISCH[1] geprüft worden, und zwar an Terpentinöl, Zitronenöl, Paraffinöl, Valeriansäureäthyl, Diäthyltatrat und Quarz. Für zwei dieser Substanzen seien hier die Zahlen wiedergegeben:

| $\lambda$ | $n$ | $m$ | $n:m$ |
|---|---|---|---|
| | Valeriansäureäthyl | | |
| 656 | 13,367 | 3,825 | 3,495 |
| 589 | 16,814 | 4,462 | 3,768 |
| 546 | 20,045 | 5,278 | 3,798 |
| 492 | 25,717 | 6,677 | 3,852 |
| 436 | 34,393 | 8,671 | 3,966 |
| | Quarz | | |
| 656 | 17,313 | 2,933 | 5,903 |
| 589 | 21,720 | 3,668 | 5,921 |
| 578 | 22,632 | 3,817 | 5,929 |
| 546 | 25,532 | 4,295 | 5,945 |
| 492 | 31,967 | 5,340 | 5,986 |
| 436 | 41,548 | 6,792 | 6,117 |
| 405 | 48,930 | 7,838 | 6,243 |

Wie man sieht, ist das Verhältnis $n:m$ in erster Annäherung konstant, in zweiter steigt es etwas; in der Figur 164 fallen deshalb die beiden Kurven für einen und denselben Stoff (für $\lambda = 656$ sind die Ordinaten identifiziert) nicht völlig zusammen. Indessen wird für Quarz die Übereinstimmung eine fast vollständige, wenn man für die magnetischen Drehungen die Mittel aus den Zahlen von DISCH und BOREL (s. o.) nimmt; bei den anderen Stoffen kommt vielleicht ihr nicht einheitlicher physikalisch-chemischer Charakter störend in Betracht; und so kann man im großen ganzen das WIEDEMANNsche Gesetz als bestätigt ansehen.



Figur 164.

Auch sonst ist über diese und ähnliche Beziehungen — besonders auch zur prismatischen Dispersion — neuerdings sehr viel einzelnes Material beigebracht worden; es kann aber hier nicht darauf eingegangen werden.

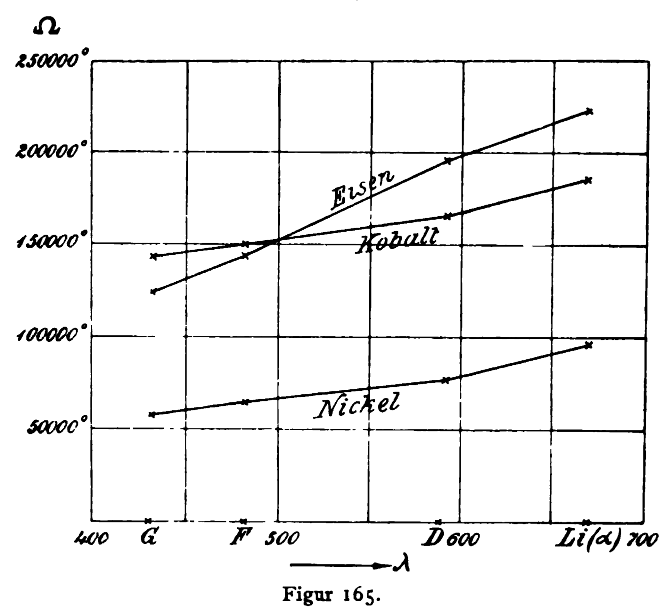
**Anomale Rotationsdispersion.** In normalen Fällen wächst mit abnehmender Wellenlänge die prismatische Ablenkung und die natürliche Drehung; ganz entsprechend verhält sich, wie wir gesehen haben, die magnetische Drehung. Wie aber auf den beiden genannten Gebieten Anomalien in dieser Hinsicht vorkommen, so ist das auch hier der Fall, d. h. auch bei der magnetischen Drehung der Polarisationsebene gibt es anomale Dispersion. Einzelne solche Beobach-

[1] J. DISCH, Drude Ann. **12**. 1153. 1903. — Inaug.-Diss. Freiburg 1903.

tungen sind schon vor längerer Zeit gemacht worden; so hat z. B. VERDET für die Weinsäure die Relativzahlen

| Spektrallinien | *C* | *D* | *F* | *G* |
|---|---|---|---|---|
| Drehungen | 85 | 100 | 101 | 89 |

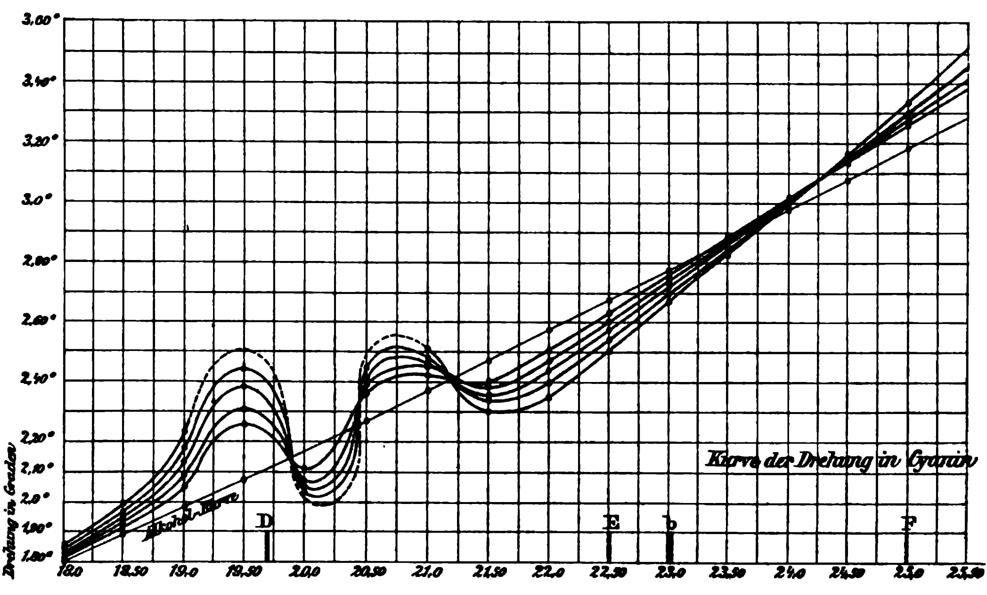
festgestellt, die zeigen, daß die Dispersion hier zwischen den Linien *F* und *G* nicht mehr zu-, sondern stark abnimmt, also anomal ist. Tiefer in die Frage eingedrungen ist man jedoch erst, seit man den innigen Zusammenhang erkannt hat, der auf allen in Rede stehenden Gebieten zwischen der anomalen Dispersion und der Absorption besteht, indem nämlich die Anomalie innerhalb des Absorptionsstreifens und in seiner Nachbarschaft auftritt; bei mehreren Streifen wird sich das mehrfach wiederholen, bei Stoffen, die im ganzen Bereiche der sichtbaren Strahlen absorbieren, wird auch die Anomalie eine durchgängige sein. Diese Forderungen haben sich in jeder Hinsicht bestätigt. So hat zuerst KUNDT[1] beim Eisen festgestellt, daß die roten Strahlen erheblich stärker gedreht werden als die blauen; und dieses Resultat wurde dann von LOBACH[2] dahin erweitert, daß bei allen drei ferromagnetischen Metallen die Dispersion längs des ganzen optischen Spektrums anomal ist. In Figur 165 ist dies graphisch dargestellt; man sieht zugleich, daß der Betrag der Dispersion im Verhältnis zur Drehung bei Eisen am größten, bei Kobalt am kleinsten ist.



Figur 165.

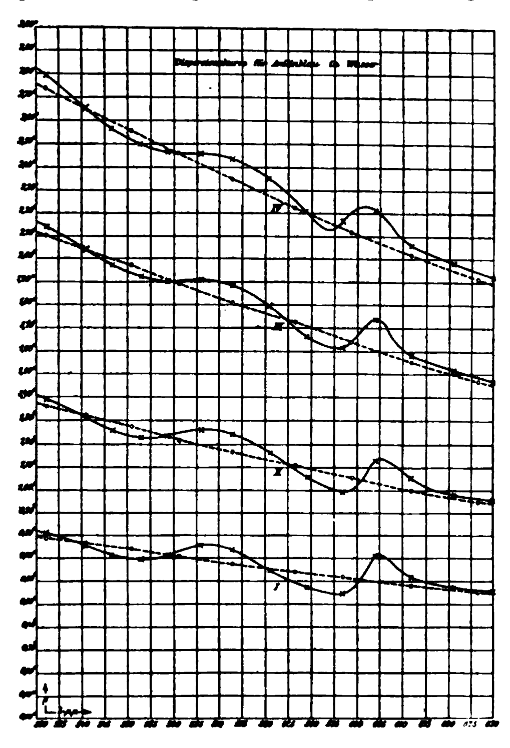
Für anomal dispergierende Lösungen liegt, außer vorangegangenen Beobachtungen von COTTON[3], eine Reihe sehr interessanter Arbeiten von SCHMAUSS[4] vor. Die erste von ihnen bezieht sich auf die diamagnetischen Lösungen von Fuchsin, Cyanin, Naphthalin und Eosin, die zweite auf die ebenfalls diamagnetischen Lösungen von Lackmus und Anilinblau sowie auf Didymglas, die dritte auf die diamagnetischen Stoffe: flüssiger Sauerstoff, Neodym-, Praseodym- und Erbiumnitrat-Lösungen: die Messungen erstrecken sich über einen weiten Wellenlängenbereich und sind in der Nähe der Absorptionsgebiete besonders zahlreich; außerdem liegen ihnen mehrere verschiedene Feldstärken zugrunde. Von einer Wiedergabe des sehr reichen Zahlenmaterials muß hier abgesehen werden; zur genügenden Veranschaulichung werden die Figuren 166 und 167 dienen, von denen jene sich auf Cyaninlösungen verschiedener Konzentration (zum Vergleich ist die Alkoholkurve beigefügt), diese auf Anilinblau in Wasser bei verschiedenen Feldstärken bezieht. Wie man sieht, nimmt die Drehung gegen das Absorptionsgebiet hin sehr rasch zu, um nach demselben wieder von kleineren Werten zu

[1] A. KUNDT, Wied. Ann. **23**. 237. 1884. — [2] W. LOBACH, Wied. Ann. **39**. 346. 1890. — Inaug.-Diss. Berlin 1890. — [3] A. COTTON, Ecl. él. **8**. 162 u. 199. 1896. — [4] A. SCHMAUSS, Inaug.-Diss. München 1900. — Drude Ann. **2**. 280. 1900; **8**. 842. 1902; **10**. 853. 1903.




Figur 166.

größeren zu steigen; der Wendepunkt liegt im Absorptionsgebiet; mit zunehmender Konzentration wächst auch die Anomalie, in den Inflexionspunkten schneiden sich die den verschiedenen Konzentrationen entsprechenden Kurven. Besonders merkwürdig, aber theoretisch verständlich (s. w. u.) ist die Tatsache, daß der Anstieg der maximalen Drehung innerhalb eines Absorptionsstreifens mit zunehmender Feldstärke kaum anders wird; die negative Anomalie wird sogar mit wachsender Feldstärke schwächer. Ferner ergibt sich, besonders aus den Messungen am Didymglas, daß die Anomalie um so beträchtlicher wird, je schmaler und schärfer das Absorptionsgebiet ist.



Figur 167.

Auch SIERTSEMA[1] hat die Frage bearbeitet, und zwar für das negativ drehende rote Blutlaugensalz, dessen Absorptionsgebiet etwa bei 490 beginnt. Für drei verschiedene Konzentrationen ergaben sich folgende Drehungen des Salzes für sich (negatives Zeichen weggelassen, Wasser für Na-Licht als Einheit):

[1] L. H. SIERTSEMA, Arch. Néerl. (5) **2**. 447; Comm. Leiden, Nr. 62. 1900. — Versl. Akad. Wet. Amsterd. 1901/2. 400; Comm. Leiden, Nr. 76. — Man vergleiche auch eine Notiz von H. DU BOIS, Drude Ann. **7**. 944. 1902, sowie eine Mitteilung (mit negativem Ergebnisse) von F. J. BATES, Drude Ann. **12**. 1901. 1903.

| 1/2 % | | 1 % | | 2 % | |
|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 21,2 | 512 | 17,7 | 507 | 19,3 |
| 541 | 14,6 | 517 | 14,6 | 520 | 16,2 |
| 606 | 7,1 | 542 | 11,8 | 531 | 14,1 |
| 647 | 7,0 | 566 | 9,1 | 550 | 11,6 |
| | | 611 | 7,3 | 572 | 9,2 |
| | | | | 598 | 7,2 |

Auch hier ist die Steigerung bei Annäherung an das Absorptionsgebiet sehr ausgeprägt.

Man wird daher erwarten dürfen, daß bei ganz scharf charakterisierter Absorption, wie sie einer ganz scharf charakterisierten Emission entspricht, kolossale Drehungen eintreten werden. Das ist nun nach einem Versuche von Macaluso und Corbino[1], dem sich dann weitere von H. Becquerel[2] und von Corbino[3] allein anschlossen, tatsächlich der Fall. Wenn man eine Kochsalzflamme zwischen kräftige Magnetpole bringt und Licht, das einen Nikol und die Flamme durchsetzt hat, durch einen Analysator auslöscht, so sieht man in dem durch ein Rowlandgitter erzeugten Spektrum außer den beiden schwachen Na-Linien an jeder Seite derselben noch ein sehr helles Band, offenbar herrührend von durch das Feld um 90° gedrehtem Licht; die im Natriumdampf im übrigen sehr geringe Drehung steigt also am Rande des Absorptionsgebietes außerordentlich an. Noch größer müßte die Drehung natürlich zwischen den beiden Natriumlinien selbst sein; wenn hier Corbino eine ganz mäßige Drehung zu finden glaubte, so liegt das, wie Voigt[4] gezeigt hat, an einer unrichtigen Deutung des Versuchs; im Gegenteil, der Versuch fügt sich dem zu erwartenden völlig ein[5].

Die weiteren an die genannten anschließenden Versuche und Erörterungen stehen dann in so engem Zusammenhange mit dem Zeemanschen Phänomen bzw. mit dessen Umkehrung, daß hier nicht weiter darauf eingegangen werden kann, vielmehr auf den betreffenden Abschnitt der Optik verwiesen werden muß. Übrigens wird auf verwandte Erscheinungen gleich noch (siehe Magnetische Doppelbrechung) zurückgekommen werden.

**Einfluß der Temperatur.** Die älteren Versuche von Matteucci, Lüdtge, De la Rive u. a. ergaben teils annähernde Konstanz, teils Zunahme, teils Abnahme der Drehung mit steigender Temperatur. Offenbar hat man damals noch nicht beachtet, daß das Problem kein einfaches ist, insofern nämlich mit steigender Temperatur auch die Dichte des Körpers, und vielleicht unter Umständen sogar stärker als die Drehung sich ändert; das Ergebnis wird also ganz verschieden sein können, je nachdem man die Drehung pro Volumeneinheit (Verdetsche Konstante) oder die spezifische Drehung ermittelt.

Sorgfältige Versuche mit Berücksichtigung dieser Erwägungen hat für Glassorten insbesondere Bichat[6] ausgeführt; für Flintglas und gewöhnliches Glas (eine allerdings etwas vage Definition) fand er:

---

[1] D. Macaluso und O. M. Corbino, C. R. **127**. 548. 1898. — C. R. **127**. 951. 1898. — N. Cim. (4) **8**. 257. — N. Cim. (4) **9**. 381. 1899. — Rend. Acc. Linc. (5) **7**. 292. 1898. — Rend. Acc. Linc. (5) **8**. 38. 1899. — Rend. Acc. Linc. (5) **8**. 116. 1899. — N. Cim. (4) **9**. 384. 1899. — [2] H. Becquerel, C. R. **127**. 647 u. 899. 1898. — C. R. **127**. 953. 1898. — [3] O. M. Corbino, Rend. Acc. Linc. **10**. 137. 1901. — N. Cim. (5) **3**. 1. 1902. — [4] W. Voigt, Drude Ann. **6**. 790. 1901. — **8**. 872. 1902. — [5] Man vergleiche auch J. J. Hallo, Inaug.-Diss. Amsterdam 1902, sowie P. Zeeman, versl. Akad. Wet. 1902/03. 6. — [6] E. Bichat, Ann. Ec. norm. **2**. S. 292. 1873.

| Flintglas | | gewöhnliches Glas | |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\Omega$ | $t$ | $\Omega$ |
| 14° | 90′ | 13 | 45′ |
| 98° | 86′ | 80 | 41′ |
| 140° | 84′ | 100 | 39′ |
| | | 150 | 38′ |

woraus bei Vergleichung mit den Dichten folgt, daß die Drehung schneller als die Dichte abnimmt. Bei sehr hohen Temperaturen (500°) ist jedoch die Drehung nach JOUBERT[1] wieder größer als bei gewöhnlicher Temperatur, und zwar um ungefähr 10%.

Was die Flüssigkeiten betrifft, so nimmt auch hier die Drehung mit steigender Temperatur meist ab. Genauer untersucht sind besonders Wasser und Schwefelkohlenstoff. Nach BICHAT beträgt die Abnahme bei Wasser 4,3% zwischen 10 und 60°, bei Zinnchlorid 19% zwischen 0 und 115°, bei Schwefelkohlenstoff 12% zwischen 0 und 48°. Indessen ist die Abnahme nicht gleichförmig, vielmehr muß man eine quadratische Formel anwenden, die für Schwefelkohlenstoff nach BICHAT

$$\Omega_t = \Omega_0 (1 - 0{,}00104\, t - 0{,}000014\, t^2)$$

lautet; dabei bleibt die Dispersion im wesentlichen ungeändert.

In teilweise erheblichem Widerspruche hiermit stehen neuere Versuche von RODGER und WATSON[2]. Es wurde vollkommen monochromatisches Natriumlicht verwendet, die Temperatur wurde von 0 bis zum Siedepunkt getrieben. Für sehr reinen Schwefelkohlenstoff ergab sich, identisch für Material aus verschiedenen Bezugsquellen:

$$\Omega_t = 0{,}04347 - 0{,}0000737\, t \quad ,$$

also gleichförmige Abnahme mit steigender Temperatur; auch für andere organische Flüssigkeiten erwies sich die Abnahme als gleichförmig. Verwickelter liegen die Verhältnisse bei Wasser, offenbar im Zusammenhange mit dessen abnormen Ausdehnungseigenschaften. Es ergab sich zunächst die Formel:

$$\Omega_t = 0{,}01311 - 0{,}0000004\, t - 0{,}00000004\, t^2 \quad ;$$

bildet man dagegen das Verhältnis Drehung durch Dichte, so erhält man bis 20° die konstante Zahl 0,01312, die dann bis 100° langsam auf 0,01322 steigt[3]. Bei Schwefelkohlenstoff ist dieselbe Zahl bei

| 0° | 10° | 20° | 30° | 40° |
|---|---|---|---|---|
| 0,03362 | 0,03344 | 0,003325 | 0,03307 | 0,03288 |

Man kann also in erster Annäherung sagen, daß der spezifische Drehungskoeffizient von der Temperatur unabhängig ist, und in zweiter, daß er für Wasser ganz schwach steigt, für Schwefelkohlenstoff etwas stärker abnimmt.

Für die ferromagnetischen Stoffe hat HIRSCH[4] den Einfluß der Temperatur studiert, indessen gefunden, daß hier für kleine und mäßige Felder die Drehung — als Funktion der Feldstärke — unabhängig von der Temperatur ist; (die Änderungen sind zu vernachlässigen). Für starke Felder ist sie es freilich nicht; erwägt man indeß, daß auch die dem Felde entsprechende Magnetisierung von der Temperatur abhängt, so kann man mit Wahrscheinlichkeit schließen, daß die Drehung als Funktion der Intensität der Magnetisierung überhaupt unabhängig von der Temperatur ist.

[1] J. JOUBERT, Compt. rend. **87**. S. 984. 1878. — [2] J. W. RODGER u. W. WATSON, Proc. R. Soc. **58**. 234. 1895. — Trans. R. Soc. 186 A, 621. 1895. — [3] Auch W. H. PERKIN findet eine Zunahme für Wasser. — [4] E. HIRSCH, Wied. Ann. **48**. S. 446. 1893.

**Drehung bei gleichzeitiger Doppelbrechung.** Die Drehung der Polarisationsebene erfährt eine Änderung bei gleichzeitig auftretender Doppelbrechung. WERTHEIM[1] und LÜDTGE[2] haben dies zuerst nachgewiesen, indem sie bei Anwendung eines Kristalls die Hauptachse mehr und mehr neigten, bei Anwendung isotroper Substanzen eine allmählich wachsende Zug- und Druckspannung erzeugten. In beiden Fällen nahm mit zunehmender Doppelbrechung die Drehung erheblich ab, so jedoch, daß bei einem Gangunterschiede von $\lambda/2$ WERTHEIM gar keine Drehung, LÜDTGE dagegen immer noch die Hälfte der ursprünglichen Drehung konstatierte. Im Kalkspat findet nach CHAUVIN[3] ähnliches statt. Eine sehr exakte Untersuchung hat WEDDING[4] mit Flintglas nnd Crownglas durchgeführt und gefunden, daß die Drehung mit zunehmendem Gangunterschied abnimmt, bei einem solchen von $\lambda/2$ null, dann negativ und bei $\lambda$ wieder positiv wird; er hat dann dieses Ergebnis mit einer von GOUY[5] aufgestellten und von O. WIENER[6] in anderer Weise entwickelten Theorie verglichen und sie durchaus bestätigt gefunden. Es sei hiermit gleichzeitig auf die genannte Theorie sowie auf eine verwandte Arbeit von CORNU und POTIER[7] aufmerksam gemacht, da der Raum verbietet, auf sie zurückzukommen.

**Drehung durch remanenten Magnetismus.** Die Frage, ob Substanzen durch Magnetisierung dauernd optisch aktiv gemacht werden können, mit anderen Worten, ob die in ihnen nach der Entfernung aus dem Felde zurückbleibende Magnetisierung eine Drehung der Polaritationsebene hervorrufen könne, muß bis jetzt verneint werden. Bei schwach magnetischen Substanzen ist dies sehr natürlich, da in ihnen remanenter Magnetismus überhaupt noch nicht mit Sicherheit konstatiert worden ist. Daß, wie DU BOIS festgestellt hat, in Eisen, Nickel und Kobalt die Verhältnisse ebenso liegen, hat vermutlich seinen Grund darin, daß bei der Form äußerst dünner Platten, in welcher man diese Substanzen anwenden muß, die entmagnetisierende Kraft sehr groß und der remanente Magnetismus folglich sehr klein ist.

**Beziehung zur physikalischen und chemischen Konstitution.** Für Stoffe, die physikalisch oder chemisch zusammengesetzt sind, also für Lösungen, Salze und Verbindungen erhebt sich die Frage, ob zwischen der Drehung dieses Stoffes und denen seiner Bestandteile eine Beziehung besteht, und ob diese Beziehung etwa einfach dahin geht, daß sich die einzelnen Drehungen additiv zusammensetzen; das Drehungsvermögen wäre in diesem Falle eine additive, im anderen eine konstitutive Eigenschaft der Körper.

Für die von ihm untersuchten Lösungen von Salzen hatte VERDET[8] nachgewiesen, daß die Drehung gleich der Summe der Drehungen des Salzes und des Lösungsmittels, also z. B. des Wassers ist. Wässerige Lösungen positiv drehender Salze drehen also stets positiv, dagegen hängt bei negativen Salzen der Sinn der Drehung in der wässerigen Lösung davon ab, ob der Einfluß des Salzes oder der des Wassers überwiegt, bei einem und demselben Salze also unter Umständen von der Konzentration. Ein Beispiel hierfür bietet Eisenchlorid, das bei schwacher Konzentration positiv, bei starker negativ dreht, und zwar bei besonders starker Konzentration etwa sechsmal so stark wie Wasser. Die Verhältnisse sind also hier ganz analog den auf S. 274 für den Magnetismus von Lösungen dargestellten, und die Analogie geht so weit, daß man, wie DU BOIS[9] gezeigt hat, Lösungen herstellen kann, welche überhaupt nicht drehen, z. B. von Eisenchlorid, Manganchlorür und Cerchlorid. Dabei findet aber keine Übereinstimmung

---

[1] W. WERTHEIM, Pogg. Ann. **86**. S. 321. 1852. — [2] R. LÜDTGE, Pogg. Ann. **137**. S. 271. 1869. — [3] CHAUVIN, Compt. rend. **102**. S. 972. 1886 u. **108**, S. 1097. 1889. — [4] W. WEDDING, Wied. Ann. **35**. S. 25. 1888. — [5] GOUY, J. d. Phys. **4**. S. 149. 1885. — [6] O. WIENER, Wied. Ann. **35**. S. 1. 1888. — [7] CORNU u. POTIER, Compt. rend. **102**. S. 385. 1886. — [8] E. VERDET, Compt. rend. **43**. S. 529. 1856; **44**. S. 1209. 1857; Ann. Chim. Phys. (3) **52**. S. 129. 1858; Pogg. Ann. **100**. S. 172. — [9] H. DU BOIS, Wied. Ann. **35**. S. 165. 1888.

zwischen beiden Eigenschaften statt, d. h. die unmagnetisierbare Lösung ist nicht auch optisch inaktiv und umgekehrt. Eisenchlorid ist z. B. in allen in Betracht kommenden Konzentrationen magnetisch, seine Drehung geht aber bei einer bestimmten Konzentration durch null hindurch; umgekehrt geht die Suszeptibilität von Manganchlorür bei einer bestimmten Konzentration durch null hindurch, während seine Drehung stets positiv bleibt. Bei Cerchlorid endlich finden beide Übergänge statt, aber für die Suszeptibilität tritt der Zeichenwechsel bei einer Dichte von 1,0748 (S. 275), für die Drehung dagegen erst bei einer Dichte von 1,2697 (für rotes Licht) ein.

Indessen liegen die Dinge, wie die Gesamtheit der zahlreichen neueren Untersuchungen, lehrt, doch bei weitem nicht so einfach, wie man früher annahm; neben der Additivität spielt auch die Konstitutivität eine wichtige Rolle. In bezug auf das Detail dieser Fragen sei auf die ausgedehnte Literatur verwiesen, namentlich auf die Arbeiten von H. BECQUEREL, QUINCKE, HINRICHS, PERKIN, JAHN, WACHSMUTH, PICKERING, SCHÖNROCK, HUMBURG, OPPENHEIMER, FORCHHEIMER[1]; hier können nur einige Punkte herausgehoben werden.

Wenn sich Lösungen additiv verhalten, so wird man das auch so aussprechen können, daß die spezifische Drehung der gelösten Substanz, aus der der Lösung berechnet, unabhängig ist von der Konzentration. Das ist nun durchaus nicht immer der Fall, im Gegenteil, mit steigender Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit der Messungen wurden die Ausnahmen zur Regel. So fand QUINCKE für Eisenchlorid, gelöst in Methylalkohol, bei folgenden Prozent-Konzentrationen die darunterstehenden spezifischen Drehungen:

| 54,07 | 48,48 | 32,94 | 18,89 | 11,53 |
|---|---|---|---|---|
| 20,16 | 20,32 | 17,71 | 15,18 | 16,16 |

also Abnahme mit zunehmender Verdünnung — obgleich der Atommagnetismus gleichzeitig ungeändert bleibt. Andere haben das für zahlreiche Stoffe bestätigt, noch andere, z. B. JAHN, dagegen Additivität gefunden. Statt der spezifischen kann man auch die molekulare Drehung einführen. So nimmt nach PERKIN und PICKERING die molekulare Drehung mit der Verdünnung bei Schwefelsäure ab, bei Salzsäure zu; nach FORCHHEIMER ebenfalls bei Lithiumsulfat, während sie bei Ammonium-, Natrium- und Magnesiumsulfat und nach OPPENHEIMER auch bei Chlor- und Brom-Kalium und -Natrium sowie bei Essigsäure konstant ist. Manche Ergebnisse weisen darauf hin, daß sich Gemische anders wie Salze und diese wieder anders wie Doppelsalze verhalten. Dann weiter die Frage, ob verschiedene Lösungsmittel verschiedene Molekulardrehungen der gelösten Substanz ergeben, was nicht selten der Fall ist und zwar auch in Fällen, wo die Erklärung durch Dissoziation (OSTWALD) nicht Stich hält und auch chemische Besonderheiten nicht vorliegen. Letzteres darf man — im Hinblick auf das auch auf manchem anderen Gebiete abnorme Verhalten dieses Elementes — bei Chlor und seinen Verbindungen gelten lassen. So fand z. B. PERKIN[3] die Molekulardrehung von Chlorwasserstoff, gelöst in

| | |
|---|---|
| Wasser . . . . . . . . . . | 4,41 |
| Alkohol . . . . . . . . . . | 3,33 |
| Isoamyloxyd . . . . . . . . | 2,25 ; |

und für Chlor selbst sehr verschiedene Werte; je nachdem er von wässeriger HCl- oder von $ClC_4$-Lösung oder von Propylchlorid ausging. — In homologen

[1] H. BECQUEREL, Ann. chim. phys. (5) **12**. 42. 1877. — G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. 606. 1885. — G. HINRICHS, C. R. **113**. 500. 1891. — W. H. PERKIN, in zahlreichen Abhandlungen im J. chem. Soc. (s. w. u.) — HANS JAHN, Wied. Ann. **43**. 280. 1891. — R. WACHSMUTH, Wied. Ann. **44**. 377. 1891. — O. SCHÖNROCK, Z. phys. Chem. **11**. 753. 1893. — O. HUMBURG, Z. phys. Chem. **12**. 401. 1893. — O. SCHÖNROCK, Z. phys. Chem. **16**. 29. 1895. — S. OPPENHEIMER, Z. phys. Chem. **27**. 447. 1898. — J. FORCHHEIMER, Z. phys. Chem. **34**. 20. 1900. — W. H. PERKIN, J. Chem. Soc. **65**. 20. 1894.

Reihen von Stoffen finden nicht selten Gesetzmäßigkeiten statt, z. B. gleiche Differenzen der Drehung zwischen aufeinander folgenden Reihengliedern; aber auch hier finden Ausnahmen, und zum Teil sehr starke, statt, und nicht immer lassen sich Gründe dafür aus der chemischen Konstitution beibringen. Nur einige solche empirische Gesetze seien hier angeführt. Nach PERKIN kann man für jeden hinzutretenden $CH_2$-Komplex die Zahl 1,023, also für $n$ solche Komplexe 1,023 $n$ einsetzen; es kommt dann noch ein konstantes Glied für den Rest hinzu, und dieses Glied $a$ kann man als Gruppenkonstante bezeichnen. Nach JAHN sind die Zahlen für die verschiedenen Chloride, äquivalente Mengen vorausgesetzt, annähernd gleich, und dasselbe gilt für die Bromide, Jodide, Nitrate und Karbonate, nicht aber für die Sulfate, wo die Zahlen zwischen den weiten Grenzen 1,83 (Berylliumsulfat) und 5,17 (Kadmiumsulfat) schwanken. Ferner ist die Drehung der Bromide annähernd doppelt so groß und die der Jodide viermal so groß wie die der Chloride; anders ausgedrückt: die molekulare Drehung der einzelnen Salze mit gleichen elektropositiven, aber verschiedenen elektronegativen Bestandteilen haben annähernd konstante Differenzen; einen Satz, den WACHSMUTH bis zu einem gewissen Grade bestätigt fand; einige solche Differenzen sind folgende:

| Br — Cl | J — Cl | Cl — $NO_3$ | |
|---|---|---|---|
| 3,94 | 13,65 | 4,15 | |
| (3,70 bis 4,23) | (13,10 bis 14,56) | (3,99 bis 4,31) | (JAHN) |
| Cl — $CO_3$ | Cl — $SO_4$ | | |
| 3,74 | 3,51 | | |
| (3,60 bis 3,89) | (3,28 bis 3,88) | | |

| Cl — $\frac{1}{2}SO_4$ | Cl — $NO_3$ | Cl — $C_2H_4O_2$ | |
|---|---|---|---|
| 2,93 | 2,95 | 0,99 | |
| (2,67 bis 3,42) | (2,69 bis 3,18) | (0,63 bis 1,34) | (WACHSMUTH). |
| $C_2H_4O_2$ — $\frac{1}{2}SO_4$ | $C_2H_4O_2$ — $NO_3$ | $\frac{1}{2}SO_4$ — $NO_3$ | |
| 2,08 | 1,96 | 0,019 | |
| (1,77 bis 2,33) | (1,71 bis 2,51) | (0,011 bis 0,231) | |

Immerhin sind die Extreme, wie man sieht, voneinander und von dem Mittelwerte recht stark abweichend, wenigstens in den meisten Fällen. Noch mehr ist das der Fall bei den Differenzen der molekularen Drehungen der Salze mit gleichen elektronegativen Bestandteilen:

| Co — 2H | Ni — 2H | Mn — 2H |
|---|---|---|
| −1,63 | 2,88 | −0,04 |
| (−0,63 bis −2,22) | (2,09 bis 3,58) | (−0,17 bis +0,17) |

Noch gewagter endlich ist im allgemeinen der Übergang auf die Atomdrehung, um dann aus diesen die Molekulardrehung rechnerisch zusammensetzen zu können. Daß das nicht zulässig ist, geht sehr deutlich z. B. daraus hervor, daß die Molekulardrehungen für isomere Verbindungen im allgemeinen durchaus nicht gleich groß sind.

Eine Beziehung zwischen der Drehung der verschiedenen Stoffe und ihren Brechungsquotienten für die gleiche Farbe hat man schon frühzeitig vermutet; und H. BECQEREL[1] hat dafür die einfache Formel

$$\frac{\Omega}{n^2(n^2-1)} = \text{const}$$

[1] H. BECQUEREL, C. R. 83. 125. 1876. — Ann. chim. phys. (5) 12. 5. 1877. —

aufgestellt; diese Werte sind weiter unten bei den BECQUERELschen Zahlen mit angegeben, und man sieht in der Tat, daß, während die Drehungen selbst für die verschiedenen Stoffe wie 1 : 70 verschieden sind, die angebliche Konstante nur zwischen den Grenzen 0,101 und 0,465, also etwa wie 1 : 4 schwankt, für die meisten aber sogar nur zwischen 0,15 und 0,25; eine eklatante Ausnahme macht nur der Diamant, dessen Drehung im Vergleich zu seiner Brechung außerordentlich klein ist. Auch aus den Messungen von DU BOIS (s. w. u.) folgt, daß selbst für Gruppen so ähnlicher Stoffe wie Gläser die Schwankungen nicht unerheblich — bei Flintgläsern von 862 bis 966, bei Krongläsern von 472 bis 772 (Relativzahlen) — sind. Es handelt sich also hier offenbar um eine empirische Beziehung, von nur ganz ungefährer Bedeutung von der nur die Theorie zeigen kann, was an ihr wahres ist (s. w. u.). Übrigens ist unsere angebliche Konstante, infolge des verschiedenen Temperaturganges beider Erscheinungen, nicht einmal für einen und denselben Stoff von der Temperatur unabhängig; so steigt sie nach der Berechnung, die VAN AUBEL[1] auf Grund der Messungen von RODGER und WATSON (s. o.) ausgeführt hat, bei Wasser von 0 bis 100° von 944 auf 987, bei Schwefelkohlenstoff zwischen 0 und 40° von 945 auf 975 (relativ).

**Zahlenwerte der Drehung.** Aus dem reichen Material kann hier nur eine kleine Auswahl getroffen werden; im übrigen ist auf die Abhandlungen von GORDON, H. BECQUEREL, LORD RAYLEIGH, QUINCKE, KÖPSEL, ARONS, RODGER und WATSON, SIERTSEMA, DU BOIS, KUNDT, LOBACH, H. JAHN, WACHSMUTH, PERKIN, SCHÖNROCK, KUNDT und RÖNTGEN, HUMBURG, RIGHI, BOREL, YONG und FORTEY, FORCHHEIMER, HABAN[2] und viele andere hinzuweisen; reichhaltige Zusammenstellungen findet man auch in manchen Handbüchern, namentlich in den Tabellen von LANDOLT und BÖRNSLEIN. Die Werte für Schwefelkohlenstoff und Wasser sind vorangestellt, weil sie meist als Bezugseinheiten dienen; dann folgen die von den einzelnen Experimentatoren gefundenen Werte.

Schwefelkohlenstoff.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| GORDON . . | 0,05238′ | für die | Thalliumlinie | und 12° |
| GORDON . . | 0,04267′ | „ „ | $D$-Linie | „ 12° |
| GORDON . . | 0,04330′ | „ „ | „ | „ 0° |
| BECQUEREL . . | 0,04341′ | „ „ | „ | „ 0° |
| Lord RAYLEIGH | 0,04200′ | „ „ | „ | „ 18° |
| QUINCKE . . | 0,04409′ | „ „ | „ | „ 18° |
| KÖPSEL . . . | 0,04199′ | „ „ | „ | „ 18° |
| KÖPSEL . . . | 0,04297′ | „ „ | „ | „ 0° . |

[1] E. VAN AUBEL, J. de Phys. (3) **5**. 509. 1896. — [2] J. E. H. GORDON, Trans. R. Soc. **167** (1). 1. 1877. — Phil. Mag. (5) **1**. 73. 1876. — H. BECQUEREL, Ann. chim. phys. (3) **27**. 312. 1882. — (5) **12**. 5. 1877. — C. R. **88**. 709. — J. de phys. **8**. 198. 1879. — C. R. **90**. 1407. — J. de phys. **9**. 265. 1880 (die vier letzten über Gase). — Lord RAYLEIGH, Proc. R. Soc. **37**. 146. 1884. — G. QUINCKE, Wied. Ann. **24**. 606. 1885. — A. KÖPSEL, Wied. Ann. **26**. 456. 1885. — L. ARONS, Wied. Ann. **24**. 161. 1885. — J. W. RODGER und W. WATSON, Proc. R. Soc. **58**. 234. — Trans. R. Soc. **186** A. 621. 1895. — L. H. SIERTSEMA, Sitt. Akad. Amst. 1895/6. **29** u. **317**. — Comm. Leiden Nr. 24 (Gase). — Sitt. 1896/7. **132**. — Comm. Leiden Nr. 31 (Wasser). — Arch. néerl. (2) **2**. 291. Comm. Leiden, Suppl. **1**. 90. — Zitt. Akad. Amst. 1898/9. **289**. — Comm. Leiden Nr. 46 (Gase und Wasser). — H. DU BOIS, Wied. Ann. **31**. 970. 1887 (Zusammenstellung). — Wied. Ann. **44**. 377. 1891 (Jenenser Gläser). — A. KUNDT, Wied. Ann. **27**. 197. 1886 (ferromagnetische Stoffe). — A. KUNDT und W. C. RÖNTGEN, Wied. Ann. **6**. 332. 1897; **8**. 278. 1879; **10**. 257. 1880 (Gase). — W. LOBACH, Wied. Ann. **39**. 347. 1890. — H. JAHN, Wied. Ann. **43**. 280. 1891. — R. WACHSMUTH, Wied. Ann. **44**. 377. 1891. — W. H. PERKIN, Journ. Chem. Soc. 1884. 421; 1886. S. 177; 1887. 362 u. 808; 1888. 561; 1889. 680 u. 750; 1891. 981; 1892. 800; 1893. 75, 99 u. 488; **65**. 20, 402 u. 815. 1894; **69**. 1025. 1896. — **77/78**. 267. 1900; Proc. chem. Soc. **17**. 256. 1901; J. chem. Soc. **81**. 177. 1902; **81/82**. 292. 1902. — O. SCHÖNROCK, Z. phys. Chem. **11**. 753. 1893. — O. HUMBURG, Z. phys. Chem. **12**. 401. 1893. — A. RIGHI, Rend. Acc. Bol. **3**. 83. 1899. — A. BOREL, C. R. **128**. 1095.

Für die Hauptlinien ist bei 25° die Drehung

| $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0319′ | 0,0415′ | 0,0637′ | 0,0667′ | 0,0920′ |

und schließlich als Normalzahl für Natriumlicht und 18°, ausgedrückt entweder in Minuten oder in Bogenmaß

0,0421′ bzw. 0,0000122 .

### Wasser.

Schwefelkohlenstoff hat als Normalsubstanz den Übelstand sehr starker Dispersion; außerdem liegt es nahe, das Wasser, das in so vielen anderen Hinsichten als Bezugskörper dient, diese Rolle auch hier spielen zu lassen. Diese Möglichkeit ist jetzt gegeben, da durch die neueren Bestimmungen die Genauigkeit auf dieselbe Höhe wie beim Schwefelkohlenstoff gebracht ist und hier die Dispersion keine erhebliche Rolle spielt. Es fand nämlich für $D$ und 0°

| | |
|---|---|
| Arons . . . . . . . . | 0,01298′ |
| Rodger und Watson . . | 0,01311′ |
| Siertsema . . . . . . . | 0,01303′ , |

es wird also im Mittel in Minuten bzw. Bogenmaß:

0,01304 bzw. 0,000003792 .

### Zusammenstellung von du Bois.

Für eine Reihe wichtiger Substanzen aus den verschiedensten Gebieten hat du Bois nach eigenen und fremden Messungen folgende Tabelle für die Größen $\omega$ und $\psi$ zusammengestellt; beide Zahlen geben die Drehung in einer 1 cm langen Schicht, $\omega$ bei der Feldstärke 1, $\psi$ bei der Magnetisierungsintensität 1; die Temperatur ist durchschnittliche Zimmertemperatur (etwa 18°), die Wellenlänge $\lambda$.

Absolute Werte von $\omega$ und $\psi$.

| Substanz | $\varkappa$ | $\lambda$ | $\omega$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|
| Kobalt . . . . | — | $6,44 \cdot 10^{-5}$ | — | + 3,99 |
| Nickel . . . . | — | $6,44 \cdot 10^{-5}$ | — | + 3,15 |
| Eisen . . . . . | — | $6,56 \cdot 10^{-5}$ | — | + 2,63 |
| Sauerstoff (1 Atm.) | $+0,0126 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+0,000179 \cdot 10^{-5}$ | + 0,014 |
| Schwefelsäure . . | $-0,0751 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+0,302 \cdot 10^{-5}$ | — 4,0 |
| Wasser . . . . | $-0,0694 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+0,377 \cdot 10^{-5}$ | — 5,4 |
| Salpetersäure . . | $-0,0633 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+0,356 \cdot 10^{-5}$ | — 5,6 |
| Alkohol . . . . | $-0,0566 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+0,330 \cdot 10^{-5}$ | — 5,8 |
| Äther . . . . . | $-0,0541 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+0,315 \cdot 10^{-5}$ | — 5,8 |
| Arsenchlorür . . | $-0,0876 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+1,222 \cdot 10^{-5}$ | —14,9 |
| Schwefelkohlenstoff | $-0,0716 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+1,222 \cdot 10^{-5}$ | —17,1 |
| Faradays Glas, geschm. | $-0,0982 \cdot 10^{-5}$ | $5,80 \cdot 10^{-5}$ | $+1,738 \cdot 10^{-5}$ | —17,7 |

Die Tabelle ist nach den algebraischen Werten von $\psi$ geordnet. Seinem absoluten Werte nach ist jedoch $\psi$, wie man sieht, durchaus nicht etwa für die ferromagnetischen Stoffe am größten, diese werden vielmehr von den meisten

1899. — S. Yong und E. C. Fortey, J. chem. Soc. **127/8**. 372. 1900. — J. Forchheimer, Z. phys. Chem. **34**. 20. 1900. — M. Haban, Centr.-Ztg. Opt. Mech. **22**. 121. 1901. — F. Harms, Phys. Z. **4**. 158. 1902 (flüss. Sauerstoff).

festen und flüssigen Substanzen in dieser Hinsicht übertroffen, vom Schwefelkohlenstoff und vom FARADAYschen Glase sogar etwa um das fünffache. Unter den ferromagnetischen Stoffen selbt steht Kobalt an erster, Eisen an letzter Stelle. Dagegen würden die ferromagnetischen Stoffe, wenn überhaupt, eine außerordentlich große VERDETsche Konstante $\omega$ aufweisen, wegen ihrer großen Suszeptibilität. Wie kolossal die Drehung der Polarisationsebene im Eisen ist, geht aus der Angabe von KUNDT hervor, daß im Zustande magnetischer Sättigung die Drehung pro Zentimeter rund 200000° beträgt, daß also die Schwingungsrichtung der Ätherteilchen schon auf der winzigen Strecke von 0,02 mm ein ganzes Mal herumgedreht wird. Die genaueren Werte für die Maximaldrehung sind:

Eisen: 209000° (KUNDT); 216000°
Kobalt: 198000° (DU BOIS); 180000° (LOBACH).
Nickel: 89000° (DU BOIS); 90000° (LOBACH).

Messungen von H. BECQUEREL.

Die Drehung $\Omega$ ist auf die des Schwefelkohlenstoffes als Einheit bezogen, sie gilt für gelbes Licht (in den letzten Reihen rotes Licht) und 15° C. Außer $\Omega$ ist noch die Größe $\Omega/n^2(n^2-1)$ angegeben, wo $n$ der Brechungsexponent ist; über die Bedeutung dieser Größe ist schon oben (S. 391) das nötige gesagt.

| Substanz | $\Omega$ | $\frac{\Omega}{n^2(n^2-1)}$ | Substanz | $\Omega$ | $\frac{\Omega}{n^2(n^2-1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $CS_2$ | 1,000 | 0,231 | Geschm. Schwefel (114°) | 1,904 | 0,188 |
| $H_2O$ | 0,308 | 0,222 | Geschm. Phosphor (33°) | 3,120 | 0,220 |
| $CH_4O$ | 9,253 | 0,166 | Einfach brechende Kristalle | | |
| $C_3H_8O$ | 0,279 | 0,160 | KCl | 0,072 | 0,255 |
| $C_4H_{10}O$ | 0,294 | 0,161 | NaCl | 0,843 | 0,256 |
| $C_5H_{12}O$ | 0,311 | 0,162 | $CaFl_2$ | 0,220 | 0,101 |
| $CHCl_3$ | 0,380 | 0,163 | Blende | 5,295 | 0,204 |
| HCl | 0,490 | 0,252 | Diamant | 0,301 | 0,010 |
| $C_6H_6$ | 0,636 | 0,226 | Rotes Licht | | |
| $C_7H_8$ | 0,575 | 0,210 | $CS_2$ | 1,000 | 0,240 |
| $HNO^3$ | 0,291 | 1,177 | $Cu_2O$ (krist.) | 14,060 | 0,241 |
| „ (rauchend) | 0,206 | 0,109 | Brom | 1,960 | 0,465 |
| $H_2SO_4 + 3H_2O$ | 0,286 | 0,149 | Selen | 10,960 | 0,255 |
| $H_2SO_4$ | 0,247 | 0,116 | | | |
| $AgNO_3$ (konz. Lsg.) | 0,424 | 0,177 | | | |
| KJ (konz. Lsg.) | 0,801 | 0,349 | | | |

Jenenser Gläser nach H. DU BOIS.

$\omega$ im Bogenmaß für Natronlicht und 18°.

| Substanz | Bezeichnung | $n$ | $\omega$ |
|---|---|---|---|
| Boratkron | S. 204 | 1,51013 | 0,0163 |
| Leichtes Barytsilicatkron | O. 1092 | 1,51660 | 0,0190 |
| Stark disperg. Silicatkron | O. 1151 | 1,52017 | 0,0234 |
| Mittleres Phosphatkron | S. 179 | 1,56201 | 0,0161 |
| Schweres Barytsilicatkron | O. 1143 | 1,57412 | 0,0220 |
| Gewöhnliches leichtes Flint | O. 451 | 1,57522 | 0,0317 |
| Schweres Silicatflint | O. 469 | 1,64996 | 0,0442 |
| Schweres Silicatflint | O. 500 | 1,75096 | 0,0608 |
| Schwerstes Silicatflint | S. 163 | 1,89042 | 0,0888 |

### Bestimmungen von H. JAHN.

$\Omega$ Drehung, $S$ „spezifische Drehung“, d. h. dieselbe für gleiche Gewichte, bei Salzen aus den Lösungen berechnet; alles auf Wasser bezogen; Natronlicht, 20°.

| Substanz | $\Omega$ | $S$ |
|---|---|---|
| Wasser | 1,0000 | 1,0000 |
| Methylalkohol | 0,7081 | 0,8923 |
| Äthylalkohol | 0,8477 | 1,0710 |
| Aceton | 0,8490 | 1,0663 |
| Benzol | 2,2392 | 2,5443 |
| Toluol | 2,0396 | 2,3528 |
| Xylol | 1,8878 | 2,1788 |

Salze.

| Salz | $S$ | Salz | $S$ |
|---|---|---|---|
| $HCl$ | 2,3046 | $BeSO_4$ | 0,2890 |
| $LiCl$ | 1,9530 | $CaCl_2$ | 1,5104 |
| $Li_2SO_4$ | 0,3705 | $CaBr_2$ | 1,5854 |
| $NaCl$ | 1,6487 | $SrCl_2$ | 1,0969 |
| $NaBr$ | 1,6058 | $SrBr_2$ | 1,3233 |
| $NaJ$ | 2,2218 | $BaCl_2$ | 0,9418 |
| $NaNO_3$ | 0,2902 | $BaBr_2$ | 1,1233 |
| $Na_2SO_4$ | 0,5993 | $MnCl_2$ | 1,2804 |
| $KCl$ | 1,3674 | $MnSO_4$ | 0,2724 |
| $KBr$ | 1,4157 | $CdCl_2$ | 1,1535 |
| $KJ$ | 2,0556 | $CdBr_2$ | 1,3044 |
| $K_2SO_4$ | 0,3698 | $CdJ_2$ | 2,0133 |
| $KNO_3$ | 0,2408 | $CdSO_4$ | 0,4475 |
| $K_2CO_3$ | 0,4622 | | |

### Bestimmungen von WACHSMUTH.

$\Omega$ Drehung der Lösung von der Dichte $\sigma$, $S$ spezifische Drehung der gelösten Substanz, $M$ molekulare Drehung; Natronlicht, Temperatur nicht angegeben. Wasser als Einheit.

| Substanz | $\sigma$ | $\Omega$ | $S$ | $M$ | Substanz | $\sigma$ | $\Omega$ | $S$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_2O$ | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | $MnSO_4$ | 1,1607 | 1,0290 | 0,2317 | 1,9435 |
| $CoSO_4$ | 1,1378 | 0,9993 | 0,0029 | 0,0247 | $MnCl_2$ | 1,1107 | 1,1166 | 1,0434 | 7,3037 |
| $CoCl_2$ | 1,1250 | 1,0991 | 0,8224 | 5,9215 | $Mn(NO_3)_2$ | 1,1135 | 0,9915 | 0,1931 | 1,9205 |
| $Co(NO_3)_2$ | 1,1321 | 0,9620 | −0,0328 | −0,3325 | $Mn(C_2H_3O_2)_2$ | 1,0864 | 1,0239 | 0,5699 | 5,4777 |
| $Co(C_2H_3O_2)_2$ | 1,0886 | 1,0172 | 0,4770 | 4,6795 | $H_2SO_4$ | 1,8282 | 0,8652 | 0,3915 | 2,1317 |
| $NiSO_4$ | 1,1454 | 1,0730 | 0,4913 | 4,2256 | $HCl$ | 1,1247 | 1,3541 | 1,8436 | 7,4766 |
| $NiCl_2$ | 1,1058 | 1,1631 | 1,5333 | 11,0569 | $HNO_3$ | 1,1898 | 0,9287 | 0,2702 | 1,8916 |
| $Ni(NO_3)_2$ | 1,1285 | 1,0444 | 0,4617 | 4,6889 | $C_2H_4O_2$ | 1,0602 | 0,8576 | 0,7961 | 5,3073 |
| $Ni(C_2H_3O_2)_2$ | 1,0633 | 1,0490 | 0,8526 | 8,3742 | $Ni(CO)_4$ | 1,31 | 4,244 | — | — |

### Bestimmungen von PERKIN.

Die Messungen dieses Autors erstrecken sich über die Jahre 1884 bis 1903 und betreffen mehrere Hundert von Substanzen; darunter befinden sich Säuren und Salzlösungen, Körper der Fett- und aromatischen Reihe, Alkohole, Benzole und Ringverbindungen der verschiedensten Art; eine Auswahl ist nicht möglich. Es sei daher nur eine besonders wichtige Zusammenstellung gemacht.

Für einige Schwefel- und Salpetersäuren ist zuerst der Prozentgehalt, dann die spezifische Drehung der Lösung, dann die molekulare Drehung der reinen Säure angegeben. Wasser gleich eins.

| Schwefelsäure | | | Salpetersäure | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 99,92 | 0,7785 | 2,304 | 99,45 | 0,5292 | 1,207 |
| 96,60 | 0,8104 | 2,287 | 56,44 | 0,8042 | 0,977 |
| 84,35 | 0,8824 | 2,194 | 32,36 | 0,9066 | 0,852 |
| 73,00 | 0,9134 | 2,114 | 26,81 | 0,9238 | 0,805 |
| 57,94 | 0,9432 | 2,038 | 22,54 | 0,9350 | 0,753 |
| 35,16 | 0,9799 | 1,952 | | | |
| 18,92 | 0,9955 | 1,916 | | | |

Messungen von SCHÖNROCK.

Spezifische und molekulare Drehung. Wasser als Einheit.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pentan | 1,4525 | 5,811 | Cymol | 2,0004 | 14,892 |
| Hexan | 1,3940 | 6,661 | Methylalkohol | 0,9133 | 1,624 |
| Oktan | 1,3770 | 8,722 | Äthylalkohol | 1,0701 | 2,735 |
| Amylen | 1,5891 | 6,180 | Propylalkohol | 1,1269 | 3,756 |
| Hexylen | 1,5970 | 7,453 | Isopropylalkohol | 1,1897 | 3,966 |
| Oktylen | 1,5116 | 9,406 | Isobutylalkohol | 1,1740 | 4,827 |
| Benzol | 2,5918 | 11,230 | Amylalkohol | 1,2038 | 5,866 |
| Toluol | 2,3541 | 12,031 | Pyridin | 2,0085 | 8,819 |
| Äthylbenzol | 2,2632 | 13,327 | Aceton | 1,0803 | 3,481 |
| Orthoxylol | 2,2596 | 13,306 | Amyläther | 1,2737 | 11,181 |
| Metaxylol | 2,1620 | 12,731 | | | |
| Paraxylol | 2,1718 | 12,789 | | | |
| Propylbenzol | 2,1592 | 14,394 | | | |

Messungen von HUMBURG.

Molekulare Drehungen, Wasser als Einheit (meist Mittelwerte).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Benzol | 11,06 | Monochloressigsäure | 3,80 |
| Toluol | 12,02 | Dichloressigsäure | 5,18 |
| Methylalkohol | 1,58 | Jodkalium | 18,95 |
| Essigsäure | 2,45 | Bromnatrium | 9,19 |
| Propionsäure | 3,48 | Ammoniumnitrat | 2,18 |
| Buttersäure | 4,54 | Brombaryum | 18,5 |

Messungen von FORCHHEIMER.

Spezifische und Molekulardrehung, bei den drei ersten Salzen von der Konzentration unabhängig, bei den anderen für verschiedene Konzentrationen.

| | | |
|---|---|---|
| Ammoniumsulfat (20°) | 0,675 | 4,95 |
| Natriumsulfat (15°) | 0,377 | 2,96 |
| Magnesiumsulfat (15°) | 0,308 | 2,03 |
| Lithiumsulfat (15°) | | |
| 23,5% | 0,392 | 2,38 |
| 18,5% | 0,459 | 2,80 |
| 13,0% | 0,435 | 2,67 |
| 7,7% | 0,509 | 3,11 |
| Lithiumchlorid (15°) | | |
| 36% | 1,908 | 4,506 |
| 4,4% | 2,071 | 4,892 |

| Schwefelsäure (14°) | | | Salzsäure (13°) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 70,1% | 0,381 | 2,07 | 27,1% | 2,207 | 4,48 |
| 49,1% | 0,366 | 1,99 | 19,3% | 2,248 | 4,56 |
| 25,0% | 0,372 | 2,03 | 12,9% | 2,346 | 4,76 |
| 9,3% | 0,402 | 2,20 | 7,2% | 2,395 | 4,86 |
| | | | 5,7% | 2,414 | 4,93 |

Messungen von HABAN (absolute Werte, mit Benutzung des QUINCKEschen Wertes für $CS_2$).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wasser | 0,01338 | Ferrosulfatlösung | 0,01046 |
| Schwefelkohlenstoff | 0,04490 | Zinkchloridlösung | 0,01842 |
| Monobromnaphthalin | 0,04081 | Zinksulfatlösung | 0,01471 |
| Uranglas | 0,01833 | Kaliumferrocyanidlösung | 0,01648 |
| Weingeist | 0,01203 | | |
| Terpentinöl | 0,01793 | | |
| Chlorkaliumlösung | 0,02287 | | |

Drehung in Gasen nach H. BECQUEREL.

0°, Atmosphärendruck, Natriumlicht. Flüssiger Schwefelkohlenstoff als Einheit.

| Gas | $10^6 \Omega$ | $\frac{\Omega}{n^2(n^2-1)}$ | Gas | $10^6 \Omega$ | $\frac{\Omega}{n^2(n^2-1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sauerstoff | 146 | 0,269 | Stickoxydul | 393 | 0,381 |
| Luft | 159 | 0,277 | Schweflige Säure | 730 | 0,548 |
| Stickstoff | 161 | 0,274 | Äthylen | 802 | 0,590 |
| Kohlensäure | 302 | 0,332 | | | |

Die Zahlen der letzten Spalte halten sich in denselben Grenzen wie bei Flüssigkeiten, wachsen aber mit $n$. Sauerstoff scheint schwach anomale Dispersion zu haben.

Drehung in Gasen nach KUNDT und RÖNTGEN.

Für natürliche Dichte aus Beobachtungen bei großer Dichte (150 bis 270fach) unter der Annahme der Proportionalität mit der Dichte berechnet; 20°, Tageslicht; Schwefelkohlenstoff als Einheit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wasserstoff | 0,000132 | Luft | 0,000127 |
| Sauerstoff | 0,000109 | Kohlenoxyd | 0,000232 |
| Stickstoff | 0,000127 | Sumpfgas | 0,00044 |

Messungen von SIERTSEMA

$$\Omega \cdot 10^6 = \frac{a}{\lambda}\left(1 + \frac{b}{\lambda^2}\right)$$

(vgl. hierzu die anderen Darstellungen o. S. 382).

| Gas | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| Luft (100 kg, 13,2°) | 190,6 | 0,242 |
| Sauerstoff (100 kg, 7,0°) | 271,7 | 0,0704 |
| Stickstoff (100 kg, 14,0°) | 169,9 | 0,311 |
| Kohlensäure (1 Atm. 6,5°) | 269,5 | 0,307 |
| Stickstoffoxydul (30,5 Atm., 10,9°) | 75,5 | 0,306 |
| Wasserstoff (85 kg, 9,5°) | 138,6 | 0,325 |

Chlor nach einer Messung von RIGHI.

0,000337 (Schwefelkohlenstoff = 1).

## 2. Beeinflussung des Lichts bei der Reflexion an Magneten.

Im Jahre 1876 machte KERR[1] die Beobachtung, daß ein auf eine magnetische Fläche fallender, geradlinig oder elliptisch polarisierter Lichtstrahl bei der Reflexion von dieser Fläche eine Veränderung erfährt. Die Beobachtung wurde dann von zahlreichen anderen Physikern wiederholt, ergänzt und modifiziert, insbesondere von GORDON[2], FITZGERALD[3], HALL[4] (für Nickel), HURION[5] (für Wismut), KAZ[6], RIGHI[7], KUNDT[8] (für Eisen, Kobalt, Nickel), DU BOIS[9] (außerdem noch für Magneteisenstein), SISSINGH[10], ZEEMANN[11], ROSENQVIST[12], WIND[13], MICHELI[14] und CAMMAN[15]. Für die vier ferromagnetischen Stoffe ist das Phänomen erwiesen, für Wismut wird es von RIGHI, KUNDT u. a. bestritten und bedarf daher der Bestätigung. Die meisten der Genannten haben das Phänomen nach der optischen Seite, KUNDT und DU BOIS auch nach der magnetischen hin verfolgt. Wegen der Theorie, die auf diesem Gebiete mit der Beobachtung in besonders engem Konnex geblieben ist, vergleiche man weiter unten.

Die Wirkung ist eine doppelte und besteht 1. in der Drehung der Polarisationsebene, 2. in der Verwandlung des geradlinig polarisierten Lichtes in elliptisch polarisiertes, des elliptisch polarisierten in solches von anderer Elliptizität oder unter Umständen in geradlinig polarisiertes. Die erste Wirkung stellt die Reflexion des Lichtes an einem Magneten in Parallele mit dem Durchgange durch einen solchen, die zweite Wirkung ist der Reflexion eigentümlich: man kann sie durch den Ausspruch charakterisieren, daß die Reflexion an Magneten das Intensitätsverhältnis und die Phasenbeziehung der beiden Lichtkomponenten verändert, bei einfallendem geradlinigem Lichte also eine neue, zur ursprünglichen senkrechte „magnetische Komponente“ entstehen läßt.

Wenn schon die Erscheinungen beim Durchgange sich infolge der großen Zahl maßgebender Faktoren sehr komplizierten, so werden sie, das ist einleuchtend, dies bei der Reflexion in noch weit höherem Grade tun. Es können hier nämlich variiert werden: in magnetischer Hinsicht die Feldstärke, das magnetisierte Material und damit die Intensität der Magnetisierung, die Temperatur und die Richtung, in welcher die spiegelnde Fläche des Magneten geschnitten ist, d. h. der Winkel, welchen ihre Normale mit den Kraftlinien bildet, wobei besonders die Grenzfälle der Reflexion an der Stirnfläche (Winkel 0°) und an der Mantel- resp. Äquatorfläche (Winkel 90°) wichtig und darum eingehend studiert sind. Andererseits in optischer Hinsicht der Einfallswinkel, der Winkel der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts mit der Einfallsebene, die Farbe, die Elliptizität und, im Falle der Reflexion an der Mantelfläche, der Winkel der Einfallsebene mit den Kraftlinien, wobei wiederum die beiden Grenzfälle herauszugreifen sind, daß die Einfallsebene den Kraftlinien parallel oder auf ihnen senkrecht ist. Alle diese

---

[1] J. KERR, Phil. Mag. (5) **3**. S. 321. 1877; **5**. S. 161. 1878. — [2] J. E. H. GORDON, Phil. Mag. (5) **4**. S. 104. 1877; El. u. Magn. Bd. 2. — [3] C. F. FITZGERALD, Proc. R. Soc. **25**. S. 447. 1876; Phil. Mag. (5) **3**. S. 529. 1877. — [4] E. H. HALL, Phil. Mag. (5) **12**. S. 171. 1881. — [5] HURION, J. de Phys. 1884, S. 360. — [6] P. C. KAZ, Über die Reflexion d. Lichts an Magneten. Inaug.-Diss. Amsterdam 1884; Beibl. z. Wied. Ann. 1885. S. 275. — [7] A. RIGHI, Ann. Chim. Phys. (6) **4**. S. 433. 1885; **9**. S. 65. 1886; **10**. S. 200. 1887. — [8] A. KUNDT, Wied. Ann. **23**. S. 228. 1884; **27**. S. 191. 1886. — [9] H. DU BOIS, Wied. Ann. **39**. S. 25. 1890. — [10] R. SISSINGH, Wied. Ann. **42**. S. 115. 1891; Verh. Akad. Wetensch. **28**. 1890. Arch. Néerl. **27**. 173. 1893. — [11] P. ZEEMANN, Messungen üb. d. KERRsche Erscheinung. Inaug.-Diss. Leiden 1893. — Arch. Néerl. **27**. 252. Versl. Ak. Wet. Amst. 1894/5, 221. 1896/7, 103. Comm. Leiden Nr. 15 u. 29. — [12] J. A. ROSENQVIST, Akad. Afh. Helsingfors 1892. — [13] C. H. WIND, Comm. Leiden 1894. 116. — [14] F. J. MICHELI, Drude Ann. **1**. 542. 1900. Inaug.-Diss. Lpz. 1900. — [15] P. CAMMAN, C. R. **135**. 286. 1902.

Faktoren sind von den Beobachtern tatsächlich variiert und die Ergebnisse mindestens qualitativ festgestellt worden. Es kann hier nur das Wichtigste angeführt werden.

Zunächst ist, entgegen der Meinung von MASCART und JOUBERT, POINCARÉ u. A. als feststehend zu betrachten, daß die Erscheinung eine wirkliche Reflexionserscheinung ist, und daß sie nicht etwa, wie man meinen könnte, einfach eine Folge der Drehung der Polarisationsebene beim Durchlaufen der dem Magneten anliegenden, stark magnetisierten Luftschicht ist. Durch die Tatsache, daß die Erscheinung verschwindet, wenn man den magnetischen Spiegel durch einen unmagnetischen ersetzt, wird der Beweis hierfür freilich nicht streng geführt, weil dadurch das magnetische Feld stark herabgemindert wird, wohl aber, wie DRUDE[1] hervorhebt, durch den von KUNDT geführten Nachweis, daß sie auch dann verschwindet, wenn man den magnetischen Spiegel mit einem nicht aktiven Metall elektrolytisch dünn überzieht, wodurch das Feld in der benachbarten Luft nicht merkbar verändert wird. Die Drehung erfolgt also entweder am oder im Metall; hält man die erstere Möglichkeit für ausgeschlossen[2], so gelangt man auch von dieser Seite her zur Annahme eines Eindringens des Lichtes in die Metalle, ehe es zurückkehrt.

Was die Beobachtungsmethoden betrifft, so sei bemerkt, daß man, um den Magnetismus der spiegelnden Fläche zu erhöhen, ihr meist einen weichen Eisenkörper („Submagneten") gegenüberstellt, und daß man, wenn man bei senkrechter Inzidenz beobachten will, eine unter 45° geneigte Glasplatte anwendet, um den Polarisator seitlich aufstellen zu können und durch ihn in der Beobachtung nicht gestört zu werden; man muß aber dann, worauf KUNDT[3] zuerst hingewiesen hat, die rein optische Drehung in der Glasplatte in Abzug bringen. Kommt es nicht auf genau senkrechte Inzidenz an, so kann man auch einen durchbohrten Spiegel anwenden. Die spiegelnde Fläche wird, wenn sie nicht dem Elektromagneten selbst angehört, in Form einer Platte nahe an einen Pol des letzteren gebracht, je nach Zweck der Untersuchung senkrecht oder parallel zu den Kraftlinien. Am vorteilhaftesten ist es jedenfalls, die spiegelnde Fläche an dem Elektromagneten selbst anzuschleifen, und zwar an einem Eisenkörper, der gleichförmig magnetisiert wird; dies hat DU BOIS getan, indem er Ovoide benutzte und sie durch eine lange Drahtspule magnetisierte. Durch das Anschleifen der Spiegel wird an dieser Stelle die Magnetisierung freilich verändert, aber in leicht zu ermittelnder Weise.

**Senkrechte Inzidenz.** Relativ am einfachsten verhält sich das Licht bei senkrechter Inzidenz, weil die Richtung der Schwingungsebene hier natürlich keine Rolle spielt; hier wird einfach die Polarisationsebene des geradlinig polarisierten Lichtes gedreht, und zwar der Richtung des magnetisierenden Stromes entgegengesetzt, so daß man sie im Sinne der früheren Ausdrucksweise als negative Drehung zu bezeichnen hat; nur beim Magnetit ist sie positiv. Betrachten wir zunächst die polare Reflexion. Bei den ersten KUNDTschen Versuchen bewegt sich die Drehung für Eisen zwischen 45 und 66′, bei Kobalt zwischen 50 und 67′, bei Nickel zwischen 20 und 23′, bei der zweiten Reihe von Versuchen wurde die Feldstärke gemessen und für Eisen folgende Zahlenreihe gefunden:

| $\mathfrak{H}$ | 4990 | 10800 | 16600 | 19800 | 30300 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega$ | −0,27° | −0,55° | −0,62° | −0,66° | −0,67° |

Diese Zahlen sind durch die unterste Kurve der Figur 162 (S. 379) veranschaulicht; während also die Durchgangskurve nach oben geht, geht die

[1] P. DRUDE, Wied. Ann. **46**. 354. 1892. — [2] Vgl. hierüber einerseits DU BOIS, Wied. Ann. **39**. 40, andererseits DRUDE, Wied. Ann. **46**. 354. — [3] A. KUNDT, Wied. Ann. **23**. 239. 1884.

Reflexionskurve nach unten; der Verlauf ist aber im übrigen ganz analog, und man kann daher auch hier vermuten, daß die Drehung nicht der Feldstärke, sondern der Intensität der Magnetisierung proportional sei, eine Vermutung, die bald darauf von DU BOIS experimentell bestätigt wurde; auch hier erwies sich Nickel am schwächsten wirksam. Wenn die spiegelnde Fläche nicht polar liegt, also ihre Normale mit der Richtung der Magnetisierung einen Winkel $\alpha$ einschließt, so ist die Drehung kleiner, und zwar gilt nach DU BOIS auch hier das einfache Kosinusgesetz; bei der Reflexion an einer äquatorialen Fläche wird also die Drehung null. Nach alledem hat man die Drehung proportional zu setzen mit der Intensität der normalen Magnetisierungskomponente, in Formel

$$\Omega = K \cdot \mathfrak{J}_n \quad .$$

Für die Konstante $K$, welche der KUNDTschen Konstante $\psi$ (S. 380) ganz analog ist, hat DU BOIS den Namen KERRsche Konstante vorgeschlagen; man kann sie entweder in Winkelmaß oder in Bogenmaß ausdrücken.

Ferner hängt die Drehung von der Wellenlänge des Lichtes ab und zwar nach DU BOIS in folgender Weise: bei Eisen ist die Dispersion durchweg anomal, d. h. die Drehung nimmt von rot bis zu violett ständig ab; bei Kobalt tritt ein Minimum in grün, bei Nickel ein solches in gelb, endlich bei Magnetit ein Maximum in gelb auf.

In der folgenden Tabelle sind für die vier ferromagnetischen Substanzen und für die wichtigsten Wellenlängen $\lambda$ die Werte der KERRschen Konstanten nach DU BOIS zusammengestellt und zwar in Minuten.

| Farbe | Linie | $10^6 \cdot \lambda$ | Kobalt | Nickel | Eisen | Magnetit |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rot . . . . | $Li\,\alpha$ | 67,1 | −0,0208 | −0,0173 | −0,0154 | +0,0096 |
| Rot . . . . | — | 62 | −0,0198 | −0,0160 | −0,0138 | +0,0120 |
| Gelb . . . | $D$ | 58,9 | −0,0193 | −0,0154 | −0,0130 | +0,0133 |
| Grün . . . | $b$ | 51,7 | −0,0179 | −0,0159 | −0,0111 | +0,0072 |
| Blau . . . | $F$ | 48,6 | −0,0181 | −0,0163 | −0,0100 | +0,0026 |
| Violett. . . . | $G$ | 43,1 | −0,0182 | −0,0175 | −0,0089 | — |

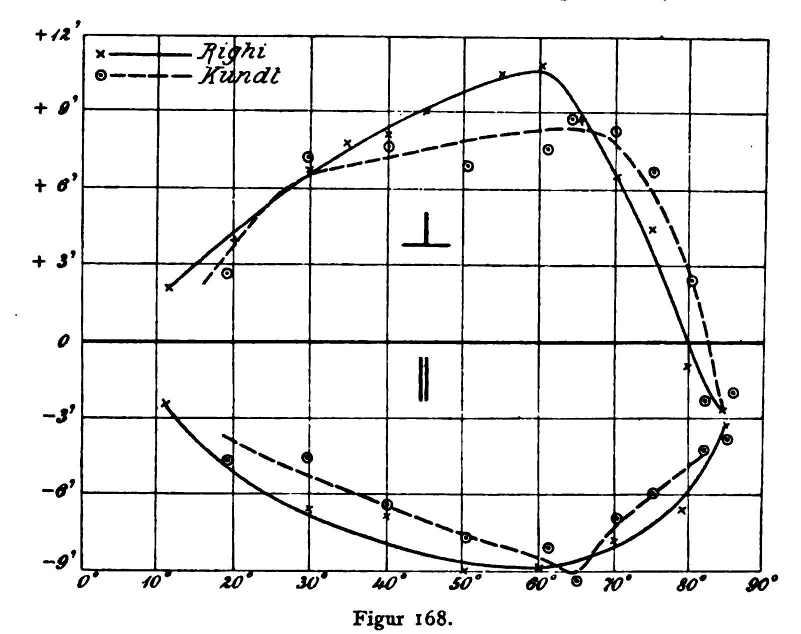
Die Frage, ob bei senkrechter Reflexion außer der Drehung der Schwingungsrichtung resp. der großen Ellipsenachse auch eine Veränderung des Achsenverhältnisses eintrete, ist allgemein wohl noch nicht entschieden; für geradlinig polarisiertes Licht steht aber fest, daß die etwa entstehende Ellipse eine jedenfalls außerordentlich gestreckte Gestalt besitzt. Nur muß man hier sehr darauf achten, daß die spiegelnde Fläche blank und rein sei, weil Oxyd- und andere Schichten die Erscheinung sehr unregelmäßig machen und eine nicht vorher bestimmbare Elliptizität erzeugen können.

Die Temperatur hat nach DU BOIS einen jedenfalls nur geringfügigen Einfluß auf $K$ (höchstens einige Prozent pro $100^0$); sichere Ergebnisse sind schwer zu erlangen, weil auch $\mathfrak{J}$ mit der Temperatur sich ändert.

**Schiefe Inzidenz.** Hier kommen als neue Variable außer dem Einfallswinkel die Polarisations- (bzw. Schwingungs-)richtung des einfallenden Lichtes und — bei Reflexion an der Seitenfläche — die Richtung der Einfallsebene gegen die Magnetisierungsrichtung hinzu. Zunächst möge der Fall besprochen werden, wo die Reflexion an der Stirnfläche des Magneten stattfindet, wo also die Magnetisierungsrichtung in jedem Falle mit der Einfallsebene zusammenfällt. In diesem Falle hat die Drehung, ob nun das Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sei, stets denselben Sinn, d. h. es findet bei Veränderung des Einfallswinkels kein Durchgang durch null und darauf folgender Zeichenwechsel statt; nur ein einziger Beobachter, KUNDT, hat einen solchen, nämlich

für Eisen, senkrecht polarisiertes Licht und den Einfallswinkel 80° beobachtet — was aber seitdem, wie es scheint, nicht bestätigt worden ist.

Viel eingehender sind die Verhältnisse bei der Reflexion an der Seitenfläche des Magneten, der „äquatorialen" Reflexion, studiert worden, und zwar in den beiden hier möglichen Fällen, daß die magnetischen Kraftlinien, die doch hier in der Oberfläche des Magneten verlaufen, entweder auf der Einfallsebene senkrecht stehen oder ihr parallel laufen. Im ersten Falle findet eine Drehung der Polarisationsebene nicht statt (vgl. jedoch w. u.). Ist die Einfallsebene zu den Magnetisierungslinien parallel, so ist zu unterscheiden zwischen Strahlen, die in der oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind. Jene erfahren für alle Inzidenzwinkel eine negative Drehung, diese dagegen nur für große Inzidenzwinkel, dann kommt ein Winkel, für den die Drehung null ist, und für kleinere




Figur 168.

ist sie positiv. Folgende Zahlen von Kundt (|| und ⊥ beziehen sich auf die Polarisationsrichtung) sowie die nach seinen und nach Righis Zahlen entworfenen, für Eisen geltenden Kurven der Figur 168 erläutern dies des näheren.

| Eisen | | | Nickel | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *i* | \|\| | ⊥ | *i* | \|\| | ⊥ |
| 19,0° | −4,8′ | +2,7′ | 20,0° | — | +0,0′ |
| 29,9° | −4,5′ | +7,3′ | 30,1° | −1,7′ | +1,8′ |
| 39,5° | −6,6′ | +7,7′ | 40,0° | −2,7′ | +1,4′ |
| 50,1° | −7,7′ | +6,9′ | 50,0° | −4,7′ | +0,3′ |
| 61,3° | −8,0′ | +7,5′ | 61,5° | −4,2′ | −0,7′ |
| 65,0° | −9,4′ | +8,7′ | 65,3° | −3,8′ | −2,2′ |
| 70,0° | −7,1′ | +8,1′ | 75,0° | −1,1′ | −1,9′ |
| 75,0° | −6,0′ | +6,8′ | | | |
| 80,3° | — | +2,6′ | | | |
| 82,0° | −4,3′ | −2,3′ | | | |
| 85,3° | −3,9′ | −1,9′ | | | |

Man kann den Einfallswinkel, bei dem der Zeichenwechsel der Drehung stattfindet, den kritischen Einfallswinkel nennen. Von der Stärke der Magnetisierung hängt er nicht ab, dagegen ist er für die verschiedenen Metalle verschieden groß, und auch die für ein und dasselbe Metall gefundenen Werte stimmen nicht vollig überein; so wurden für Eisen 75 bis 81, für Kobalt 70 bis 78, für Nickel 50 bis 60° gefunden. Da dieser Winkel für die Theorie von Bedeutung ist, bestimmte MICHELI auf Veranlassung von DRUDE (s. w. u.) ihn für alle drei Metalle mit besonderer Rücksicht auf die Reinheit der Oberfläche; und es zeigte sich, daß von dem Grade dieser Reinheit seine Größe nicht unwesentlich abhängt — ein Verhalten, das ihn mit dem aus der Lehre von der Metallreflexion bekannten Haupteinfallswinkel (mit dem ihn auch die Theorie in Beziehung setzt, s. w. u.) in Parallelismus bringt. So fand sich

| für Stahl im Zustande | sehr rein | rein | rein | unrein |
|---|---|---|---|---|
| der krit. E.-W. | 80° 9′ | 78° 26′ | 78° 9′ | 74° |
| der Haupt-E.-W. | 76° 52′ | 76° 8′ | 76° | 73° 25′ |

| für Kobalt im Zustande | rein | unrein |
|---|---|---|
| der krit. E.-W. | 75° | 73° 12′ |
| der Haupt-E.-W. | 78° 5′ | 74° 26′ |

| für Nickel im Zustande | rein | unrein |
|---|---|---|
| der krit. E.-W. | 48° | 37° |
| der Haupt-E.-W. | 76° 15′ | 74° 4′ |

Man kommt so zu dem Schluß, daß mit Rücksicht auf die nicht erreichbare vollkommene Reinheit der Spiegel die gefundenen Werte mehr den Charakter unterer Grenzen haben, und daß man setzen muß ($\varphi'$ krit. E.-W.)

| für | Eisen | Kobalt | Nickel |
|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | $> 80°$ | $> 75°$ | $> 48°$ |

Was die Beobachtungen bei den einzelnen Einfallswinkeln betrifft, so stimmen die von MICHELI mit denen von KUNDT und RIGHI für Eisen genügend, für Nickel schlechter überein; diese und die neuen Zahlen für Kobalt sind daher hier wiedergegeben:

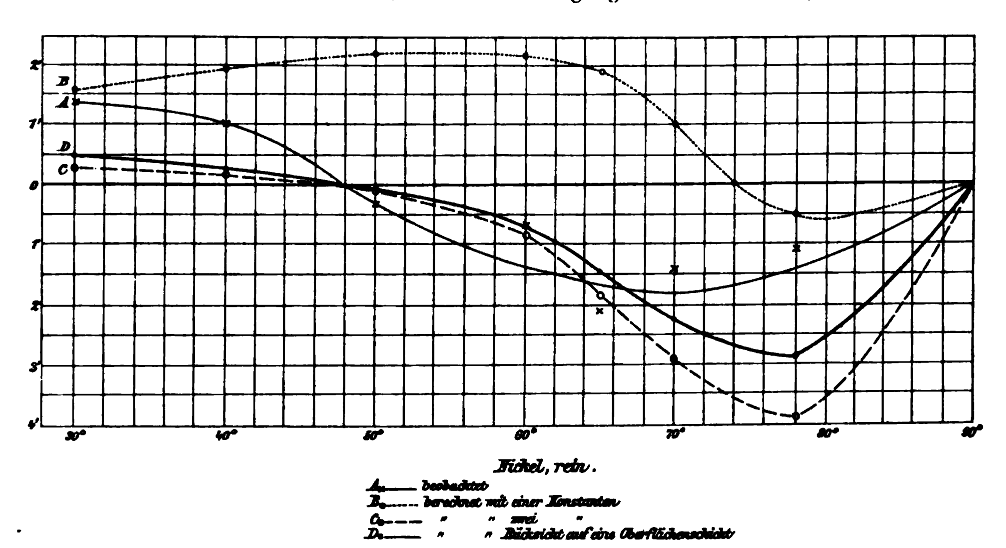
| Kobalt | | | Nickel | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $\perp$ | $\parallel$ | $i$ | $\perp$ | $\parallel$ |
| 40° | 2,8′ | −3,0′ | 30° | 1,3′ | −2,1′ |
| 50 | 3,4 | −3,7 | 40 | 1,1 | −2,7 |
| 60 | 4,3 | −5,8 | 50 | 0,4 | −3,4 |
| 65 | 4,8 | −6,5 | 60 | −0,7 | −3,5 |
| 70 | 4,0 | −6,3 | 65 | −2,1 | −3,0 |
| 75 | 0,0 | −5,5 | 70 | −1,4 | −2,0 |
| 78 | −2,3 | — | 78 | −1,1 | −1,8 |
| 80 | −3,4 | −3,5 | | | |
| 85 | −1,8 | −2,4 | | | |

Die für $\perp$ giltigen Zahlen sind, in Verbindung mit anderen Kurven, von denen noch die Rede sein wird, durch die Kreuze und die schwach ausgezogenen Kurven $A$ der Figur 169 und 170 dargestellt.

Außer dem kritischen Einfallswinkel gibt es offenbar noch einen zweiten ausgezeichneten Einfallswinkel, nämlich den, bei dem die Drehung der Polarisationsebene am größten ausfällt. Bei Eisen und Kobalt liegt er etwa bei 65°, und zwar für beide Komponenten; für die senkrechte Komponente gibt es dann noch

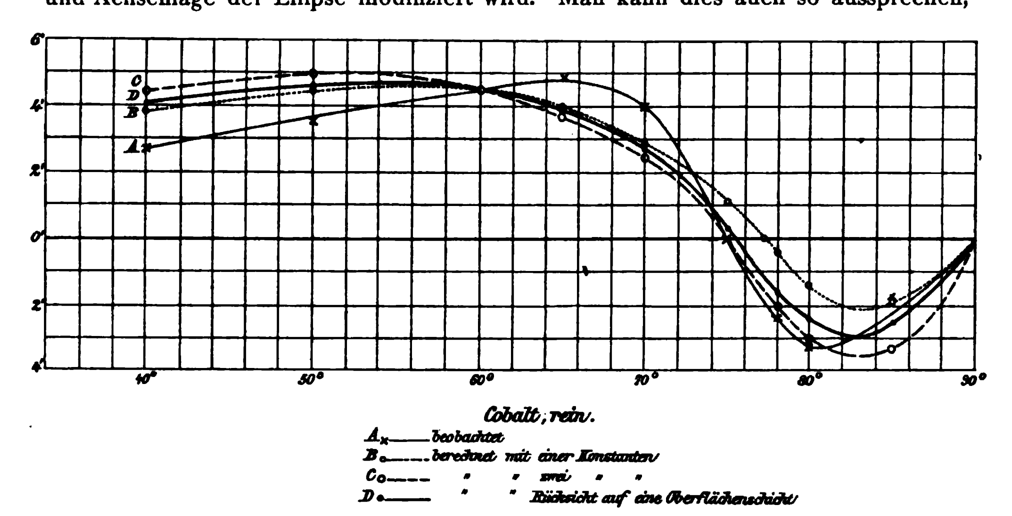
ein Maximum der entgegengesetzten Drehung bei etwa 85°; bei Nickel liegen die Verhältnisse, wie es scheint, nicht so einfach.

Bisher ist immer nur von der Drehung der Polarisationsebene gesprochen worden. In Wahrheit ist aber, wie schon eingangs bemerkt wurde, dies nur ein




Figur 169.

Teil der Erscheinung, ein anderer besteht darin, daß geradlinige Polarisation in elliptische verwandelt und, allgemeiner, elliptische hinsichtlich Achsenverhältnis und Achsenlage der Ellipse modifiziert wird. Man kann dies auch so aussprechen,




Figur 170.

daß man sagt: es entsteht durch die Reflexion eine neue magnetooptische Komponente; man muß sich aber dabei vergegenwärtigen, daß auch bei der Reflexion an unmagnetischen Metallen im allgemeinen eine neue Komponente, die eben der Metallreflexion eigentümlich ist, entsteht, zu der sich nun auch noch die magnetooptische gesellt; der Unterschied ist aber der, daß bei der gewöhnlichen Metallreflexion die Polarisation geradlinig bleibt, falls die Polarisationsebene des einfallenden Strahles in der oder senkrecht zur Einfallsebene liegt;

in diesem Falle kommt die Elliptizität des reflektierten Strahls ausschließlich auf Rechnung der magnetischen Kräfte.

Auch methodisch gestaltet sich das Problem jetzt wesentlich anders. Denn es wird jetzt das Licht in keiner Stellung im allgemeinen völlig ausgelöscht werden, und außerdem handelt es sich nicht mehr bloß um eine zu bestimmende Größe, sondern um zwei, nämlich um Amplitude $A$ und Phase $\alpha$ der magnetooptischen Komponente. Es ist nun für diesen Zweck ein Beobachtungssystem ausgearbeitet worden, dessen Wiedergabe wegen seiner Komplikation sich hier verbietet; nur soviel sei angeführt, daß man einerseits den Polarisator, andererseits den Analysator in die „Minimumstellung" bringt, und daß diesen die „Nullstellungen" zur Seite treten, die nur in besonderen Fällen mit jenen identisch werden; aus diesen Größen ergeben sich alsdann, eventuell unter Benutzung der bekannten Konstanten der Metallreflexion, die gewünschten Größen $A$ und $\alpha$.

Beobachtungen der in Rede stehenden Art haben besonders die holländischen Physiker KAZ, SISSINGH und ZEEMAN veröffentlicht; es sind dabei die Fälle 1. polarer und 2. äquatorialer Reflexion und bei letzterer wiederum die Fälle zur Einfallsebene senkrechter (2a) und paralleler (2b) Magnetisierungsrichtung zu unterscheiden. Um den Fall 2a, der oben als rein negativ bezeichnet wurde, gleich zu erledigen, so hat ihn ZEEMAN mit Rücksicht auf eine theoretische Forderung genau geprüft und gefunden, daß, wenn das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, selbst in diesem Falle eine neue Komponente entsteht. Der Fall 1 ist von KAZ, der Fall 2b von SISSINGH erledigt worden. Dabei hat sich ergeben, daß $A$ und $\alpha$ unabhängig sind von der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes; im übrigen ändern sie sich in hohem Maße und in den beiden Fällen in verschiedener Weise mit dem Einfallswinkel (behufs richtiger Vergleichung der Zahlen ist zu beachten, daß die verschiedenen Autoren den Begriff Phase verschieden gebrauchen, vgl. GOLDHAMMER, Wied. Ann. **46**, 91, und daß sie auch die Vorzeichen verschieden wählen). Es zeigt sich ferner im Falle 2b, daß parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht zwar im allgemeinen elliptisch wird, bei einem Einfallswinkel von etwa 60° aber geradlinig bleibt, indem hier die Phase der magnetooptischen Komponente durch null hindurchgeht. Ist dagegen das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, so tritt bei etwa 80° die Eigentümlichkeit auf, daß die Achsen der Ellipse parallel und senkrecht zur Einfallsebene sind, die Drehung also null ist. Schließlich sei zur Veranschaulichung des Ganges der Zahlen eine von KAZ für polare Reflexion an Eisen bei parallel polarisiertem Einfall gefundene Tabelle im Auszuge wiedergegeben (die Phasen auf den wahren Wert umgerechnet):

| $i$ | $A \cdot 10^3$ | $\alpha$ | $i$ | $A \cdot 10^3$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 84° | 0,72 | 102° | 60° | 2,6 | 44° |
| 80 | 1,3 | 72 | 56 | 2,49 | 38,5 |
| 76 | 1,66 | 56 | 52 | 2,76 | 33 |
| 72 | 1,98 | 53 | 46 | 2,41 | 27,5 |
| 68 | 2,00 | 51 | 40 | 2,38 | 26 |
| 64 | 2,22 | 42 | | | |

## 3. Magnetische Doppelbrechung.

An die bisher betrachteten magnetooptischen Erscheinungsgruppen schließen sich noch einige weitere an, von denen eine, die magnetische Doppelbrechung, hier zu erledigen ist. Es handelt sich dabei um zwei verschiedene Erscheinungen, die aber beide, abgesehen von dem Interesse, das sie an sich beanspruchen, auch auf die übrigen magnetooptischen Wirkungen zum Teil neues Licht werfen.



Im Jahre 1878 machte RIGHI[1] die Beobachtung, daß in einer Substanz, welche im magnetischen Felde im positiven Sinne dreht, ein zirkular polarisierter Strahl, in dem die Ätherteilchen ebenfalls im positiven Sinne rotieren, schneller fortschreitet, als ein negativ polarisierter, daß also zirkulare Doppelbrechung stattfindet. Mit Hilfe eines Nichols und einer BRAVAISschen Platte wurden zwei zirkular polarisierte Strahlen erzeugt und durch Schwefelkohlenstoff geschickt; die Phasendifferenz wurde durch Messung der Fransenverschiebung ermittelt. Letztere betrug nahezu $^1/_{18}$ ihres Abstandes. Damit ist freilich noch nicht gesagt, mit welcher Geschwindigkeit sich die beiden Strahlen fortpflanzen, ob insbesondere der eine, wie man vermuten kann, gegenüber der normalen Geschwindigkeit ebenso stark beschleunigt, wie der andere verzögert ist. Diese Vermutung wird jedoch durch andere Versuche, auf die hier nicht eingegangen werden kann, bestätigt.

Es liegt, wie gesagt, nahe, die Doppelbrechung mit der magnetischen Drehung der Polarisationsebene in Zusammenhang zu bringen. In der Tat müßte dabei die Gleichung

$$\Omega = \frac{\pi d}{\lambda}(n - n')$$

bestehen, wenn $n$ und $n'$ die Brechungsexponenten der beiden Strahlen, $\lambda$ die Wellenlänge und $d$ die Schichtdicke ist. Da in der von RIGHI benutzten Röhre die Drehung $5^0$ betrug, wird die Gleichung sehr gut befriedigt. Natürlich ist die Differenz $(n - n')$ in diesem Fall sehr klein; recht groß wird sie aber, wie KUNDT ausgerechnet hat, für Eisen, nämlich $n - n' = 0{,}1$, also doppelt so groß wie die entsprechende natürliche Differenz bei Kalkspath, zehnmal so groß wie bei Quarz senkrecht zur Achse und 1462mal so groß wie bei Quarz in der Richtung der Achse; so viele Male ist also auch die magnetische Drehung im Eisen größer als die natürliche im Quarz.

Im Jahre 1902 fand MAJORANA[2], daß Lösungen von Eisenchlorür, dialysiertem Eisen u. dgl. im magnetischen Felde doppelbrechend werden; je nach dem Alter und der Herstellungsweise der Lösungen lassen sich folgende Typen unterscheiden: 1. positive Doppelbrechung, mit der Feldstärke regelmäßig wachsend; 2. schwache negative Doppelbrechung; 3. positive Doppelbrechung für schwaches Feld, dann Umkehr und schließlich starke positive Doppelbrechung; 4. schwache Doppelbrechung mit bimagnetischer Drehung. Die Erscheinung wurde dann weiter verfolgt und namentlich ihr Zusammenhang mit der Absorption, speziell der selektiven Absorption studiert; man gelangt also zu einer Art von „magnetischem Dichroismus". Dieser ist dann besonders von MESLIN[3] näher untersucht worden; es stellte sich heraus, daß ihn sehr viele Stoffe zeigen, und daß es sich in der Tat, wie VOIGT (s. w. u.) vermutete, um eine verschiedene Absorption der zum Felde parallelen und senkrechten Strahlen handelt. Das elektrische Analogon der magnetischen Doppelbrechung ist übrigens bekanntlich schon längere Zeit vorher von KERR aufgefunden worden. In wie nahem Zusammenhange dieses und die oben erwähnten Phänomene mit dem von ZEEMAN stehen, ist einleuchtend, und es sei dieserhalb auf den Abschnitt über das letztere in der Optik (Bd. 6) verwiesen.

## 4. Theorie der magnetooptischen Erscheinungen.

Um eine Theorie der Wirkung des Magnetismus auf das Licht zu gewinnen, muß man natürlich alle hier behandelten Phänomene (FARADAY, KERR, MACALUSO, RIGHI, MAJORANA usw.) im Zusammenhange berücksichtigen, außerdem aber auch

[1] A. RIGHI, N. Cim. (3) **3**. 212. 1878. — [2] Q. MAJORANA, C. R. **135**. 159. 1902; **135**. 235. 1902; Rend. Acc. Linc. **11**. I. Sem. 374. 463. 531; 2. Sem. 90. 139. 1902. Vgl. auch W. VOIGT, Drude Ann. **8**. 880. 1902. — [3] G. MESLIN, C. R. **136**. 888. 1903; **136**. 930. 1059. 1305. 1438. 1903; **137**. 182. 248. 1903.

das ZEEMANsche Phänomen, die Wirkung auf Kathoden- und andere elektrische Lichtstrahlen, und endlich, wie sich zeigt, auch Erscheinungen an sich gar nicht optischen Charakters, wie namentlich den Halleffekt (s. Art. Elektromagnetismus). Dabei ist der historische Gang derart, daß zunächst nur die beiden allein bekannten Erscheinungen der Drehung der Polarisationsebene bei Durchgang und Reflexion berücksichtigt werden konnten und brauchten, und daß dann die Theorie sich einerseits den neuen Entdeckungen anzupassen suchte, andererseits aber auch solche vorhersagte und dann experimentelle Bestätigung fand. Gegenwärtig kann man sagen, daß in den Hauptpunkten die Theorie, wenigstens die formal-mathematische Theorie, in befriedigender Weise abgeschlossen ist und damit die langjährige Diskussion einen vorläufigen Abschluß gefunden hat.

Es ist verständlich, daß die Theorie der magnetischen Drehung sich an die der natürlichen Rotations-Polarisation anzulehnen hat, wobei aber von vornherein der Gegensatz zu beachten ist, wonach der Sinn der natürlichen Drehung von der Strahlrichtung, der der magnetischen von der Feldrichtung abhängt. Nach den bei den optischen Theorien gemachten Erfahrungen wird es ferner von wesentlichem Einflusse auf die Gestaltung der Theorie sein, ob das betreffende Medium stark lichtabsorbierend ist oder nicht. Zu unterscheiden ist endlich zwischen speziellen Theorien, die von einer besonderen Idee ausgehen und dann auch nur beschränkte Bedeutung haben, und allgemeinen Erklärungssystemen, welche den Anspruch erheben, mit ihren Differentialgleichungen und Grenzbedingungen alle beobachteten und eventuell auch erst noch zu beobachtenden Erscheinungen zu umfassen. Bei der relativen Einfachheit des magnetischen Teils der Theorie verbreitet sich diese naturgemäß wesentlich nach der optischen Seite hin, und sie stellt sich dabei, abgesehen von den älteren Versuchen (die von der Elastizitätstheorie des Lichts ausgehen, wobei die Wahl der FRESNELschen oder NEUMANNschen Vorstellung keine wesentlichen Unterschiede bedingt), naturgemäß auf den Standpunkt der elektromagnetischen Theorie des Lichts. Die Theorien selbst können im Rahmen dieses Buches nicht entwickelt werden, es muß genügen, eine kurze Übersicht und Charakteristik zu geben, im übrigen aber auf die Originalliteratur zu verweisen; insbesondere auf die Arbeiten von AIRY, C. NEUMANN, FITZGERALD, ROWLAND, H. A. LORENTZ, MAXWELL, RIGHI, VOIGT, KETTELER, VAN LOGHEN, POTIER, BASSET, GOLDHAMMER, DRUDE, VERNER, LARMOR, REIFF, WIND, POINCARÉ, A. GRAY, SIERTSEMA, HALLO, LEATHEM, KORN und STÖCKL[1]. Sieht man von der Dispersion zunächst ab, so kann man nach DRUDE alle diese Theorien in drei Klassen teilen, je nach der Form der zu den gewöhnlichen Gleichungen für den Lichtvektor $(u, v, w)$

---

[1] G. B. AIRY, Phil. Mag. (3) **28**. 469. 1846. — C. NEUMANN, Die magn. Drehung d. Polar-Ebene d. Lichts, Halle 1863. — G. F. FITZGERALD, Proc. R. Soc. **25**. 447. 1876; Trans. R. Soc. 1880. (2) 691; Wied. Ann. **25**. 136. 1885; Proc. R. Soc. **63**. 31. 1898. — H. ROWLAND, Phil. Mag. (5) **11**. 254. 1881. — H. A. LORENTZ, Arch. Néerl **19**. 123. 1884. — CL. MAXWELL, Lehrb. d. El. u. d. Magn. **2**. 574. 1883. — A. RIGHI, Ann. chim. phys. (6) **4**. 433. 1885; **9**. 65. 1886; Mem. Acc. Bol. **3**. 1899; N. Cim. (4) **10**. 20. 1899. — W. VOIGT, Wied. Ann. **23**. 493. 1884; Gött. Nachr. 1898. 329; **67**. 385. 1899; Drude Ann. **6**. 784. 1901; Drude Ann. **8**. 872. 1902; Gött. Nachr. 1902. Heft 5. — E. KETTELER, Wied. Ann. **24**. 119. 1885. — VAN LOGHEM, Inaug.-Diss. Leiden 1883. — A. POTIER, C. R. **108**. 510. 1888. — A. B. BASSET, Proc. R. Soc. **49**. 76. 1891; Trans. R. Soc. **182** (A). 371. 1892; Trans. Cambr. Soc. **8**. 68. 1893. — D. A. GOLDHAMMER, Wied. Ann. **46**. 71; **47**. 345. 1892; **48**. 74; **50**. 772. 1893; **65**. 111. 1898; **67**. 696. 1899. — P. DRUDE, Wied. Ann. **46**. 353. 1892; **48**. 122; **49**. 690. 1893; **52**. 496. 1894; **62**. 691. 1897. Vgl. auch seine Physik des Äthers. — A. VERNER, J. de phys. (36) **2**. 221. 1893. — J. LARMOR, Rep. Brit. Ass. **38**. 1893. — R. REIFF, Wied. Ann. **57**. 281. 1896. — C. H. WIND, Versl. Akad. Amst. 1894/95. 82. — Versl. 1896. 91. — H. POINCARÉ, C. R. **128**. 339. 1899. — LEATHEM, Trans. R. Soc. **190**. 89. 1897. — A. GRAY, Nature **60**. 379; 404. 1899. — A. KORN und K. STÖCKL, Drude Ann. **8**. 317. 1902; **9**. 1138. 1902; **12**. 875. 1903. — L. H. SIERTSEMA, Versl. Akad. Amst. 1902/03. 499; Comm. Leiden Nr. 82. — J. J. HALLO, Versl. Akad. Amst. 1902/03. 535.

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \Delta u \; , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \alpha \Delta v \; , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha \Delta w$$

hinzugefügten Glieder, die jedenfalls gerade Differentialquotienten nach den Koordinaten, aber ungerade nach der Zeit sein müssen; beim ersten Typus sind es erste Differentialquotienten der $u v w$ nach der Zeit (AIRY, C. NEUMANN), beim zweiten erste nach der Zeit und zweite nach den Koordinaten (die meisten oben Genannten), beim dritten Typus sind es Glieder beider Arten. Nun läßt sich aber zeigen, daß mit Rücksicht auf die Kontinuitätsgleichung (Transversalität der Lichtwellen) der erste und folglich auch der dritte Typus sich auf den zweiten reduziert, und daß dieser zweite die Form

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \left[\Delta u + \frac{1}{\tau^2}\frac{1}{\partial t}\left(b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + b_3 \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\right]$$

nebst zwei analogen Gleichungen für $v$ und $w$ annimmt, wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Drehungskomponenten, $\tau = 2\pi/T$, $T$ die Schwingungsdauer und $b_1$, $b_2$, $b_3$ die Komponenten einer Konstanten $b$ nach den Koordinatenachsen sind; für polare Reflexion ist $b_3$, für äquatoriale (Einfallsebene parallel dem Felde) $b_1$ maßgebend, $b_2$ für letztere, wenn Einfallsebene und Feld senkrecht zueinander sind. Nachdem nun DRUDE gezeigt hat, inwieweit sich diese Gleichungen von den bisher benutzten, insbesondere von den LORENTZschen und VOIGTschen unterscheiden, und nachdem er erörtert hat, wie man die Absorption und die Dispersion zu berücksichtigen hat, liefert er den Nachweis, daß man vom Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie in der Tat zu Gleichungen gelangt, welche den obigen entsprechen, außerdem aber zu Grenzbedingungen, welche die Lösung vervollständigen. Diese Gleichungen und Grenzbedingungen fallen etwas verschieden aus, je nachdem man streng transversale oder quasi-transversale Schwingungen einführt, und je nachdem man die magnetische Kraft oder die elektrische Kraft für die Richtung der Lichtschwingungen zugrunde legt, die Unterschiede sind aber für die Anwendung der Theorie auf die Erscheinungen unwesentlich.

Es seien $X$, $Y$, $Z$ die Komponenten der elektrischen, $L$, $M$, $N$ die Komponenten der magnetischen Kraft; die magnetische Permeabilität sei gleich eins gesetzt, die elektrische Leitfähigkeit vernachlässigt, dagegen sei $\varepsilon$ die elektrische Permeabilität (Dielektrizitätskonstante), endlich sei $V$ die Lichtgeschwindigkeit. Dann lauten die MAXWELLschen Gleichungen, ergänzt durch die magnetooptischen Zusatzglieder:

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}(b_2 X - b_1 Y) + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}(b_1 Z - b_3 X) \\
\frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}(b_3 Y - b_2 Z) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(b_2 X - b_1 Y) \\
\frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} &= \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(b_1 Z - b_3 X) + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}(b_3 Y - b_2 Z) \\
\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial X}{\partial t} &= \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \\
\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \\
\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \; .
\end{aligned}\right.$$

Man kann nun, um von diesem doppelten zu einem einfachen Gleichungen-Tripel zu gelangen, entweder die elektrische Kraft eliminieren, um alsdann die

magnetische als Lichtvektor zu betrachten, oder umgekehrt verfahren; ersteres ist am einfachsten. Man hat also $L$, $M$, $N$ mit dem obigen $u$, $v$, $w$ zu identifizieren, die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

ist erfüllt, d. h. die Wellen sind streng transversal, und der Lichtvektor liegt in der Polarisationsebene. Die Gleichungen selbst aber nehmen die Form

$$\frac{\varepsilon}{V^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[b_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + b_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + b_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\right]$$

nebst zwei analogen an oder, wenn man den dem Vektor $(u, v, w)$ entsprechenden Rotor $(\xi, \eta, \zeta)$ einführt, die endgültige Form:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\left(b_1\frac{\partial \xi}{\partial x} + b_2\frac{\partial \xi}{\partial y} + b_3\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\\
\frac{\varepsilon}{V^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\left(b_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + b_2\frac{\partial \eta}{\partial y} + b_3\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\\
\frac{\varepsilon}{V^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(b_1\frac{\partial \zeta}{\partial x} + b_2\frac{\partial \zeta}{\partial y} + b_3\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

und hierzu, wenn die $xy$-Ebene die Grenze der beiden Medien 1 und 2 ist, in denen sich der Vorgang abspielt, die Grenzbedingungen:

$$u_1 = u_2\,, \quad v_1 = v_2$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{V_1^2}{\varepsilon_1}\left(\xi + b_3\frac{\partial \eta}{\partial t} - b_2\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_1 &= \frac{V_2^2}{\varepsilon_2}\left(\xi + b_3\frac{\partial \eta}{\partial t} - b_2\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_2\\
\frac{V_1^2}{\varepsilon_1}\left(\eta + b_1\frac{\partial \zeta}{\partial t} - b_3\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_1 &= \frac{V_2^2}{\varepsilon_2}\left(\eta + b_1\frac{\partial \zeta}{\partial t} - b_3\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_2 \,.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Findet elektrische Leitung, also im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie Absorption statt, so ändert sich mit Rücksicht auf den periodischen Charakter der Bewegung weiter nichts, als daß $\varepsilon$ eine kompliziertere Bedeutung erhält; es wird nämlich komplex und zwar, wenn $n$ der Brechungsquotient und $\varkappa$ der Absorptionsindex ist:

$$\varepsilon = n^2(1 - i\varkappa)^2 \,. \tag{7}$$

Diese Theorie gibt nun die Hauptzüge der Phänomene FARADAY und KERR wieder, insbesondere auch den Zeichenwechsel, den die Drehung der Polarisationsebene bei der Reflexion in einem bestimmten Falle (s. o.) erleidet; und zwar liefert sie für den kritischen Einfallswinkel $\varphi'$ (S. 402) die Formel (angenähert)

$$\sin\varphi' \operatorname{tg}\varphi' = 2n \,, \tag{8}$$

was mit den beobachteten Werten für Eisen und Kobalt genügend, für Nickel weniger übereinstimmend. Übrigens zeigt sich hier zugleich die Verschiedenheit des kritischen Einfallswinkels vom metallischen Haupteinfallswinkel $\Phi$; denn der letztere ist durch die Gleichung

$$\sin\Phi \operatorname{tg}\Phi = n\sqrt{1 + \varkappa^2} \tag{9}$$

bestimmt; beide stimmen also nur für $\varkappa = 1{,}73$ überein, während es für Eisen kleiner, für Kobalt und Nickel größer ist — eine Abweichung, die mit der

Größenbeziehung zwischen beiden Winkeln (S. 402) wiederum übereinstimmt. Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und aus den Beobachtungen den Wert der magnetooptischen Konstanten $b$ (das je nach den Versuchsbedingungen mit $b_1$, $b_2$, $b_3$ identisch ist, s. o.) berechnen; natürlich wird $b$ mit der Magnetisierung wachsen, außerdem ist es mit der Schwingungsdauer $T$ proportional, so daß man besser $2\pi b/T$ als magnetooptische Konstante ansieht; als Maximalwert ergibt sich nun hierfür etwa 0,0377.

In zwei Hinsichten freilich versagt auch diese Theorie. Erstens gibt sie den Gang der Drehung bei der Reflexion nicht genügend wieder, wie die Betrachtung der Kurven $B$ in den Figuren 169 und 170 ($A$ die von MICHELI beobachteten Kurven) lehrt; auch dem Einfluß von Oberflächenschichten wird sie nicht gerecht. Die Hauptsache aber ist folgende. Wenn man der Frage der Elliptizität der reflektierten Schwingungen, also anders ausgedrückt, der Phase der magnetooptischen Komponente nachgeht, so findet man einen eklatanten Widerspruch zwischen den Werten, welche die LORENTZsche und die ihr zunächst gefolgten Theorien liefern und denen, die SISSINGH experimentell gefunden und dann ZEEMAN u. a. vervollständigt haben. Diese Differenz, die man als SISSINGHsche Phasendifferenz bezeichnet hat, hat die merkwürdige Eigenschaft, daß sie für alle Einfallswinkel gleich, nur für sehr kleine (nahezu normale Inzidenz) kleiner ist; für Eisen ist ihr konstanter Wert etwa 83°, der kleinere 69°; für Kobalt jener 49°, dieser 42°. Um nun diesen Tatsachen gerecht zu werden, braucht man an der DRUDEschen Theorie nur eine äußerlich geringfügige Änderung vorzunehmen, nämlich die reelle Konstante $b$ durch eine komplexe zu ersetzen. Dies hat zuerst GOLDHAMMER getan in seiner Theorie, die sich auch in einigen anderen Punkten von den älteren unterscheidet, und welche die SISSINGHsche Phasendifferenz wenigstens der Hauptsache nach wiedergibt. Man kann dieses Ergebnis am besten dahin aussprechen, daß man sagt: Gerade wie es für die Metallreflexion — s. Gl. (7) — eine komplexe Konstante $\varepsilon$, d. h. zwei reelle Konstanten — $n$ und $\varkappa$ — gibt, so ist auch das magnetooptische Phänomen nur durch eine komplexe Konstante $b$, d. h. durch zwei reelle Konstanten, die nun zu jenen hinzutreten, darstellbar. Alle Differenzen zwischen Erfahrung werden hierdurch freilich auch nicht beseitigt (vgl. z. B. die Kurven $C$ in Figur 169 und 170); aber man muß bedenken, daß die Frage der gleichförmigen Magnetisierung, der Reinheit der Oberfläche und manches andere Schwierigkeiten hervorbringt.

In neuester Zeit hat namentlich VOIGT die Theorie weiter entwickelt im Hinblick auf die Phänomene von ZEEMAN, MACALUSO und CORBINO sowie von MAJORANA, und es ist ihm gelungen, die charakteristischen Züge dieser Erscheinungen gut darzuztellen. Um von dem ZEEMANschen Phänomen hier abzusehen, sei nur folgendes bemerkt: In der Nähe eines Absorptionsstreifens muß wirklich eine abnorm starke magnetische Drehung der Polarisationsebene eintreten, sie muß desto stärker sein, je schmäler der Streifen ist, dagegen ist sie von der Feldstärke unabhängig; auch weitere Einzelheiten ergeben sich gut. Es ist aber in engem Rahmen unmöglich, auf die betreffenden Formeln hier einzugehen[1]. Dasselbe gilt von den anderen Theorien, von denen die neueste, auf FARADAYschen Rotationen der Teilchen aufgebaute, die von KORN und STÖCKL ist.

Neben den hier skizzierten umfassenden Theorien gehen spezielle theoretische Betrachtungen her, von denen hier zum Schluß noch einiges kurz angeführt sein möge.

Zunächst die schon oben S. 380 und in den Tabellen erwähnte Beziehung zwischen Drehung einerseits und Brechungsquotient und Wellenlänge andererseits. Nimmt man aus der Theorie die Gleichungen in der einfachen Form .

[1] J. J. HALLO (a. a. O.) hat die Konstanten der VOIGTschen Theorie berechnet und mit den von DRUDE berechneten verglichen, wobei, wenn man für die Genauigkeit einen weiten Spielraum läßt, kein Widerspruch entsteht.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^3 v}{\partial t \, \partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - m \frac{\partial^3 u}{\partial t \, \partial z^2}$$

herüber, so gelangt man durch Integration zu der Formel

$$\Omega = \frac{4 \pi n^2}{V \lambda^2} m \left( n - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) ,$$

wo $n$ der Brechungskoeffizient, $V$ die Lichtgeschwindigkeit, $\lambda$ die Wellenlänge und $m$ eine von der Substanz und der Kraft abhängige Größe ist. Diese Formel, die von VERDET[1] experimentell geprüft worden ist, stellt die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge mit ziemlich großer Annäherung dar, insofern tatsächlich 1) $\Omega \lambda^2$ ungefähr konstant ist, aber 2) mit abnehmendem $\lambda$ etwas wächst, und 3) dies um so merklicher, je größer die Dispersion ist. Später hat JAHN[2] aus der Formel den Wert der Größe $m$ für zahlreiche Stoffe berechnet und ihn häufig näherungsweise proportional mit dem spezifischen Magnetismus gefunden.

Über einige andere Dispersionsformeln und darauf bezügliche Versuche vergleiche man die unten zitierten Abhandlungen von SCHAIK[3] und JOUBIN[4].

Aus der LORENTZschen Ionentheorie ergibt sich ferner[5], wenn $N$ die Molekelzahl in der Volumeinheit und $e$ die Ladung eines in der Periode $T$ schwingenden Ions bezeichnet:

$$\Omega = \frac{1}{8 \pi e N V^2} \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n T^2} .$$

Endlich hat, auf Grund einer Betrachtung von FITZGERALD, SIERTSEMA[6] die Drehung in Beziehung gesetzt zu dem für die Elektronentheorie maßgebenden Verhältnis der Ladung $e$ zur Masse $m$ und gefunden:

$$\Omega = \frac{e}{m} \cdot \frac{\lambda}{2 V} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda} ;$$

setzt man hier die Werte der Drehung und Dispersion für verschiedene Stoffe ein, so erhält man für $(e/m) \cdot 10^{-7}$ die Werte:

| Luft | $CO_2$ | $H_2$ | $H_2O$ | $CS_2$ | Quarz |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,06 | 0,89 | 1,77 | 1,25 | 0,75 | 1,25 |

also im Mittel $$\frac{e}{m} \cdot 10^{-7} = 1,33 .$$

Ferner sei auf eine Arbeit von E. v. FLEISCHL[7] hingewiesen, worin im Anschlusse an die VERDETsche Beziehung die Gestalt der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde untersucht und als die zweier mit ihren großen Achsen größtenteils ineinander geschobener Rotationsellipsoide bestimmt wird. Fragen, die mit dieser verwandt sind, haben übrigens auch CORNU, BRACE und STERNBERG[8] behandelt.

Endlich ist auf eine Diskussion hinzuweisen, die sich über die thermodynamische Bedeutung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene erhoben hat. In diesem Falle hört nämlich, wie v. HELMHOLTZ[9] bemerkt hat, die Reziprozität, die sonst den Strahlengang auszeichnet, auf. Im Verfolge dieses Umstandes glaubte W. WIEN[10] zeigen zu können, daß in dem vorliegenden Falle der Verwandlungswert der Energie negativ sei und daß man also, um mit dem CLAUSIUSschen Prinzip im Einklang zu bleiben, nach einem noch verborgenen Ersatze suchen müsse. Indessen haben Lord RAYLEIGH und PLANCK[11] durch eine nähere Betrachtung gezeigt, daß hierzu kein Anlaß vorliegt, da die Forderungender Thermodynamik erfüllt sind.

[1] E. VERDET, Compt. rend. **56**. 630. 1863. — [2] H. JAHN, Wied. Ann. **43**. 299. 1891. — [3] W. C. L. SCHAIK, Arch. néerl. **21**. 406. 1887. — [4] P. JOUBIN, Compt. rend. **105**. 661. 1887. — Ann. Chim. Phys. (6) **16**. 78. 1889. — [5] H. A. LORENTZ, Zitt. Akad. Amst. 1897/98. 94. — [6] L. H. SIERTSEMA, Versl. Akad. Amst. 1902/03. 499; Comm. Leiden Nr. 82. — [7] E. v. FLEISCHL, Wied. Ann. **25**. 308. 1885. — [8] A. CORNU, C. R. **99**. 1045. 1884. — W. B. BRACE, Wied. Ann. **26**. 576. 1885. — M. STERNBERG, Wien. Ber. **94** (2). 95. 1886. — [9] H. v. HELMHOLTZ, Wiss. Abh. **2**. 136. — [10] W. WIEN, Wied. Ann. **52**. 143. 1894. — [11] Lord RAYLEIGH, vgl. Beibl. 1902. 114. — M. PLANCK, Verh. deutsch. phys. Ges. 1900. 206.

# Elektromagnetismus.

Von F. AUERBACH.

---

**Übersicht.** In den drei letzten Artikeln sind die Beziehungen des Magnetismus zu den mechanischen, thermischen und optischen Erscheinungen behandelt worden. Im vorliegenden folgen nun ganz analog die Beziehungen zwischen magnetischen und elektrischen Erscheinungen. Für die Gesamtheit dieser Beziehungen könnte man den Namen „Elektromagnetismus“ gebrauchen. Indessen faßt man diesen Begriff gewöhnlich etwas enger, indem man insbesondere die sämtlichen Erscheinungen der Erregung und Intensitätsänderung elektrischer Ströme durch magnetische Orts- oder Intensitätsänderungen, also die sogenannte „Magnetoinduktion“ — nicht zu verwechseln mit „Magnetischer Induktion“ —, d. h. die magnetoelektrischen Ströme ausschließt; auch die allgemeine Theorie des Elektromagnetismus wird zweckmäßig erst weiter unten im Zusammenhange mit den übrigen Theorien behandelt werden. Was ferner die Gesetze der Elektromagnete resp. der durch den elektrischen Strom vorübergehend oder dauernd erregten Magnete betrifft, so sind sie, insoweit die spezielle Art der Erregung dabei von unwesentlicher Bedeutung ist, schon im Artikel „Magnetische Induktion“ dargestellt worden. Endlich sei auf den Artikel „Strommessung“ hingewiesen (Bd. 4, 254), in welchem die Verwendung der elektromagnetischen Wirkung zur Strommessung bereits antizipiert ist.

Was nach diesen Ausschlüssen übrig bleibt, ist im wesentlichen folgendes. Zunächst die Wirkung elektrischer Ströme oder, allgemeiner, bewegter Elektrizität auf vorhandene Magnete, darin bestehend, daß die Träger des magnetischen Zustandes im Raume bewegt werden; es handelt sich also hier um eine ponderomotorische Wirkung. Im Anschluß hieran läßt sich die Äquivalenz von Strömen und Magneten sowie die elektrische Theorie des Magnetismus, soweit sie nicht schon früher erledigt wurde, besprechen. Dann folgt die reziproke, ebenfalls ponderomotorische Wirkung von Magneten auf elektrische Ströme, bestehend in einer Ortsänderung der letzteren. Ein besonderes Interesse, sowohl im Hinblick auf Theorie wie auf Praxis, beanspruchen die Rotations- und Schwingungsapparate, die man, je nachdem sie auf der ersten oder zweiten Wirkung beruhen, als elektromagnetische oder magnetelektrische bezeichnen kann; gewöhnlich wird aber der erstere Name für die Gesamtheit der Erscheinungen gebraucht. — Waren die bisher angedeuteten Erscheinungen ponderomotorischen Charakters, so folgen nun solche, bei denen nur der magnetische bzw. der elektrische Zustand innerhalb der ruhenden Materie beeinflußt wird; also Erscheinungen, die man als magnetomotorische bzw. elektromotorische zu bezeichnen hat. In ersterer Hinsicht handelt es sich im wesentlichen um Magnetisierung durch elektrische Ströme; in letzterer zieht unsere Aufmerksamkeit ganz besonders das HALLsche Phänomen und die Gruppe der mit ihm verwandten Erscheinungen auf sich; wozu dann noch mancherlei anderes, nur anzudeutendes hinzukommt.

## Wirkung von Strömen auf Magnete.

**Grunderscheinungen. AMPÈREsche Regel.** Nach einigen unklaren Wahrnehmungen früherer Physiker fand OERSTED[1] im Jahre 1820 die erste deutliche und einfache Beziehung zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf, indem er die Ablenkung der Magnetnadel durch den Strom nachwies. Eine solche Ablenkung findet stets statt, wenn ein elektrischer Strom in der Nähe eines beweglichen Magneten vorbeifließt, es sei denn, daß dieser zufällig schon die ihm unter Einwirkung des Stromes und mit Rücksicht auf seine Bewegungsfreiheit zukommende Lage inne hat (s. w. u.). Die Ablenkung findet statt, gleichviel ob der Stromleiter von festem oder flüssigem Aggregatzustande ist (z. B. auch durch den Strom in Elektrolyten[2] oder in den erzeugenden Elementen selbst) und gleichviel, welcher elektromagnetischen Kraft der Strom sein Dasein verdankt, also auch durch den Entladungsstrom statischer Elektrizität[3], durch HERTZsche Schwingungen sowie durch die Erdströme; die letzteren wirken sogar häufig durch die unregelmäßigen Schwankungen, die sie den Nadeln erteilen, störend auf magnetische und elektrische Beobachtungen ein, besonders bei erdmagnetischen Störungen[4] und neuerdings in der Nähe elektrischer Verkehrsanlagen[5]; wegen der Wirkung elektrischer Konvektion vergleiche man weiter unten.

Der Sinn der Drehung wird am einfachsten durch die AMPÈREsche Regel[6] bestimmt: Denkt man sich selbst in dem Strome so liegend, daß er von den Füßen zum Kopfe fließt und daß man den Magneten resp. seinen Nordpol ansieht, so wird der Nordpol nach links abgelenkt. Kehrt man also die Stromrichtung um, so kehrt sich auch der Ablenkungssinn um; dagegen bleibt er der gleiche, wenn man einen und denselben Strom derart, daß er eine Zylinderfläche beschreibt, um den Magneten oder umgekehrt den Magneten um den Strom im Kreise herumführt. Außer der AMPÈREschen sind im Laufe der Zeit noch mehrere andere Gedächtnisregeln aufgestellt worden, die aber meist an allgemeinere Fälle elektromagnetischer Wirkung anknüpfen oder gar deren Gesamtheit umfassen sollen. Eine elementare Regel wie die AMPÈREsche ist die „Rechte-Hand-Regel“: bringt man den Zeigefinger der rechten Hand in die Richtung des Stromes, ihren Mittelfinger in die Richtung nach dem Pole, so gibt der gespannte Daumen die Richtung der Kraft an. Am allgemeinsten ist wohl die von Kreisströmen ausgehende, auf deren Inneres bezügliche ZEHNDERsche Regel[7]: Der positiv (d. h. im Uhrzeigersinne) kreisende Srom erzeugt positive (d. h. am Nordpol austretende) Kraftlinien (die Sehrichtung ändert daran nichts); und speziell für die ponderomotorische Wirkung: positiv kreisender Strom vermehrt durch die Drehung, die er hervorruft, die positiven Kraftlinien.

Um die Wirkung des Stromes allein zu beobachten, muß man die Wirkung des Erdmagnetismus aufheben, indem man entweder die Nadel in der zur Inklinationsrichtung senkrechten Ebene drehbar wählt und den Strom in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene führt[8]; oder indem man einen festen Kompensationsmagneten in der Nähe aufstellt oder statt der einfachen Nadel ein astatisches Nadelpaar benutzt; damit aber die beiden Nadeln des letzteren nicht auch von dem Strome entgegengesetzte Wirkungen erfahren, muß man den Strom von entgegengesetzten Seiten auf sie wirken lassen, also zwischen der oberen und unteren Nadel vorbeiführen. Man findet dann, daß die Nadel sich senkrecht

---

[1] H. C. OERSTED, Exp. circa efficaciam conflictus electr. in acum magn. Hafniae 1820. — Schweigg. Journ. **29**. 273. — Gilb. Ann. **66**. 295. — [2] Vgl. z. B. SHELDON und DOWNING, Phys. Rev. **7**. 122. 1898. — [3] FARADAY, RIESS, SAVARY, HANKEL u. a. — Vgl. A. MOUSSON, Physik **3**. 268. — [4] Vgl. den nächsten Artikel. — [5] Vgl. z. B. HARTWICH und COHN, El. Z. 1893. 669. — O. E. MEYER und K. MÜTZEL, El. Z. 1894. 33. — [6] AMPÈRE, Ann. Chim. Phys. **15**. 67. 1820; Gilb. Ann. **67**. 123. — [7] L. ZEHNDER, Wied. Ann. **57**. 459. 1896. — [8] AMPÈRE, Ann. Chim. Phys. **15**. 198. 1820; Gilb. Ann. **70**. 243. 1822.

gegen das vom Nadelmittelpunkte auf den Strom gefällte Lot stellt, also senkrecht zu der durch Strom und Lot bestimmten Ebene. Wie sich die Nadel unter gleichzeitiger Einwirkung des Erdmagnetismus einstellt, hängt von der Richtung und Entfernung ab, in welcher der Strom bei der Nadel vorbeifließt, und von seiner Stärke im Vergleich zum Erdmagnetismus. In allen diesen und den folgenden Versuchen bedient man sich der AMPÈREschen Stative, die inzwischen in verschiedenen Richtungen vervollkommnet worden sind.

Sieht man einen Magneten in erster Annäherung als ein einfaches Polpaar (S. 18) an, so kann man aus der beobachteten Wirkung des Stromes auf den Magneten seine Wirkung auf einen einzelnen Pol abstrahieren, eine Wirkung, die tatsächlich nicht vorkommt, aber für viele Betrachtungen von Wichtigkeit ist. Eine einfache, an die Querstellung des Polpaares gegen den Strom anknüpfende Betrachtung zeigt nun, daß auch die Wirkung auf einen Pol senkrecht steht auf dem von diesem Pol auf die Stromlinie gefällten Lote. Bei wirklichen Magneten hat man zu beachten, daß, wenn man deren Pole einführt, hierunter nicht die eigentlichen Fernwirkungspole, sondern die Pole für Wirkungen in der Nähe (s. Art. Magnetismus) zu verstehen sind.

Die Wirkung des elektrischen Stromes auf Magnete zeigt sich natürlich außer durch Ablenkung auch durch einen Einfluß auf die Schwingungsdauer an, und das ist von Wichtigkeit gerade für die Fälle, in denen eine Ablenkung nicht auftritt, weil die Ruhelage des Magneten schon von vornherein auch der Stromwirkung entspricht. In diesem einfachsten Falle wird also die Schwingungsdauer unter Einfluß des Erdmagnetismus durch den Strom verkleinert, in allen anderen Fällen treten komplizierte Verhältnisse ein.

Daraus, daß die Nadel sich senkrecht gegen die Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit dem Strome stellt, ist die wichtige Folgerung zu ziehen, daß es sich hier nicht, wie beim Magnetismus, um Anziehungs- und Abstoßungskräfte, sondern um seitliche oder drehende Kräfte handelt. Man kann dieses Verhalten ganz allgemein in dem Satze zusammenfassen: Die magnetischen Kraftlinien stehen auf den elektrischen senkrecht; sie fallen also in die elektrischen Niveauflächen, und umgekehrt die elektrischen Kraftlinien in die magnetischen Niveauflächen.

Damit ist natürlich nicht gesagt, daß nicht unter Umständen Bewegungen hervorgerufen werden, welche den Anschein von Anziehung oder Abstoßung erwecken. Man braucht nur die Kräfte und die beiden Pole zu betrachten und in geeignete Komponenten zu zerlegen, um einzusehen, daß außer der Drehung in den meisten Fällen auch eine Anziehung oder Abstoßung zustande kommt. Führt man z. B. über eine Wasserfläche, auf der eine Magnetnadel schwimmt, irgendwo einen Strom hinweg, so stellt sich die Nadel nicht nur senkrecht gegen den Strom, sondern sie schwimmt auch nach ihm hin, bis sie unter ihm liegt; auch zu einem vertikalen Strome wird eine schwimmende Nadel hingezogen; ferner erfahren die Pole einer gegen den Strom unsymmetrisch gelegenen Nadel im allgemeinen Anziehung oder Abstoßung usw. In diesen Fällen, deren man in der ersten Zeit nach Entdeckung des Erscheinungsgebietes sehr zahlreiche studierte[1], läßt sich immer und meist in sehr einfacher Weise zeigen, daß es sich nur um durch die Asymmetrie der ursprünglichen Konfiguration verwickelte Drehungserscheinungen handelt, und es bietet daher auch kaum Interesse dar, diesen Fällen näher zu treten. Dagegen folgt aus dem drehenden Charakter der Wirkung manche wichtige Einzelheit, insbesondere der Satz, daß eine Nadel unter Einwirkung eines Stromes im indifferenten Gleichgewicht ist, sich also auch nicht bewegt, wenn sie entweder nur in der den Strom enthaltenden Ebene oder nur um die Stromlinie als Achse drehbar ist.

[1] Z. B. ARAGO, POUILLET, DOVE, BOISGIRAUD. Vgl. v. FEILITZSCH, Fernwirkungen d. galv. Stromes. Hbg. 1865, und G. WIEDEMANN, Elektr. (3) 3.

**BIOT-SAVARTsches Gesetz.** Bisher ist nur vom Sinn und vom Wesen der Wirkung die Rede gewesen. Ihr vollständiges Gesetz ist von BIOT und SAVART[1] aufgestellt worden und heißt seitdem BIOT-SAVARTsches Gesetz. Es sagt zunächst aus, daß die Wirkung eines unendlich langen geradlinigen Stromes auf einen Magnetpol der senkrechten Entfernung zwischen beiden umgekehrt proportional ist, und läßt sich entweder durch Beobachtung der Schwingungsdauer in verschiedenen Abständen vom Strome — entweder unter Ausschluß oder unter geeigneter Berücksichtigung der Wirkung des Erdmagnetismus — beweisen, wobei man die Schwingungsdauern den Quadratwurzeln aus den Abständen, die Quadrate der Schwingungsdauern also den Abständen direkt proportional und folglich die Kräfte den Abständen umgekehrt proportional findet; oder mit Benutzung der Tatsache, daß ein um den vertikalen Strom als Achse in horizontaler Ebene drehbarer, auf ihn hinweisender Magnet (den man zu diesem Zwecke z. B. auf einen hölzernen, um den Strom konzentrisch aufgehängten Ring auflegen kann) im indifferenten Gleichgewichte ist, sich also nicht dreht, woraus folgt, daß die Drehungsmomente auf den näheren und den entfernteren Pol einander gleich sind, also die Kräfte sich umgekehrt wie die Hebelarme, d. h. wie die Abstände verhalten[2]. Das Gesetz gilt also in gleicher Weise für ganze Magnete wie (als Abstraktion) für einzelne Pole. Daß die Kraft ferner mit der Stromstärke (resp. der sich entladenden Elektrizitätsmenge) und mit der Polstärke proportional ist, kann man durch Variierung dieser beiden Größen ermitteln. Damit erhält man das BIOT-SAVARTsche Gesetz für die Kraft $K$ eines unendlich langen geradlinigen Stromes auf einen Magnetpol in der Form

$$K = \frac{c\,i\,m}{r} \quad .$$

Der Fall eines unendlich langen, geradlinigen Stromes läßt sich in der Praxis natürlich nicht streng, wohl aber meist tatsächlich realisieren, indem man ihn genügend lang wählt und durch Teile, die in genügender Entfernung von der Magnetnadel verlaufen, zu einem geschlossenen Kreise, der auch die elektromotorische Kraft enthält, vervollständigt. Inwieweit die entfernten Teile in ihrer Wirkung zu vernachlässigen sind, bedarf freilich einer kritischen Prüfung[3].

Übrigens ist es von besonderer Wichtigkeit, sich zu überlegen, daß die obige Formel ungiltig oder, richtiger ausgedrückt, unbestimmt wird, wenn die Entfernung null wird, d. h. wenn der Pol in der Stromlinie selbst liegt; denn alsdann wird zwar formell die Kraft unendlich, tatsächlich aber wird sie null, weil radiale Symmetrie besteht und keine ausgezeichnete Richtung mehr vorhanden ist, in der die Ablenkung erfolgen könnte. In der Stromlinie selbst ist also ein Magnetpol und folglich auch eine Magnetnadel im Gleichgewicht; sie erfährt keine Drehung. Aber, noch allgemeiner, ein Magnetsystem ist immer dann im Gleichgewicht, wenn es sich nur um eine Achse drehen kann, die mit der Stromlinie zusammenfällt — eine Tatsache, die man in mannigfacher Weise auch experimentell verfolgen kann; sowie man dann die Rotationsachse gegen die Stromachse verschiebt, tritt Drehung ein. — Es stellt sich im Anschlusse an diese Betrachtung die Frage ein, welchen Verlauf die Kraft bzw. das Drehungsmoment auf eine Nadel nimmt, wenn man sie immer mehr von der Stromlinie entfernt, und insbesondere, wo das Maximum dieser Wirkung liege. Wie sich zeigt, hängt das von den näheren Umständen ab, und es sei z. B. auf eine bezügliche Arbeit von GARNAULT[4] verwiesen. Fließt nämlich der Strom dem Meridian parallel und im Abstande $r$ von der Nadelmitte (Nadellänge $2\,l$) vorbei,

---

[1] J. B. BIOT u. N. SAVART, Ann. chim. phys. **15**. 222. 1820. — [2] J. C. MAXWELL, Elektr. u. Magn. **2**. 170. — [3] Vgl. z. B. M. RAVEAU, C. R. **130**. 31. 1900. — [4] E. GARNAULT, J. de phys. (3) **1**. 245. 1892.

so erfährt, wenn $\varkappa = i/H$ das Verhältnis der Stromstärke zum Erdfelde ist, die Nadel die durch die Gleichung

$$2\varkappa \operatorname{cotg}\varepsilon = r^2 + l^2 \sin^2\varepsilon$$

bestimmte Drehung $\varepsilon$, und es besteht zwischen dem Maximalwert $\varepsilon_0$ und der Entfernung $r_0$, für die es eintritt, die Beziehung

$$\varepsilon_0 = \operatorname{arccotg}\frac{r_0}{\varkappa} \quad ;$$

$r_0$ und $\varepsilon_0$ sind durch die Gleichungen

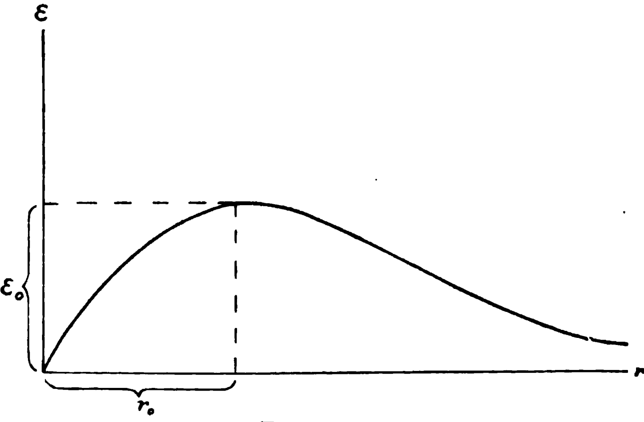
$$r_0^4 + \varkappa^2 r_0^2 - \varkappa^2 l^2 = 0 \quad ,$$

$$\sin^4\varepsilon_0 + \left(\frac{\varkappa}{l}\right)^2 \sin^2\varepsilon_0 - \left(\frac{\varkappa}{l}\right)^2 = 0$$

bestimmt, und die allgemeine Beziehung zwischen $r$ und $\varepsilon$ wird:

$$r = \varkappa \operatorname{cotg}\varepsilon \pm \sqrt{\varkappa^2 \operatorname{cotg}^2\varepsilon - l^2 \sin^2\varepsilon} \quad .$$

Diese Verhältnisse, die sich leicht experimentell bestätigen lassen, sind in Figur 171 veranschaulicht. — Um die Frage ganz allgemein studieren zu können, kann man sich einer auf Quecksilber schwimmenden Nadel bedienen und die durch das Quecksilber fließenden Ströme durch verschiedene Anordnung der Elektroden variieren; auf diese Weise hat u. a. DECHARME[1] die Grundgesetze bestätigt.




Figur 171.

**Magnetisches Feld und Potential eines geraden Stromes.** Da ein Magnetpol durch einen geraden Strom eine seitliche Kraftwirkung erfährt und diese Wirkung bei der seitlichen Bewegung des Pols immer weiter andauert, so erhält man als Kraftlinie einen Kreis mit der Strombahn als Achse und als System der Kraftlinien sämtliche Kreise, deren Ebenen auf der Strombahn senkrecht stehen. Die hierauf senkrechten Niveauflächen sind folglich die sämtlichen Ebenen, welche die Strombahn enthalten. Man erkennt die Analogie dieser Verhältnisse mit denen einer Wirbelachse und des diese Achse umgebenden geraden Wirbelfadens (vgl. Bd. 1); man wird sich also auch die von den geradlinigen Strömen ausgehenden Kraftlinien als einen Wirbel vorstellen können.

Es sei hier bemerkt, daß man das magnetische Feld eines Stromes, oder vielmehr einen ebenen Durchschnitt desselben natürlich in ganz derselben Weise wie das Feld von Magneten (vgl. o. S. 44) durch Eisenfeilspäne veranschaulichen und photographisch oder auf andere Art fixieren kann; nur muß man wie dort kräftige Ströme anwenden, um die Mitwirkung des Erdmagnetismus auf ein Minimum zu reduzieren. Für einen geradlinigen Strom erhält man (Figur 172a, b, c) in einer ihm parallelen Ebene lauter quergestellte Späne, in einer zu ihm senk-

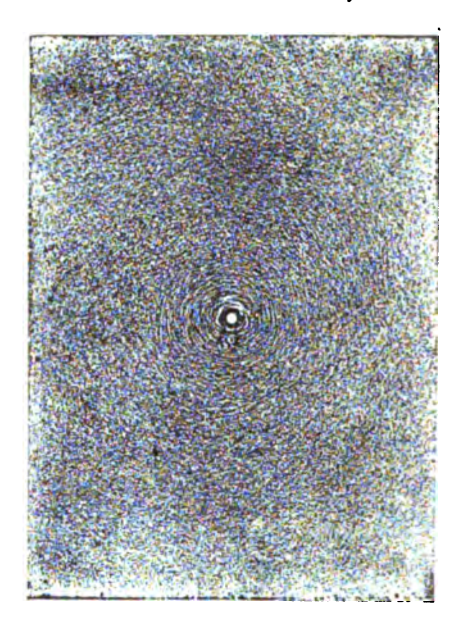
---

[1] C. DECHARME, C. R. **115**. 651. 1892.

rechten Ebene Anordnung in konzentrischen Kreisen, im Raume ein System zylindrisch-konzentrischer Wirbel. Auf einer von Strömen durchflossenen ebenen Platte stellen sich die Späne überall senkrecht zu den Stromlinien, sie stellen also zugleich die elektrischen Niveaulinien dar. Schon 1847 hat KIRCHHOFF[1] diesen Sachverhalt zur experimentellen Bestimmung der Liniensysteme auf

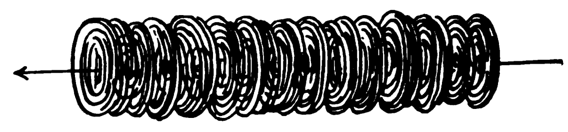


Figur 172a.



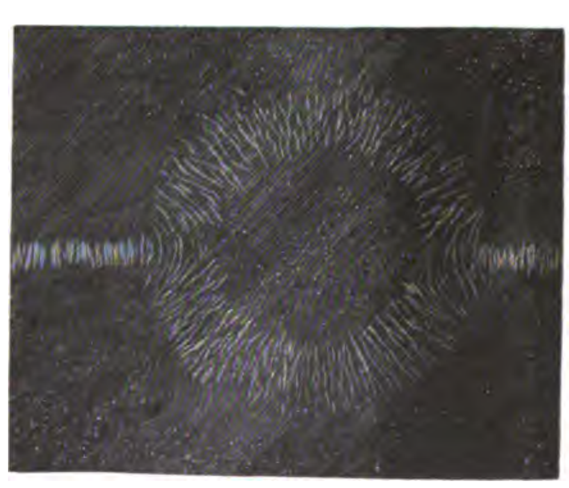
Figur 172b.

einer durchströmten Platte benutzt, seitdem ist das Verfahren allgemein, auch zur Demonstration, benutzt worden[2], und noch neuerdings hat LOMMEL[3] einige derartige Zeichnungen mitgeteilt, von denen Figur 172d (ringförmige Scheibe) ein Beispiel, Figur 172e (gekreuzte Bahnen, Diagonalstellung im gemeinsamen Stück) ein anderes gibt.



Figur 172c.

Der Wert des Potentials ergibt sich unmittelbar aus der bei einer kleinen Verschiebung eines Pols geleisteten Arbeit, nämlich $Kr\,d\alpha$, wenn $r$ der Abstand des Pols von der Strombahn und $d\alpha$ der Winkel ist, den $r$ bei der Verschiebung beschreibt; es ist also $V = \text{const} - Kr\alpha = \text{const} - cim\alpha$, wo man $\alpha$ von irgend einer durch die Strombahn begrenzten Ebene $E$ aus rechnen darf. Statt dessen kann man, indem man durch den Pol zu dieser Ebene eine parallele $E'$ legt, auch den Komplementwinkel $\beta$ zwischen der Pol-Stromebene und der eben genannten Parallelebene $E'$ einführen und statt dessen endlich die doppelt so große scheinbare Größe $\omega$, unter welcher die vom Strom begrenzte unendliche Halb-

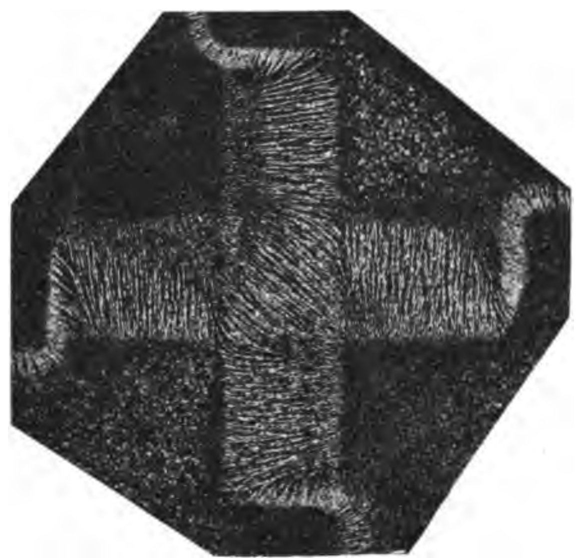


Figur 172d.

[1] G. KIRCHHOFF, vgl. Bd. 3. (1) 197. — [2] Besonders in den englischen Lehrbüchern sowie in EBERTs „Magn. Kraftfelder“ findet man sehr zahlreiche Beispiele abgebildet. — [3] E. LOMMEL, Wied. Ann. **48**. 462. 1893; **49**. 539. 1893; **50**. 316. 1893.

ebene $E$ von dem Pole aus erscheint, d. h. die Größe des von dem Flächenwinkel $\beta$ aus einer Einheitskugel herausgeschnittenen Zweiecks. Man findet dann:

$$V = \frac{c\,i\,m}{2}\,\omega + \text{const} \quad .$$



Figur 172 e.

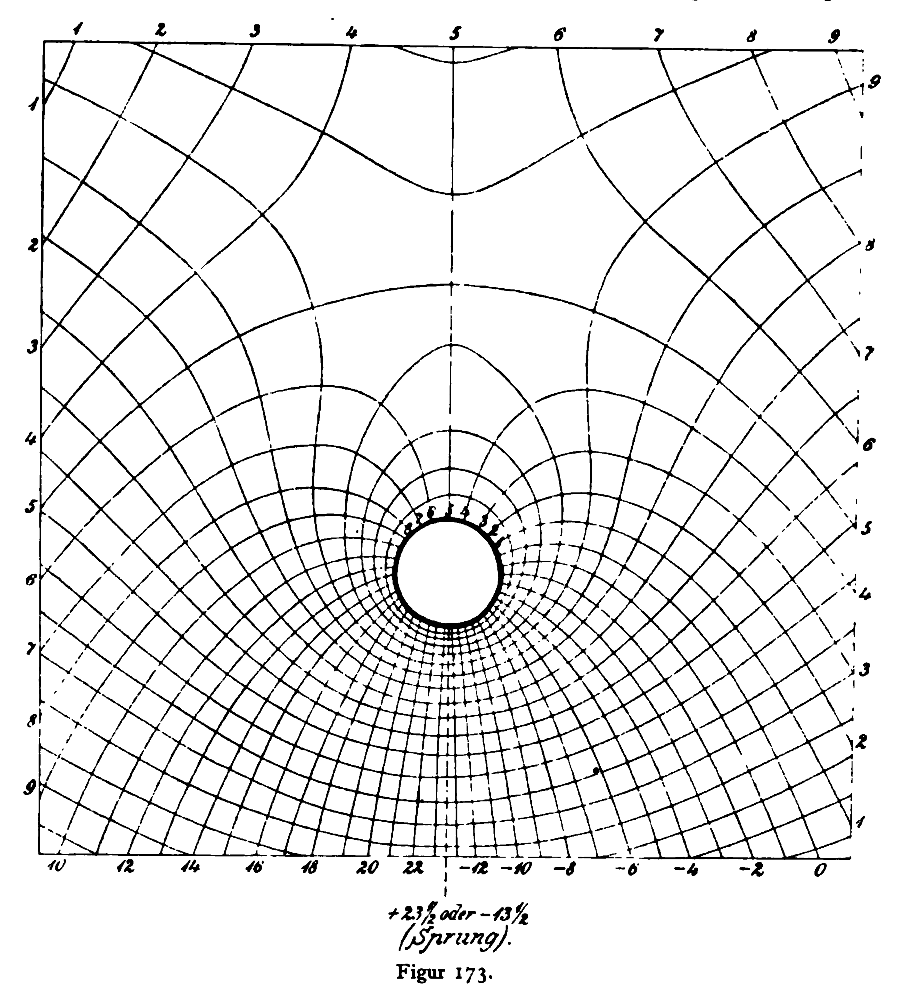
Dieses elektromagnetische Potential hat eine Eigenschaft, welche weder das magnetische noch das elektrische Potential besitzt, und welche den Erscheinungen des Elektromagnetismus ihren eigentümlichen Charakter verleiht; es ist nicht eindeutig, sondern vieldeutig. Führt man nämlich den Pol einmal im Kreise um den Strom herum, so nimmt wegen der dabei geleisteten Arbeit das Potential um $2\pi r K$, also um $4\pi\frac{c\,i\,m}{2}$ ab, und bei $n$-maliger Umkreisung um das $n$-fache dieses Betrages; es ist also allgemeiner als oben

$$V = \frac{c\,i\,m}{2}(\omega - 4\pi n) \quad .$$

**Geradliniger Strom in einem gleichförmigen Magnetfelde.** Das von einem Strom erzeugte Feld kann man natürlich ganz nach den früher (S. 39) angegebenen Regeln einem eigentlichen Magnetfelde superponieren, indem man die beiden Niveauliniensysteme zieht und die neuen Niveaulinien sucht, in denen die Summen beider Potentialwerte gleiche Beträge haben. Als einfachstes und wichtigstes Beispiel diene die Störung, welche in dem gleichförmigen Felde der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus erzeugt wird, wenn ein unendlicher gerader Strom vertikal in dasselbe hineingestellt wird. Das eine System von Niveaulinien besteht hier in äquidistanten Parallelgraden, das andere in den vom Stromquerschnitt ausgehenden Radienvektoren; das Ergebnis der Superposition mit Hinzufügung der Kraftlinien ist in Figur 173 nach MAXWELL[1] wiedergegeben; das Feld geht von rechts nach links, der Strom, von welchem nur der Durchschnitt mit der Zeichnungsebene wiedergegeben ist, von oben nach unten. Die Störung ist, wie man sieht, unsymmetrisch; in der oberen Hälfte gehen die Niveaulinien (mit Ziffern 1, 2 usw. bezeichnet) wie sonst weiter, nur daß sie vor dem Strome nach vorn, hinter ihm nach hinten vor ihm ausweichen; in der unteren Hälfte dagegen nimmt das Potential rapide zu, sinkt aber dann plötzlich auf einen sehr niedrigen Wert herab und erhebt sich endlich allmählich wieder zur normalen Höhe. Jede Niveaulinie, von der für $V = -13\frac{1}{2}$ bis zu der für $V = +23\frac{1}{2}$, besteht deshalb aus zwei im allgemeinen unsymmetrischen Zweigen, von denen der eine beiderseits in die Unendlichkeit, der andere einerseits in diese, andererseits in den Stromleiter mündet. Die Kraftlinien andererseits verlaufen tief unten und hoch oben (in der Zeichnung nicht sichtbar) horizontal, dicht um den

[1] J. C. MAXWELL, El. u. Magn. 2. 182. u. Tafel 18.

Stromleiter in Kreisbahnen, der Übergang von letzteren zu ersteren wird durch erst geschlossene, eiförmige, dann nach oben offene, tulpenförmige Kurven gebildet.




Figur 173.

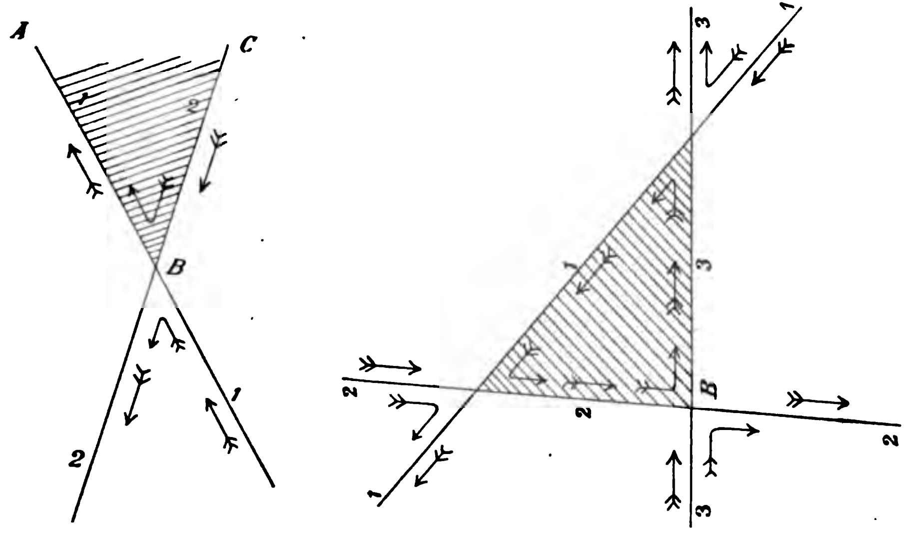
An diesem Beispiele kann man die Verhältnisse eines kombinierten Feldes besonders gut studieren.

**Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol.** Die oben gemachte Abstraktion, durch welche vom ganzen Magneten auf sein Element, einen Pol übergegangen wurde, läßt sich noch weiter führen, indem man auch den Strom in seine Elemente zerlegt und die Wirkung eines einzigen Stromelements, wie es in der Wirklichkeit natürlich nicht existiert, auf einen Pol betrachtet. Man kann sich Anordnungen denken, durch welche man diese Wirkung mehr oder weniger angenähert ermitteln kann, man kann sie aber auch theoretisch durch die Erwägung bestimmen, daß sie durch ein Differential dargestellt sein muß, dessen Integral das BIOT-SAVARTsche Gesetz ergibt. An Stelle des reziproken $r$ tritt hierbei, wie man sofort einsieht, das reziproke $r^2$, und außerdem kommt für ein Stromelement von der Länge $dl$, das mit der von ihm nach dem Pole gezogenen Linie den Winkel $\varepsilon$ bildet, der Faktor $dl \sin\varepsilon$ hinzu; man erhält also das fragliche Elementargesetz in der Form

$$dK = -\frac{c\,m\,i\,dl}{r^2}\sin\varepsilon \quad .$$

Aus der Proportionalität von $dK$ mit $dl \sin\varepsilon$ läßt sich übrigens eine interessante Folgerung ziehen, deren durch die Erfahrung gelieferte Bestätigung dann zugleich eine Probe für das Elementargesetz abgibt; $dl \sin\varepsilon$ ist nämlich die Projektion des Stromelements auf die zur Verbindungslinie mit dem Pole senkrechte Richtung; ein mit dieser Projektion zusammenfallendes Element würde also eine ebenso große Kraft wie das wirkliche ausüben, eine aus lauter irgendwie geformten Zacken oder Biegungen zusammengesetzte Linie also dieselbe Wirkung wie die ihre Endpunkte verbindende gerade Linie, wenn nur die Zacken und Biegungen klein genug sind, um die Entfernung der betreffenden Elemente vom Pole nicht wesentlich zu beeinflussen. Dieser Schluß läßt sich in der Tat leicht verifizieren, und zwar nicht nur für gerade, sondern auch für kreisförmige und andere Stromleiter. Aus dieser Elementarformel kann man noch beliebige, wirklichen Fällen entsprechende Formeln ableiten, indem man sich einerseits statt des Pols ein Polpaar denkt und das Drehungsmoment und die Kräfte in irgend welchen Richtungen ermittelt, und indem man andererseits aus dem Stromelemente geschlossene Ströme von irgend welcher Bahn zusammensetzt. Im allgemeinen, insbesondere bei ganz frei beweglichen Magneten, werden die Formeln natürlich sehr kompliziert, sie haben aber auch nur in bestimmten Fällen Interesse, und unter diesen zeichnen sich wenigstens einige durch relative Einfachheit aus.

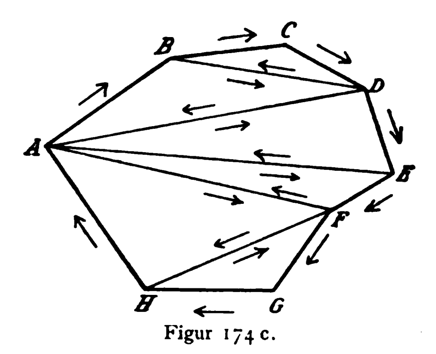
**Potential eines beliebigen geschlossenen Stromes.** Im Anschluß an das Potential eines geradlinigen Stromes kann man leicht auch das Potential eines Winkelstromes, sowie eines Dreieck- oder Vieleckstromes auf einen Magnetpol ableiten, und man findet dann überall den Satz bestätigt, daß das Potential




Figur 174 a. Figur 174 b.

proportional ist der scheinbaren Größe der betreffenden, von den Strömen eingeschlossenen Flächen vom Pole aus gesehen. Bei einem Winkelstrome erstreckt sich diese Fläche, wie bei einem geradlinigen, in die Unendlichkeit — man betrachte z. B. die Fläche $ABC$ in Figur 174a —, bei einem Dreieck nicht mehr — $ABC$ in Figur 174b —; die scheinbare Größe ist aber natürlich in allen Fällen eine endliche Größe. Nun kann man jede beliebige, von einem geschlossenen Strome eingefaßte Fläche in lauter kleine Dreiecke zerlegen und an Stelle des gegebenen Stromes geeignet gerichtete Ströme um alle diese Dreiecke setzen — für endliche Dreiecke in Figur 174c angedeutet —, da von diesen

Strömen alle im Innern gelegenen Strecken sich gegenseitig wegheben und folglich nur der ursprünglich gegebene Strom übrig bleibt; daraus folgt, daß der Satz gilt: Die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromes auf einen Magnetpol ist proportional mit der scheinbaren Größe der vom Strome umschlossenen Fläche, gesehen vom Pole aus, in Formel:



Figur 174 c.

$$V = \frac{c\,i\,m}{2}\,\omega + \text{const} \quad .$$

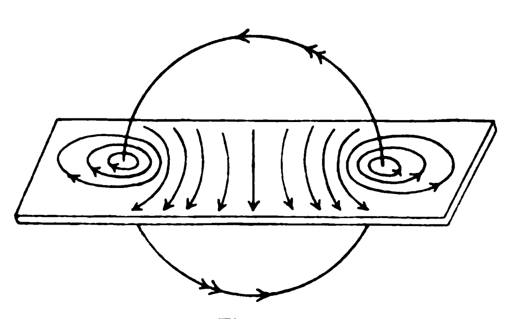
**Wirkung eines Kreisstromes.** Der einfachste und wichtigste Fall eines geschlossenen Stromes ist der, in welchem der Leiter eine Kreislinie bildet und der Pol auf der Achse, d. h. auf der im Mittelpunkte der Kreisfläche errichteten Senkrechten liegt. Die Wirkung jedes Stromelementes kann man dann in eine Komponente parallel zur Kreisebene und in eine solche senkrecht darauf zerlegen; summiert man die ersteren sowohl wie die letzteren über alle Stromelemente des Kreises, so erhält man für jene die Summe null, so daß die Gesamtkraft in der Richtung der Achse wirkt, die Wirkung also in diesem Falle tatsächlich den Charakter einer Anziehungs- oder Abstoßungskraft annimmt: und für diese Kraft findet man, wenn $a$ der Kreisradius und $x$ der Abstand des Poles vom Kreismittelpunkte ist:

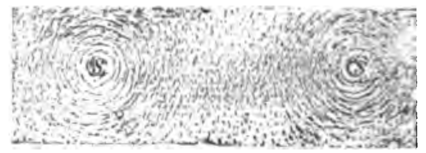
$$X = 2\pi\,c\,i\,m\,\frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad ,$$

und speziell, wenn der Pol im Mittelpunkte des Kreises selbst liegt:

$$X = \frac{2\pi\,c\,i\,m}{a} \quad .$$

Dasselbe würde man natürlich aus dem Potential (scheinbare Größe) durch Differentiation ableiten können. Die Wirkung ist also bei geringem Abstande des Poles von der Stromebene desto größer, je kleiner der Kreis ist, für große Abstände dagegen desto größer, je größer der Kreis ist. Aus dieser Wirkung auf einen Pol folgt, daß ein unendlich kurzes Polpaar sich vermöge des auf dieses wirkenden Drehungsmomentes in die Achse einstellt, wenn keine Gegenkraft wirkt, daß

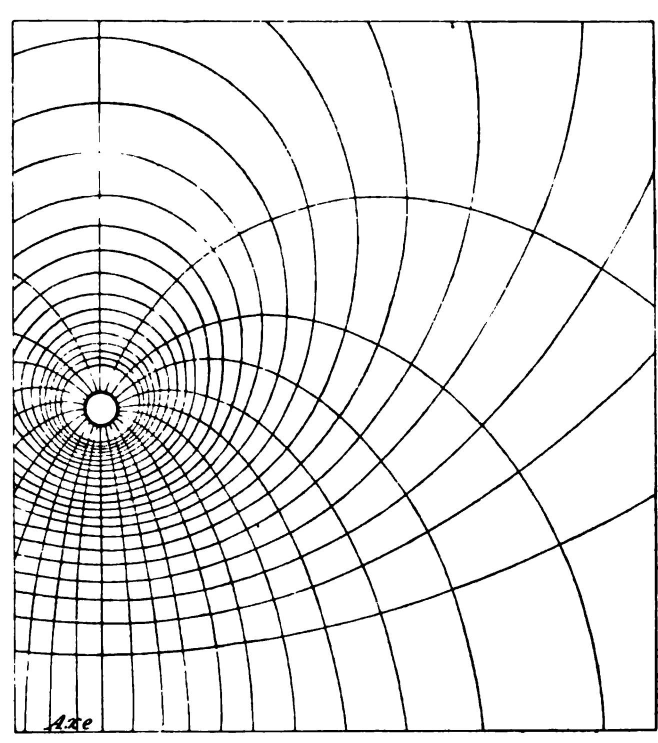

Figur 175 a.


Figur 175 b.

es unter Mitwirkung des Erdmagnetismus $H$ und wenn die Stromebene in den Meridian gelegt wird, mit der Stromebene einen Winkel bilden wird, dessen Tangens mit dem Verhältnis $X : H$, also caeteris paribus mit $i : H$ proportional ist; daß endlich für Magnete von endlicher Länge Korrektionsglieder hinzutreten werden, und überdies außer dem Drehungsmoment noch eine aus der verschiedenen Entfernung der Pole resultierende Anziehungs- oder Abstoßungskraft auftritt. Alle diese Verhältnisse sind schon in Bd. 4, S. 256 ff. entwickelt worden, als es sich

um die Wirkungsweise der Tangentenbussole als Meßinstrument für elektrische Ströme handelte. In Figur 175a sind die Kraftlinien eines Kreisstromes in einer zu seiner Ebene senkrechten Ebene schematisch-perspektivisch, in Figur 175b die entsprechende Anordnung von Feilspänen, in Figur 175c endlich sind für einen Ausschnitt Kraft- und Niveaulinien nach THOMSON und MAXWELL dargestellt; die Stromebene steht auf der Zeichnung senkrecht, eine ihrer Schnitte ist die weiße Kreisfläche. Die Gleichung der Kraftlinien selbst führt auf elliptische Integrale (vgl. MAXWELL 2, S. 421).

Wenn der Pol nicht auf der Achse des Kreises liegt, wird die Entfernung der einzelnen Stromelemente von ihm verschieden, und infolgedessen werden die Formeln komplizierter. Von Wichtigkeit sind aber nur einige Fälle resp. Anwendungen, so der schon oben erwähnte Fall einer Nadel von endlicher Länge, deren Mittelpunkt zwar auf der Achse liegt, deren Pol aber eben deshalb bereits in einem gewissen Abstande von der Achse liegen; dieser Fall ist ebenfalls a. a. O. behandelt worden. Ferner wurde dort auch der Fall erörtert, daß bei horizontal gedachter Achse die Kreisebene gegen die Vertikale geneigt wird, so daß der Pol oder die Nadel nun nicht mehr auf der Achse, sondern unsymmetrisch nach der Seite hin liegen. Es genüge daher, hier noch den Fall anzuführen, in welchem der Pol resp. die Nadel in einer Kreisebene, aber außerhalb der Kreislinie so liegt, daß die Magnetachse mit der Fortsetzung eines Kreisradius zusammenfällt. Ist $l_1$ die Entfernung des Pols vom Kreiszentrum, so ist die Kraft, welche von einem in der Poldistanz $\varphi$ liegenden Stromelemente ausgeht:



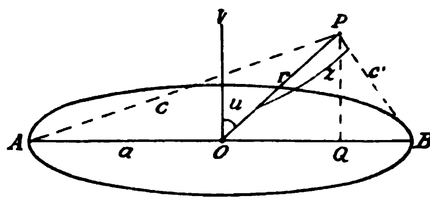
Figur 175 c.

$$dK = \frac{c\,i\,m\,(l_1 \cos\varphi - a)}{(a_2 + l_1^2 + 2\,a\,l_1 \cos\varphi)^{3/2}}\,a\,d\varphi \quad ,$$

und das ist von 0 bis $2\pi$ zu integrieren. Ebenso ist für den anderen Pol, dessen Entfernung $l_2$ sei, zu verfahren. Entwickelt man schließlich, wie in ähnlichen früher behandelten Fällen, nach Potenzen des als klein angenommenen Verhältnisses $l : r$ (Länge des Magneten zur Entfernung seines Mittelpunktes vom Kreismittelpunkte), d. h. des Verhältnisses $l_2 - l_1 : (l_1 + l_2)/2$, so gelangt man schließlich, wenn $M$ das Moment des Magneten und $F$ die Kreisfläche ist, zu dem Drehungsmoment

$$D = \frac{2iFM}{r^3} \quad .$$

Dieses Drehungsmoment ist also umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des Nadelmittelpunktes vom Kreismittelpunkte; es hat also einen ähnlichen, aber nicht denselben Wert wie für den Fall axialer Lage des Magneten.



Figur 176.

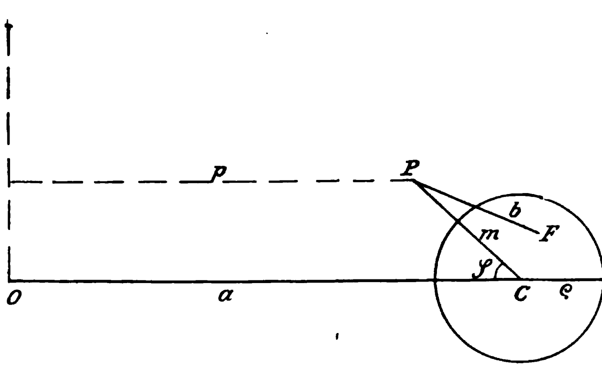
Im allgemeinen Falle muß man die scheinbare Größe oder den Kegelwinkel der Kreisfläche, vom Pole aus gesehen, wirklich darstellen. Man kann hierzu entweder die Entwickelung nach Kugelfunktionen benutzen, und zwar verschiedene, je nachdem der Abstand des Poles vom Kreismittelpunkt größer oder kleiner ist als der Kreisradius; oder man erhält einen geschlossenen Ausdruck mit Hilfe von elliptischen Integralen dritter Gattung. Dieser Ausdruck ist, wenn in Figur 176 der Winkel $POV$ mit $u$, $OA$ mit $a$, $PQ$ mit $z$, $PO$ mit $r$, $PA$ bzw. $PB$ mit $c$ bzw. $c'$, der Ausdruck $1 - (c'/c)^2$ mit $k^2$ bezeichnet und

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

gesetzt wird, der folgende:

$$\omega = 2\pi - \frac{2z}{cr}\left[\frac{r-a}{1+u}\Pi\left(\frac{-2u}{1+u}, k\right) + \frac{r+a}{1-u}\Pi\left(\frac{2u}{1-u}, k\right)\right] \quad .$$

Wenn der Pol sehr nahe an die Strombahn heranrückt, wird es notwendig, die Fiktion, diese letztere sei eine mathematische Linie, fallen zu lassen und ihren Querschnitt einzuführen. Für diesen Fall hat MINCHIN[1] die Rechnung durchgeführt, und zwar nicht bloß bei über den ganzen Querschnitt konstanter, sondern auch bei variabler Dichte; dabei werden die kleinen Größen bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt; für gleichförmige Querschnittverteilung hat man einfach das Flächenintegral über alle elementaren Kegelwinkel der einzelnen Stromfäden zu bilden und findet; wenn der Querschnitt ein Kreis vom Radius $\varrho$ ist und in Figur 177, die einen Querschnitt und das Zentrum $O$ der Strombahn zeigt, die Linie $CP$ mit $m$, die Linie $FP$ mit $b$, der Winkel $OCP$ mit $\varphi$ bezeichnet und zur Abkürzung $l$ für log $(8a/b)$ geschrieben wird:



Figur 177.

$$\frac{\int\omega\, dq}{\pi\varrho^2} = 2(\pi - \varphi) - \frac{\sin\varphi}{a}\left(m\,l - \frac{\varrho^2}{4m}\right) - \frac{\sin 2\varphi}{16a^2}\left[(6l - 5)m^2 - \varrho^2\left(1 + \frac{\varrho^2}{6m^2}\right)\right] \; ;$$

bei variabler Stromdichte kommt es natürlich auf deren Gesetz an.

[1] G. M. MINCHIN, Phil. Mag. (5) **35**. 354. — **36**. 201. 1893.

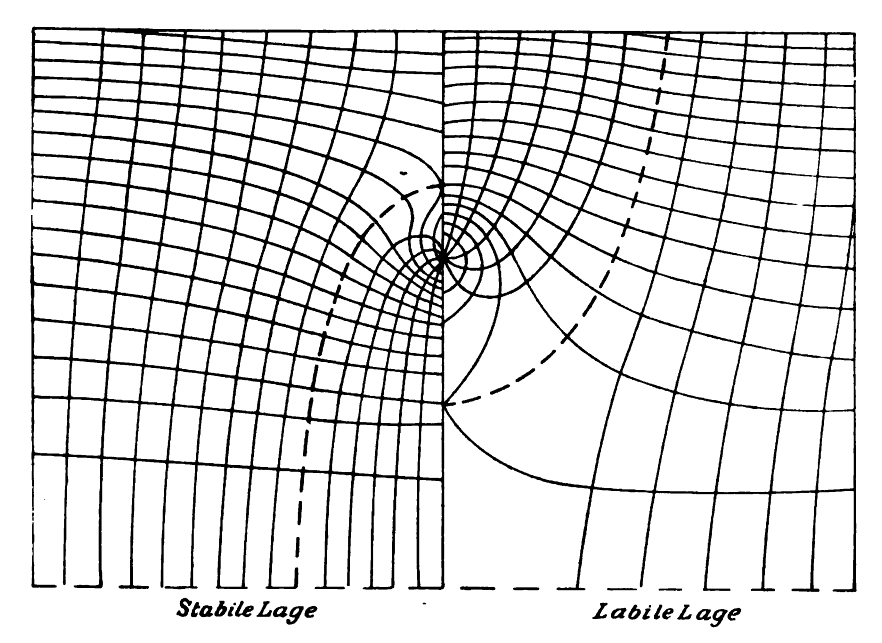
Schließlich ermittelt MINCHIN noch den Verlauf der Kraftlinien in den entsprechenden Fällen; und zwar bedient er sich hierzu des einfachen Satzes, daß, wenn $G$ das Vektorpotential und $p$ der Abstand des betreffenden Punktes von der Kreisachse (Lot im Kreiszentrum) ist, für eine Kraftlinie $G \cdot p = \text{const}$ ist; diese Gleichung nimmt die Gestalt

$$[(1 + k'^2) K - 2E] \cdot p = \text{const}$$

an, wo $k'$ der zu $k$ komplementäre Modul, also $k' = c'/c$ ist und $K$ und $E$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sind; auch dieses Ergebnis kann man auf den Fall endlichen Querschnittes ausdehnen. Es wird dann auch ein geometrisches Verfahren zum Zeichnen der Kraftlinien angegeben; es muß aber an diesem Hinweise genügen.

Ganz neuerdings hat auch NAGAOKA[1] das Problem in — was das Resultat betrifft — geschlossener Weise behandelt, und zwar etwas anders wie MINCHIN. Er geht von dem von H. WEBER gefundenen Ausdrucke für das Potential einer homogenen Kreisscheibe mit Hilfe von BESSELschen Funktionen aus, erhält durch Differentiation den Ausdruck für die Doppelschicht oder den mit ihr äquivalenten Kreisstrom, formt mittels der WEIERSTRASSschen Funktionen und der JACOBIschen Reihen um und erhält auf diese Weise so ungewöhnlich starke Konvergenz, daß für fast alle praktischen Fälle das erste Glied genügt.

**Kreisstrom im gleichförmigen Felde.** Bisher wurde der Kreisstrom für sich betrachtet. Bringt man ihn jetzt in ein gleichförmiges Feld, z. B. das der




Figur 178.

Erde, so wird der Kreisstrom sich in bestimmter Weise einstellen; es bedarf aber nur einer einfachen Überlegung, um einzusehen, daß es zwei verschiedene (entgegengesetzte) Gleichgewichtslagen gibt, eine stabile und eine labile; in jeder von ihnen wird die Superposition der Kraft- und Niveaulinien in anderer Weise sich vollziehen. Es muß genügen, diese Verhältnisse durch Wiedergabe der den beiden Fällen entsprechenden, von MAXWELL gelieferten Zeichnungen (Figur 178) zu veranschaulichen.

[1] H. NAGAOKA, Phil. Mag. (6) 6. 19. 1903.



**Wirkung von Spulen**[1]. Hat man nicht einen einzigen, sondern mehrere Kreisströme, so gelangt man zu Wirkungen, die erstens kräftiger sind, zweitens aber die Möglichkeit eröffnen, das erzeugte magnetische Feld in beliebiger Weise zu gestalten und es insbesondere auch dem Charakter der Gleichförmigkeit mehr oder weniger zu nähern. Sind die Windungen einander, im Vergleich zum Abstande der Pole, unmittelbar benachbart, so kann man einfach summieren und erhält dann dieselbe Formel wie oben, nur daß jetzt $F$ die Summe aller Flächen bedeutet. In der Praxis vereinigt man natürlich meist alle Kreisbahnen zu einer einzigen spiraligen Bahn, bei welcher die einzelnen Umgänge nur äußerst wenig von der Kreisgestalt abweichen; $F$ heißt dann die Windungsfläche, von deren Bedeutung für die Strommessung und von deren Ermittelung ebenfalls schon die Rede gewesen ist (Bd. **4**, S. 278).

Sind die verschiedenen Kreisströme zwar noch konzentrisch, aber einander nicht mehr unendlich benachbart, so muß man ihre verschiedenen Radien berücksichtigen, kann dann aber ohne Schwierigkeit ihre Wirkungen auf ein axiales Teilchen ermitteln; Fälle dieser Art sind die mehrerer konzentrischer Kreisströme sowie einer ebenen Spirale, solange man deren einzelne Umgänge näherungsweise als Kreise betrachten kann. Wichtiger sind die Fälle, in welchen die verschiedenen Kreise nicht in einer und derselben Ebene, ihre Mittelpunkte aber auf der Achse liegen. Ein solcher Fall, der zweier paralleler gleich großer Kreisströme oder eines nach Art eines Doppelkegels angeordneten Systems solcher, in deren Mittelpunkten resp. Scheitelpunkten die Nadel schwebt, ist am angeführten Orte erörtert und dabei gezeigt worden, daß hier in der Umgebung der Nadel ein recht gleichförmiges Feld entsteht (Figur 71, Bd. **4**, S. 263), was zur Konstruktion der HELMHOLTZschen und der GAUGAINschen Bussole Anlaß gegeben hat.

Am wichtigsten ist der Fall einer zylindrischen Spule, in deren Achse sich der Pol befindet. Diesen Fall kann man in verschiedener Weise behandeln, entweder indem man die Spule als ein System paralleler Kreisströme betrachtet und die Formel für letztere anwendet oder, was genauer ist, indem man sie als wirkliche Spule betrachtet und von der Formel für ein Stromelement ausgeht. Denkt man sich den Draht, der die Spule bildet, von ihren letzten Windungen durch die Achse oder auf einem dieser parallelen Wege wieder zum Anfang zurückgeführt, so wird hierdurch die Wirkung derjenigen Komponenten jedes Stromelementes, welche parallel zur Achse liegen, aufgehoben, und es kommen folglich nur die Komponenten senkrecht zur Achse in Betracht. Für die in der Richtung der Achse auf den Pol ausgeübte Kraft $X$ findet man dann:

$$X = \frac{c\,i\,m}{a}\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon\left[\frac{x+l}{\sqrt{a^2+(x+l)^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{a^2+(x-l)^2}}\right] .$$

Hierin ist $2l$ die Länge, $a$ der Radius der Spule, $\varepsilon$ der Steigungswinkel des Spulendrahtes und $x$ der Abstand des Poles vom Mittelpunkte der Spule. Wenn die Spule eng gewunden, $\varepsilon$ also sehr klein ist, und wenn die Spule $n$ Windungen hat, so kann man dafür auch schreiben:

$$X = \frac{\pi\,c\,i\,m\,n}{l}\left[\frac{x+l}{\sqrt{a^2+(x+l)^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{a^2+(x-l)^2}}\right] .$$

Sieht man von der Klammergröße ab, so kann man also sagen, daß die von der Spule ausgehende Kraft auf einen Magnetpol der Stromstärke, der Polstärke und der auf die Einheit der Achsenlänge entfallenden Zahl von Windungen proportional ist. Eine dritte Form für $X$ erhält man durch Einführung der Winkel

---

[1] H. HÄDENKAMP, Pogg. Ann. **78**. 59. 1849. — J. C. MAXWELL, El. u. Magn. **2**. 417. J. STUART, Phil. Mag. (4) **45**. 219. 1873. — J. STEFAN, Wien. Ber. **69** (2). 165. 1874 und viele andere. — G. M. MINCHIN, Phil. Mag. (5) **37**. 204. 1894.

$\varphi_1$ und $\varphi_2$, unter welchen, von dem zunächst außerhalb der Spule liegend gedachten Pole aus gesehen, der Radius der vordersten und der der hintersten Windung erscheint. Man hat dann

$$X = \frac{\pi c i m n}{l}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \quad .$$

Von dieser Formel kann man übrigens mit Leichtigkeit zu der für das Potential $V$ übergehen, indem man statt der Kosinus die Sinus einführt, und man sieht dann, daß auch hier die scheinbare Größe auftritt. Auch hier erhält man also die einfachste Ausdrucksweise der elektromagnetischen Wirkung durch Einführung der scheinbaren Größe, indem man sagt: Das Potential einer Spule ist proportional der Differenz der scheinbaren Größe der vordersten und der hintersten Kreisfläche, vom Pole aus gesehen. Ist die Spule im Vergleich zum Abstande des Poles von der Vorderfläche sehr lang, so kann man das zweite Glied in dem Ausdrucke für $X$ einfach gleich 1 setzen, das Potential wird dann geradezu proportional der scheinbaren Größe der Vorderfläche. Liegt analog für eine beliebige Rolle der Pol in der vorderen Fläche, so wird in dem dritten Ausdrucke für $X$ das erste Glied $\cos\varphi_1 = 0$, also in dem besonderen Falle einer sehr langen Rolle $X = -\pi c i m n / l$; liegt der Pol im Innern der Spule, so kann man sich diese aus zwei Spulen zu seinen beiden Seiten, für deren jede der Pol in der vorderen Fläche liegt, zusammengesetzt denken, und findet dann statt der Differenz in obiger Klammer die entsprechende Summe: diese Summe wird schießlich am größten, wenn der Pol im Mittelpunkte der Spule liegt; führt man für diesen Fall die Diagonale $2d$ der Spule in die zweite Formel für $X$ ein, so erhält man einfach

$$X = \frac{2 \pi c i m n}{d} \quad .$$

Man kann nun endlich noch die beiden Fälle der ebenen Spirale und der zylindrischen Spirale kombinieren und erhält dann den Fall einer Spule von mehreren Lagen und, in jeder Lage, mehreren Windungen; die Wirkung einer solchen Spule hängt von ihrer Länge, ihrem äußeren und inneren Radius und der Gesamtzahl der Windungen ab. Eine Berechnung des Potentials für diesen Fall findet man u. a. bei MAXWELL, für beliebige (nicht axiale) Lage des Poles bei STUART und, mit Benutzung der elliptischen Integrale, im Anschluß an frühere Entwickelungen (vgl. o. S. 422) bei MINCHIN[1]; einige Formeln, die sich auf ihn beziehen, in Bd. 4, S. 278 dieses Handbuches. Hierbei ist angenommen, daß die innere und die äußere Begrenzung der Spule eine Zylinderfläche sei, und diese Form genügt auch, um, wenn die Rolle nur genügend lang ist, in ihrem mittleren Teile ein gleichförmiges Feld zu erzeugen. Ist z. B. die Spule 40 mal so lang wie dick, so ist nach einer von W. WEBER[2] durchgeführten Rechnung die Kraft auf mehr als $^7/_8$ ihrer Länge bis auf $1\%$, und auf $^2/_3$ ihrer Länge sogar bis auf 1 Promille konstant. Will man diesen Zweck erreichen, ohne die Rolle so lang nehmen zu müssen, so muß man sie nicht auf einen Zylinder, sondern auf eine Kugel oder ein Ellipsoid wickeln, und zwar so, daß auf die Längeneinheit der Achse überall die gleiche Zahl von Windungen entfällt. Der hierauf basierte, zu absoluten Messungen sehr geeignete Tangentenmultiplikator von RIECKE ist in Bd. 4, 264 besprochen worden. Eine andere Aufgabe ist die, diejenige Form der Spule zu ermitteln, für welche die Wirkung unter gewissen gegebenen Bedingungen am günstigsten ausfällt; hierüber vergleiche man das Bd. 4, 279 Angedeutete und die dazu gehörige Figur 76.

---

[1] G. M. MINCHIN, Phil. Mag. (5) 37. 204. 1894. Leider scheint diese Arbeit, die interessante Sätze enthält, nicht zu Ende geführt zu sein. — [2] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbest. 3. 546. 1852.

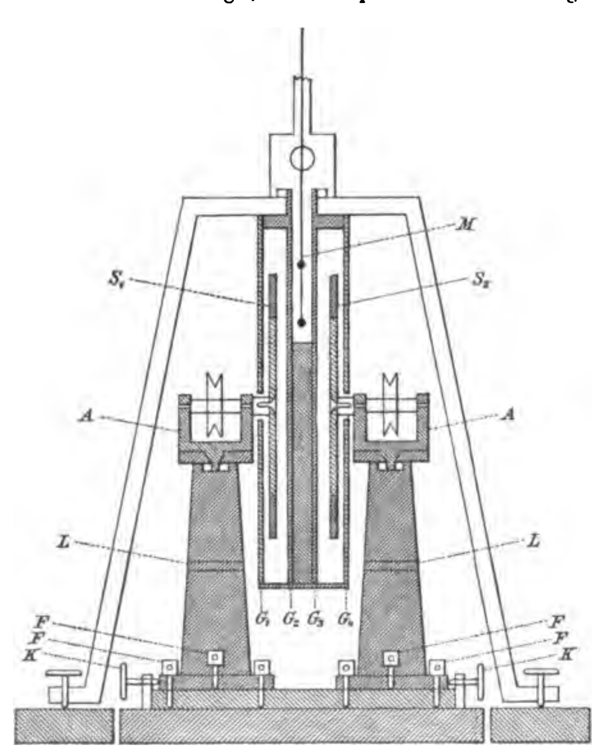
Für einen ein Rechteck durchfließenden Strom hat MINCHIN[1] gezeigt, daß man das Potential auf einen beliebigen Punkt in endlicher Form darstellen kann, indem man die Winkel ausdrückt, die die Seiten der projizierenden Pyramide miteinander einschließen. Die magnetische Kraft selbst läßt sich wenigstens für Punkte in der Ebene des Rechtecks in einfacher Form angeben. Fällt man nämlich von dem betreffenden Punkte Lote auf die Seiten des Rechtecks, verbindet deren Fußpunkte und fällt auf die Seiten des so entstandenen Vierecks von neuem Lote $p$, $q$, $r$, $s$, so ist die Feldstärke ($i$ die Stromstärke)

$$H = i\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \quad ,$$

wobei zu beachten ist, daß für Punkte außerhalb des Rechtecks gewisse dieser Glieder negativ zu nehmen sind; übrigens läßt sich der Ausdruck durch eine einfache graphische Konstruktion ermitteln. Schließlich läßt er sich auf den Fall einer rechteckigen Spule ausdehnen.

Wegen des Falles eines elliptischen Stromes sei auf eine Mitteilung von JONES[2] verwiesen.

**Magnetische Wirkung der elektrischen Konvention.** Bisher ist die magnetische Wirkung elektrischer Ströme betrachtet worden, d. h. die Wirkung von Elektrizität, die sich durch ruhende Leiter hindurchbewegt. Es erhebt sich die interessante Frage, ob entsprechende Wirkungen auch entstehen, wenn sich die Elektrizität dadurch bewegt, daß sich der Träger, in dem sie selbst ruht, durch den Raum bewegt; eine Elektrizitätsbewegung, die man in Analogie mit anderen Erscheinungen als elektrische Konvention[3] bezeichnet. Die Notwendigkeit der Entscheidung dieser Frage haben unabhängig voneinander v. HELMHOLTZ und ROWLAND erkannt, und ROWLAND[4] hat auch die ersten Versuche mit positivem Ergebnisse angestellt. Eine vergoldete Ebonitscheibe läßt sich in schnelle Rotation um eine vertikale Achse versetzen; sie selbst wird kräftig geladen, die beiden sie flankierenden festen, ebenfalls vergoldeten Glasscheiben werden zur Erde abgeleitet; die Wirkung wird an einem astatischen Nadelpaare beobachtet, dessen Nadeln senkrecht zum Scheibenradius, die untere dicht, die obere weit über der oberen Glasscheibe sich befinden. Nun erhielt man auch ohne Ladung schon eine Wirkung, herrührend



Figur 179.

[1] G. M. MINCHIN, Electrician **35**. 603 u. 706. 1895. — [2] V. JONES, Electrician **37**. 159. 1896. — [3] H. v. HELMHOLTZ, Berl. Mon.-Ber. 1876. 211. — Pogg. Ann. **158**. 487. — Abh. **1**. 791. — [4] H. ROWLAND, ebenda.

vom Rotationsmagnetismus; nach der Ladung kam aber hierzu eine neue Wirkung, und sie wechselte mit der Ladung ihren Richtungssinn. Nachdem so die Frage entschieden zu sein schien, hat sie ein wechselndes Schicksal gehabt. RÖNTGEN[1] bestätigte die Tatsache, LECHER[2] bestritt sie, HIMSTEDT[3] sowie ROWLAND und HUTCHINSON[4] bestätigten sie wieder und konnten sogar die Gesetze feststellen, CRÉMIEU[5] kam wieder zu negativen Resultaten — vgl. dazu die Kritik von WILSON[6] und PENDER[7] —, und erst durch die neueste Arbeit von HIMSTEDT sowie eine gemeinsame Arbeit von PENDER und CRÉMIEU[8] ist die Frage wohl endgültig im positiven Sinne erledigt.

HIMSTEDT hat im Laufe seiner Untersuchungen mehrere Apparate zum exakten Studium der Frage gebaut; einer von ihnen ist in Figur 179 schematisch dargestellt; wie man sieht, sind hier zwei drehbare Scheiben vorhanden, jede von ihnen ist von zwei festen — $G_1$, $G_2$ bzw. $G_3$, $G_4$ — flankiert, die Nadeln (durch Punkte angedeutet) schweben zwischen ihnen; offenbar ist dadurch die Empfindlichkeit mehrfach gesteigert. Einige weitere Verbesserungen zu Meßzwecken weist der Apparat von 1903 auf. HIMSTEDT hat nun nachgewiesen, 1. daß die Wirkung die AMPEREsche Regel befolgt; 2. daß sie proportional ist der Drehungsgeschwindigkeit; 3. daß sie proportional ist der Dichte der elektrischen Ladung oder — bei konstanter Kapazität — dem Ladungspotential (eine scheinbare Abweichung für sehr starke Ladungen wird aufgeklärt); 4. daß die Wirkung der Größe nach in sehr befriedigendem Maße mit der theoretisch zu berechnenden übereinstimmt — eine Übereinstimmung, die sich offenbar z. B. dadurch nachweisen läßt, daß man aus den Versuchen den Wert des Verhältnisses der elektromagnetischen zur elektrostatischen Einheit, also die Lichtgeschwindigkeit berechnet: man findet dann Werte zwischen 2,68 und $3{,}24 \times 10^{10}$, also in Anbetracht der Umstände keinen zu großen Fehlerbereich, und als Mittel den sehr guten Wert $2{,}99 \times 10^{10}$.

Die neueste hierher gehörige Arbeit ist die ausgedehnte Untersuchung von EICHENWALD[9]. Es wurden die magnetischen Wirkungen bewegter Körper — und zwar sowohl von Leitern als auch von Dielektricis — im elektrostatischen Felde unter möglichst variierten Versuchsbedingungen untersucht; die Geschwindigkeiten reichten bis zu 150 m in der Sekunde, die Feldstärken bis zu 30 hinauf. Die Hauptergebnisse lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen: 1. Bei der Bewegung im elektrostatischen Felde entstehen im allgemeinen Konvektions-, Konduktions- und Verschiebungsströme; alle diese Ströme sind hinsichtlich ihrer magnetischen Wirkungen denen eines galvanischen Stromes von gleichem numerischem Betrage völlig äquivalent. 2. Im Falle reiner elektrischer Konvektion sind die Bewegungen und die magnetischen Wirkungen der bewegten Ladungen unabhängig voneinander; die Ladungen haften an der Materie. 3. Alle Ströme bilden stets geschlossene Stromkreise. 4. Die Versuche sind mit der Annahme eines überall, auch in den bewegten Dielektrika, ruhenden Äthers im Einklange. 5. Zieht man noch die optischen Versuche von FIZEAU und MICHELSON hinzu, so kommt man zu dem Schlusse, daß weder die allgemeine Theorie von HERTZ, noch die von H. A. LORENTZ befriedigt, sondern ausschließlich die von E. COHN.

---

[1] W. C. RÖNTGEN, Berl. Mon.-Ber. 1885. 198. — Wied. Ann. **40**. 93. 1890. — Von RÖNTGEN wurde die Erscheinung etwas anders gedeutet. — [2] E. LECHER, Repert. d. Physik **20**. 151. 1884. — [3] F. HIMSTEDT, Ber. Oberhess. Ges. **27**. 44. 1889. — Wied. Ann. **38**. 560. 1889. — Wied. Ann. **40**. 720. 1890. — Freib. Ges. Ber. **14**. 85. 1903. — [4] H. ROWLAND und HUTCHINSON, Phil. Mag. (5) **27**. 445. 1889. — [5] V. CRÉMIEU, Inang.-Diss. Paris 1901. — C. R. **131**. 578. 1900. — Ann. chim. phys. (7) **24**. 146. 1901. — Phil. Mag. (6) **2**. 235. 1901. — J. de phys. (4) **1**. 753. 1902. — [6] H. A. WILSON, Phil. Mag. (6) **2**. 144 u. 319. 1901. — [7] H. PENDER, Phil. Mag. (6) **2**. 179. 1901. — **5**. 34. 1903. — Phys. Rev. **15**. 291. 1902. — [8] H. PENDER und V. CRÉMIEU, J. de Phys. (4) **2**. 641. 1903. — Phil. Mag. (6) **6**. 442. 1903. — [9] A. EICHENWALD, Drude Ann. **11**. 1 u. 421. 1903; **13**. 919. 1904.

## Äquivalenz zwischen Strömen und Magneten.

Die Wahrnehmung, daß für das Potential von Strömen auf Magnetpole die scheinbare Größe gewisser Flächen maßgebend ist, führt zu einer interessanten und wichtigen Folgerung. Ganz dieselbe Größe tritt nämlich bei der Wirkung gewisser magnetischer Gebilde auf Pole auf, so namentlich bei der Wirkung einer magnetischen Schale (S. 59) nach dem Satze von GAUSS. Man kann hiernach zunächst ganz allgemein den Satz aufstellen, daß in bezug auf die äußere magnetische Wirkung jedes Stromgebilde mit einem bestimmten magnetischen Gebilde äquivalent ist, und man kann diesen Satz dann leicht für die verschiedenen Gebilde solcher Art spezialisieren. So ist, um die typischen Fälle herauszugreifen:

1. ein unendlich kleiner geschlossener Strom äquivalent einem einfachen Polpaare, dessen Achse auf der Stromebene senkrecht steht;

2. ein endlicher geschlossener Strom äquivalent einer gleichförmigen Schale, die, im übrigen von beliebiger Gestalt, die Stromlinie zum Rande hat; ein Kreisstrom also äquivalent einer Kreisschale; ein unbegrenzter gerader Strom äquivalent einer Schale, die sich von der Stromlinie als Rand in die Unendlichkeit erstreckt.

3. ein System konzentrischer Kreisströme in derselben Ebene und mit gleichem Strömungssinn, also praktisch eine ebene Stromspule äquivalent einer ungleichförmigen Schale;

4. ein zylindrisch aneinandergereihtes System unendlich kleiner gleich starker, gleich großer, gleichsinniger und gleich weit voneinander abstehender Kreisströme, ein sogenanntes Solenoid, äquivalent einem einfachen Faden, d. h. einem Paar entgegengesetzter Pole an den Enden;

5. ein nach der einen Seite unbegrenztes derartiges Solenoid äquivalent einem einzelnen Magnetpole;

6. ein zylindrisches System endlicher Kreisströme, also praktisch eine Spule mit einer einzigen Lage von Windungen äquivalent einem solenoidalen Magneten, d. h. zwei entgegengesetzten einfachen gleichförmigen Scheiben an den Enden;

7. eine zylindrische Spule mit mehreren Lagen zwei entgegengesetzten ungleichförmigen Scheiben an den Enden;

8. eine beliebig geformte und angeordnete Spule einem durch diese Verhältnisse völlig bestimmten Magneten vom allgemeinen Typus.

Zu diesen Äquivalenzsätzen sind noch einige Bemerkungen zu machen.

1. Das Potential eines geschlossenen Stromes ist für den Einheitspol $\frac{1}{2} c i \omega$, d. h. gleich dem Produkte aus der scheinbaren Größe und einem Faktor; bei einer magnetischen Schale ist dieser Faktor die magnetische Stärke der Schale, und man kann ganz entsprechend bei einem geschlossenen Strom den Faktor als Stromstärke bezeichnen, wenn man diese eben hierdurch definiert. Dieses Maß der Stromstärke heißt das elektromagnetische, und die Exaktheit und Bequemlichkeit der elektromagnetischen Meßmethoden hat es mit sich gebracht, daß es das am meisten übliche Maß für elektrische Ströme geworden ist: nur hat man es noch durch 10 dividiert und nennt es alsdann Ampere; näheres hierüber findet man in dem Artikel über elektrische Maßbestimmungen (s. w. u.). Das Produkt der Stromstärke in die Zahl der Windungen wird, besonders in der Technik, Amperewindung genannt. Mit Anwendung dieses Strommaßes hat man nunmehr:

$$V = i m \omega + \text{const} \quad .$$

2. In Analogie mit Früherem kann man $V$ auch in der Form schreiben:

$$V = i m \int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \quad ,$$

wo $ds$ ein Element einer vom Strome eingeschlossenen Fläche, $n$ die Normale desselben und $r$ seine Entfernung vom Pole ist.

3. Zur Vervollständigung der Äquivalenz ist noch zu ermitteln, welche Seiten einander entsprechen; zu diesem Zwecke braucht man nur die AMPEREsche Regel auf die verschiedenen obigen Formeln anzuwenden und erhält dann die folgenden Formulierungen: Wenn man in einem geschlossenen Strom oder einer Stromspule sich schwimmend denkt und dabei in das Innere hineinsieht, entspricht die Seite oder das Ende der Spule, das man zur Linken hat, der Nordseite einer Schale resp. dem Nordpole eines Magneten, die rechte Seite resp. das rechte Ende der Südseite resp. dem Südpole. Oder: Diejenige Seite eines geschlossenen Stromes, bei deren Betrachtung man den Strom dem Uhrzeiger entgegen kreisen sehen würde, ist der Nordseite, die andere der Südseite einer magnetischen Schale äquivalent, jene kann also als Nordseite des Stromes, diese als seine Südseite bezeichnet werden; ebenso für das Nordende und Südende einer Spule. Oder umgekehrt: Steht man auf der Nordfläche einer Schale und sieht man den äquivalenten, am Rande hinfließenden Strom an, so fließt dieser von rechts nach links. Damit bestimmt sich dann auch der Sinn der Normale $n$ in obiger Formel. Denkt man sich nämlich im Strome so liegend, daß er von den Füßen nach dem Kopfe geht, und daß man die vom Strome begrenzte Fläche zur Linken hat: dann geht die Normale $n$ nach hinten.

4. Endlich ist hervorzuheben, daß die Äquivalenz zwischen den Strömen und Magneten keine uneingeschränkte ist. Betrachtet man nämlich zuerst einen einfachen geschlossenen Strom und die entsprechende einfache Schale, so ist das Potential des ersteren für den Pol 1 überall gleich $i\omega$, es ändert sich stetig, wenn der Pol verschoben wird, auch wenn er hierbei durch die von dem Strome eingeschlossene Fläche hindurchgeht (nur darf er nicht in die Stromlinie selbst hineingeraten), und es ist andererseits in einem und demselben Punkte vieldeutig, wobei die einzelnen Werte sich um je $4\pi i$ unterscheiden. Dagegen ist das Potential der Schale nur im äußeren Raume gleich $\mathfrak{J}\omega$, wenn $\mathfrak{J}$ die Stärke der Magnetisierung der Schale ist, im Innern, d. h. zwischen den beiden Schalenoberflächen, hat es dagegen andere Werte (vgl. S. 60); es ist ferner unstetig, insofern seine Werte für Punkte, die unendlich dicht zu beiden Seiten der Schale einander gegenüber liegen, um $4\pi\mathfrak{J}$ verschieden sind, und es ist drittens überall eindeutig. Dem ähnlich verhält es sich bei einer Spule im Vergleich zu einem Magneten; die Wirkung nach außen kann bei beiden durch die Endbelegungen oder Pole repräsentiert werden; will man die Vergleichung auch auf das Innere übertragen, so muß man ev. auf den Begriff der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ (S. 130) zurückgreifen und diesen dann auf die elektromagnetische Kraft übertragen. Dabei sei noch bemerkt, daß man nicht etwa die Spule, weil sie innen hohl ist, mit einem hohlen Magneten vergleichen darf; man überzeugt sich vielmehr leicht, daß die Wirkungen beider Gebilde im Innern durchaus nicht gleich, sondern in gewissem Sinne geradezu entgegengesetzt sind.

Man kann von der Äquivalenz zwischen Strömen und Magneten einen doppelten Gebrauch machen, indem man entweder Magnete an die Stelle von Strömen oder Ströme an die Stelle von Magneten setzt; meist wird sich aus klar liegenden Gründen das erstere empfehlen.

**AMPÈREsche Theorie des Magnetismus.** Eine äußerst sinnreiche Anwendung der besprochenen Äquivalenz, nicht in praktischer, sondern in theoretischer Richtung, hat AMPERE gemacht, indem er, wie schon auf S. 168 erwähnt worden ist, die Hypothese aufstellte, daß der Magnetismus nicht eine besondere Erscheinung sei, sondern auf unendlich kleinen, die Teilchen der Körper umkreisenden Strömen beruhe[1]. Es wird also gewissermaßen jeder der magnetischen

[1] J. M. AMPÈRE, Ann. Chim. Phys. **15**. 70 u. 170. 1820; Mem. s. l. th. d. phén. electrodyn. Paris 1826. 323.

Fäden, in welche der Magnet zerlegt werden kann, durch ein Solenoid ersetzt. Einfacher wäre es ja, den ganzen Magneten von Strömen umkreist werden zu lassen, aber dann würde die Äquivalenz für das Innere nicht stattfinden, und es würden auch andere Schwierigkeiten auftreten. Wie es nun zwei verschiedene magnetische Theorien des Magnetismus gibt, so sind auch zwei elektrische denkbar, bei deren einer, der Scheidungshypothese entsprechenden, die AMPEREschen Ströme erst bei der Magnetisierung durch elektrische Induktion erregt, bei deren anderer, der Drehungshypothese entsprechenden, sie stets zirkulieren, durch den Akt der Magnetisierung aber infolge von elektrodynamischen Wechselwirkungen (s. Art. Elektrodynamik) gerichtet werden; man kann auch beide Hypothesen kombinieren und annehmen, daß beim Magnetisieren die Stärke und Richtung der schon vorhandenen Ströme verändert wird. Die Entscheidung zwischen beiden Annahmen, resp. die Entscheidung darüber, welche von beiden Wirkungen überwiege, läßt sich durch die erfahrungsmäßige Richtung der entstehenden Magnetisierung resp. der mit ihr äquivalenten Molekularströme geben, da diese Richtung durch Induktion die entgegengesetzte wie durch elektrodynamische Drehung werden muß, und es stellt sich dabei, wie schon beim Diamagnetismus (S. 257) ausgeführt worden ist, heraus, daß bei den paramagnetischen Stoffen die elektrodynamische, bei den diamagnetischen die Induktionswirkung als die überwiegende angenommen werden muß.

## Wirkung von Magneten auf elektrische Ströme.

Daß, wie elektrische Ströme auf Magnete, auch Magnete auf elektrische Ströme wirken, läßt sich nunmehr auf die verschiedenste Weise schon a priori erwarten; auf Grund des Prinzips von Wirkung und Gegenwirkung, auf Grund energetischer Betrachtungen, auf Grund der Äquivalenz der Ströme mit den Magneten oder auf Grund der AMPEREschen Vorstellung vom Magnetismus. Dabei wird man nicht nur schließen dürfen, daß diese Wirkungen vorhanden sind, sondern auch ihre Gesetze angeben können. Die folgenden Angaben können sich daher auf die früheren beziehen und somit kurz gefaßt werden.

Die meisten bezüglichen Experimente rühren schon von AMPERE[1] her. Er bediente sich dazu eines zugleich zur Stromzufuhr dienenden Doppelstativs, das in zwei mit Quecksilber gefüllte Näpfchen endete; in diesen Näpfchen schwebte auf zwei Spitzen der zu den Versuchen dienende Stromleiter, der auf diese Weise ziemlich beweglich ist. Statt dessen kann man ihn auch mit Hilfe eines Korkes schwimmend anordnen. Für feine Messungen muß man aber den Stromleiter an einem oder zwei möglichst langen Metallfäden, durch die man den Strom zuführt, aufhängen.

Die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement ist nach der Gleichung auf S. 418, wenn jetzt die Konstante $c = 1$ gesetzt, also das elektromagnetische Maßsystem benutzt wird:

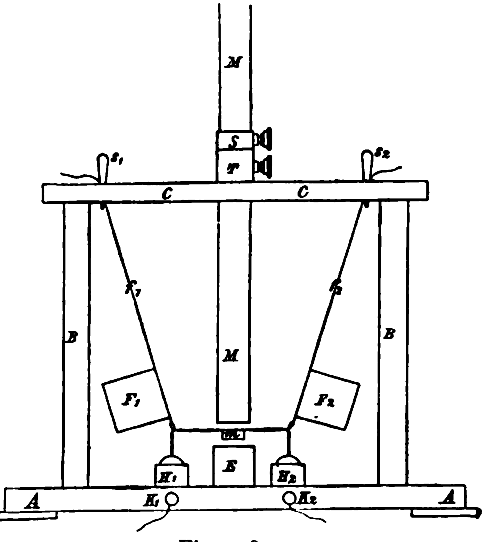
$$dK = \frac{im}{r^2} dl \sin\varepsilon \quad .$$

Hierin ist der Faktor $\frac{m}{r^2}$ das Feld des Poles; für ein von beliebigen magnetischen Massen herrührendes Feld, dessen Stärke am Orte des Stromelementes $\mathfrak{H}$ ist, gilt dann die allgemeine Gleichung:

$$dK = \mathfrak{H}\, i\, dl \sin\varepsilon \quad ,$$

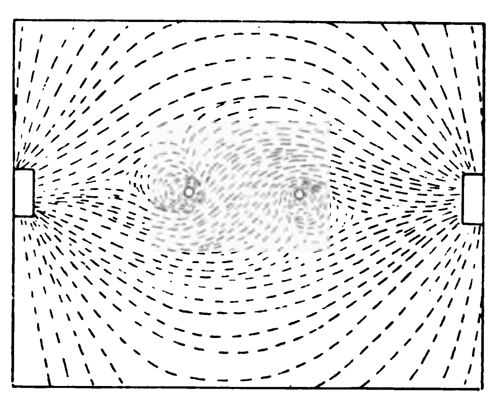
[1] AMPÈRE, a. a. O. — Ferner H. DAVY, Tr. R. Soc. 1821. 17. — DE LA RIVE, Gilb. Ann. 71. 120. 1822.

die man folgendermaßen in Worten aussprechen kann: Die Kraft, die ein Stromelement in einem magnetischen Felde erfährt, ist gleich dem Produkte der Stromstärke in die Größe des aus dem Elemente und einer das Feld nach Richtung und Stärke darstellenden Geraden konstruierten Parallelogramms. Auf der Ebene dieses Parallelogramms steht die Kraft senkrecht, und ihr Sinn wird durch die der AMPEREschen Regel entsprechende bestimmt: Denkt man sich in dem Stromelemente schwimmend und nach der Kraftrichtung hinsehend, so ist die Kraft nach links gerichtet. Oder man benutzt die „linke Handregel": Gibt der Zeigefinger der linken Hand die Feldrichtung, der Mittelfinger die Stromrichtung an, so weist der gespannte Daumen in die Kraftrichtung. Endlich kann man hier auch folgende Regel benutzen: Stellt man einen Korkzieher üblicher Art auf die von dem Element und der Feldrichtung gebildete Ebene senkrecht auf und dreht ihn auf dem kürzesten Wege aus der Stromrichtung in die Feldrichtung, so gibt die Auf- oder Niederbewegung der Achse des Korkziehers die Richtung der Kraft an.



Figur 180.

Die Kraft ist am größten, wenn das Stromelement auf der Feldrichtung senkrecht steht, sie ist null, wenn es in die Feldrichtung hineinfällt. In jedem Falle, ausgenommen den letztgenannten, wird sich also das Stromelement durch das Feld, quer zu den Kraftlinien, bewegen. Dasselbe gilt von einem endlichen oder unendlich langen geradlinigen Strome, und man kann nach Obigem leicht die Richtung angeben, in der er sich bewegen wird; beispielsweise wird sich der in Figur 173 durch seinen Querschnitt dargestellte, von oben nach unten fließende Strom in dem von rechts nach links gerichteten Felde von der unteren Zeichnungshälfte nach der oberen bewegen, oder anders ausgedrückt: Im Felde der Erde bewegt sich ein von oben nach unten fließender Strom nach Osten, ein von unten nach oben fließender nach Westen. Allgemein kehrt sich der Bewegungssinn um, wenn entweder die Strom- oder die Feldrichtung sich umkehrt, bleibt also ungeändert, wenn sich beide zugleich umkehren.


Figur 181.

Zur Demonstration der Wirkung sind mancherlei Apparate angegeben worden; es genüge hier, einen derselben, von EBERT[1] herrührenden, wiederzugeben (Figur 180). $MM$ ist der mittels der Hülsen $S$ und $T$ verschiebbare Magnet, $m$ der an den Fäden $f$ hängende Stromleiter, der mit seinen nach unten

[1] H. EBERT, Kraftfelder 198.

gebogenen Enden in zwei zur Zeichnungsebene senkrechte Quecksilberrinnen taucht, während der Strom durch die Klemmen *K* weitergeführt wird. — Die magnetelektrische Kraft steht auf der Figurebene senkrecht; der Draht *m* wird also, je nach Pol- und Stromrichtung, nach vorn oder hinten abgelenkt werden, und diese Bewegung kann durch die Fähnchen *F* weithin sichtbar gemacht werden.

Es möge hier eingeschaltet werden, daß der Magnetismus unter Umständen auch auf statische Elektrizität einwirkt und überhaupt auf Elektrizität in irgend welchem Zustande (vgl. z. B. Einwirkung auf elektrische Entladung am Schlusse des Abschnittes). Mit Rücksicht hieraus ist die Berechnung der Wirkung des Magnetismus auf ein elektrisches Teilchen, wie sie RIECKE[1] durchgeführt hat, von Wichtigkeit. Es ergibt sich dabei, daß die Geschwindigkeit des Teilchens konstant ist, und im besonderen für ein homogenes Magnetfeld, daß das Teilchen eine Schraubenlinie beschreibt, deren Achse dem Felde parallel ist.

Hat man einen geschlossenen Strom irgend welcher Gestalt, z. B. einen Kreisstrom, so sieht man nach dem Gesagten unmittelbar ein, daß dieser sich im gleichförmigen, magnetischen Felde nicht fortbewegen, sondern drehen wird, und zwar so lange, bis die entgegengesetzten Wirkungen auf die von entgegengesetzten Strömen durchflossenen Elemente sich aufheben. Offenbar ist dies bei symmetrischer Lage der Fall, der Kreisstrom wird sich also mit seiner Ebene senkrecht gegen das Feld stellen, was auch schon unmittelbar aus der Äquivalenz mit der magnetischen Schale folgt. In Figur 181 sind die Kraftlinien dargestellt in dem Augenblicke, wo der Kreis mit seiner Ebene noch in der Feldrichtung liegt, also ehe er sich gedreht hat.

**MAXWELLscher Satz.** Man kann die Einstellung eines geschlossenen Stromes am anschaulichsten durch den folgenden, von GAUSS aufgestellten, aber erst durch MAXWELL weiter entwickelten und fruchtbar gemachten Satz charakterisieren: Ein geschlossener Strom stellt sich im magnetischen Felde so ein, daß die Zahl der durch ihn hindurch gehenden Kraftlinien ein Maximum ist. Dieser Satz erweist seine Brauchbarkeit nicht nur für gleichförmige, sondern auch für ungleichförmige Felder, und er läßt erkennen, daß in solchen nicht nur Drehungen, sondern auch Verschiebungen des Stromkreises eintreten werden, also Anziehungen oder Abstoßungen nach oder von gewissen Stellen des Feldes her. Man kann das durch sehr zahlreiche Experimente verfolgen, in denen z. B. ein beweglicher Stromkreis von der Seite nach einem Magnetpol hin oder von ihm weg, oder in der Achse nach einem Magnetstab hingezogen (unter Umständen sogar über ihn weggeschoben) oder aber von ihm abgestoßen wird usw. Ebenso wie ein Kreisstrom wird sich natürlich auch eine Spule einstellen, d. h. sie wird ihre Achse dem Felde parallel einstellen, gerade wie ein Magnet. Die Einstellung wird desto sicherer und energischer erfolgen, je stärker der Strom, je stärker das Feld und je größer die Zahl der Windungen ist.

**Wirkung des Erdmagnetismus auf Ströme.** Bei den obigen Betrachtungen ist zunächst an künstliche Magnete gedacht, aber sie gelten natürlich ebenso auch vom Erdmagnetismus. Denn auch schon im gewöhnlichen Felde des Erdmagnetismus stellt sich eine bifilar aufgehängte oder mittels Spitzen in Quecksilbernäpfchen schwebende Spule axial ein. Man kann dann mit dieser Spule alle Experimente anstellen, welche man mit Magneten anzustellen gewöhnt ist, und erhält stets den entsprechenden Erfolg. Insbesondere wird sich eine solche Spule unter Einwirkung des Erdmagnetismus und eines dazu senkrechten künstlichen Feldes (oder auch einer mechanischen Richtkraft) unter einem gewissen Winkel einstellen. Hierauf beruhen z. B. die Galvanometer mit festem Magnet und beweglicher Spule (vgl. **4**, 293). In der Praxis wird häufig nur eine Kom-

[1] E. RIECKE, Wied. Ann. **13**. 191. 1881.



ponente des Erdmagnetismus in Aktion treten; ist der Stromleiter vertikal gerichtet, so kommt die Horizontalkomponente $H$, ist er horizontal gerichtet, so kommt die Vertikalkomponente $V$ des Erdmagnetismus in Betracht. Gehört das Stromelement $ds$ einem längeren horizontalen geraden Leiter $l$ an, der um eine durch seinen Anfangspunkt gehende vertikale Achse drehbar ist, so ist das auf ihn ausgeübte Drehungsmoment $\frac{1}{2} V i l^2$. RIECKE[1] hat diese Formel mit Hilfe eines sinnreichen Apparates zu prüfen unternommen. In ein mit Kupfervitriol gefülltes Gefäß hängt einerseits von oben eine drehbare Kupferscheibe herab und ragt anderseits von unten eine feste Kupferscheibe herauf; beide Scheiben sind überall nichtleitend bedeckt, nur auf den einander zugekehrten Seiten ist je ein ringförmiger Streifen blank gelassen; ein durch den Aufhängedraht durchgeführter Strom geht dann von dem Rand der oberen Scheibe zu dem der unteren und dann durch den Boden des Gefäßes weiter. Versteht man jetzt unter $l$ den mittleren Radius der blanken Ringstreifen, unter $\delta$ ihre halbe Breite, unter $D$ die Direktionskraft der Torsion, so ist der Drehungswinkel der beweglichen Scheibe unter Einfluß des Erdmagnetismus durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{V i l^2}{2 D}\left(1 + \frac{\delta^2}{l^2}\right)$$

bestimmt. Die so berechneten Werte erwiesen sich als mit den beobachteten hinreichend übereinstimmend. Ist auf diese Weise die Theorie bestätigt, so liefert nunmehr der Apparat von RIECKE eine Methode zur Bestimmung von $V$, und in diesem Sinne ist er schon früher (S. 94) erwähnt worden.

**Deformation durch elektromagnetische Wechselwirkung.** Wenn von den beiden aufeinander wirkenden Gebilden das eine fest, das andere aber mit einzelnen Teilen fest, mit anderen beweglich und zugleich deformierbar ist, so wird es nach dem obigen auch wirklich deformiert werden. Es kann diese Deformation z. B. in einer spiraligen Torsion bestehen (dünner Magnetdraht), oder in einer Durchbiegung (draht- oder plattenförmiger Stromleiter). Letztere Erscheinung ist u. a. von CUMMING[2], LE ROUX[3], GORE[4], besonders aber von RIECKE[5] experimentell verfolgt worden, und zwar an Goldblättchen, Platindrähten usw. Die entstehenden Kurven kann man „elektromagnetische Kettenlinien" nennen. RIECKE hat auch die Theorie gegeben, die dann von LAMPRECHT[6] verallgemeinert worden ist. Hier sei aus dieser Theorie nur angeführt, daß im homogenen Felde eine Kreislinie entsteht, im nichthomogenen dagegen die Krümmung der elastischen Kurve desto größer ist, je stärker das Feld daselbst ist. (Vgl. auch den Schluß des Artikels).

In sehr einfacher Weise stellt COLARD[7] die Gleichgewichtsform eines biegsamen fadenförmigen Leiters auf. Sind nämlich $x', y', z'$ die Richtungskosinusse seiner Tangente, $x'', y'', z''$ deren Ableitungen, sind ferner $l, m, n$ die Richtungskosinusse des Feldes, ist $H$ dessen Intensität, $i$ die Stromstärke und $f$ die Fadenspannung, so gelten die Gleichungen

$$\frac{x''}{m z' - n y'} = \frac{y''}{n x' - l z'} = \frac{z''}{l y' - m x'} = -\frac{i H}{f},$$

woraus sich die Krümmungen und überhaupt die Gestalt berechnen läßt; man erkennt, daß die Gestalt nur von den geometrischen Verhältnissen, nicht von den absoluten Werten von $H$ und $i$ abhängt. Die Anwendung auf spezielle Fälle macht keine erhebliche Schwierigkeit.

---

[1] E. RIECKE, Wied. Ann. **13**. 194. 1881. Vgl. auch R. KRÜGER, Wied. Ann. **28**. 613. 1886. — [2] CUMMING, Phil. Mag. **8**. 1824. — [3] LE ROUX, Ann. Chim. Phys. (3) **61**. 409. 1860. — [4] GORE, Phil. Mag. (4) **48**. 39. 1874. — [5] E. RIECKE, Wied. Ann. **23**. 252. 1884. — [6] R. LAMPRECHT, Wied. Ann. **25**. 71. 1885. — [7] O. COLARD, Eclair. électr. **3**. 62; **102**. 162. 1895.

Noch interessanter wird sich unter Umständen die **Wirkung des Magnetfeldes auf flüssige Leiter**, die vom Strome durchflossen werden, zu erkennen geben, seien es nun lineare Leiter oder flächenhaft ausgedehnte oder endlich körperliche; es ist einleuchtend, daß solche Flüssigkeiten bei geeigneter Anordnung sehr empfindlich auf das Feld reagieren werden. Einen interessanten Fall dieser Art hat z. B. S. P. THOMPSON[1] studiert, indem er zeigte, daß ein Quecksilberstrahl, solange er zusammenhängend ist, zwischen den Schenkeln eines Hufeisenmagneten abgelenkt und deformiert wird. — Ferner gehören hierher eigenartige Erscheinungen, die in Elektrolyten im magnetischen Felde auftreten, und die namentlich von URBASCH[2] eingehend verfolgt worden sind; zwei davon seien kurz angeführt. Zunächst bei Blei in Salpetersäure, dann bei zahlreichen anderen Kombinationen konnte durch aufgestreuten Bärlappsamen Bewegung nachgewiesen werden; daß dabei meist zwei entgegengesetzte Rotationen, entsprechend abgegrenzten Bezirken der Flüssigkeit, auftraten, deren jede sich mit dem Felde umkehrte, läßt sich vielleicht auf die Richtung, in der das Ion in Lösung geht bzw. gefällt wird, zurückführen; auch tritt bei Änderung der Konzentration ein Wendepunkt der Drehrichtung ein, endlich wird die Drehung durch höhere Temperatur begünstigt. Die andere Erscheinung betrifft die Rotation in einem in einem Felde befindlichen Elektrolyten, in dem ein Konzentrationsgefälle, also ein Diffusionsstrom besteht; man vergleiche hierüber die Diskussion zwischen URBASCH und DRUDE, welch letzterer die Existenz eines primären elektrischen Stromes außer dem Diffusionsstrom für wesentlich erklärt. Von der eigentlichen Rotation fester und flüssiger Körper wird noch die Rede sein.

Was endlich die Gase betrifft, so fällt diese Frage offenbar mit der des Einflusses des Magnetismus auf die elektrischen Entladungen zusammen, worauf weiter unten sowie an anderen Stellen dieses Werkes eingegangen wird.

## Elektromagnetische Rotations- und Schwingungsapparate.

Der Umstand, daß die elektromagnetische Wirkung von seitlichem, drehendem Charakter ist, läßt die Möglichkeit erkennen, durch Aufwand elektrischer und magnetischer Energie rotierende Bewegungen zu erzeugen; in der Tat haben die elektromagnetischen Rotationsapparate schon seit langer Zeit in der Physik und seit einiger Zeit ganz besonders in der Elektrotechnik das Interesse auf sich gelenkt; man kann dabei, wie man es früher meist getan hat, zwischen elektromagnetischen Apparaten, bei denen feste Stromleiter Magnete in Rotation versetzen, und magnetelektrischen Apparaten, bei denen feste Magnete Stromleiter in Rotation setzen, unterscheiden, ohne daß hierbei jedoch ein wesentlicher Punkt der Unterscheidung getroffen würde; auch kann man einen und denselben Apparat leicht so einrichten, daß er je nach Wunsch in dem einen oder anderen Sinne funktioniert.

Am einfachsten würde man einen Rotationsapparat mit Hilfe eines festen Stromes und eines freien Magnetpols erhalten; nach der AMPÈREschen Regel würde dieser, je nachdem er ein Nordpol oder ein Südpol ist, den Strom links herum oder rechts herum umkreisen. Eben weil diese beiden Tendenzen entgegengesetzt sind, kommt eine wirkliche Magnetnadel in Querstellung zur Ruhe, in einer Stellung, in welcher der eine Pol so weit wie möglich nach links, der andere so weit wie möglich nach rechts abgelenkt ist. Es ist auch schon a priori einleuchtend, daß ein Magnet nicht fortwährend um einen Strom rotieren kann,

---

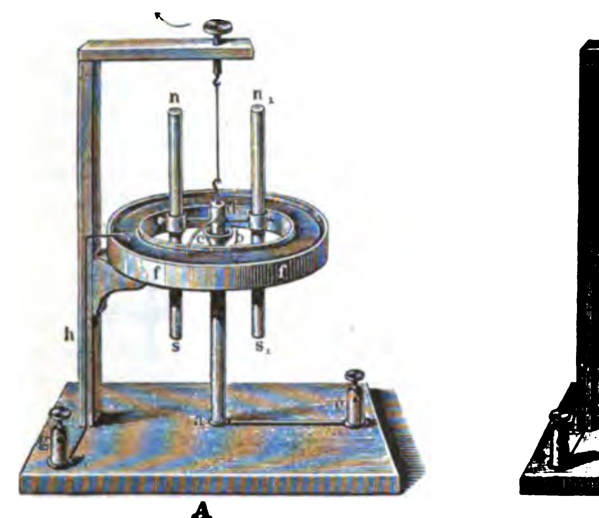
[1] S. P. THOMPSON, Phil. Mag. (5) **8**. 505. 1879. — [2] O. URBASCH, Inaug.-Diss. Gießen 1900; Z. f. Elektrochem. **7**. 114. 1900. — P. DRUDE, Z. f. Elektrochem. **8**. 65. 1902. — O. URBASCH, ebenda **8**. 150. 1902. — P. DRUDE, ebenda **8**. 229. — O. URBASCH, ebenda **8**. 559. 1902.

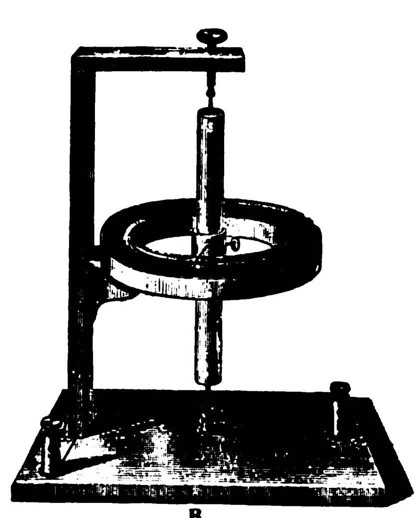


da, wenn beide wieder die ursprüngliche Lage zueinander eingenommen haben, die Arbeit null ist. Dieser Fall ist jedoch insofern ein extremer, als dabei angenommen ist, daß der Magnet als solcher durchaus starr ist, sich also nur als Ganzes bewegen kann. Ist dies nicht der Fall, ist der Magnet im Gegenteil ideal biegsam, so wird die Erscheinung sich ganz anders gestalten: Der Nordpol des ursprünglich dem Stromleiter parallel gedachten Magneten wird links herum, der Südpol rechts herum den Stromleiter umschließen, so daß der Magnet den Stromleiter schließlich als Spirale umgibt. Die Verwirklichung einer derartigen Rotation ist natürlich nicht möglich, höchstens wäre eine schwache Andeutung derselben mit starken Strömen und sehr leicht biegsamen magnetisierten Drähten zu erzielen.

Man kann aber auch anders verfahren, indem man den starren Magneten beibehält, dafür aber den Stromleiter veränderlich macht, was mit Hilfe flüssiger Stromstücke, durch Anwendung von Gleitstellen (veränderlichen Übergangsstellen, Schleifkontakten) usw. (ev. auch durch Unterbrechung des Stromes zu geeigneten Zeiten und in geeigneter, die Erscheinung nicht zum Stillstand bringender Weise) ohne erhebliche Schwierigkeit zu erreichen ist. Es rotiert dann eben nicht ein geschlossener Strom, sondern nur ein Stromstück, resp. der Magnet rotiert nicht um den geschlossenen Strom, sondern nur um ein Stromstück. Auf diesem Gedanken beruhen die zahlreichen Rotationsapparate, von denen hier nur einige typische Vertreter kurz angeführt sein mögen; die meisten von ihnen sind zuerst in den Jahren 1821 bis 1823 von FARADAY[1] oder AMPÈRE[2] angegeben und seitdem vielfach modifiziert worden[3].

**Rotation von Magneten um Ströme.** Hierfür liefern die in Figur 182 A und B abgebildeten Apparate zwei Beispiele; bei dem Apparat A (häufig als




Figur 182.

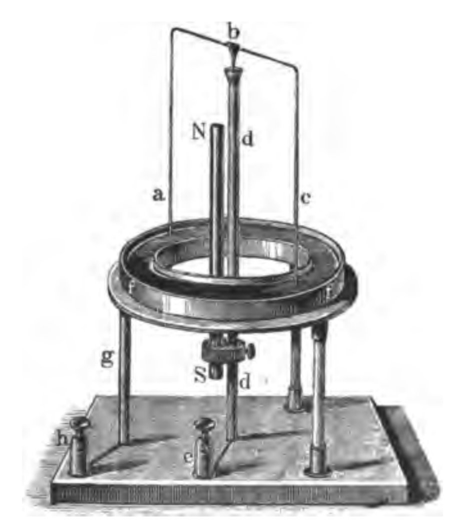
„POHLscher Apparat" bezeichnet) rotieren zwei parallele und gleichgerichtete Magnete um ihre gemeinsame Achse, bei B ein einziger Magnet um seine eigene

[1] M. FARADAY, R. Inst. 1821; Gilb. Ann. **71**. 124; **73**. 113. — [2] A. M. AMPÈRE, Ann. Chim. Pyhs. **20**. 60. 1822; Gilb. Ann. **71**. 172. — [3] BARLOW, Essay etc. London 1823. — STURGEON, Pogg. Ann. **24**. 632. 1832. — W. RITCHIE, Pogg. Ann. **27**. 552. 1832. — A. BERTIN, Ann. Chim. Phys. **58**. 90. 1860. — O. v. FEILITZSCH, Pogg. Ann. **105**. 535. 1858. — G. GORE, Proc. R. Soc. **24**. 121. 1876. — Die besonderen theoretischen Fragen, die durch die Rotationsapparate aufgeworfen werden, hängen zu eng mit der allgemeinen Theorie der Elektrodynamik (s. w. u.) zusammen, als daß sie hier behandelt werden könnten.

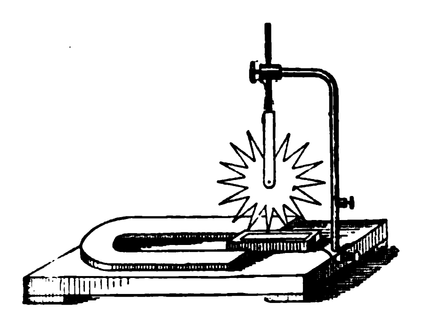
Achse. Bei A fließt der von einer Kette kommende Strom von der Klemme *c* zu dem festen Stativ *a b*, durch das in dem Endnäpfchen enthaltene Quecksilber geht er auf das beweglich aufgehängte Metallstück *d*, von diesem mittels des daran befestigten, mit ihm beweglichen Bügels *e* in den Quecksilberring *f* über und kehrt von dort durch einen festen Bügel, den Draht *h* und die Klemme *g* zur Kette zurück; seine elektromagnetische Wirkung versetzt die beiden mit *d* verbundenen Magnete in eine, von oben gesehen, der Uhrzeigerbewegung entsprechende Rotation, die sich umkehrt, wenn entweder die Stromrichtung umgekehrt oder die Magnete statt mit den Nordpolen mit den Südpolen nach oben aufgestellt werden. Die Rotation würde aufhören, wenn man die beiden Ströme entgegengesetzt aufstellte, oder wenn man die feste Stromleitung, statt wie hier bis in die Mitte der Stäbe, bis in die Höhe ihrer oberen Pole fortführte. Statt der beiden Magnete kann man auch deren mehrere, sternförmig angeordnete benutzen, oder auch einen mit der Achse konzentrischen Röhrenmagneten, oder endlich, wodurch man zur Anordnung der Figur B gelangt, einen massiven Magneten, den man dann bis zur halben Höhe zugleich zur Stromfortleitung benutzt. Bei Rotationsapparaten dieser Art kann man natürlich die Magnetstäbe auch durch Elektromagnete ersetzen und die Spiralen derselben entweder durch besondere Ströme erregen oder in geeigneter Weise in den die Rotation erzeugenden Strom einschalten.

Andere elektromagnetische Rotationsapparate sind die von v. Feilitzsch[1] (Hufeisenmagnet, innerhalb eines Kranzes von Meridianströmen rotierend) und von Ritchie[2] (Elektromagnet von veränderlicher Polarität, vor einem hufeisenförmigen Stahlmagnet rotierend).

**Rotation von Strömen um Magnete.** Der älteste Apparat dieser Art, der von Faraday konstruiert wurde, besteht aus einer, oben und unten durch Korke verschlossenen, am Boden mit einer Quecksilberschicht bedeckten Glasröhre, durch deren Boden zentral ein Magnet gesteckt ist, während von oben ein leichter Draht schräg so weit herabhängt, daß er zur Seite des Magnetpols




Figur 183.



Figur 184.

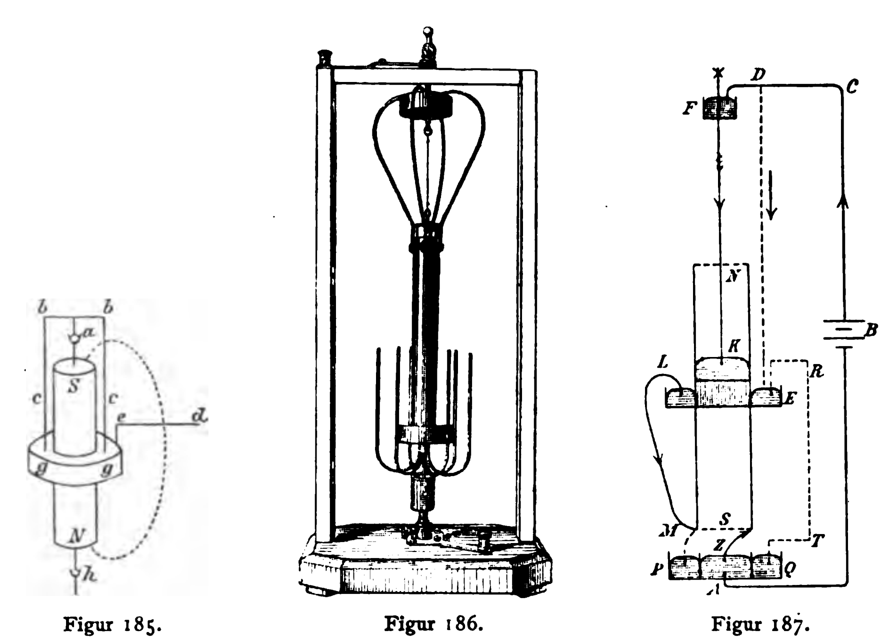
in das Quecksilber taucht; leitet man von unten zum Quecksilber einen Strom und führt ihn durch den Draht nach oben und dann zur Batterie zurück, so beschreibt der Draht eine kegelförmige Bewegung um die Achse der Röhre.

Gebräuchlicher zur Demonstration ist der folgende Apparat, der dem in Figur 182 dargestellten ganz analog gebaut und in Figur 183 abgebildet ist.

---

[1] O. v. Feilitzsch, Pogg. Ann. **105**. 535. 1858. — [2] W. Ritchie, Trans. R. Soc. 1833. (2) 318. — Pogg. Ann. **32**. 538

Der Strom geht von *e* über *d* nach *b*, teilt sich hier in die Zweige *a* und *c* und geht durch das Quecksilber und den Fuß *g* zur Klemme *h*; bei dieser Stromrichtung dreht sich der Stromleiter, von oben gesehen, im Uhrzeigersinne. Wollte man vermeiden, daß der Magnetstab, wie hier, etwas exzentrisch angebracht ist, so müßte man ihn selbst zur Achse *d* machen, was aber wegen der Schwächung seines Magnetismus durch oft hindurchgeschickte entgegengesetzte Ströme nicht vorteilhaft ist (vgl. jedoch w. u.). Wesentlich ist, daß der Magnet nicht zu weit emporragt; die Wirkung ist am größten, wenn die Rinne sich in einer Höhe mit der Mitte des Magneten befindet. Statt zweier Arme kann man auch hier wieder deren mehrere oder eine ganze Glocke aus Kupfer in die Rinne eintauchen lassen; auch kann man, statt die beiden Kupferdrähte in die Rinne eintauchen zu lassen, Quecksilberstrahlen in sie hinabfließen lassen. Nimmt man statt des Quecksilbers eine schwache Säure, wählt die Rinne selbst aus Zink




Figur 185. Figur 186. Figur 187.

und läßt in sie einen mit der Achse verbundenen Kupferbügel eintauchen, so braucht man keine besondere Batterie zur Erzeugung des Stromes. Endlich kann man den Magneten durch einen Elektromagneten ersetzen.

Von den zahlreichen Formen magnetelektrischer Rotationsapparate können im übrigen nur noch einige erwähnt werden. So das historisch interessante und neuerdings wieder aktuell gewordene BARLOWsche Rad (Figur 184), bei dem ein Sternrad, das mit einer seiner Spitzen in eine Quecksilberrinne taucht, und in dem radiale Ströme fließen, zwischen den Polen eines Magneten rotiert. Ferner eine Reihe von von ZÖLLNER[1] konstruierten Apparaten, die viele interessante Einzelheiten darbieten. Endlich zwei einfache Demonstrationsapparate von ULSCH[2].

Aus neuerer Zeit verdienen noch drei Konstruktionen besondere Aufmerksamkeit, nämlich die von J. WEBER[3], FLEISCHMANN-KÖNIG[4] und die von NIKOLAJEW[5]. Der erstere benutzt den axialen Magneten — Figur 185 — zugleich zur

[1] F. ZÖLLNER, Pogg. Ann. **153**. 138. 1874; **154**. 321. 1875; **158**. 106. 1876. — [2] K. ULSCH, Z. f. phys. u. chem. Unterr. **16**. 82. 1903. — [3] J. WEBER, Z. f. Elektrotechn. (Wien) **7**. 445. 1889. — [4] L. FLEISCHMANN, J. Ber. Zür. phys. Ges. **7**. 47. 1893/94. — Z. f. phys. u. chem. Unterr. **8**. 361. 1895. — W. KÖNIG, Verh. Nat. Ges. Lübeck **2**. 54. 1895. — Wied. Ann. **60**. 519. 1897. — [5] W. v. NIKOLAJEW, C. R. **129**. 475. — Ecl. électr. **21**. 66. 1899.

Stromleitung, zur Rückleitung dient der Doppelbügel *cbbc*, der in die vom Magneten isolierte Rinne *gg* taucht; man kann den Bügel allein oder mit dem Magneten zur Rotation bringen. Der zweite Apparat, dessen Prinzip von FLEISCHMANN, dessen Konstruktion von DRUDE herrührt, ist in Figur 186 skizziert; der Strom geht von dem oberen Quecksilbernapf durch die vier gebogenen Messingfedern, das Aluminiumrohr, den mittleren Quecksilbernapf und einen axialen Kupferdraht nach dem unteren Napf; das Magnetsystem besteht aus sechs U-förmigen Magneten, deren innere Schenkel zu einem axialen Bündel, das auch den schon erwähnten Kupferdraht enthält, zusammengefaßt sind. Das Wesentliche an der Konstruktion ist offenbar, daß die inneren Pole der Stromwirkung entzogen sind, während die äußeren ihr unterliegen. Man kann nun alle vier Versuche ausführen: 1. bei fest gehaltenem Rohr rotiert das Magnetsystem; 2. bei fest gehaltenem Magnetsystem rotiert die Röhre in entgegengesetztem Sinne; 3. läßt man beide Teile frei, so rotieren sie zugleich und in entgegengesetztem Sinne; 4. verbindet man beide Systeme fest miteinander, läßt sie aber als Ganzes frei, so tritt gar keine Drehung ein, weil sich die beiden entgegengesetzten Antriebe aufheben. — Bei dem ersten Apparat von NIKOLAJEW ist in Figur 187 $NS$ der drehbare Magnet, das eine Ende $Z$ seiner Wickelung taucht in den festen Napf $A$, das andere $ML$ in den mit drehbaren Ringnapf $LE$. Fließt jetzt ein Strom durch $ABCDELMZA$, so rotiert der Magnet; dagegen bleibt er in Ruhe, wenn man $M$, statt mit $LE$, mit dem festen Ringnapf $PQ$ verbindet, der seinerseits durch $TR$ mit $EL$ kommuniziert; endlich rotiert er doch wieder, wenn man den Stromteil $DE$ durch den axialen $FK$ ersetzt. Bei dem anderen Apparate rotiert der Stromleiter, und es lassen sich ähnliche Versuche anstellen.

Von besonderer Bedeutung sind die magnetelektrischen Rotationen für die Technik geworden, insofern sie die Elektromotoren liefern, d. h. die Maschinen zur Erzeugung von Bewegung aus der Energie elektrischer Ströme. Die Gründe, warum man hierzu lieber die Rotation von Strömen um feste Magnete als das umgekehrte benutzt, liegen auf der Hand; der Vorteil gegenüber anderen Bewegung liefernden Maschinen aber beruht darin, daß die Elektromotoren die Bewegung unmittelbar in der meist gewünschten drehenden Form liefern, und daß sie aus diesem und aus anderen Gründen ökonomischer arbeiten. Im übrigen muß ihre nähere Betrachtung mit der ihres Gegenstücks, der Dynamomaschinen, die Bewegung in elektrischen Strom umsetzen, gemeinsam erfolgen, weshalb auf die bezüglichen Abschnitte der Lehre von den induzierten Strömen verwiesen wird.

Auch der Erdmagnetismus ist kräftig genug, um bei Apparaten, die analog den obigen gebaut sind, dauernde Rotation hervorzurufen[1], bei dem zuerst genannten Apparat (mit der Glasröhre) braucht man dann nur den Magneten fortzulassen, muß aber natürlich einigermaßen kräftige Ströme anwenden. Man kann auch einfach in die Mitte eines Bassins mit Quecksilber ein Stativ stellen, von dessen oberem Ende ein Draht, leicht drehbar, schräg in das Bassin hinabreicht, und den Strom dem Stativ zuführen und von dem Bassin fortleiten (oder umgekehrt); oder man läßt in eine ringförmige Rinne mit Quecksilber von ihrem Zentrum aus einen beweglichen Arm herüberreichen und führt den Strom dem Zentrum zu und leitet ihn von der Rinne fort. Die erste Form bietet den instruktiven Vorteil, daß man die Neigung des in das Bassin hinabtauchenden Drahtes verändern und dadurch erreichen kann, daß entweder eine dauernde Rotation oder eine Gleichgewichtseinstellung stabiler oder labiler Natur eintritt, je nach der Richtung des Drahtes gegenüber der gesamtmagnetischen Kraft der Erde; welcher Fall eintritt, welche Gleichgewichtsstellung sich ausbildet resp. in welchem Sinne die Rotation vonstatten geht, kann man stets nach den obigen Grundregeln ohne Schwierigkeit ermitteln.

---

[1] A. M. AMPÈRE, Ann. Ch. Phys. **18**. 331. 1821. — M. FARADAY, a. a. O.

**Rotation von Flüssigkeiten.** Daß auch Flüssigkeiten unter dem Einflusse von Magneten rotieren können, hat zuerst DAVY[1] beobachtet. Auf den Flächenpol eines Magneten setzt man eine Schale mit Quecksilber und läßt an zwei Stellen die Enddrähte eines Stromkreises in sie eintauchen; das Quecksilber rotiert alsdann um die Drahtenden, und zwar von oben gesehen im Uhrzeigersinne oder im entgegengesetzten, je nachdem das Drahtende einen dem Magnetpole gleichnamigen oder ungleichnamigen Strompol repräsentiert. Unter Umständen treten hierbei interessante Einzelheiten auf, über welche namentlich POGGENDORFF Beobachtungen angestellt hat. Daselbst findet man auch folgende abweichende Form des Versuchs: Einer mit Quecksilber gefüllten ringförmigen Rinne führt man den Strom durch die eine Peripherie zu und durch die andere fort, so daß sämtliche Radien Stromlinien sind; steckt man in das zentrale Loch von unten einen Magneten hindurch, so daß sein Nordpol in der Höhe der Flüssigkeitsschicht steht, so tritt Rotation in dem einen Sinne ein, bei Hebung des Magneten geht sie in die entgegengesetzte über, und bei weiterer Hebung kehrt sie sich nochmals um, so daß schließlich, wenn der Südpol im Niveau der Flüssigkeit steht, der Drehungssinn wieder der ursprüngliche ist. Wie RITCHIE[2] gezeigt hat, kann man diese Versuche auch mit nichtmetallischen Flüssigkeiten anstellen. Für genauere Versuche und Messungen dieser Art hat u. a. BERTIN[3] einen geeigneten Apparat konstruiert; auch sei auf Versuche von DE LA RIVE und BERTIN hingewiesen, die eigenartige Anordnungen betreffen.

**Theoretisches.** Das Wesen der elektromagnetischen Rotation von festen Körpern und Flüssigkeiten, sowie die prinzipiellen Unterschiede dabei hat RIECKE[4] in folgender Weise auseinandergesetzt. Es sind drei Fälle zu unterscheiden. Der einfachste ist der, wo die Stromfäden stets an dieselbe Reihe ponderabler Teilchen gebunden bleiben (feste, bewegliche Drähte oder biegsame Fäden ohne Gleitstellen); der zweite Fall ist der, wo infolge der Bewegung neue, ponderable Elemente in den Strom eintreten oder alte aus ihm ausgeschaltet werden (die meisten Arten von Gleitstellen, ferner Dehnung oder Komprimierung von Leiterstücken); der dritte Fall endlich ist dadurch ausgezeichnet, daß eine relative Verschiebung der Stromfäden, welche das Innere von körperlichen Leitern erfüllen, durch die ponderablen Teilchen eintritt (wie besondere Arten von Gleitstellen, elastische Biegungen fester Leiter, besonders aber flüssige Leiter, welche elektromagnetisch rotieren). Die beiden ersten Fälle haben das Gemeinsame, daß bei ihnen die bei einer Verschiebung der beweglichen Teile geleistete Arbeit stets durch die Abnahme des Potentials bestimmt ist. Im dritten Falle ist dagegen eine direkte Anwendung des Potentialgesetzes nicht möglich, weil hier die Verschiebung oder Verlängerung der ponderablen Stromträger unabhängig von der der Stromfäden ist, also auch die erstere nicht notwendig die letztere nach sich zieht, so daß unter Umständen Arbeit geleistet werden kann, obgleich anscheinend das Potential sich nicht ändert. Will man trotzdem das Potentialgesetz anwenden, so muß man zu Hypothesen über die Anziehung zwischen den Körperteilchen und den elektrischen Teilchen seine Zuflucht nehmen.

Wegen des besonderen Interesses, das hiernach die elektromagnetische Rotation von Flüssigkeiten darbietet, hat RIECKE[5] einen solchen Fall theoretisch und experimentell in möglichst exakter Weise verfolgt, nämlich den schon oben erwähnten Fall der Rotation einer ringförmigen Flüssigkeitsschicht, die auf einen Magnetpol aufgesetzt ist, und in welcher radiale Ströme von der inneren Peripherie zur äußeren zirkulieren; der Apparat wurde in besonderer, die Anwendung

---

[1] H. DAVY, Trans. R. Soc. 1823. 153; Ann. Chim. Phys. **25**. 64. — Ferner POGGENDORFF, Pogg. Ann. **77**. 1. 1849. — W. RITCHIE, a. a. O. — A. BERTIN, a. a. O. — DE LA RIVE, Ann. Chim. Phys. **56**. 286. 1859. — [2] W. RITCHIE, Pogg. Ann. **27**. 552. 1832. — [3] A. BERTIN. G. WIEDEMANN, Elektr. (3) **3**. 164. — [4] E. RIECKE, Wied. Ann. **25**. 496. 1885. — [5] E. RIECKE, a. a. O. — Weiter ausgeführt von F. SCHUMANN, Wied. Ann. **32**. 141. 1887.

der Theorie möglichst erleichternder Weise gebaut. Hat die Flüssigkeit die Dichte $\mu$, die Reibungskonstante $\eta$, die Höhe (Schichtdicke) $d$, die inneren und äußeren Radien $a$ und $b$, sind $H$ und $i$ die Feldstärke und Stromstärke, und wird zur Abkürzung $Hi\sqrt{2}/2\pi c d\eta = A$ gesetzt, so findet man für stationäre Bewegung mit kleinen Geschwindigkeiten die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ im Abstande $r$ von der Drehungsachse und in der Höhe $z$ über der Mittelfläche

$$\frac{\pi^3}{4A}\omega = -\frac{d^2}{r^2}\left(1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-\pi\frac{b-r}{d}}\right)\cos\frac{z\pi}{d}$$

$$+\frac{1}{27}\frac{d^2}{r^2}\left(1-\sqrt{\frac{r}{a}}e^{-3\pi\frac{r-a}{d}}-\sqrt{\frac{r}{b}}e^{-3\pi\frac{b-r}{d}}\right)\cos\frac{3z\pi}{d}- \quad \ldots \; .$$

Diese Formel wurde unter gewissen Annahmen mit der Beobachtung verglichen und, mit Rücksicht auf einige Fehlerquellen, eine befriedigende Übereinstimmung gefunden. Die Winkelgeschwindigkeit ist hiernach in der unteren und oberen Grenzfläche null, in der Mittelfläche am größten, sie nimmt ferner von der inneren Peripherie aus zunächst zu, erreicht sehr bald ein Maximum und nimmt dann bis zum äußeren Rande bis auf null ab.

**Diskussion über das Wesen der Rotationsapparate.** In neuester Zeit hat sich eine lebhafte Diskussion über das Wesen der elektromagnetischen bzw. magnetelektrischen Rotation, über die Frage, wann sie eintritt und wann nicht, auf welchen Wirkungen sie beruhe und von welchen Teilen der betreffenden Apparate sie herrühre, entsponnen; an dieser Diskussion haben sich außer ihrem Urheber, LECHER, namentlich FLEISCHMANN, W. KÖNIG, LORBERG, E. HAGENBACH, OLSHAUSEN, DE WAHA, E. HOPPE, DORN und DÜSING[1] beteiligt; übrigens greift die Diskussion teilweise auf die allgemeinere und ältere Diskussion über, die sich zwischen HELMHOLTZ, C. NEUMANN, HERWIG, ZÖLLNER, LIPPICH u. a. abgespielt hatte und auf die allgemeine Theorie der Elektrodynamik und Induktion bezog; auf diese allgemeinen Fragen kann hier nicht eingegangen werden, und auch das übrige kann, ohne auf die unipolare Induktion eingehen zu müssen, nur skizziert werden.

LECHER ging von den beiden Fragen aus, erstens ob bei einem rotierenden Magneten die Kraftlinien mitrotieren oder stehen bleiben, zweitens, wo denn der Angriffspunkt der elektromagnetischen Kraft zu suchen sei; durch eine Reihe gedanklicher und experimenteller Untersuchungen kam er dabei zu dem Schlusse, daß die übliche Erklärung des Fundamentalversuches falsch sei, daß bei diesem aus den gemeinten Gründen gar keine Rotation eintreten könne und daß, wenn dennoch eine solche eintrete, dies nur an den dem eigentlichen Felde fremden unvermeidlichen Zuleitungsdrähten liege. Hiergegen wenden sich nun HAGENBACH, KÖNIG und OLSHAUSEN, ersterer experimentell, die anderen theoretisch. HAGENBACH kommt durch in sehr mannigfacher Weise variierte Versuche, bei denen ein zentrischer oder ein oder zwei exzentrische Magnete benutzt wurden, zu dem Ergebnisse, daß die Erscheinungen durchweg dem Wechselwirkungsprinzipe und dem BIOT-SAVARTschen Gesetze entsprechen, und daß auch die quantitativen Ergebnisse insoweit stimmen, als nicht die Abweichung eines wirklichen von einem ideellen Magneten Abweichungen bedingt — Abweichungen, die sogar geeignet erscheinen, die Verteilung des Magnetismus in einem wirklichen Magneten zu berechnen.

[1] E. LECHER, Wied. Ann. **54**. 276. 1895. — Wien. Ber. **103** (2a). 1894. — Wied. Ann. **69**. 781. 1899. — Wien. Ber. **108** (2a). 1899. — Drude Ann. **3**. 513. 1900. — L. FLEISCHMANN, Z. f. ph. u. ch. Unt. **8**. 361. 1896. — W. KÖNIG, Wied. Ann. **60**. 519. 1897. — Drude Ann. **2**. 854. 1900. — H. LORBERG, Drude Ann. **3**. 522. 1900. — E. HAGENBACH, Drude Ann. **4**. 233. 1901. G. R. OLSHAUSEN, Inaug.-Diss. Berlin 1901. — M. DE WAHA, Z. f. ph. u. ch. Unt. **14**. 143. 1901. — E. HOPPE, Drude Ann. **8**. 663. 1902. — E. DORN, Drude Ann. **11**. 589. 1903. — K. DÜSING, Drude Ann. **12**. 1158. 1903.

Ebenso bietet der FLEISCHMANN-KÖNIGsche Apparat nichts Abnormes dar. W. KÖNIG selbst zeigt, daß die Frage nach dem Angriffspunkt der Kraft und die Frage, welcher Teil eines Apparats der wirksame sei, gar keine reale Bedeutung habe. OLSHAUSEN endlich berechnet die Wirkung des POHLschen, des LECHERschen und des FLEISCHMANN-KÖNIGschen Apparates nach vier verschiedenen Methoden, nämlich auf Grund des mit Rücksicht des Wechselwirkungsprinzips erweiterten BIOT-SAVARTschen Gesetzes, sowie auf Grund des elektromagnetischen Potentialgesetzes, und zwar in der NEUMANNschen, HELMHOLTZschen und MAXWELLschen Form desselben. Die Rechnung stimmt in allen vier Fällen vollständig überein, wenn sie nur auf den ganzen Strom ausgedehnt wird.

Auf die etwas abweichenden Anschauungen, die von OLSHAUSEN, und auf diejenigen von DE WAHA, die von KÖNIG zurückgewiesen werden, kann hier nicht eingegangen werden. Dagegen sei noch auf den sinnreichen Gedanken DORNS hingewiesen, sich sämtliche Magnete und stromführende Teile eines Apparates zu Rotationskörpern ergänzt zu denken, deren Achse die Drehungsachse ist; man vereinfacht dann die prinzipielle Betrachtung unter Umständen wesentlich.

Endlich ist zu bemerken, daß, auch wenn man von der Annahme der Mirotation der Kraftlinien mit ihrem Träger nach allem vorangegangenen absieht, doch die Frage bestehen bleibt, ob der Träger die Kraftlinien nicht vielleicht um einen gewissen kleinen Betrag mitreißt; nur hat diese Erscheinung dann mit dem Wesen der elektromagnetischen Rotation nichts zu tun, sondern ist eine Art von Hysteresis (vgl. z. B. o. S. 219 über rotierende Hysteresis). In der Tat hat HOPPE (a. a. O.) für einen rotierenden Magneten und DÜSING für einen im Felde rotierenden Leiter, nämlich einen zwischen entgegengesetzte Pole gebrachten Flachring, die Mitreißung der Kraftlinien um einen kleinen, aber deutlichen Winkel konstatiert; die der Abhandlung beigefügte Figur gibt den Fall in auch sonst interessanter Weise wieder; man sieht die dem inneren Hohlraume entsprechende Mitte des Bildes mit etwas schief gestellten Linien erfüllt.

**Unterbrechungs- und Schwingungsapparate.** Von den bisher betrachteten elektromagnetischen Apparaten wesentlich verschieden ist eine große Klasse von Apparaten, welche in theoretischer Hinsicht sehr einfach verständlich, für die Praxis aber, und zwar sowohl für die Praxis der Wissenschaft als für die Technik, von hoher Bedeutung sind. Sie beruhen in letzter Instanz lediglich auf magnetischer oder elektromagnetischer Anziehung und Abstoßung, nicht auf drehenden Kräften; es würde sich daher bei ihnen sehr schnell eine Gleichgewichtsstellung herausbilden, wenn dieses nicht fortwährend künstlich wieder gestört würde, und zwar entweder dadurch, daß der Magnetismus oder die Stromrichtung umgekehrt wird, wodurch die Anziehung in eine Abstoßung oder umgekehrt verwandelt wird, oder dadurch, daß der Magnetismus oder der Strom einfach aufgehoben und der angezogene Körper somit in dieselbe Lage zurückgeführt wird, worauf das Spiel von neuem beginnt; oder dadurch, daß der angezogene Körper aus der Wirkung ausgeschaltet und an seiner Stelle ein neuer Körper der Wirkung ausgesetzt wird. In den meisten Fällen erzeugen diese Apparate infolgedessen hin- und hergehende Bewegungen, also mehr oder weniger rasche Schwingungen; bei einigen von ihnen (und gerade bei den technisch wichtigsten) wird dann aber die Schwingung durch die mechanische Anordnung in eine Rotation in gleichbleibendem Sinne verwandelt, wie sie für praktische Verwendung ungleich geeigneter als die schwingende Bewegung ist. Es können hier nur einige typische Repräsentanten dieser Art von Maschinen und Apparaten erwähnt werden.

Der WAGNERsche Hammer, der von NEEF[1] zuerst beschrieben wurde und nach ihm auch häufig NEEFscher Hammer genannt wird, dient zur Verwandlung

[1] NEEF, Pogg. Ann. **46**. 104. 1839.



konstanter Ströme in unterbrochene, also indirekt auch zur Erzeugung von Wechselströmen; seine üblichste, ihm von POGGENDORFF gegebene Form ist bereits in Bd. 4 angegeben und S. 316 abgebildet worden. Die Periode der Unterbrechungen hängt von den Form-, Abstands- und Elastizitätsverhältnissen der Feder ab; sie läßt sich zwar in gewissen Grenzen variieren, und es läßt sich auch das Verhältnis der Dauer des Schlusses zur Dauer der Unterbrechung abändern, die genaue Bestimmung der Periode ist aber ebenso wie ihre willkürliche, feinere Abgleichung immerhin schwierig.

In dieser Hinsicht ist dem WAGNERschen Hammer ein anderer Apparat, die zuerst durch v. HELMHOLTZ[1] in die wissenschaftliche Praxis eingeführte elektromagnetische Stimmgabel, überlegen; in ihrer Eigenschaft als Stromunterbrecher ist sie ebenfalls schon a. a. O. beschrieben worden, sie kann aber auch zur Erzielung dauernden Tönens der Unterbrechungsgabel oder anderer in den Kreis eingefügter Stimmgabeln benutzt werden, wobei, wie sich herausgestellt hat, auf die natürliche Schwingungszahl der letzteren bis zu einem gewissen Grade ein Zwang ausgeübt werden kann, was für zahlreiche Untersuchungsmethoden von Wichtigkeit geworden ist.

Den elektromagnetischen Stimmgabelapparaten ganz ähnlich sind die elektromagnetischen Pendelapparate, nur daß hier die Unterbrechungen in viel langsamerem Tempo erfolgen. Hierher gehören die elektrischen Uhren, bei denen der Gang einer Pendeluhr, deren Pendel bei jeder Schwingung einmal einen elektrischen Strom schließt, mit Hilfe der Ankeranziehung von Elektromagneten auf beliebig viele Zifferblätter von Sekunde zu Sekunde genau übertragen wird. Ihnen reihen sich die elektrischen Chronographen an, bei denen durch Schreibstifte, die mit den Ankern verbunden sind, Sekundenmarken auf einer vorbeigleitenden Fläche erzeugt werden. Hiermit wiederum ist der elektromagnetische Drucktelegraph aufs Engste verwandt. Endlich sei auf den ARONschen Elektrizitätszähler hingewiesen, bei dem umgekehrt wie oben der Pendelgang durch Stromspulen beeinflußt wird.

Eine noch verwickeltere Aufgabe als die elektromagnetische Stimmgabel löst das Telephon, insofern es den Strom nicht einfach in bestimmter Periode schließt und öffnet, sondern seine Stärke in ganz allgemeiner Weise periodisch verändert, derart, daß Tonstärke, Tonhöhe und Klangfarbe bestimmte Werte erhalten. Ein elektromagnetischer Schwingungsapparat ist natürlich nur das empfangende Telephon, dessen Platte durch die von der Ausgangsstation kommenden Ströme und den durch sie erregten Magnetismus bewegt wird; das gebende Telephon ist ein Induktionsapparat, und es wird deshalb bei der Lehre von der Induktion elektrischer Ströme noch darauf zurückzukommen sein.

Um von den Schwingungsapparaten der skizzierten Art zu Rotationsapparaten zu gelangen — die aber von den oben behandelten eigentlichen Rotationsapparaten wesentlich verschieden sind —, kann man verschiedene Kunstgriffe anwenden. Am nächsten liegt es natürlich, die schwingende Bewegung wie bei der Dampfmaschine durch mechanische Übertragung in Rotation zu verwandeln. Diese Idee liegt in der Tat dem ältesten Elektromotor, dem von HENRY (1831) zugrunde; aber obgleich DAL NEGRO, PAGE, BOURBOUZE u. a. die Maschine sukzessive vervollkommneten, hat sie keinen bemerkenswerten Erfolg errungen[2].

Ein Apparat, bei welchem durch einfache Anziehung Rotation erzeugt wird, ist das schon oben erwähnte BARLOWsche Rad[3]. Zwischen den Polen eines horizontal liegenden Hufeisenmagneten ist, über sie hinausragend, eine Rinne mit Quecksilber angebracht, in welche das Ende eines um eine horizontale, darüber befindliche Achse drehbaren Metallstreifens eintaucht. Wird ein Strom hindurch-

[1] v. HELMHOLTZ, Tonempfindungen (4. Aufl.) 198 u. Beilage 8. — [2] Näheres s. bei S. P. THOMPSON, Dynamoel. Machinery, 2. Aufl. 397. — [3] BARLOW, Essay on magn. attr. Lond. 1823. 279.

geschickt, so zieht der Magnet den Streifen in sich hinein, hebt ihn damit aus dem Quecksilber heraus und kann ihm unter Umständen einen solchen Schwung erteilen, daß er sich vollständig herumdreht und das Spiel beim Eintauchen in das Quecksilber von neuem beginnt. Um die Erscheinung auch mit schwächeren Kräften zu erhalten, ersetzt man den Streifen durch ein Sternrad, dessen Strahlen nacheinander mit dem Quecksilber in Berührung kommen.

Während hier die Rotation durch die Schwungkraft oder durch die Einführung neuer Elemente erzielt wird, bedient man sich bei anderen Apparaten hierzu der selbsttätigen Umkehrung des Stromes zu der Zeit, zu welcher für die bisherige Stromrichtung der stabile Gleichgewichtszustand erreicht war; das Gleichgewicht wird dann von neuem gestört und die Bewegung setzt sich fort, den wirkenden Kräften zufolge könnte sie dies ebensowohl im Sinne einer Umkehr, wie im Sinne einer Fortsetzung der bisherigen Bewegung tun, das Beharrungsvermögen entscheidet für die letztere Alternative. Am einfachsten lassen sich diese Verhältnisse an RITCHIES[1] rotierendem, hufeisenförmigem Elektromagneten (1833) verfolgen, der, mit den Polen nach unten, über einem ebenfalls hufeisenförmigen Stahlmagneten, dessen Pole nach oben weisen, rotiert, und der zur Ruhe kommen würde, sobald seine Pole sich direkt über den entgegengesetzten Polen des Stahlmagneten befinden, wenn nicht mittels eines an seiner Drehungsachse angebrachten, mit Schleifkontakten ausgerüsteten Kommutators in diesem Augenblicke der erregende Strom und damit die Polarität des Elektromagneten umgekehrt würde. Statt des Stahlmagneten kann man natürlich ebenfalls einen Elektromagneten verwenden; ferner kann man statt eines einzigen einen ganzen Kranz beweglicher Elektromagnete vor einem Kranze fester Elektromagnete rotieren lassen, wie dies JACOBI bei seinem elektrischen Motor getan hat. Seitdem haben sich diese Maschinen bekanntlich in staunenswerter Weise entwickelt; da hierbei jedoch die Idee des Motors in den Hintergrund trat gegenüber der Idee des Generators (Erzeugers von Elektrizität durch Bewegung), das diesem letzteren zugrunde liegende Phänomen aber die elektrische Induktion ist, erscheint es angezeigt, auch auf diese Apparate erst bei späterer Gelegenheit einzugehen.

**Wirkung des Magnetismus auf elektrische Entladungen und Lichterscheinungen.** Wenn der Magnetismus auf die Bewegung der Elektrizität in Metallen und Flüssigkeiten wirkt, so ist von vornherein zu vermuten, daß er auch auf den Durchgang der Elektrizität durch Gase einen Einfluß ausüben wird, und es frägt sich nur, ob hier dieselben Grundgesetze gelten, oder ob hier Besonderheiten auftreten. Ausführlich kann diese Frage hier nicht behandelt werden, und es muß auf das Kapitel „Durchgang der Elektrizität durch Gase" verwiesen werden; eine ganz kurze Übersicht dessen, was für die Lehre vom Elektromagnetismus von Wichtigkeit ist, darf aber hier nicht fehlen.

Die Ablenkung des zwischen Kohlen- oder Platinspitzen, oder zwischen irgend welchen geeigneten Elektroden auftretenden Lichtbogens durch Magnete oder überhaupt im magnetischen Felde ist von DAVY[2] entdeckt und dann von CASSELMANN[3], DE LA RIVE[4] u. a. näher studiert worden. Sie folgt natürlich den elektromagnetischen Gesetzen, und es kann, wie WALKER[5] zuerst beobachtet hat, auch eine dauernde Rotation zustande gebracht werden.

Die Wirkung des Magnetismus auf den in der Luft überspringenden Induktionsfunken und seine Lichthülle ist besonders von DE LA RIVE, DU MONCEL und PLÜCKER näher untersucht worden[6]. Der Funke selbst wird dabei gar nicht aus seiner geradlinigen Bahn abgelenkt, wohl aber seine Lichthülle, und zwar nach dem

---

[1] W. RITCHIE, Tr. R. Soc. 1833 (2). 318; Pogg. Ann. **32**. 538. — [2] H. DAVY, Trans. R. Soc. 1821. (2) 427. — Gilb. Ann. **71**. 241. — [3] W. T. CASSELMANN, Pogg. Ann. **63**. 588. 1844. — [4] A. DE LA RIVE, Pogg. Ann. **104**. 129. 1859. — [5] C. V. WALKER, Pogg. Ann. **54**. 514. 1841. — [6] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **113** u. a. a. O.

oben angegebenen Gesetze der elektromagnetischen Wirkung, wobei man sich die Lichthülle als einen biegsamen Leiter mit an den Polen festen Enden vorzustellen hat (vgl. o. S. 433); denkt man sich also im Entladungsstrome liegend, und sieht man den Nordpol des zur Entladung senkrechten Feldes an, so wird der Lichtbogen nach links abgelenkt, und seine Grenze wird durch Kreisbögen gebildet. Erfolgt die Entladung parallel zum Felde, so wird das Licht durch eine S-förmige Fläche begrenzt, indem die beiden Hälften in entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden und der mittelste Punkt unabgelenkt bleibt. — Ganz ähnlich ist die Erscheinung in dem luftverdünnten Raume des elektrischen Eies, der Funke geht geradlinig über, die Lichthülle wird abgelenkt. Ersetzt man von den beiden punktförmigen Elektroden die eine durch einen Ring, so daß vor Erregung des magnetischen Feldes der Strom von der Kugel zu einem schwankenden Punkte des Ringes übergeht, so tritt nach DE LA RIVE[1] bei Erregung des Feldes Rotation des Lichtstromes um den Magneten ein. Auf die zahlreichen Modifikationen dieser Versuche und die daran geknüpften theoretischen Betrachtungen kann hier nicht eingegangen werden, es sei in dieser Hinsicht auf die Abhandlungen von PLÜCKER und DE LA RIVE verwiesen.

Ein wesentlicher Unterschied besteht übrigens hinsichtlich der Beeinflussung durch den Magneten zwichen der positiven und der negativen Elektrizität. Während die positiven Entladungen nach den elektromagnetischen Gesetzen aus der Ebene des Stromes und Feldes herausgelenkt werden und dabei nach Art eines biegsamen Körpers deformiert werden, verhalten sich das negative Glimmlicht und die in ihm enthaltenen Kathodenstrahlen, vermutlich infolge ihres geringeren räumlichen und dynamischen Zusammenhanges, mehr wie aus einzelnen Partikeln zusammengesetzt, die sich in die magnetischen Kurven einstellen und eventuell, wenn sie hieran verhindert werden, in Rotation geraten. Auch hier muß auf die zahlreichen Versuche von PLÜCKER[2] und HITTORF[3] hingewiesen werden; insbesondere sei auf die von HITTORF beobachtete schraubenförmige Windung des Glimmlichtes und auf die Erklärung derselben durch die Untersuchungen von STOKES[4] und RIECKE (S. 439) hingewiesen. Am instruktivsten ist das Verhalten des Lichtes in GEISLERschen Röhren, weil man hier die beiden Elektroden resp. Lichthälften miteinander direkt vergleichen kann. Bringt man eine solche Röhre mit ihrem engeren Stücke in paralleler Lage in das Feld, so verschwinden die Schichtungen des positiven Lichtes, und es tritt dafür ein an die Seite gerückter Lichtstreifen in der einen Hälfte, ein an die entgegengesetzte Seite gerückter in der anderen Hälfte auf, während in der Mitte sich eine leuchtende Brücke zwischen beiden Streifen bildet; das negative Glimmlicht wird wenig beeinflußt. Um diesen Einfluß wahrzunehmen, muß man die Röhre verschieben, bis der negative Pol in das Feld kommt, und nimmt dann bestimmte Anordnungen des Glimmlichtes nach den magnetischen Kurven wahr, die sich je nach der Lage der Magnetpole zur Elektrode höchst mannigfaltig gestalten. Schickt man durch die Röhre in der zuerst gedachten Lage einen Wechselstrom hindurch, so zeigen sich in jeder Hälfte des mittleren Stückes beide seitlichen Streifen, in der Mitte ein leuchtender Wirbel und an den beiden Enden das unter Umständen stark zurückgedrängte Glimmlicht.

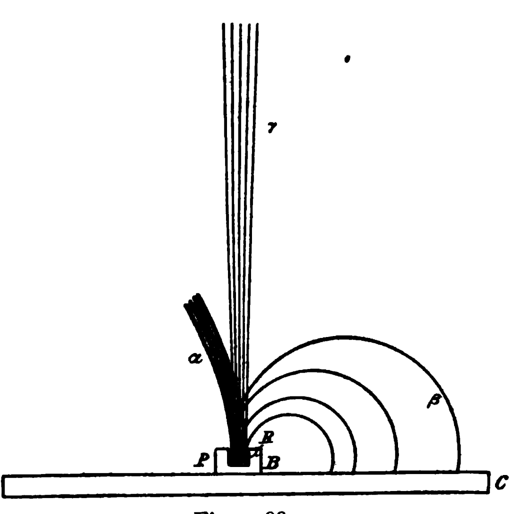
Von großer Bedeutung ist die magnetische Ablenkung in der neuesten Zeit für die Lehre von den verschiedenen Strahlenarten geworden, die man als Kathoden-, Kanal-, Röntgen- und Becquerel-Strahlen bezeichnet. Das magnetische Verhalten ist für diese Strahlengattungen meist sehr charakteristisch und für die Abtrennung von Untergattungen entscheidend. Was zunächst die Kathodenstrahlen betrifft, so sind diese ablenkbar; aber die Größe der Ablenkung hängt

[1] A. DE LA RIVE, Arch. Gen. **2**. 34. 1858; **5**. 236. 1859; Pog. Ann. **104**. 129. — [2] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. **103—116**. 1858—62. — [3] W. HITTORF, Pogg. Ann. **136**. 1 u. 197. 1869. — [4] G. G. STOKES, Phil. Mag. (5) **2**. 389. 1876.

außer von der Feldstärke, mit der sie proportional ist, noch von der Gasdichte in der Röhre, von dessen chemischer Natur, den Röhrendimensionen usw. ab. Je größer die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden, desto gestreckter ist nach CROOKES die Bahn, gerade wie bei der Kanonenkugel je nach der Ladung. Statt dessen kann man auch die Geschwindigkeit $v$ eines Strahlteilchens von der Masse $m$ und der Ladung $e$ einführen und erhält dann für den Krümmungsradius der Bahn die Formel

$$r = \frac{m}{e} \cdot \frac{v}{H} ,$$

in Worten: die Krümmung der Kathodenstrahlen im Felde ist mit der Feldstärke direkt, mit der Geschwindigkeit umgekehrt proportional, und der Proportionalitätsfaktor ist das Verhältnis von Ladung zu Masse[1]. — Im Gegensatze zu den Kathodenstrahlen werden die Röntgenstrahlen vom Magneten nicht abgelenkt. — Die Becquerelstrahlen endlich[2] sind nicht einheitlichen Charakters, sondern aus Strahlen verschiedener Art zusammengesetzt; von diesen sind die $\gamma$-Strahlen überhaupt nicht ablenkbar, also in dieser (wie in mancher anderen) Hinsicht den Röntgenstrahlen verwandt; die $\beta$-Strahlen sind ablenkbar und zwar im normal-elektromagnetischen Sinne wie die Kathodenstrahlen, mit denen sie auch sonst verwandt sind; die $\alpha$-Strahlen werden nur wenig abgelenkt, und zwar dem Sinne nach wie bewegte, positiv geladene Körper. Diese Verhältnisse lassen sich in der in Figur 188 dargestellten Weise schematisch veranschaulichen. Das Radium strahlt alle drei Gattungen, das Polonium nur die letzte aus. Auf die Schlüsse, die man aus diesen Tatsachen mit Hilfe der obigen Formel auf die Geschwindigkeitsverhältnisse sowie auf das Verhältnis $e:m$ ziehen kann, kann hier nicht eingegangen werden. Man vergleiche über diese Fragen auch Bd. **4**, 577.



Figur 188.

## Magnetisierung durch elektrische Ströme.

Soweit die Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen und Magneten bisher ins Auge gefaßt wurde, gab sie sich in Ortsänderungen der ponderablen Träger der Elektrizität resp. des Magnetismus kund. Diesen ponderomotorischen Wirkungen stehen nun aber andere zur Seite, die man, wenn sie von Elektrizität ausgehen und sich auf den Magnetismus erstrecken, als magnetomotorische, im umgekehrten Falle als elektromotorische zu bezeichnen hat; statt dessen kann man auch von dem durch elektrische Ströme induzierten Magnetismus und von

[1] Über die experimentelle Prüfung dieses Gesetzes vgl. W. KAUFMANN, Wied. Ann. **61**. 544. 1897. — [2] Aus der reichen Literatur sei hervorgehoben: F. GIESEL, Wied. Ann. **69**. 834. 1899. — MEYER und v. SCHWEIDLER, Phys. Z. **1**. 90. 1899. — H. BECQUEREL, C. R. **129**. 996. 1899. — P. CURIE, C. R. **130**. 73. 1900. — E. RUTHERFORD, Phys. Z. **4**. 235. 1903. — BECQUEREL, C. R. **136**. 199 u. 431. 1903. — TH. DES COUDRES, Phys. Z. **4**. 483. 1903.

den durch bewegte Magnete induzierten elektrischen Strömen sprechen. Obgleich diese beiden Erscheinungsgebiete hiernach völlig analog sind, pflegt man doch das eine dem Elektromagnetismus, das andere der elektrischen Induktion zuzuordnen. Demgemäß wird hier nur von der elektrischen Erregung des Magnetismus die Rede sein. Dabei sei jedoch, um von vornherein die Kürze der folgenden Darstellung zu rechtfertigen, darauf hingewiesen, daß die magnetische Induktion durch irgend welche Kräfte schon eingehend behandelt ist (wobei in der Praxis sogar fast stets die elektrische Erregung benutzt wurde), daß es sich hier also nur um die besonderen Beziehungen zwischen den erregenden elektrischen Strömen zu dem erregten Felde und damit indirekt zu dem erregten Magnetismus handeln kann.

Bringt man einen Eisen- oder Stahlstab in die Nähe eines elektrischen Stromes, und stellt man ihn quer zu diesem, so erweist er sich als magnetisch; stärker wird die Wirkung, wenn man ihn in das Zentrum eines Kreisstromes senkrecht zu dessen Ebene bringt, und noch wesentlich stärker, wenn man statt des Kreisstromes eine Spule anwendet und den Stab hineinsteckt. In diesem Falle ist der entstehende Magnetismus vom gewöhnlichen longitudinalen Typus. Stellt man den Eisenstab hingegen parallel mit einem Strom oder mit den Windungen einer Spule auf, so wird er transversal magnetisch. Endlich kann man ihn zirkular magnetisch machen, indem man einen Strom durch seine eigene Achse hindurchschickt[1]. Die magnetisierende Wirkung ist nicht bloß dem galvanischen Strom eigen, sie wird auch von den Entladungsströmen statischer Elektrizität ausgeübt; man kann durch elektrische Entladungsschläge kleine Magnetnadeln sogar sehr kräftig magnetisieren, und es scheint, daß die ersten Magnetisirungswirkungen der Elektrizität, die man überhaupt beobachtet hat, von Blitzschlägen herrührten, die bei Eisenkörpern vorbei ihren Weg nahmen. Exakt untersucht wurde die magnetisierende Wirkung der Reibungselektrizität von ARAGO, DAVY, SAVARY, HANKEL u. a.; dabei traten gewisse Unregelmäßigkeiten zutage, die erst durch eine Arbeit von LIPHART aufgeklärt worden sind; es muß jedoch an diesem Hinweise genügen[2]. Von der Magnetisierung durch elektrische Schwingungen wird weiter unter die Rede sein.

Über die Magnetisierungsmethodik im einzelnen ist schon im Art. „Magnetismus“ das Notwendige gesagt worden, ebenso über die Formen der Elektromagnete, die denen der Stahlmagnete vielfach ganz analog sind. Die Vorteile, welche Elektromagnete gegenüber Stahlmagneten bieten, sind so bekannt, daß hier darauf nicht eingegangen zu werden braucht; es sei nur darauf hingewiesen, daß dieser Vorzug ein dreifacher ist: der eine betrifft die Stärke des zu erreichenden Magnetismus, der zweite die Mannigfaltigkeit der zu erzielenden Verteilung des Magnetismus (durch Anordnung der Spule), der dritte die beliebig rasche und häufige Erregung und Wiederaufhebung des Magnetismus, ein Vorzug, der bekanntlich den Dynamomaschinen wesentlich mit zum Siege über die magnetelektrischen Maschinen verholfen hat.

Die wichtigste Aufgabe, die sich nun darbietet, besteht in der Ermittelung der Stärke und Verteilung des Magnetismus, der in einem Eisenkörper durch einen Strom von gegebener Stärke, der durch eine gegebene Konfiguration läuft, erregt wird. Der größte Teil dieser Aufgabe ist aber bereits im Art. „Magnetische Induktion“ erledigt worden, nämlich die Abhängigkeit des Magnetismus von der magnetisierenden Kraft oder von dem magnetischen Felde, in das der

[1] Theoretisches und Experimentelles über diesen Fall sehe man bei J. C. MAXWELL, Tr. R. Soc. 1865. — G. KIRCHHOFF, Ges. Werke 230. — G. VILLARI, N. Cim (2) **4** ff. — H. HERWIG, Pogg. Ann. **153** u. **156**. — F. AUERBACH, Wied. Ann. **5** usw. — [2] F. ARAGO, s. RIESS, Reibungselektricität **1.** § 517. — H. DAVY, Gilb. Ann. **71**. — SAVARY, Ann. Chim. Phys. **36**. — W. G. HANKEL, Pogg. Ann. **65**. 537. 1845 und **69**. 321. 1846. — v. LIPHART, Pogg. Ann. **116**. 513. 1862.

Körper gebracht wird. Es ist also nur noch anzugeben, welche Stärke und Beschaffenheit das von einem gegebenen Strome erzeugte Feld hat. Aber auch diese Aufgabe ist leicht zu lösen durch die Erwägung, daß der Strom selbst wieder gewissen magnetischen Gebilden äquivalent ist. Man kommt auf diese Weise fast unmittelbar zu folgenden Schlüssen. Das Feld eines Stromes ist überall der Stromstärke proportional; die Abhängigkeit des Magnetismus von der magnetisierenden Kraft, wie sie z. B. in Figur 187 dargestellt ist, stellt also ceteris paribus auch seine Abhängigkeit von der Stärke des magnetisierenden Stromes dar. Damit eine Spule ein gleichförmiges Feld erzeuge, muß sie mit parallelen, äquidistanten Windungen auf eine Kugel oder ein Ellipsoid aufgewunden sein; und damit dann weiter dieses Feld in einem Eisenkörper auch eine gleichförmige Magnetisierung hervorrufe, muß der letztere ebenfalls die Form einer Kugel oder eines Ellipsoids haben[2]. Näherungsweise wird man den Zweck auch erreichen, wenn man den kugel- oder ellipsoidförmigen Eisenkörper in die Mitte einer zylindrischen Spule von hinreichender Länge hineinbringt; weniger annähernd auch dann noch, wenn man in diese letztgenannte Spule einen langen, stabförmigen Eisenkörper einlegt. Die Gleichförmigkeit von Feld und Magnetisierung wird hingegen wiederum streng, wenn man die Spule ringförmig zusammenschließt und als Magnetisierungskörper ebenfalls einen in der Spule liegenden Eisenring verwendet.

Für die gedachten Fälle mögen hier die Hauptformeln zusammengestellt werden, die oft Anwendung finden können; $n_1$ bedeutet die Zahl der Windungen, welche auf die Einheit der Länge entfallen, $i$ die Intensität des Stromes. Für eine mit Stromwindungen bedeckte Kugel ist die durch die Ströme erzeugte Feldintensität[1]

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{8\pi}{3} n_1 i$$

die Intensität der Magnetisierung

$$\mathfrak{J} = \frac{\varkappa}{1 + \frac{4\pi}{3}\varkappa} \mathfrak{H}_0 = \frac{8\pi\varkappa}{3 + 4\pi\varkappa} n_1 i = 2 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} n_1 i$$

und die magnetische Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{3\mu}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0 = \frac{8\pi\mu}{\mu + 2} n_1 i \quad ;$$

für ferromagnetische Stoffe wird also nahezu

$$\mathfrak{J} = 2 n_1 i \, , \quad \mathfrak{B} = 8\pi n_1 i \quad .$$

Für eine lange zylindrische Spule ist das erzeugte Feld

$$\mathfrak{H}_0 = 4\pi n_1 i \quad ,$$

und für einen in ihr steckenden langen Stab wird

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}_0 = 4\pi\varkappa n_1 i \, , \quad \mathfrak{B} = 4\pi\mu n_1 i \quad .$$

Ähnlich verhält es sich bei ringförmigen Elektromagneten, nur muß man hier unter $n_1$ die Zahl der Windungen verstehen, welche auf die Streckeneinheit in Bogenmaß entfallen, und beachten, daß diese Strecke in Längenmaß nicht für alle Ringfäden die gleiche ist, sondern von innen nach außen abnimmt, wie der Radiusvektor $\varrho$ zunimmt; die Feldintensität infolge der Stromwirkung ist also in einem bestimmten Faden $4\pi n_1 i/\varrho$, die Intensität der Magnetisierung in

[1] Für das Ellipsoid resp. die Wirkung ellipsoidischer Spiralen sei hier an Literatur noch nachgetragen: E. RIECKE, Gött. Nachr. 1872. — J. STEFAN, Wien. Ber. **69** (2). 168. 1874. — A. G. GREENHILL, J. de Phys. **10**. 294. 1881.

diesem Faden also $4\pi\varkappa n_1 i/\varrho$, und endlich die Induktion über den ganzen Querschnitt des Eisens $\sigma$ integriert:

$$\mathfrak{B}\sigma = 4\pi\mu n_1 i\int\frac{d\sigma}{\varrho} \quad ,$$

wobei angenommen ist, daß das Eisen den ganzen Spulenquerschnitt ausfüllt; ist das nicht der Fall, sondern ist der Eisenquerschnitt $\sigma$, der Spulenquerschnitt $\sigma'$, so hat man allgemeiner:

$$\mathfrak{B}\sigma = 4\pi n_1 i\left(\int\frac{d\sigma'}{\varrho} + 4\pi\varkappa\int\frac{d\sigma}{\varrho}\right) \quad .$$

Je nach der Querschnittsform und dem Verhältnis $\sigma:\sigma'$ nimmt diese Formel bei der Ausrechnung verschiedene Gestalt an.

Ein Teil dieser Ergebnisse läßt sich leicht auch experimentell bestätigen, insbesondere der Satz, daß die Intensität der Magnetisierung in dem in Rede stehenden Falle mit der auf die Längeneinheit entfallenden Zahl der Windungen proportional ist und bei zylindrischen, genügend langen Spulen von der Weite der Windungen nicht abhängt; bei Spulen, die im Verhältnis zur Weite einigermaßen kurz sind, gilt der Satz nicht mehr streng, vielmehr zeigt hier die Messung eine Differenz zugunsten der engeren Windungen gegenüber den weiteren. Daß die Feldstärke proportional der Stromstärke ist, ist so einleuchtend, daß es wohl kaum des Beweises bedarf. Dagegen ist die Intensität der Magnetisierung erfahrungsgemäß nicht, wie es die obigen Formeln fordern, der Stromstärke proportional, eben weil sie nicht mit der Feldstärke proportional ist, und dies nicht, weil $\varkappa$ und $\mu$ keine konstanten Größen sind. Endlich sei hinzugefügt, daß, wie man durch Versuche festgestellt hat, das Material der Windungen und ihre Dicke keinen selbständigen Einfluß auf den Magnetismus ausüben.

Mit der Magnetisierung des Eisens befaßt sich noch eine ganze Reihe von Untersuchungen verschiedener Gruppen, deren Gegenstand hier nur kurz angedeutet werden kann.

Zunächst eine Gruppe von Arbeiten über die Frage, inwieweit und in welcher Weise die Magnetisierung sowie die Remanenz abhänge von der Beschaffenheit der magnetisierenden Schließung, insbesondere von ihren drei charakteristischen Faktoren: Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität; eine Frage, die in offenbarem Zusammenhange mit der nach der magnetisierenden Wirkung von verschieden gewickelten Spulen sowie von Kondensatorentladungen steht. Es sei hier auf die Zusammenstellung der Literatur in den Lehrbüchern (z. B. WIEDEMANN) sowie auf einige Abhandlungen von FROMME[1] und MARIANINI[2] verwiesen.

Dann die entsprechende geometrische Frage nach den Gesetzen der Magnetisierung durch räumlich verschieden angeordnete Windungen, z. B. durch solche, die nur einen Teil des Stabes oder Ringes oder verschiedene getrennte Stellen desselben bedecken. Hierüber ist schon oben (S. 148 und 193) einiges gesagt worden; es sei hier nochmals auf die Arbeiten von MUES[3] und von SAUTER[4] aufmerksam gemacht.

Ferner die magnetische Wirkung von Wechselströmen und elektrischen Schwingungen. Außer älteren Arbeiten liegt hier eine grundlegende Arbeit von OBERBECK vor, über die bei der Induktion berichtet wird, und an die später andere anknüpften. Namentlich kommt hier eine Untersuchung von GEROSA[5] in Betracht, in der alle Faktoren analysiert werden. Daß auch HERTZsche Schwingungen in eisernen Leitungen magnetisierend wirken, wurde von verschie-

[1] C. FROMME, Wied. Ann. **53**. 236. 1894; **54**. 1. 1895. — [2] A. MARIANINI, N. Cim. (3) **28**. 156. 1890. — [3] L. MUES, Inaug.-Diss. Greifsw. 1893. — [4] J. SAUTER, Wied. Ann. **62**. 85. 1897. — [5] G. C. GEROSA, Rend. Ist. Lomb. (2) **24**. 1. 1891.

denen Seiten bald nach Entdeckung dieser Schwingungen festgestellt. Ein Übelstand aber, der es erschwert, diese Wirkung deutlicher zu verfolgen, besteht darin, daß so rasche Schwingungen nur tausendstel von Millimetern in die Tiefe dringen. Es hat daher BIRKELAND[1] die Idee ausgeführt, sich nichtleitende magnetisierbare Substanzen herzustellen, nämlich Zylinder aus Eisendrähten oder gar Eisenpulver, eingebettet in Paraffin, mit einem von 5 bis 50% zunehmenden Volumgehalt an Eisenteilchen. Mit diesen Präparaten konnte der Einfluß der Magnetisierung auf die Resonanz usw. sehr gut studiert werden, und es zeigte sich rechnerisch, daß hierbei der Magnetismus bis zu 7 mm in die Tiefe eindrang.

Endlich der Fall der Zirkularmagnetisierung eines Eisenzylinders durch einen ihn axial durchsetzenden Strom; die ältere Literatur derselben ist schon angegeben worden. Das Potential, also die Wirkung nach außen ist hier null, es ist aber eine Magnetisierung $2\varkappa i r / R^2$ vorhanden, wo $\varkappa$ die Suszeptibilität, $i$ die Stromstärke, $r$ die Entfernung der betreffenden Stelle von der Achse und $R$ der Radius ist. Experimentell ist dieser Fall ebenfalls verschiedentlich behandelt worden, und zwar teils an Stäben und Drähten, teils an den noch besser geeigneten Röhren, wobei man die Untersuchung noch dahin ergänzen kann, daß man den Strom entweder durch einen axialen Draht oder durch die Röhre selbst gehen läßt; hierüber findet man bei KNOTT[2] interessante Angaben und Beziehungen. Weitere Probleme betreffen die Zusammenwirkung von longitudinaler und zirkularer Magnetisierung — vgl. unter „Magnetische Induktion" und unter „Beziehungen zur Elastizität" — sowie die sekundären Wirkungen der Zirkularmagnetisierung (s. w. u.).

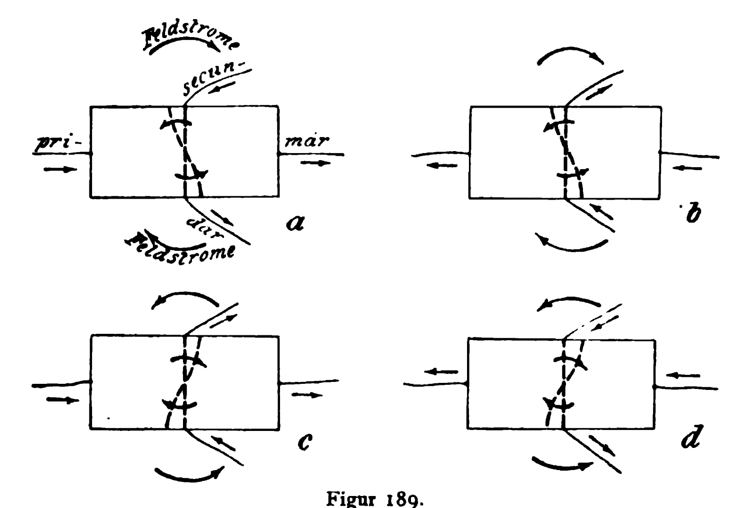
## HALLsches Phänomen und verwandte Erscheinungen.

**HALLsches Phänomen.** Bei den oben betrachteten Einwirkungen des Magnetismus auf elektrische Stromleiter handelte es sich, wie schon besprochen wurde, stets um ponderomotorische Wirkungen, d. h. es wurde der Stromleiter abgelenkt, und nur eine sekundäre Folge hiervon war es, daß mit ihm auch die Stromfäden selbst disloziert wurden. Es ist daher begreiflich, daß auf das Eifrigste nach einer Erscheinung gesucht wurde, bei welcher es keinem Zweifel mehr unterliegen konnte, daß es sich um eine Verschiebung der Stromfäden selbst handle, und es ist auch einleuchtend, daß zu solchen Versuchen sich flächenhaft ausgedehnte Stromleiter am besten eignen würden, weil in ihnen hinreichender Platz für erhebliche Verschiebungen der Stromfäden vorhanden ist. Trotzdem waren die dahin gehenden Bemühungen verschiedener Physiker[3] erfolglos, und erst HALL[4] gelang es, die Erscheinung festzusellen.

Eine rechteckige, sehr dünne Metallplatte ist zwischen den parallelen entgegengesetzten Polflächen eines Elektromagneten so aufgestellt, daß ihre Ebene den Polflächen parallel ist, also auf den magnetischen Kraftlinien senkrecht steht (man hat sich also den einen Pol vor, den anderen hinter der Zeichnungsebene zu denken, die Pfeile über und unter jeder Figur geben die Richtung der die Pole erregenden Spulenströme an). Ein elektrischer Strom, der „primäre Strom", wird der Platte in der Mitte der einen Kante zugeführt und durch die Mitte der gegenüberliegenden Kante fortgeleitet; die beiden Mitten der anderen Gegenseiten werden durch Drähte mit einem Galvanometer verbunden. So lange das Feld nicht erregt ist, zeigt das Galvanometer keinen Ausschlag, weil die beiden seitlichen Fortleitungsstellen gleiches Potential haben, eventuell kann man, wenn

[1] KR. BIRKELAND, C. R. **118**. 1320. 1894. — [2] C. G. KNOTT, Trans. Edinb. Soc. **37**. I (2). 7. 1892. — [3] E. MACH, Rep. de Phys. **6**. 10. 1870. — O. v. FEILITZSCH, Fernwkgn., 744. — A. M. MAYER, Sill. J. (3) **1**. 17. 1871. — [4] E. H. HALL, Amer. J. of Math. **2**. 287. 1879; Sill. J. (3) **20**. 52 u. 161. 1880; Phil. Mag. (5) **10**. 136; Phil. Mag. (5) **12**. 157. 1881; **15**. 341. 1883; Sill. J. (3) **19**. 117. 1885; **36**. 131 u. 277. 1888.

dies aus irgend welchen Gründen nicht genau der Fall sein sollte, durch kleine Verschiebungen der einen Stelle es leicht erzielen, daß der Ausschlag des Galvanometers null wird. Erregt man nunmehr das Feld, so schlägt die Galvanometernadel aus und zeigt dadurch an, daß ein Strom, der „sekundäre Strom", durch das Galvanometer geht, daß also die die beiden seitlichen Elektroden verbindende Linie keine Niveaulinie mehr ist, man muß vielmehr die eine Elektrode verschieben, also die ursprüngliche Niveaulinie drehen, um sie wieder zu einer Niveaulinie zu machen. Kehrt man den Strom oder das Feld um, so erfolgt der Ausschlag im entgegengesetzten Sinne; hieraus ist zu schließen, daß sich, absolut genommen, die Drehung der Niveaulinie bei Feldumkehr umkehrt, nicht aber bei Stromumkehr; an den Figuren 189a—d kann man dies leicht verfolgen. Diese Erscheinung ist bald nach HALL von zahlreichen Beobachtern bestätigt und, ebenso wie von HALL selbst, nach den verschiedensten Richtungen




Figur 189.

hin studiert worden; es seien insbesondere ROITI[1], RIGHI[2], BIDWELL[3], LEDUC[4], v. ETTINGSHAUSEN und NERNST[5], KUNDT[6], VAN AUBEL[7] genannt, von anderen wird später die Rede sein.

Fast alle bisher untersuchten Metalle haben die Erscheinung, den sogenannten „Hall-Effekt" gezeigt, aber nicht alle in demselben Sinne; nennt man vielmehr eine Drehung im Sinne der das Feld erregenden Ströme positiv, die entgegengesetzte negativ, so besitzen z. B. Gold, Silber, Kupfer, Wismut, Nickel eine negative Drehung, Eisen, Kobalt, Antimon und Zink eine positive; bei Zinn und besonders bei Blei ist sie so schwach, daß das Vorzeichen nicht ganz sicher ist (s. w. u). Wie man sieht, besteht zwischen den Vorzeichen des Hall-Effekts und dem Para- und Diamagnetismus kein Zusammenhang, da sich Eisen und Kobalt gleich, Nickel aber entgegengesetzt verhält; eher könnte man daran denken, daß das magnetoelastische Verhalten der drei ferromagnetischen Metalle ein ähnliches ist. Die obigen Figuren 189a—d beziehen sich, wie man sieht, auf eine Substanz mit negativer Drehung.

**Gesetz des Hall-Effektes.** Durch HALL und seine Nachfolger ist auch sehr bald das Gesetz der Erscheinung festgestellt, d. h. gezeigt worden, in welcher

---

[1] A. ROITI, Atti R. Acc. Linc. 1882. — [2] A. RIGHI, Trans. Acc. Linc. 1883; Mem. di Bol. (4) **5.** 103. 1883; Atti Acc. Linc. 1884. 331. — [3] S. BIDWELL, Phil. Mag. (5) **17.** 250. 1884. — [4] A. LEDUC, Compt. rend. **102.** 358. 1886. — [5] A. v. ETTINGSHAUSEN u. W. NERNST, Wien. Ber. **94** (2). 560. 1886; Rep. d. Phys. **23.** 1886. — A. v. ETTINGSHAUSEN, Wien. Ber. **94** (2). 808. 1886. — [6] A. KUNDT, Wied. Ann. **49.** 257. 1893. — [7] E. VAN AUBEL, Arch. Sc. phys. **33.** 222. 1895.

Weise sie von den verschiedenen in Betracht kommenden Größen abhängt. Dabei muß man unterscheiden zwischen der „elektromotorischen Kraft" $E$ des Hall-Effektes und der „Potentialdifferenz" $e$ bei demselben; erstere ist wichtig, weil sie die Stärke des Galvanometerausschlags bestimmt, letztere ist aber prinzipiell die einfachere und wichtigere Größe und vom Galvanometer ganz unabhängig; zwischen beiden besteht offenbar (vgl. Bd. 4) die Beziehung

$$E = 2\,e\,\frac{w_g + w_p}{w_g} \quad ,$$

wo $w_p$ der Widerstand der Platte zwischen den Ablenkungsstellen und $w_g$ der des Galvanometers nebst Zuleitung ist; es ergibt sich hieraus der Fingerzeig, daß man, um die Erscheinung möglichst kräftig zu erhalten, ein Galvanometer von möglichst kleinem Widerstande nehmen muß. Im folgenden wird es sich nur noch um die Größe $e$ handeln, die man als Hall-Effekt im numerischen Sinne des Wortes bezeichnen kann. Versteht man nun unter $i$ die Stärke des primären Stromes, unter $H$ die des Magnetfeldes (bisher mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet), unter $\delta$ die Dicke der Platte und unter $R$ eine Konstante, so ist nach den Versuchsergebnissen, jedoch mit einer gleich zu besprechenden Ausnahme:

$$e = R\,\frac{i\,H}{\delta} \quad ,$$

in Worten: Der Hall-Effekt ist der Stromstärke und der Feldstärke direkt, der Dicke der Platte umgekehrt proportional[1]. Die Konstante $R$ nennt man den Rotations-Koeffizienten der betreffenden Substanz. Diese Formel läßt erkennen, warum die Entdeckung der Erscheinung erst gelang, als man äußerst dünne Platten zur Anwendung brachte. Die von HALL und seinen Nachfolgern verwendeten Plättchen, die entweder in Blattgold, Blattsilber usw. oder aber noch besser in elektrolytischen Niederschlagsschichten der betreffenden Metalle bestanden, hatten Dicken von 0,01 mm bis unter 0,001 mm, bei KUNDT sogar bis unter 0,0001 mm hinab.

In der folgenden Tabelle sind die Rotationskoeffizienten einiger Metalle in absolutem Maße angegeben, und zwar einmal nach HALL, ein zweites Mal nach v. ETTINGSHAUSEN und NERNST.

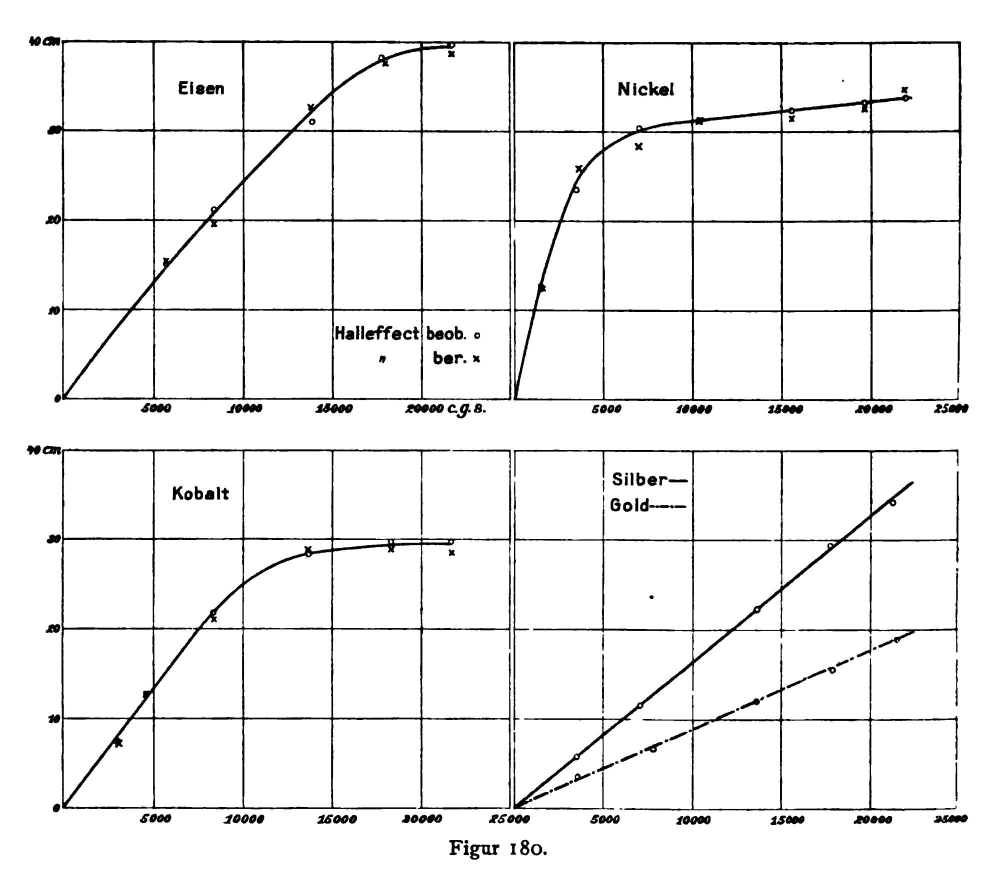
| Stoff | HALL | v. ETTINGSH. u. NERNST | Stoff | HALL | v. ETTINGSH. u. NERNST |
|---|---|---|---|---|---|
| Te . . . | — | +530 | Mg . . . | −0,0035 | −0,00094 |
| Bi . . . | −8,58 | − 10,1 | Ag . . . | −0,00086 | −0,00083 |
| Sb . . . | +0,114 | + 0,192 | Au . . . | −0,00066 | −0,00071 |
| Kohle . . | — | − 0,176 | Cd . . . | — | +0,00055 |
| Ni . . . | −0,0147 | − 0,0242 | Cu . . . | −0,00052 | −0,00052 |
| Stahl . . | {+0,0330 hart<br>{+0,0121 weich | + 0,0175 | Zn . . .<br>Neusilber . | +0,00082<br>— | +0,00041<br>−0,00053 |
| Fe . . . | +0,00785 | + 0,0113 | Al . . . | −0,0037 | −0,00038 |
| Co . . . | +0,00246 | + 0,00459 | Pt . . . | −0,00024 | −0,00024 |
| Na . . . | — | − 0,0025 | Pb . . . | 0 | +0,00009 |
| Pd . . . | — | − 0,00115 | Sn . . . | −0,00002 | −0,00004 |

Die Übereinstimmung der von verschiedenen Beobachtern gefundenen Zahlen ist, wie man sieht, nur eine ungefähre; der Umstand aber, daß sie eine desto bessere ist, je besser definiert und je reiner die betreffende Substanz ist (am

[1] Wenn der Strom unter 0,04 $A$ hinabgeht, nähme nach MORETTO (N. Cim. (4) 11. 278. 1900) der Hall-Effekt langsamer ab, wenigstens in gewissen Fällen.

besten für Platin, Gold, Silber usw.), läßt schließen, daß die Differenzen hauptsächlich der Verschiedenheit des angewandten Materials zur Last fallen und nicht in einer Unsicherheit der Erscheinung selbst begründet sind. Es sei bei dieser Gelegenheit zum Beweise, wie einflußreich sekundäre Materialverschiedenheiten sind, darauf hingewiesen, daß, während gegossenes Wismut nach obiger Tabelle einen sehr großen Rotationskoeffizienten hat, dieser nach Kundt für elektrolytisch niedergeschlagenes Wismut außerordentlich klein ist.

Höchst auffallend und interessant sind dagegen die kolossalen Verschiedenheiten in den Werten des Rotationskoeffizienten für die verschiedenen Metalle;




Figur 180.

ist doch dieser Wert, vom Zeichen abgesehen, für Tellur, wo er am größten ist, 60 mal so groß wie für das nächstfolgende Metall, das Wismut, und für dieses wiederum 60 mal so groß wie für das dann folgende Antimon, während die meisten anderen Stoffe wiederum noch 100 bis 1000 mal kleinere Werte haben: ein solches Verhalten findet sich kaum bei einer anderen numerischen physikalischen Eigenschaft wieder, und es steht auch bei keiner sonstigen Eigenschaft gerade das Tellur an der Spitze aller Stoffe. — Beim Wismut gelang es Righi übrigens, die Erscheinung auch durch kleine oder weit entfernte Magnete und schließlich sogar durch die alleinige Wirkung des Erdmagnetismus nachzuweisen. — Für Kupfer-Zink-Legierungen hat Hall gefunden:

| Kupfer % | 100 | 81 | 73 | 67 | 6 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^6 \cdot R$ | −520 | −404 | −250 | −166 | +496 | +820 |

Das Kupfer hat hiernach einen größeren Einfluß auf die Drehung als das Zink.

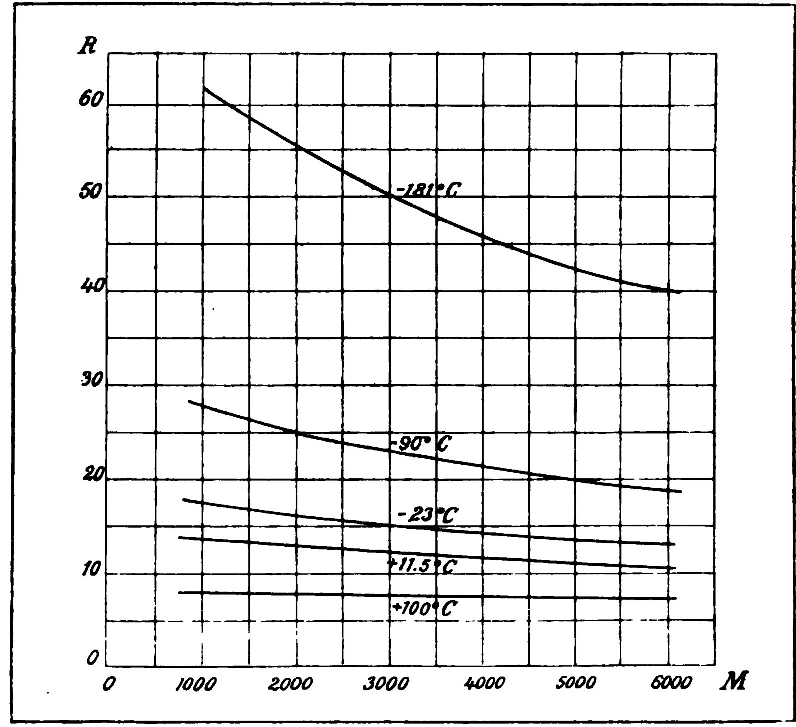
Während die Proportionalität von $e$ mit $i$ und $1/\delta$ eine exakte zu sein scheint, liegt die Sache hinsichtlich des Feldes nicht so einfach. Bei den meisten Metallen ist allerdings $e$ proportional mit $H$, also $R$ unabhängig von $H$, und noch neuerdings hat BAKER[1] diese Konstanz für Gold zwischen $H = 12$ und $H = 21500$ bestätigt; bei anderen Stoffen aber ergaben sich schon bei den ersten Messungen Abweichungen von der Proportionalität mit $H$ in dem Sinne, daß mit wachsendem $H$ der Koeffizient $R$ abnimmt, am stärksten bei Wismut[2] (auf $^1/_4$ des ursprünglichen Wertes) und bei Nickel (zwischen $H = 1000$ und 16000 auf $^1/_3$); bei Eisen und Kobalt schien $R$ erst bis zu einer gewissen Feldstärke zu steigen und dann erst zu fallen. Lag schon nach diesen Befunden und in Analogie mit den Erfahrungen bei der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch den Magnetismus die Vermutuug nahe, der Rotationskoeffizient möchte ebenso wie die KUNDTsche Konstante nicht mit der Feldstärke, sondern mit der Stärke der Magnetisierung proportional sein, so ist diese Vermutung durch die Messungen von KUNDT vollständig bestätigt worden, bei denen sich für Eisen, Nickel und Kobalt zeigte, daß das Verhältnis $R : \omega$ (vgl. S. 379) konstant ist. In der Tat zeigen die Kurven der Figur 190 bei Silber und Gold geradlinigen, bei Eisen, Nickel und Kobalt dagegen einen der Magnetisierungskurve völlig entsprechenden Verlauf. Wie man sonach bei der magnetischen Rotations-Polarisation die VERDETsche Konstante $\omega$ für die ferromagnetischen Substanzen durch die KUNDTsche Konstante $\psi$ ersetzen mußte, so wird man auch hier die HALLsche Konstante $R$ in diesem Falle durch eine andere ersetzen müssen. Für Stahl und Kobalt hat übrigens HALL auch eine remanente, d. h. nach Aufhebung des Feldes zurückbleibende Drehung konstatiert. Unerklärlich bleibt aber vorläufig in Anbetracht der konstanten Suszeptibilität des Wismuts (S. 285), daß auch beim Wismut $R$ abnimmt, und zwar in so starkem Maße; es wird darauf noch zurückgekommen werden.

Der HALLsche Versuch ist in der mannigfaltigsten Weise variiert worden. So ersetzte man die rechteckige Platte durch eine kreuzförmige oder kreis- oder halbkreisförmige. RIGHI kam auf den sinnreichen Gedanken, den primären Strom durch die Mitte einer Rechteckseite zuzuführen, von der gegenüberliegenden Seite einen Längsschlitz in die Platte einzuschneiden, so daß diese gegenüberliegende Seite in zwei Hälften geteilt wurde, und von den Mitten dieser beiden Halbseiten den Strom durch die entgegengesetzten Windungen eines Differentialgalvanometers zu führen, so daß bei symmetrischer Anordnung vor Erregung des Feldes kein Ausschlag erfolgte; die Erregung des Feldes brachte alsdann einen solchen hervor. Er dehnte dann diese Methode, bei der man also gar keine sekundären Ströme braucht, auf beliebig geformte Platten aus, indem er den Strom an einer Stelle des Randes zuführte und an zwei symmetrisch gelegenen anderen Punkten ableitete. v. ETTINGSHAUSEN und NERNST haben diese Fälle dann, veranlaßt auch durch theoretische Rechnungen von BOLTZMANN (s. w. u.), weiter verfolgt und namentlich gezeigt, in welchem quantitativen Zusammenhange sie mit dem einfachen HALLschen Falle stehen. Dieselben Autoren haben ferner gezeigt, daß die Wirkung ungeändert bleibt, wenn die Elektroden des primären und des sekundären Stromes miteinander vertauscht werden. Ferner hat man verschiedene Kompensationsverfahren angewandt, über deren Zulässigkeit sich eine Diskussion entsponnen hat. Endlich hat man gewisse, für andere Zwecke von CARDANI angegebene elektrolytische Verfahren (s. w. u.) auch hier nutzbar zu machen versucht. Nach MORETTO[3] kann man den Hall-Effekt auch durch die Entladungen einer Leidener Batterie hervorrufen, und zwar bei gleicher Elektrizitätsmenge in gleichem Maße.

---

[1] W. C. BAKER, Phil. Mag. (6) 4. 72. 1902. — [2] Vgl. auch A. LEDUC, a. a. O. — [3] P. MORETTO, N. Cim. (4) 11. 278. 1900.

Von besonderer Wichtigkeit ist die wiederholt konstatierte Tatsache, daß ein Hall-Effekt auch eintritt, wenn die Platte nicht senkrecht, sondern parallel zu den Kraftlinien des magnetischen Feldes liegt, jedoch nur in demjenigen der beiden hier möglichen Fälle, in welchem der primäre Strom senkrecht zum Felde, nicht auch, wenn er parallel zu ihm verläuft, d. h. das HALLsche Phänomen tritt in zwei aufeinander senkrechten Raumrichtungen, nicht aber in der dritten auf (beim KERRschen Phänomen ist neuerdings auch in der dritten Richtung eine Wirkung gewisser Art konstatiert worden, vgl. S. 404). Dabei ist der Rotationskoeffizient für stark magnetische Stoffe wesentlich schwächer als bei der




Figur 191.

gewöhnlichen Orientierung, beim Wismut dagegen nach v. ETTINGSHAUSEN und NERNST ungefähr ebenso groß.

Endlich ist als nicht unwesentlich zu erwähnen, daß die Temperatur einen Einfluß auf den Hall-Effekt ausübt, und zwar bei verschiedenen Stoffen in sehr verschiedenem Grade. Während nämlich bei Gold ein Einfluß kaum konstatiert werden konnte, nimmt der Effekt für 1° C bei Stahl um $^1/_3$ %, bei Nickel um $^2/_3$ %, bei Kobalt sogar um 1% zu. Für Antimon wurden folgende Zahlen gefunden:

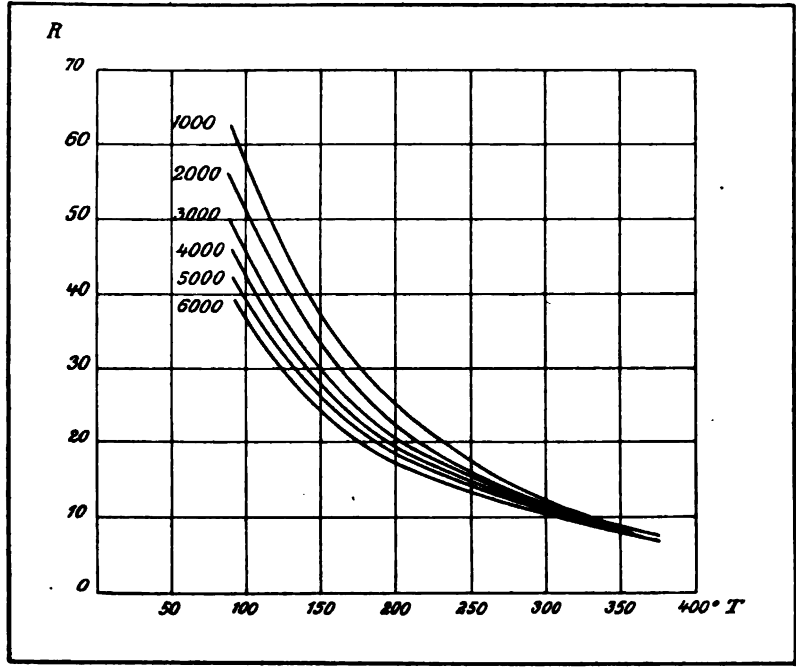
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t = 17^0$ | $210^0$ | $250^0$ | $30^0$ | $23^0$ |
| $t = 1{,}00$ | 0,78 | 0,72 | 0,76 | 0,91 |

Nach CLOUGH und HALL[1] ändert sich in Kupferbronze die — im Vergleich mit Kupfer etwa halb so große — Hall-Wirkung zwischen 20 und 360 Grad nur wenig; bei Nickel verhält sie sich ähnlich wie die Permeabilität.

Sehr merkwürdig in jeder Hinsicht verhält sich das Wismut. Daß bei diesem Metall die Wirkung mit wachsender Feldstärke abnimmt, ist schon erwähnt

[1] A. L. CLOUGH und E. H. HALL, Amer. Acad. 1893. 189.

worden. Aber diese Abnahme lernt man erst vollständig kennen, wenn man sie im Zusammenhange mit dem Einflusse der Temperatur betrachtet. Hierüber hat namentlich EVERDINGEN[1] sehr eingehende Untersuchungen angestellt; einer seiner Arbeiten ist auch die Figur 191 entnommen, welche jene Abnahme für verschiedene absolute Temperaturen veranschaulicht und deutlich zeigt, daß sie mit abnehmender Temperatur immer erheblicher wird. Was andererseits die Abhängigkeit des Effektes selbst von der Temperatur betrifft, so wollen die älteren Angaben hierüber nicht recht miteinander stimmen. v. ETTINGSHAUSEN und NERNST fanden bei einer Wismutplatte zwischen gewöhnlicher Temperatur und 100° eine Zunahme, für eine andere dagegen von vornherein eine Abnahme des Hall-Effektes (für 0°, 21°, 99° die Werte 8,1, 7,3, 4,1); LEDUC[2] fand eine starke




Figur 192.

Zunahme, die er durch die Formel $1 + 0{,}00844\,t + 0{,}0000862\,t^2$ darstellte, DRUDE und NERNST[3] fanden bei zwei verschiedenen Platten in der Reihenfolge der Versuche folgende relative Zahlen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $t = 20°$ | 254° | 23° | |
| | $e = 1{,}000$ | 0,418 | 1,005 | |
| 2. | $t = 14°$ | 243° | 100° | 14° |
| | $e = 1{,}00$ | 0,23 | 1,23 | 1,16 |

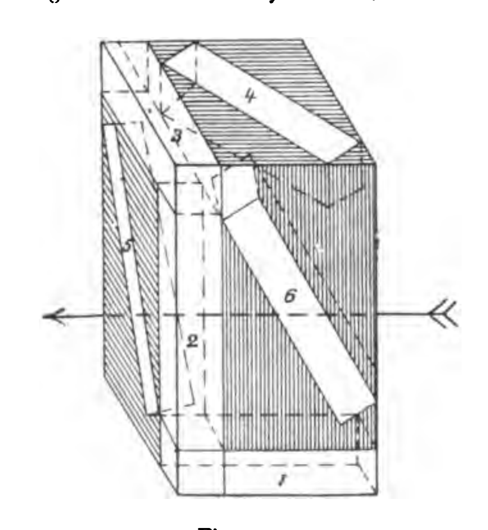
Die Wirkung nimmt also mit steigender Temperatur anfangs etwas zu, vor dem Schmelzpunkt aber schnell ab. Die zweite Platte war vorher in flüssigem Zustande untersucht worden, hatte dabei aber gar keinen Effekt gezeigt. Bei der Wiederabkühlung traten etwas größere Werte auf als ursprünglich. LEBRET[4]

[1] E. VAN EVERDINGEN, Comm. Leiden Nr. 26. 37. 40. 41. 53. 58. 61. Suppl. 2. 1896 bis 1902. — Inaug.-Diss. Leiden 1897. — Arch. Néerl. (2) **4**. 371. 1901. — [2] A. LEDUC, C. R. **102**. 358. 1886. — [3] P. DRUDE und W. NERNST, Gött. Nachr. 1890. 470. — Wied. Ann. **42**. 568. — [4] A. LEBRET, Versl. Akad. Amst. **3**. 238. 1895; **4**. 284; **4**. 293; **103**. 1896. — Inaug.-Diss. Leiden 1895. — Comm. Leiden Nr. 19.

endlich fand bei zwei Platten Temperaturkurven, die bei $-20^0$ bzw. noch tiefer ein Maximum aufweisen. Entscheidend auch für diese Frage wurden erst die Arbeiten von EVERDINGEN; sie zeigen, was ja übrigens schon aus dem oben Gesagten folgt und nur ein anderer Ausdruck dafür ist, daß mit steigender Temperatur der Hall-Effekt im Wismut ununterbrochen abnimmt, aber in schwachen Feldern stärker als in starken; die Figur 192 und die folgende Tabelle gibt hiervon ein Bild. Auf diese Weise kam EVERDINGEN schließlich für die tiefste Temperatur (flüssiger Sauerstoff) und das schwächste Feld zu dem gewaltigen Werte von 62, d. h. fast dem 10fachen des normalen Wertes von $R$.

| Absolute Temperatur | Feldstärke | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 |
| 91 | 62,2 | 55,0 | 49,7 | 45,8 | 42,6 | 40,1 |
| 181 | 28,0 | 25,0 | 22,9 | 21,5 | 20,2 | 18,9 |
| 250 | 17,0 | 16,0 | 15,1 | 14,3 | 13,6 | 12,9 |
| 284,5 | 13,3 | 12,7 | 12,1 | 11,5 | 11,0 | 10,6 |
| 373 | 7,28 | 7,17 | 7,06 | 6,95 | 6,84 | 6,72 |

Das Wismut hat aber noch eine andere Eigentümlichkeit: der Hall-Effekt zeigt bei ihm eine Asymmetrie, insofern er sich bei Umkehrung des Feldes nicht in den entgegengesetzt gleichen Wert, sondern in einen anderen Wert verwandelt, ja unter Umständen sogar überhaupt nicht das Zeichen, sondern nur die Größe ändert; diese Asymmetrie nimmt mit wachsendem Felde zu, und zwar stärker als dieses. Erst die Arbeiten von EVERDINGEN haben gezeigt, womit dieses Phänomen, insoweit es keine scheinbare, sondern eine wahre Asymmetrie darstellt, im Zusammenhange steht: mit der kristallinischen Natur des Wismuts. EVERDINGEN hat deshalb das HALLsche Phänomen für die verschiedenen möglichen Orientierungen des Präparates studiert, und zwar zuerst an Platten, dann, da nur so die Aufgabe vollständig gelöst werden kann, an Prismen, die aus einem natürlichen Wismut-Parallelepiped herausgeschnitten wurden; in welcher Weise, zeigt Figur 193. Nr. 1 ist parallel der Hauptachse; 2, 3, 5 stehen senkrecht auf ihr, 4 und 6 sind unter 60 Grad gegen sie geneigt. Für die wichtigsten von diesen Stücken gibt nun die folgende Tabelle einige Resultate wieder, und zwar, soweit das geometrisch möglich ist, für senkrechte und parallele Lage der Hauptachse gegen das Feld.

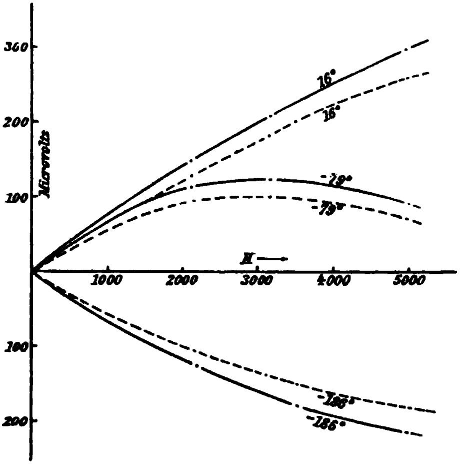


Figur 193.

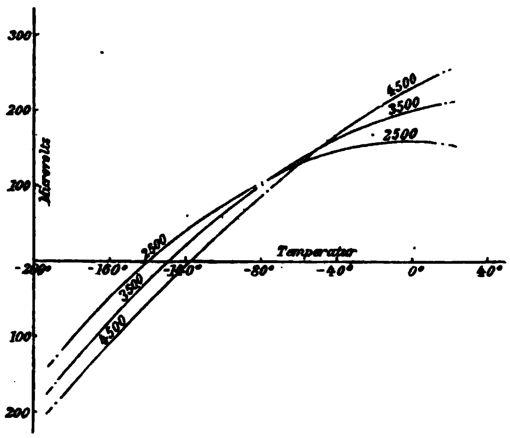
| Nr. | Feldstärke 4600 | | Feldstärke 2600 | |
|---|---|---|---|---|
| | ⊥ | ‖ | ⊥ | ‖ |
| 1 | − 8,0 | — | −10,2 | — |
| 2 | −10,6 | −0,2 | −12,6 | −0,7 |
| 3 | − 8,8 | 0,0 | −11,1 | −0,4 |
| 5 | − 8,2 | +0,6 | −10,6 | −0,1 |

Wie man sieht, ist $R$ erstens für die verschiedenen Kristallrichtungen etwas, wenn auch nicht sehr erheblich verschieden; zweitens ist es kolossal verschieden für senkrechte und parallele Stellung der Hauptachse gegen das Feld, nämlich im letzteren Fälle ganz klein; und drittens wird es im letzteren Falle in Richtung 5 bei starkem Felde sogar positiv. Nimmt man nun noch die Messungen an den geneigten Stücken 4 und 6 hinzu, so kann man $R$ durch ein Ellipsoid für alle Raumrichtungen darstellen.

Fast gleichzeitig mit den abschließenden Arbeiten EVERDINGENS hat sich auch LOWNDS[1] mit diesen Fragen befaßt, und zwar mit Hilfe einer die Achse enthaltenden Platte aus einem schönen Wismutkristall; das Feld war stets senkrecht zur Achse, der Strom hingegen war ihr entweder parallel oder senkrecht zu ihr. In Figur 194a sind die Kurven jener Art ausgezogen, dieser Art gestrichelt; der Deutlichkeit halber ist ein Kurvenpaar nach unten gezogen. Wenn übrigens schon diese Figur nur zum kleinen Teil sich mit der entsprechenden von EVERDINGEN in Einklang bringen läßt, so tritt der Unterschied noch deutlicher zutage, wenn man, wie in Figur 194b, die Temperaturen zu Abszissen nimmt; hier ist also noch weitere Aufklärung abzuwarten, soweit sie nicht einfach in der Verschiedenheit des Materials zu suchen ist.




Figur 194a.




Figur 194b.

Was die Existenz des Hall-Effektes in Flüssigkeiten betrifft, so liegen die Schwierigkeiten der Feststellung auf der Hand; denn einmal ist es nicht möglich, Schichten von annähernd so geringer Dicke herzustellen, wie das bei festen Stoffen möglich ist, was freilich zum Teil durch den großen spezifischen Widerstand der Flüssigkeiten ausgeglichen wird; und sodann machen sich mancherlei störende Einflüsse, wie Strömungen, Kontaktdifferenzen usw. geltend. So sind denn die Autoren, die sich mit dem Problem beschäftigt haben, und von denen ROITI, BAGARD, FLORIO, CHIAVASSA, EVERDINGEN, AMADUZZI und LEONE, MORETTO und AMERIO[2] hervorzuheben sind, teils zu positiven, überwiegend aber zu ne-

[1] E. VAN EVERDINGEN, s. o. — L. LOWNDS, Drude Ann. **9**. 677. 1902. — [2] A. ROITI, s. o. — H. BAGARD, C. R. **122**. 77. — J. de phys. (3) **5**. 499. — N. Cim. (4) **4**. 283. 1896. — N. Cim. (4) **7**. 187. 1898. — FLORIO, N. Cim. (4) **4**. 106. 1896. — CHIAVASSA, N. Cim. (4) **6**. 296. 1897. — E. VAN EVERDINGEN, Comm. Leiden Nr. 41. 1899. — AMADUZZI und LEONE, Rend. Acc. Linc. (5) **9**. 252. 1900. — P. MORETTO, N. Cim. (5) **3**. 80. 1902. — A. AMERIO, N. Cim. (5) **1**. 342. 1901.

gativen Schlüssen gelangt. Den positiven Standpunkt vertritt hauptsächlich BAGARD; er experimentierte mit $ZnSO_4$- und $CuSO_4$-Lösungen, einer Feldstärke von 300 bis 400, einer Schichtdicke von 1,6 mm, und fand eine Wirkung, die dem Sinne nach mit der bei Wismut übereinstimmte, ihrer Größe nach sich aber freilich allen theoretischen Vorstellungen entgegenstellt. Andere Forscher konnten selbst bei einer Feldstärke von 5000 nichts finden, wenn sie alle Fehlerquellen sorgfältig ausschlossen. Muß man hiernach sagen, daß das Hall-Phänomen in Elektrolyten noch nicht nachgewiesen ist, so könnte es sich doch in metallischen Flüssigkeiten anders verhalten. Hierauf bezieht sich eine Arbeit von AMADUZZI und LEONE. Zwei trapezförmige Glasplatten wurden mit einem 0,02 mm dicken Zwischenraum derart zusammengekittet, daß der Kitt eine von der Basis ausgehende Dreiecksfläche ganz ausfüllte und nur einen V-förmigen Raum für die Versuchsflüssigkeit, Wismut-Amalgam, freiließ. Wenn nun ein Strom von der Spitze des V aus sich in dessen Schenkel verzweigte und im Galvanometer kompensiert war, trat im Magnetfelde ein Ausschlag auf, und zwar — entsprechend dem sonstigen Verhalten des Wismuts — für entgegengesetzte Feldrichtungen nicht von gleicher absoluter Größe. Bei reinem Quecksilber war kein Effekt zu konstatieren. Auch für Wismut-Amalgam wird die Tatsache freilich neuerdings von MORETTO wieder bestritten, und von AMERIO wird sie auf Grund einer Reihe kritischer Versuche, unter Ausschluß jedes Hall-Effektes, auf gewisse elektrisch-mechanische, ponderomotorische Wirkungen zurückgeführt. Die neueste Arbeit zu diesem Gegenstande ist die von HEILBRUN[1]; sie kommt für Elektrolyte zu dem Ergebnis, daß zwar eine scheinbare Ablenkung der Stromfäden eintritt, daß diese aber, wie sich direkt nachweisen läßt, kein Hall-Effekt ist, sondern auf Rotationen der Flüssigkeit beruht.

Bisher ist von festen und flüssigen Stoffen die Rede gewesen. In ersteren ist der Hall-Effekt vorhanden, aber theoretisch (s. w. u.) schwer zu verfolgen, in letzteren wäre er theoretisch zu verfolgen, ist er aber zu klein, um beobachtet werden zu können. Hieraus erhellt die Wichtigkeit der Aufgabe, den Effekt in Gasen zu studieren; denn hier sind beide Bedingungen erfüllt. WILSON[2], der die Aufgabe zuerst in Angriff nahm, brachte in die positive Lichtsäule des stromdurchflossenen Gases zwei Sonden, die sich in eine Niveaufläche desselben einstellen ließen; im Magnetfelde konnte dann an einem empfindlichen Quadrantelektrometer eine Potentialdifferenz zwischen den Sonden konstatiert werden. Sie ist, für die Einheit des Feldes, mit dem Gasdrucke umgekehrt proportional, und als Zahlenfaktor fand sich, wenn der Druck in mm Hg ausgedrückt wurde, für Wasserstoff 0,0205, für Sauerstoff 0,00379. Einer sehr eingehenden Untersuchung hat MARX[3] das HALLsche Phänomen in Flammengasen unterzogen, mit Hilfe einer Anordnung, deren Beschreibung hier zu weit führen würde (man vergleiche auch den Artikel „Durchgang der Elektrizität durch Gase, **4**, 624). Es muß genügen, zu konstatieren, daß die Hall-Konstante nach allen Richtungen erforscht wurde, wobei sich zeigte, daß sie mit zunehmender Konzentration der zerstäubten Lösung in der Flamme stark abnimmt, und daß sie ferner wesentlich durch den Umstand beeinflußt wird, ob das OHMsche Gesetz bei der getroffenen Anordnung als erfüllt anzusehen ist oder nicht.

**Widerstandsänderung im Magnetfelde.** Die Tatsache, daß der spezifische Widerstand der Metalle sich durch ihre Einbringung in ein magnetisches Feld ändert, ist schon im Art. „Elektrische Leitfähigkeit von metallisch leitenden Körpern“ (Bd. 4, S. 361 ff.) erwähnt und für die wichtigsten Stoffe näher besprochen worden. Der Einfluß ist, wie dort gezeigt wurde, im allgemeinen ein verschiedener je nach der Stromrichtung im Vergleich mit der Feldrichtung; man kann dies in sehr mannigfacher Weise studieren, durch verschiedene Orien-

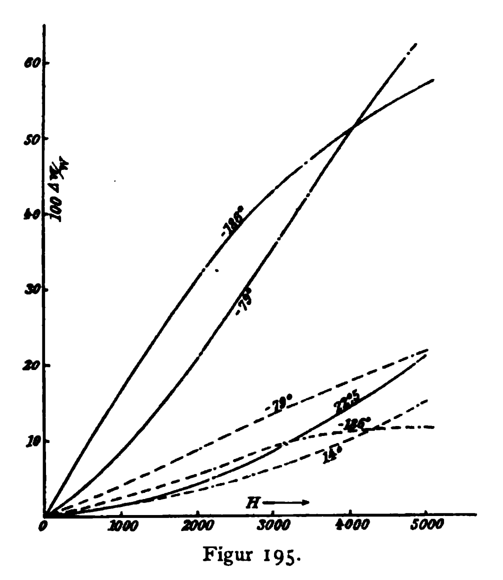
[1] R. HEILBRUN, Drude Ann. **15**. 988. 1904. — [2] H. A. WILSON, Proc. Cambr. Soc. (4) **11**. 349 u. 291. 1902. — [3] E. MARX, Drude Ann. **2**. 798. 1900.



tierung des Präparats, ferner indem man den Strom entweder um den in Drahtform angewandten Körper spiralig herumführt oder axial durch ihn hindurchleitet usw. Hier sei zunächst die dortige Literatur im Hinblick auf die Interessen des vorliegenden Artikels durch Zitierung der Arbeiten von AUERBACH, CHWOLSON, v. WYSS, FAÈ, CANTONE, DES COUDRES, GARBASSO, GRAY, LOWNDS, SAGNAC und JEWETT[1] ergänzt und sodann einiges für die Beziehung der Erscheinung zu anderen nicht unwichtiges Detail nachgetragen. Zunächst der Sinn der Widerstandsänderung; hier stimmen alle Autoren darin überein, daß bei Fe und Ni eine Zunahme parallel, eine Abnahme senkrecht zu den Kraftlinien, dagegen bei Bi und Sb stets eine Zunahme auftritt; Drähte aus magnetisch indifferentem Material ändern ihren Widerstand überhaupt nicht. Dann die Abhängigkeit der Änderung vom Felde bzw. von der Magnetisierung; hier gehen die Ergebnisse weit auseinander: einige finden Proportionalität mit dem Felde, andere mit dessen Quadrat, andere mit der Magnetisierung, noch andere mit deren Quadrat, endlich GRAY und JONES bei Eisen sogar Proportionalität mit der vierten Potenz der Magnetisierung. Ferner hat bei einigen Stoffen die Temperatur einen erheblichen Einfluß; für Wismut haben z. B. RIGHI und VAN AUBEL gezeigt, daß die Widerstandszunahme mit steigender Temperatur sehr viel kleiner wird, und speziell für Querstellung fanden DRUDE und NERNST folgende prozentische Zunahmen:

| 16° | 100° | 223° | 290° | 35° | 18° |
|---|---|---|---|---|---|
| 21,9 | 8,0 | 0,96 | 0,41 | 15,1 | 18,6 , |

die magnetische Widerstandsänderung sinkt also bis 100° etwa auf $^1/_3$, dann aber, mit der Annäherung an den Schmelzpunkt, rapid auf sehr kleine Bruchteile herab. Freilich ist zu beachten, daß diese Erscheinung sehr verwickelt ist, daß bei ihr die Veränderlichkeit der Magnetisierbarkeit mit der Temperatur, die Veränderlichkeit des Widerstandes selbst mit der Temperatur sowie dauernde Änderung des Materials wesentlich beteiligt ist. — Endlich kommt noch die Verschiedenheit des Verhaltens gegen Gleichstrom und Wechselstrom in Betracht, die besonders bei Bi und Sb auffällig ist. Bei Sb ist der Widerstand, ohne und mit Feld, stets für Wechselstrom kleiner als für Gleichstrom; für Bi aber ist ohne oder in schwachem Felde zwar dasselbe der Fall, aber bei einem Felde gleich 4200 tritt Umkehr ein.



Figur 195.

Für Wismut liegen auch hier wieder im wesentlichen die beiden Spezialarbeiten von EVERDINGEN und LOWNDS vor. LOWNDS unterscheidet wieder einfach zwischen Parallel- und Senkrechtstellung; die prozentische Widerstandszunahme in beiden Fällen ist in Figur 195 durch ausgezogene bzw. gestrichelte Linien für verschiedene Tempera-

[1] F. AUERBACH, Wied. Ann. 3. 298 u. 301. 1878. — O. CHWOLSON, Rep. d. Phys. 13. 230. 1877. — v. WYSS, Wied. Ann. 36. 447. 1889. — FAÈ, Atti Ist. Veneto (6) 5. 1887. — M. CANTONE, Atti Acc. Linc. (5) 1. 424. 1892. — TH. DES COUDRES, Verh. Berl. phys. Ges. 10. 50. 1891. — A. GARBASSO, Atti di Torino 26. 565. 1891. — M. CANTONE, Atti Acc. Linc. (5) 1. 1. 424. 1892; 1. 2. 119 u. 277. 1892. — A. GRAY und E. T. JONES, Proc. R. Soc. 67. 208. 1900. — L. LOWNDS, Drude Ann. 9. 677. 1902. — J. SAGNAC, J. de phys. (4) 1. 237. 1902. — F. B. JEWETT, Phys. Review 16. 51. 1903.

turen als Funktion der Feldstärke dargestellt. Everdingen andererseits unterwirft wieder seine 6 Prismen der Messung, und zwar sowohl ohne Magnetfeld:

| Nummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstand | 3,48 | 2,29 | 2,32 | 2,07 | 2,59 | 2,85 |

(Maximum : Minimum gleich 1,68, bei Lownds 1,78) — als auch im Felde, und hier wieder für alle möglichen Kombinationen der Orientierungsrichtung mit der Feldrichtung; diese Kombinationen sind zu zahlreich, um die Zahlen hier anzuführen. Es genüge das Endergebnis festzustellen: Außerhalb des Feldes läßt sich der Widerstand des Wismuts als Funktion der Kristallrichtung durch ein Rotationsellipsoid vom ungefähren Achsenverhältnis $\sqrt{3} : \sqrt{5}$ darstellen; in einem der Hauptachse parallelen Felde behält das Ellipsoid seinen Rotationscharakter bei, und das Achsenverhältnis ändert sich nur wenig; in einem senkrechten Felde wird es dreiachsig, und die Achsenverhältnisse ändern sich erheblicher; in einem schiefen Felde ergeben sich Verhältnisse, die sich durch Superposition berechnen lassen; jedenfalls ändern sich die Widerstände verschiedener Richtungen durch die Wirkung des Feldes in verschiedenem Maße.

Schließlich sind noch zwei Arbeiten zu nennen, nämlich eine von Yamaguchi (in der Hauptsache anderem gewidmet), in der die relative Zunahme des Widerstandes für zwei Wismutplatten zu 15, für eine dritte (galvanisch niedergeschlagene) zu 35% bestimmt wurde, und eine Arbeit von Jewett, die die Widerstände und relativen prozentischen Zunahmen ($d$) für Wismutspiralen bei verschiedenen Feldern und Temperaturen angibt; eine kleine Auswahl aus den Zahlen folgt hier:

24° C

| $H$ | $w$ | $d$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,322 | — |
| 2200 | 1,345 | 1,7 |
| 3300 | 1,353 | 2,3 |
| 4400 | 1,385 | 4,7 |
| 6000 | 1,414 | 6,9 |
| 9700 | 1,480 | 11,9 |
| 12400 | 1,537 | 16,3 |

80° C

| $H$ | $w$ | $d$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,334 | — |
| 7100 | 1,360 | 1,9 |
| 9700 | 1,386 | 3,8 |
| 11900 | 1,422 | 6,6 |

100° C

| $H$ | $w$ | $d$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,358 | — |
| 7100 | 1,399 | 3,0 |
| 9700 | 1,414 | 4,1 |
| 11900 | 1,434 | 5,6 |

140° C

| $H$ | $w$ | $d$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,383 | — |
| 7100 | 1,423 | 2,9 |
| 9700 | 1,436 | 3,8 |
| 12300 | 1,458 | 5,4 |

200° C

| $H$ | $w$ | $d$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,353 | — |
| 7100 | 1,356 | 2,2 |
| 9700 | 1,356 | 0,22 |
| 11900 | 1,360 | 0,52 |

Wie man sieht, nimmt die maximale Widerstandszunahme mit steigender Temperatur ab; das von Lownds für tiefe Temperaturen gefundene Gesetz setzt sich also für höhere fort; für geringere Feldstärken kreuzen sich aber, wieder in Einklang mit Lownds, die einzelnen Kurven.

Stellt man die relative prozentische Widerstandszunahme nach den verschiedenen Autoren zusammen, so erhält man für ein Feld von 7000 und Zimmertemperatur:

| | |
|---|---|
| JEWETT | 9 |
| VAN EVERDINGEN ⊥ | 14 |
| YAMAGUCHI I, II | 15 |
| LLOYD | 15,9 |
| VAN EVERDINGEN ‖ | 17,5 |
| LOWNDS ⊥ | 18 |
| FLEMING und DEWAR | 19 |
| v. ETTINGSHAUSEN und NERNST | 25 |
| HENDERSON | 29,5 |
| YAMAGUCHI III | 35,5 |
| LOWNDS ‖ | 40 ; |

eine Tabelle, die lehrt, daß hier jedenfalls sehr viel vom individuellen Material abhängt, besonders von dem Grade seiner Heterotropie.

**Zusammenhang der Widerstandsänderung mit dem HALLschen Phänomen; longitudinaler Hall-Effekt.** Auf den ersten Blick möchte es vielleicht befremdlich erscheinen, daß die Widerstandszunahme im Magnetfelde hier als eine dem HALLschen Phänomen verwandte Erscheinung rubriziert worden ist; man sieht dies aber sofort ein, wenn man sich eine vom Strom durchflossene Wismutplatte vorstellt, die senkrecht zu dem magnetischen Felde in diesem sich befindet, und erwägt, daß derselbe Galvanometerausschlag, den man auf eine Widerstandszunahme zurückführt, auch auf eine Abnahme der elektromotorischen Kraft des Stromes oder, mit anderen Worten, auf das Auftreten einer elektromotorischen Gegenkraft infolge der Erregung des Feldes zurückgeführt werden kann. In diesem Sinne hat NERNST[1] die Erscheinung als longitudinalen Hall-Effekt bezeichnet, wogegen sich freilich DEFREGGER[2] aus gewissen Gründen gewendet hat. Bei dem transversalen Hall-Versuch wird das Eintreten einer Potentialdifferenz zwischen zwei Plattenstellen, die ursprünglich keine solche haben, konstatiert; bei dem longitudinalen Versuch wird gezeigt, daß die Potentialdifferenz zwischen zwei Stellen, zwischen denen sie schon von vornherein groß ist, eben zwischen der Ein- und Austrittstelle des primären Stromes selbst, im Felde verringert wird. Der Zusammenhang zwischen beiden Erscheinungen ist insofern sehr einfach, als bei gleichbleibender Resultante die eine Komponente abnehmen muß, wenn die andere von null auf einen positiven Wert zunimmt. Man kann also den longitudinalen Hall-Effekt als eine Folge des transversalen bezeichnen. Umgekehrt muß aber auch die Widerstandsänderung im Magnetfelde und zwar speziell der Umstand, daß sie eine Funktion des Winkels der Stromrichtung mit dem Felde ist, eine Rückwirkung auf das transversale Hall-Phänomen ausüben, wie man bei Verfolgung der Stromfäden in der Platte leicht einsieht; es soll damit nicht gesagt sein, daß sich hierdurch allein das HALLsche Phänomen erklärt; aber es ist damit ein zweiter Faktor desselben aufgedeckt, der bei einer Theorie berücksichtigt werden muß.

Insbesondere folgt für Stoffe wie Wismut, bei denen die Widerstandsänderung erheblich und überdies von der Richtung abhängig ist, auf Grund einfacher Überlegungen zweierlei: erstens, daß eine Assymmetrie, wie sie tatsächlich existiert, bei dem Hall-Effekt existieren muß; und zweitens, daß der Koeffizient $R$ keine einfache Bedeutung besitzt, weil der Widerstand in ihm implizite enthalten ist. Man wird ihn vielmehr durch eben diesen Widerstand dividieren müssen, um eine einfache Größe, nämlich den tangens des Drehungswinkels der Niveaulinie durch das Feld eins zu erhalten. Diese zuerst wohl von LEDUC eingeführte Konstante $D$ hat z. B. für Wismut nach EVERDINGEN folgende Werte (oben Felder, links Temperaturen):

---

[1] W. NERNST, Wied. Ann. **31**. 783. 1887. — [2] R. DEFREGGER, Wied. Ann. **63**. 100. 1897.

| | Rotationskoeffizient $D$ (mal $10^5$) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 |
| —182 | 32,9 | 23,8 | 17,6 | 13,4 | 10,5 | 8,5 |
| — 90 | 17,7 | 14,7 | 12,3 | 10,6 | 9,1 | 7,8 |
| — 23 | 10,5 | 10,4 | 9,5 | 8.7 | 7,8 | 6,4 |
| + 11,5 | 7,81 | 7,31 | 6,79 | 6,28 | 5,80 | 5,39 |
| +100 | 3,47 | 3,40 | 3,32 | 3,23 | 3,14 | 3,04 |

Der Koeffizient $D$ nimmt, wie man sieht, sowohl mit steigender Temperatur als auch mit wachsendem Felde stark ab und sinkt schließlich auf den elften Teil seines größten Wertes[1].

**Thermomagnetischer Transversaleffekt** (vgl. die schon früher, Bd. **4**, S. 745, hierüber gemachten kurzen Bemerkungen). v. ETTINGSHAUSEN und NERNST[2] haben gezeigt, daß ein dem HALLschen ganz analoger stationärer Transversalstrom auftritt, wenn man in der primären Richtung statt eines elektrischen einen Wärmestrom durch die Platte fließen läßt, indem man etwa bei der rechteckigen Platte die Mitte der einen Kante ständig erhitzt und die Mitte der gegenüberliegenden Seite ständig kühlt; die Richtung des elektrischen Querstromes wechselt mit der des Wärmestromes und des Feldes; für eine bestimmte Richtung der beiden letzteren ist sie derart, daß man von der Eintrittstelle des Wärmestromes zur Eintrittstelle des erzeugten elektrischen Querstromes in die Platte durch eine Bewegung entgegengesetzt dem Sinne der das Feld erregenden Ströme gelangt. Entdeckt wurde die Erscheinung beim Wismut, und zwar an einer Platte von 5 cm Länge, 4 cm Breite und 0,2 cm Dicke (also an einer verhältnismäßig sehr dicken Platte); sie wurde dann aber bei zahllosen anderen Substanzen wiedergefunden, bei einigen war das Vorzeichen wie bei Wismut, also nach der früher eingeführten Bezeichnungsweise negativ, bei anderen positiv. Die auftretende elektromotorische Kraft läßt sich durch die Formeln

$$q = Q \frac{\beta}{\lambda} M(t_2 - t_1) = \frac{Q}{K} \frac{WH}{\delta}$$

ausdrücken, in denen $\beta$ die Breite, $\lambda$ die Länge, $\delta$ die Dicke der Platte, $H$ die Feldstärke, $t_1$ und $t_2$ die beiden konstant erhaltenen Temperaturen, $W$ die Intensität des Wärmestromes, $Q$ eine spezifische Konstante und $K$ das Wärmeleitungsvermögen ist; die erste Formel stellt unmittelbar das Ergebnis der Beobachtungen dar, die zweite, die sich durch Umrechnung aus ihr leicht ergibt, zeigt, daß die Erscheinung dem HALLschen Phänomen vollkommen analog ist und in ganz derselben Weise von den maßgebenden Faktoren abhängt; nur wird dann die spezifische Konstante nicht, wie in der ersten Formel, $Q$, sondern $Q/K$. Übrigens hängt $Q$ von der Temperatur ab, eine Abhängigkeit, die man durch einen Temperaturkoeffizienten $\alpha$ ausdrücken kann. Die Messungen von NERNST haben nun folgende Zahlen ergeben, wobei $Q$ für 56° C gilt und als Wärmeeinheit die Gramm-Kalorie zugrunde gelegt ist.

[1] Über die Beziehung zwischen Hall- und Längseffekt vgl. auch BEATTIE, Trans. Edinb. Soc. (1) **38**. 225 u. 241. 1896. — [2] A. v. ETTINGSHAUSEN und NERNST, Wied. Ann. **29**. 343. 1886. — W. NERNST, Wied. Ann. **31**. 760. 1887.

| | $Q$ | $\alpha$ | $\frac{Q}{K}$ |
|---|---|---|---|
| Wismut . . . . | −0,132 | −0,0133 | −7,8 |
| Antimon . . . | −0,00887 | −0,00163 | −0,21 |
| Nickel . . . . | −0,00861 | +0,00402 | −0,066 |
| Kobalt . . . . | −0,00224 | +0,00839 | −0,013 |
| Kohle . . . . | (−0,0001) | — | (−0,25) |
| Eisen . . . . | +0,00156 | — | +0,0096 |
| Stahl . . . . | +0,000706 | +0,00400 | +0,0071 |
| Kupfer . . . . | +0,000090 | +0,0050 | +0,00013 |
| Zink . . . . . | +0,000054 | — | +0,00020 |
| Silber . . . . | +0,000046 | — | +0,00005 |
| Blei . . . . . | (?) +0,000005 | — | +0,00006 |
| Zinn . . . . . | (?) +0,000004 | — | +0,00003 |

Eine Vergleichung der Zahlen der letzten Spalte mit den Zahlen für die Konstante $R$ des HALLschen Phänomens zeigt eine merkwürdige Proportionalität der absoluten Werte, derart, daß ziemlich genau eine Gramm-Kalorie des thermomagnetischen Phänomens äquivalent ist der Einheit der Elektrizitätsmenge beim HALLschen Phänomen; diese Proportionalität ist um so auffallender, als die Vorzeichen der Zahlen für beide Erscheinungen durchaus nicht bei allen Stoffen miteinander stimmen, ein Punkt, der also noch sehr der Aufklärung bedarf. Was schließlich die Natur des entstehenden Stromes betrifft, so liegt es am nächsten, an einen thermoelektrischen zu denken, also an eine durch das Feld erzeugte Temperaturverschiedenheit symmetrisch gelegener Plattenpunkte, und man würde den Parallelismus haben, daß ein primärer elektrischer Strom einen sekundären elektrischen, ein primärer Wärmestrom einen sekundären Wärmestrom hervorruft. v. ETTINGSHAUSEN und NERNST wurden durch verschiedene Wahrnehmungen zu der Annahme geführt, daß diese Auffassung nicht die richtige sei, daß eine seitliche Temperaturverschiedenheit nicht eintritt, daß vielmehr auch der Wärmestrom im Feld unmittelbar einen elektrischen Transversalstrom erzeugt. Inzwischen haben andererseits RIGHI[1] und LEDUC[2] gefunden, daß im magnetischen Felde eine Ablenkung der Isothermen (thermischer Transversaleffekt) stattfindet, worüber schon im vorigen Artikel (S. 371) einige Angaben gemacht worden sind; dabei ist zu bemerken, daß die thermische Asymmetrie von RIGHI nicht bloß durch Thermoströme, sondern auch durch Thermometer festgestellt worden ist. Es ist nun sehr leicht möglich, daß dieser elektrische Quereffekt ganz oder teilweise sekundärer Natur sei.

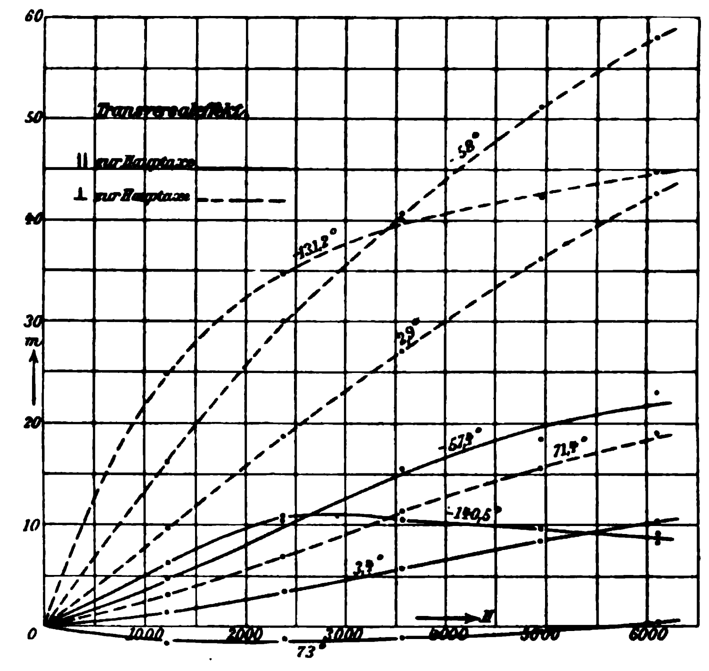
Unter diesen Umständen ist es begreiflich, daß die Erscheinung auch neuerdings noch das Interesse der Physiker wachrief; insbesondere liegen Arbeiten vor von EVERDINGEN, YAMAGUCHI, LLOYD, LOWNDS und BARLOW[3]. Zunächst muß man, um den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, die Grundformel etwas anders, nämlich in der Form

$$q = -\beta \frac{dt}{dx} \cdot m$$

schreiben, wo die positive $x$-Achse in die Richtung des Wärmestromes fällt, $q$ die elektromotorische Kraft zwischen zwei, senkrecht zum Wärmestrom, um $\beta$

[1] A. RIGHI, Rend. Acc. Linc. 1887, 12. Juli; Compt. rend. **105**. 168. 1887; Atti Acc. Linc. (4) **4**. 433. 1888. — [2] A. LEDUC, Compt. rend. **104**. 1783. 1887. — [3] E. VAN EVERDINGEN, Comm. Leiden Nr. 42. 1898. Suppl. 2 zu Nr. 61—72. 1901. — M. G. LLOYD, Inaug.-Diss. Philad. 1900; vgl. auch bei YAMAGUCHI. — E. YAMAGUCHI, Drude Ann. **1**. 214. 1900. — L. LOWNDS, Drude Ann. **6**. 146, bes. 155. 1901. — G. BARLOW, Drude Ann. **12**. 897. 1903. — L. LOWNDS, Phil. Mag. (6) **5**. 141. 1903.

voneinander abliegende Punkte und $m$ eine Größe ist, die von Feldstärke (und zwar im allgemeinen nicht einfach proportional) und Temperatur abhängt, vom Temperaturgefälle aber unabhängig ist. Diese Größe $m$ ist nun von den genannten Autoren nach allen Richtungen erforscht worden, von allen für Wismut, von BARLOW auch für Antimon; dabei arbeiteten die einen mit angeblich isotropem, die anderen mit ausgesprochen kristallischem Material. Das Hauptergebnis, auf das wir uns hier beschränken müssen, ist dies: Der thermomagnetische Transversaleffekt ist sehr viel stärker, wenn der Wärmestrom senkrecht, als wenn er parallel der Hauptachse läuft; er wächst mit abnehmender Temperatur, mit Ausnahme sehr tiefer Temperaturen und großer Feldstärken; er nimmt mit wachsendem Felde anfangs rascher, später, besonders bei tiefen Temperaturen, langsamer oder gar nicht mehr zu; und in mäßigen Feldern bei relativ



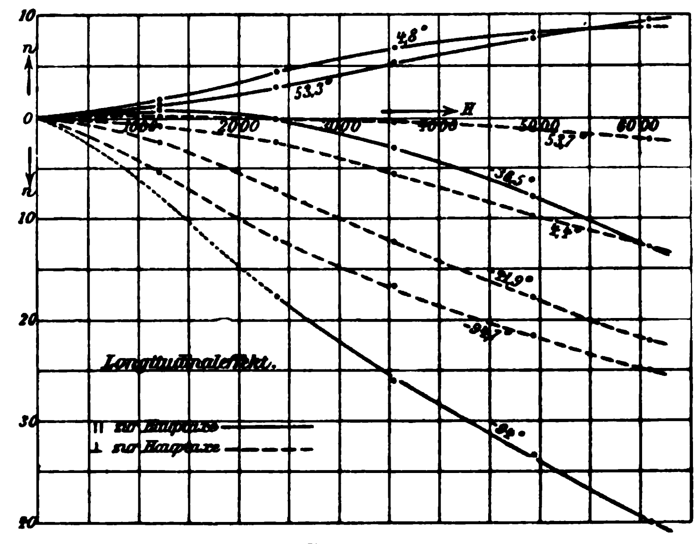

Figur 196.

hohen Temperaturen kann er sogar negativ ausfallen. Alle diese Verhältnisse werden durch die Figur 196 (nach LOWNDS) sehr deutlich veranschaulicht. Ähnlich, nur zum Teil einfacher, liegen die Verhältnisse beim Antimon. Zahlenmäßig aber sind alle neueren Ergebnisse — man muß hierbei das alte $Q$ mit dem jetzigen $m/H$ vergleichen — wesentlich größer; und das liegt eben daran, daß die Drehung der Isothermen (s. o.) wirklich in erheblichem Grade mitwirkt.

**Thermomagnetischer Longitudinaleffekt.** Wie dem HALLschen Transversal- ein HALLscher Longitudinaleffekt, so steht auch dem thermomagnetischen Transversal- ein thermomagnetischer Longitudinaleffekt gegenüber; er ist ebenfalls von v. ETTINGSHAUSEN und NERNST[1] beobachtet worden. Legt man nämlich die Elektroden für die zum Galvanometer führenden Drähte nicht an die Querseiten, also auf eine Isotherme, sondern im Gegenteil in Punkte stärkster Temperaturdifferenz, also z. B. in die Randstellen, die von außen erhitzt resp. gekühlt werden, und kompensiert man den hierbei auftretenden starken thermoelektrischen Strom,

[1] A. v. ETTINGSHAUSEN und W. NERNST, a. a. O. — W. NERNST, a. a. O.

so erhält man bei Erregung des Feldes einen neuen Strom, also eine neue elektromotorische Kraft. Das Charakteristische derselben im Gegensatz zu den Querströmen ist, daß sie stets dieselbe Richtung hat, gleichviel in welchem Sinne das Feld erregt wird. Im übrigen zeigt diese Erscheinung ein viel unsichereres Verhalten als die früher behandelten. So war sie bis vor kurzem nur beim Wismut konstatiert worden und auch hier hat ihr Effekt keine feste Richtung, sondern er tritt bei verschiedenen Exemplaren von Wismutplatten bald in der Richtung des Wärmestromes, bald in der entgegengesetzten, ja sogar bei einer und derselben Platte wechselt er zuweilen bei Abänderung der Temperaturdifferenz das Zeichen. Daß die Erscheinung wirklich in der Platte entsteht und nicht an den Elektroden, geht daraus hervor, daß sie von der Natur der Elektroden nicht abhängt und selbst dann auftritt, wenn diese außerhalb des Feldes liegen. Andererseits aber wird man hier wieder unwillkürlich an die von RICHI und LEDUC (a. a. O.) fest-




Figur 197.

gestellte Tatsache denken, daß die Wärmeleitungsfähigkeit des Wismuts im magnetischen Felde kleiner wird (thermischer Longitudinaleffekt).

Hinsichtlich der Beziehung zwischen dem transversalen und dem longitudinalen thermomagnetischen Effekt ist folgender Versuch an einer kreisförmigen Wismutplatte mit 8 am Rande in gleichen Abständen angebrachten Elektroden lehrreich: Der Wärmestrom floß ungefähr von W nach O, sein thermomagnetischer Effekt wurde zwischen je zwei gegenüberliegenden der obigen Elektroden gemessen, und zwar für zwei verschiedene Feldstärken $H$. Man kann dann in leicht ersichtlicher Weise durch Umkehrung des Feldes die transversale Komponente $\tau$ des Effektes, die sich dabei ebenfalls umkehrt, von der longitudinalen $\lambda$, die unverändert bleibt, trennen und erhält dann folgende Zahlen:

| | | N, S | O, W | NO, SW | NW, SO |
|---|---|---|---|---|---|
| $H = 2480$ | $\tau$ | 142 | 3 | 90 | 96 |
| | $\lambda$ | 3 | 13 | 13 | 11 |
| $H = 4320$ | $\tau$ | 245 | 5 | 153 | 163 |
| | $\lambda$ | 7,5 | 42 | 38 | 38 |

Der Längseffekt ist also viel kleiner als der Quereffekt; während aber ersterer mit $H$, ist letzterer mit $H^2$ proportional[1].

[1] Über die beiden thermomagnetischen Effekte vgl. auch GRIMALDI, N. Cim. (3) **22**. 1887.

Von neueren Arbeiten über den Longitudinaleffekt seien besonders die von G. MOREAU für Nickel, Eisen und Stahl sowie die von DEFREGGER, LOWNDS und BARLOW für Wismut und Antimon angeführt; auch die später noch besonders zu erwähnenden Abhandlungen von GRIMALDI kommen auch hier schon in Betracht[1]. Da das Verhalten der verschiedenen Stoffe anscheinend ganz analog ist, genüge es, auf das des Wismuts mit einigen Worten einzugehen. Setzt man die elektromotorische Kraft zwischen den auf einer Wärmestromlinie gelegenen Punkten von den Temperaturen $t$ und $t'$

$$p = (t - t')n \quad ,$$

so kann die charakteristische Größe $n$ noch von der Feldstärke und von der mittleren Temperatur $\frac{1}{2}(t + t')$ abhängen. In welcher Weise das der Fall ist, zeigt Figur 197 (nach LOWNDS); wie man sieht, ist der Effekt in den meisten Fällen negativ, und zwar am stärksten bei tiefer Temperatur. Ferner zeigt der thermomagnetische Longitudinaleffekt einen sehr ausgeprägten Einfluß der Feldrichtung, indem er, in Übereinstimmung zwischen GRIMALDI und BARLOW, im Längsfelde halb so groß ist wie im Querfelde.

**Galvanomagnetischer Transversal- und Longitudinaleffekt.** Endlich ist es v. ETTINGSHAUSEN[2] gelungen, die dem thermomagnetischen Quereffekt reziproke Erscheinung nachzuweisen, d. h. zu zeigen, daß, wenn eine Platte im magnetischen Felde von einem zu den Kraftlinien senkrechten Strome durchflossen wird, senkrecht zu dessen Richtung eine Temperaturdifferenz sich ausbildet und folglich ein Wärmestrom zustande kommt. Zu diesem Zwecke wurde eine recht dünne, durch Watte ringsum geschützte Wismutplatte an den kurzen Rechteckseiten mit Elektroden, die diese ganzen Seiten umfaßten, versehen, an der Mitte einer Langseite an die eine Lötstelle eines Thermoelementes angelötet, während die andere in ein Gefäß mit Wasser tauchte, oder auch es waren die beiden Lötstellen des Thermoelementes in den Mitten der beiden Langseiten angelötet. Bei Durchgang des Stromes trat natürlich in dem mit dem Thermoelement verbundenen Galvanometer eine Ablenkung ein, die aber bald stationär wurde. Bei Erregung des Feldes trat dann eine neue Ablenkung auf. Ihr Sinn war derart, daß, wenn man von der Eintrittsstelle des Stromes zur Lötstelle durch eine Bewegung im Sinne der das Feld erregenden Ströme gelangte, die Lötstelle erwärmt, im entgegengesetzten Falle abgekühlt sein mußte. Die Wirkung kehrt sich also mit dem Strome und mit dem Felde um. Man kann diesen Effekt galvanomagnetischen Transversaleffekt oder, zur deutlicheren Unterscheidung vom Hall-Effekt, galvanomagnetischen Transversal-Temperatur-Effekt nennen. Wie sich der thermomagnetische Effekt zur thermoelektrischen Erscheinung, so verhält sich also dieser Effekt zum PELTIERschen Phänomen. Jedoch ist zu bemerken, daß der transversale Wärmestrom gerade die umgekehrte Richtung hat, als man nach dieser Analogie erwarten müßte. Die Wirkung, die übrigens, wie es scheint, sowohl der Stromstärke als auch der Feldstärke proportional ist, ist demnach einigermaßen rätselhaft. Der entsprechende longitudinale galvanomagnetische Effekt ist von NERNST[3] an einem Wismutstäbchen konstatiert worden, er war aber, selbst bei großer Feldstärke, außerordentlich schwach und zählte nur nach zehntel Graden. NERNST versuchte auch, ob sich die thermomagnetischen Effekte auch zeigen, wenn die Platte in die Feldrichtung gestellt wird; er erhielt aber kein deutliches Ergebnis.

---

[1] G. MOREAU, J. d. phys. **10**. 685. 1901. — R. DEFREGGER, Wied. Ann. **63**. 97. 18. 97. — L. LOWNDS, Drude Ann. **4**. 776. 1901; **6**. 146. 1901. — G. BARLOW, Drude Ann. **12**. 897. 1903. — G. P. GRIMALDI, N. Cim. (3) **22**. 1887; J. de phys. (2) **6**. 369. 1887. — Rend. Acc. Linc. **3**. 134. 1887; **4**. 353. 1888. — [2] A. v. ETTINGSHAUSEN, Wied. Ann. **31**. 737. 1887. — Neuere Untersuchungen hierüber u. a. von G. BARLOW, a. a. O. (s. o.). — [3] W. NERNST, Wied. Ann. **31**. 784. 1887.

Nach Abfassung dieses Artikels ist eine eingehende Arbeit von ZAHN[1] über die galvano- und thermomagnetischen Effekte erschienen, von deren Ergebnissen wenigstens folgendes noch erwähnt sei: Die vier Effekte ließen sich, außer bei Wismut und Antimon, auch bei Nickel, Eisen und Kobalt nachweisen und messen, zum Teil konnten sogar die Temperaturkoeffizienten bestimmt werden. Den galvanomagnetischen Temperatureffekt zeigte auch Kohle, den thermomagnetischen Kupfer. Bei Wismut zeigten sich auch hier wieder große Schwankungen, dagegen scheint Antimon für typische Messungen sehr geeignet zu sein.

**Elektromotorische Kraft des Magnetismus oder der Magnetisierung.** Der Volta-Effekt kommt, wie man weiß, zwischen zwei chemisch verschiedenen Substanzen zustande. Es erhebt sich nun die Frage, ob er nicht auch zustande kommt zwischen zwei Substanzen, die chemisch gleich, aber in physikalisch verschiedenem Zustande sind, und man wird hierbei sofort an den magnetischen Zustand denken. Daß in der Tat eine elektromotorische Kraft besteht zwischen zwei Elektroden aus demselben Material, von denen aber die eine im Felde, die andere außerhalb desselben sich befindet, hat zuerst GROSS für Eisen nachgewiesen, und bald darauf ist die Erscheinung auch für andere Metalle gefunden und nach verschiedenen Richtungen hin studiert worden, wobei sie zugleich dahin erweitert wurde, daß auch die zwischen verschiedenen Stoffen schon an sich bestehende elektromotorische Differenz durch die Magnetisierung eine Änderung erfährt; es sind namentlich die Arbeiten von ANDREWS, NICHOLS und FRANKLIN, ROWLAND und BELL, GRIMALDI, CHASSAGNY, HURMUZESCU, BUCHERER, LALA, PAILLOT und WYSS[2] zu erwähnen; auch einige der schon oben zitierten Abhandlungen kommen hier von neuem in Betracht. Die Erscheinung ist zunächst natürlich für sich zu betrachten; daß sie aber trotzdem hierher gehört und mit den zuletzt behandelten verwandt ist, sieht man ein, wenn man erwägt, daß es sich auch hier um eine durch das magnetische Feld erzeugte elektromotorische Kraft handelt; andererseits wird freilich auch ein Zusammenhang mit elektrochemischen Beziehungen bestehen können. Die von GRIMALDI vorgeschlagene Bezeichnung „galvanomagnetische Ströme" hat sich wegen naheliegender Verwechslungen nicht gehalten, und man spricht jetzt allgemein von der „elektromotorischen Kraft der Magnetisierung". Die Richtung des entstehenden Stromes ist für verschiedene Stoffe und für manche auch je nach den Umständen verschieden, bei Nickel wird stets und bei Eisen unter gewöhnlichen Verhältnissen die magnetische Elektrode positiv, die unmagnetische negativ: Wismut verhält sich umgekehrt. Mit der Feldstärke scheint der Effekt nach ähnlichem Gesetze zu wachsen wie die Magnetisierung selbst, außerdem wächst er mit der Temperatur. Für Eisen folgen hier einige Zahlen nach PAILLOT ($t$ Temperatur, $E$ elektromotorische Kraft in Volt):

| $t$ | $H$ | $E$ | $t$ | $H$ | $E$ | $t$ | $H$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12,2 | 1750 | 0,0042 | 44,5 | 1700 | 0,0044 | 66 | 1750 | 0,0048 |
| | 5000 | 0,0110 | | 5000 | 0,0122 | | 5000 | 0,0127 |
| | 12560 | 0,0219 | | 12500 | 0,0261 | | 12500 | 0,0282 |
| | 20970 | 0,0308 | | 21000 | 0,0378 | | 21000 | 0,0422 |
| | 30100 | 0,0332 | | 30100 | 0,0410 | | 30100 | 0,0462 |

[1] H. ZAHN, Drude Ann. **14**. 886. 1904. — [2] TH. GROSS, Wien. Ber. **92** (2). 1378. 1886. — TH. ANDREWS, Proc. R. Soc. **42**. 459. 1887; **44**. 152. 1888. — NICHOLS und FRANKLIN, Sill. J. **34**. 419. 1887; **35**. 290. 1888. — H. ROWLAND und L. BELL, Phil. Mag. (5) **26**. 105. 1888; Sill. J. **36**. 46. — P. GRIMALDI, Rend. Acc. Linc. 1888 und 1889; Atti 1889. 161; N. Cim. (3) **23**. — D. HURMUZESCU, C. R. **119**. 1006. 1894; J. de phys. (3) **4**. 118. 1895; Arch. de Geneve (4) **5**. 27. 1898. — A. H. BUCHERER, Wied. Ann. **58**. 564; **59**. 735. 1896; **61**. 807. 1897. — U. LALA und A. FOURNIER, C. R. **123**. 801. 1896. — R. PAILLOT, C. R. **131**. 1194. 1900; **132**. 1318. 1901; J. de phys. **4**. 207. 1902. — H. R. WYSS, Inaug.-

Das Maximum des Effektes beträgt also etwa $^1/_{22}$ Volt für Eisen; für Wismut ist er noch etwa 20 mal so schwach. Trotzdem hält ihn BUCHERER für zu groß, als daß er auf Grund energetischer Überlegungen als primäre Erscheinung gedeutet werden dürfte, und er versucht ihn deshalb durch sekundäre Einflüsse zu erklären. — Eine schon ohne Feld bestehende elektromotorische Kraft wird durch das Feld im allgemeinen vermindert; Angaben hierüber liegen besonders vor für Kombinationen von Eisen mit einem anderen Metall, unter Anwendung eines Ferri- oder Ferrosalzes als Elektrolyten; bei Ferri- ist der Effekt stärker als bei Ferrosalzen; zahlenmäßig beträgt der Effekt etwa $^1/_{20}$ bis $^1/_5$ der ursprünglichen elektromotorischen Kraft. Übrigens führt auch diese Erscheinung z. B. WYSS auf sekundäre Vorgänge — Konzentrationsveränderungen — zurück.

**Einfluß des Magnetismus auf die Thermoelektrizität.** Über die Erscheinung, daß die Magnetisierung eines Stoffes, namentlich des Eisens, seine thermoelektrische Stellung beeinflußt, und daß insbesondere zwischen magnetischem und unmagnetischem Eisen eine thermoelektrische Kraft auftritt, sind schon in Bd. **4**, S. 745 einige Angaben gemacht worden, die sich auf THOMSONs Versuche an Eisen beziehen; hinzuzufügen sind Versuche von BARUS und STROUHAL[1] sowie von EWING[2], deren Resultate mit denen von THOMSON im großer Ganzen übereinstimmen. BACHMETJEW[3], der die Erscheinung näher verfolgte, fand, daß die entstehende Kraft der magnetisierenden Kraft proportional ist, und daß sie, wenn man den Eisendraht zunehmenden Spannungen unterwirft, abnimmt und unter Umständen sogar das Zeichen wechselt, sodaß der Strom entgegengesetzt wie vorher fließt; er schließt hieraus, daß die Wirkung eine sekundäre und durch die beim Magnetisieren auftretende Längenänderung bedingt sei. GRIMALDI[4] hat das Wismut (in einer Verbindung mit Kupfer) dem Versuch unterworfen und gefunden, daß käufliches Wismut durch Magnetisierung geringer, reines stärker thermoelektrisch wirksam wird; bei der Quermagnetisierung ist die Wirkung stärker als bei der Längsmagnetisierung (ebenso wie oben der Einfluß auf die elektrische Leitungsfähigkeit); der größte von GRIMALDI erzielte Wert der Änderung des thermoelektrischen Verhaltens beträgt 11%, ist also ungefähr ebenso groß, wie die entsprechende Widerstandsänderung. Sie ist, wie man sieht, groß genug, um es wahrscheinlich zu machen, daß die in Rede stehende Erscheinung auf die oben betrachteten Effekte nicht ohne Einfluß ist, wodurch diese letzteren sich noch weiter verwickeln.

Auch in neuester Zeit ist die Erscheinung weitsr verfolgt worden, und man hat dabei auch die Wirkung des Feldes auf PELTIER- und THOMSON-Effekt mit in den Kreis der Betrachtung gezogen; es sind hier besonders Arbeiten von BATTELLI, HOULLEVIGUE und VAN AUBEL[5] zu nennen. Die Wirkung auf den PELTIER-Effekt geht der auf die Thermokraft im wesentlichen parallel, in bezug auf beide verhalten sich Eisen und Nickel entgegengesetzt; die Wirkung auf den THOMSON-Effekt ist zu geringfügig, um beobachtet werden zu können. Dagegen scheint noch ein besonderer, dem THOMSONschen analoger, vorhanden zu sein, nämlich ein Effekt zwischen verschieden stark magnetisierten Teilen eines im übrigen homogenen Körpers.

**Theorie der HALL-Gruppe von Erscheinungen.** Es ist einleuchtend, daß man in einer befriedigenden Theorie alle in diesem Abschnitte behandelten Phänomene einheitlich zusammenfassen muß, soweit sie nicht, was wohl teilweise

---

Diss. Zürich 1900. — Wegen der theoretischen Betrachtungen vgl. bes. die zitierten Abhandlungen von BUCHERER sowie die dort genannten Schriften von DUHEM.

[1] STROUHAL u. BARUS, Wied. Ann. **14**. 54. 1881. — Bull. U. S. Geol. Surv. 1885. — [2] J. A. EWING, Trans. R. Soc. 1886 (2), 361. — [3] P. BACHMETJEW, Wied. Ann. **43**. 723. 1891. — [4] P. GRIMALDI, Rend. Acc. Linc. 1887. 134; 1888. 132; N. Cim. (3) **21**. 57; **22**. 3. 1887. — [5] A. BATTELLI, Atti R. Ist. Veneto (7) **4**. Rend. Acc. Linc. (5) **2**. 2. 162. 1893. — L. HOULLEVIGUE, Ann. chim. phys. (7) **7**. 495. 1896. — C. R. **118**. 629. 1894. — J. de phys. M. **53**. 1896. — E. VAN AUBEL, C. R. **135**. 786. 1902.

bei einigen von ihnen der Fall ist, auf fremden Einflüssen beruhen. Es kommen also folgende Effekte in Betracht, für deren größten Teil schon BARLOW (a. a. O.) eine übersichtliche Zusammenstellung gegeben hat, je nach der Richtungsbeziehung von Feld, elektrischem und Wärmestrom sowie jenachdem der elektrische oder der Wärmestrom primär ist. Vervollständigt man dieselbe, so erhält man folgendes Schema (ganz streng läßt es sich wegen des Ineinandergreifens der Phänomene nicht gliedern):

| | thermisch-thermisch | elektrisch-elektrisch | thermisch-elektrisch | elektrisch-thermisch |
|---|---|---|---|---|
| Quer-Effekte | 1. Drehung der Isothermen durch Wärmestrom | 2. Drehung der Niveaulinien durch elektr. Strom (Hall-Effekt) | 3. Thermomagnet. Quer-Effekt | 4. Galvanomagnetischer Quereffekt |
| Längs-Effekte | 5. Änderung der Wärmeleitfähigkeit | 6. Änderung der elektr. Leitfähigkeit | 7. Thermomagnet. Längs-Effekt | 8. Galvanomagnetischer Längs-Effekt |
| | | 9. Elektromotor. Kraft d. Magnetisierg. | 10. Änderung der Thermoelektrizität | 11. Änderung des Peltier-Effekts |

Ist schon hiernach die Mannigfaltigkeit der zu beschreibenden Erscheinungen sehr groß, so wird sie noch größer, wenn man auch die thermisch-elektrischen Wechselbeziehungen ohne magnetisches Feld, also die Stromwärme, die metallische Wärme- und Elektrizitätsleitung, die Thermoelektrizität, den Peltier- und Thomson-Effekt mit heranzieht und in einer Theorie zu vereinigen sucht. Je nachdem also zunächst nur eine einzige oder gleich alle Erscheinungen herangezogen werden, kann man zwischen speziellen und allgemeinen Theorien unterscheiden; ferner könnte man die rein formalen und die Konstitutionstheorien einander gegenüberstellen. Was die ersteren betrifft, so ist es nur notwendig, in die Gleichungen für die Bewegung der Elektrizität — in den meisten Fällen werden die MAXWELLschen benutzt — Glieder einzufügen, welche der zu erklärenden Erscheinung gerecht werden; hat man das erreicht, so kann man noch weitere Glieder einfügen und so schließlich bis zu einem gewissen Grade die Aufgabe formal lösen. Als Beispiel hierfür sei der Gedankengang der GOLDHAMMERschen Theorie kurz wiedergegeben.

Die Bewegungsgleichungen der Elektrizität in einer im Felde ($z$-Richtung) befindlichen Platte sind

$$u = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - h v\,, \quad v = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + h u\,, \quad w = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,,$$

$$\Delta \varphi = 0\,,$$

wo $\varphi$ das Potential, $\sigma$ der spezifische Widerstand der Substanz und $h$ die den Einfluß des Feldes charakterisierende Konstante ist. Wenn die Platte in der $xy$-Ebene liegt, sehr dünn ($\delta$) ist und der Strom in der $x$-Achse fließt, ist $w = 0$ und $v = 0$, und die Integration ergibt nach BOLTZMANN als transversale elektromotorische Kraft $e = hJ/k\delta$, wenn $J$ die Stärke des Hauptstromes ist; man braucht also (s. S. 451) nur $h = RHk$ zu setzen, um die Theorie mit der Erfahrung in dieser Hinsicht in Übereinstimmung zu bringen. BOLTZMANN hat ferner hieraus mehrere interessante Schlüsse gezogen, die dann v. ETTINGSHAUSEN experimentell bestätigt hat.

Diese Theorie berücksichtigt aber nicht den zweiten wesentlichen Faktor der Erscheinung, nämlich die Widerstandsänderung im Magnetfelde, und zwar die Verschiedenheit dieser Änderung je nach der Richtung des Stromes zum Felde. Man wird dieser gerecht, wenn man annimmt, daß die Platte im Felde äolotrop wird, also nicht einen einzigen Widerstandskoeffizienten, sondern deren 9 hat: $\sigma_{11}$ usw. Setzt man nun $\sigma_{12} = \sigma_3 - \tau_3$, $\sigma_{21} = \sigma_3 + \tau_3$ usw. und identifiziert

die Hauptachsen mit den Koordinatenachsen, so wird $\sigma_1 = \sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$, und man erhält die Gleichungen:

außerhalb des Feldes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sigma_0 u \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad ,$$

innerhalb des Feldes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sigma_1 u \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\tau_3 u \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\tau_2 u \,, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad .$$

Die Integration ergibt, wenn die Eintritts- und Austrittspotentiale des primären Stromes $\varphi_0$ und $\varphi_1$ sind und $\lambda$ die Länge der Platte ist:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda} x - \frac{\tau_3}{\sigma_1} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{l} y - \frac{\tau_2}{\sigma_1} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{l} z + \text{const} \quad .$$

Das erste Glied stellt den Hauptstrom, das zweite den HALLschen Strom dar, das dritte Glied würde eine elektromotorische Kraft in der $z$-Richtung angeben, wenn es nicht aus anderen Gründen verschwinden müßte. Liegt die Platte den Kraftlinien parallell, und fließt der Strom senkrecht zu ihnen, so erhält man einen ganz analogen Ausdruck. Einen longitudinalen Hall-Effekt enthält diese Gleichung nicht, weil dieser als Widerstandsänderung aufgefaßt wird. Auch müßte die Gleichung nun noch mit Rücksicht auf die übrigen oben behandelten Effekte vollständig werden.

Im übrigen ist es unmöglich, in knappem Rahmen die in Rede stehenden Theorien zu skizzieren, und es muß genügen, auf die Arbeiten von ROWLAND, BOLTZMANN, LORENTZ, GOLDHAMMER, VENSKE, EVERDINGEN, MOREAU, RIECKE, VOIGT und DRUDE[1] hinzuweisen. Die neuesten unter diesen Theorien, namentlich die von RIECKE und DRUDE, gehen von der Elektronenhypothese aus, und es gelingt im wesentlichen, diese so zu gestalten, daß das Qualitative der Effekte, zum großen Teil auch der Richtungssinn und die quantitativen Verhältnisse befriedigenden Ausdruck finden. Immerhin bleibt noch mancherlei unverständlich und zum Teil geradezu rätselhaft, z. B. der Parallelismus, den einige Effekte miteinander zahlenmäßig aufweisen, obgleich ein Gegensatz des Vorzeichens oder gar ein wiederholtes Wechseln desselben stattfindet. Andererseits bietet die Theorie wertvolle Ausblicke auf Fragen von allgemeinem Interesse, wie die von der Strömungsgeschwindigkeit der Elektrizität in Metallen, von der kinetischen Konstitution der festen Körper, von der Beziehung zwischen Wärme und Elektrizität sowie zwischen Ladung und Masse und manches andere mehr.

---

[1] H. ROWLAND, Am. J. Math. **3**. 89. 1880. — H. A. LORENTZ, Versl. Akad. Wet. Amst. **19**. 217. 1883; Arch. Néerl. **19**. 123. 1884. — L. BOLTZMANN, Wien. Anz. 1886. 77 u. 113; Wien. Ber. **94**. 644. 1886. — D. GOLDHAMMER, Wied. Ann. **31**. 370. 1887. — VENSKE, Gött. Nachr. 1888. 313. — E. VAN EVERDINGEN, Arch. Néerl. (2) **5**. 453. 1900; Comm. Leiden Nr. 63. — Arch. Néerl. (2) **6**. 294. 1901; Com. Leiden Nr. 72. — Vgl. hierzu auch J. J. THOMSON, Phil. Mag. (6) **3**. 353. 1902. — G. MOREAU, C. R. **103**. 122. 1900; J. d. phys. **9**. 497. 1900. — E. RIECKE, Wied. Ann. **66**. 353, 545 u. 1199. 1898. — W. VOIGT, Wied. Ann. **67**. 717. 1899. — P. DRUDE, Drude Ann. **1**. 566; **3**. 369. 1900; **7**. 687. 1902. — Vgl. ferner über die Geschwindigkeitsfrage L. BOLTZMANN, Wien. Anz. 1880. 12. — HALL, a. a. O. — A. v. ETTINGSHAUSEN, Wied. Ann. **11**. 432. 1880.

# Erdmagnetismus.

Von F. AUERBACH.

---

**Einleitung.** Es ist bereits in dem Art. „Magnetismus“ auf die Tatsache hingewiesen und von ihr allenthalben Gebrauch gemacht worden, daß die Erde auf magnetische Körper eine in jedem Falle der Größe und Richtung nach ganz bestimmte Kraft ausübt; man nennt diese Kraft oder den sie verursachenden Zustand der Erde den Erdmagnetismus. Auch über die Messung dieser Kraft der Größe und Richtung nach ist in dem Art. „Magnetische Messungen“ das Erforderliche auseinandergesetzt worden. Es bleibt daher nur noch übrig, die Ergebnisse jener Messungen zu betrachten und zu sehen, ob sich die festgestellten Tatsachen unter dem Gesichtspunkte einer bestimmten Theorie darstellen lassen.

Was zunächst das Tatsachenmaterial betrifft, also die örtliche Verteilung und die zeitlichen Änderungen der erdmagnetischen Elemente: Intensität nebst ihren beiden Komponenten, Horizontal- und Vertikalintensität, Deklination und Inklination, Potentialwerte, Erdströme nach Stärke und Richtung — so liegt zwar eine ungeheure Menge von Beobachtungsreihen vor, namentlich aus der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts; der größte Teil desselben hat aber nicht die für allgemeinere Zwecke verwertbare Form, und es bestehen außerdem ganz wesentliche örtliche und zeitliche Lücken. Erst in neuester Zeit ist in dieser Hinsicht ein Fortschritt zum Besseren zu verzeichnen, teils bestehend in der internationalen Verständigung, wie sie durch die Gründung der Internationalen Erdmagnetischen Kommission (Bristol 1898, Paris 1900) zutage tritt, teils durch die Bestrebungen, die Beobachtungen nicht mehr blindlings, sondern mit Berücksichtigung der jetzt als maßgebend erkannten Prinzipien anzustellen und ihnen formell eine Gestalt zu geben, die ihre Benutzung erleichtert. In Deutschland ist es besonders das Verdienst ADOLF SCHMIDTS, in diesem Sinne gewirkt zu haben und selbst tätig zu sein.

Was andererseits die Theorie betrifft, so können alle bisherigen Untersuchungen, so genial und groß angelegt sie auch sein mögen, doch immer nur als Hypothesen oder Versuche bezeichnet werden; man weiß wohl, in welcher Weise aus einer bestimmten zugrunde gelegten Vorstellung die Erscheinungen sich folgern lassen; ob aber jene Vorstellungen und Ansätze bzw. welcher von ihnen der Wahrheit und Vollständigkeit am nächsten kommt und ganz besonders, welcher physikalische Sinn ihnen beizulegen sei, dafür fehlen noch zum großen Teile die entscheidenden Anhaltspunkte; erst in neuester Zeit sind auch in dieser Hinsicht wesentliche Fortschritte zu bemerken.

Die Lehre vom Erdmagnetismus nimmt eine Mittelstellung zwischen der Physik und der Meteorologie ein, sie kann daher hier nur kurz und mit Betonung des physikalisch wichtigen behandelt werden; zur Ergänzung sei deshalb auf die allgemeine Literatur des Gegenstandes verwiesen[1].

---

[1] Seit dem ersten zusammenfassenden Werke: J. LAMONT, Handbuch des Erdmagnetismus, Berlin 1849, ist ein halbes Jahrhundert kein einigermaßen vollständiges Buch über den Gegen-

**Bezeichnungen und Beziehungen.** Die Zeit wird wie in der Astronomie angegeben, so daß also z. B. 1885,0 den Anfang des Jahres 1885 bedeutet; Tagesstunden nach Greenwicher Zeit. Der Ort eines Punktes ist durch seine geographische Breite $\varphi$, die von Greenwich aus gerechnete Länge $\lambda$ und die Seehöhe $h$ charakterisiert. Der zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Orte herrschende erdmagnetische Zustand wird durch einen Vektor charakterisiert, seine Zerlegung in drei Zahlengrößen ist auf verschiedene Weise möglich:

1. Totalintensität des erdmagnetischen Feldes $F$
   Deklination, nach Osten positiv, $D$
   Inklination, nach unten positiv, $I$
2. Horizontalintensität $H$, Deklination $D$, Inklination $I$
3. Horizontalkomponente nach Norden $X$
   Horizontalkomponente nach Osten $Y$
   Vertikalkomponente nach unten $Z$
4. Komponente nach der Drehungsachse der Erde $\mathfrak{X}$
   Komponente nach dem Meridian von 0° $\mathfrak{Y}$
   Komponente nach dem Meridian von 90° $\mathfrak{Z}$
5. Ein gemischtes, für manche Zwecke vorteilhaftes System $Y A X$, wo $A$ eine Hilfsgröße (s. u.) ist.

Zwischen diesen Größen bestehen die folgenden Beziehungen:

$$H = F\cos I\,, \quad Z = F\sin I\,, \quad X = H\cos D\,, \quad Y = H\sin D$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \phantom{-}X\cos\varphi - Z\sin\varphi \\ \mathfrak{Y} &= -X\sin\varphi\cos\lambda - Y\sin\lambda - Z\cos\varphi\cos\lambda \\ \mathfrak{Z} &= -X\sin\varphi\sin\lambda + Y\cos\lambda - Z\cos\varphi\sin\lambda \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \phantom{-}\mathfrak{X}\cos\varphi - \mathfrak{Y}\sin\varphi\cos\lambda - \mathfrak{Z}\sin\varphi\sin\lambda \\ Y &= -\mathfrak{Y}\sin\lambda + \mathfrak{Z}\cos\lambda \\ Z &= -\mathfrak{X}\sin\varphi - \mathfrak{Y}\cos\varphi\cos\lambda - \mathfrak{Z}\cos\varphi\sin\lambda \quad . \end{aligned}$$

$$A = X\sin\varphi + Z\cos\varphi = -\mathfrak{Y}\cos\lambda - \mathfrak{Z}\sin\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \phantom{-}X\cos\varphi - Z\sin\varphi \\ \mathfrak{Y} &= -A\cos\lambda - Y\sin\lambda \\ \mathfrak{Z} &= -A\sin\lambda + Y\cos\lambda \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} X &= \phantom{-}\mathfrak{X}\cos\varphi + A\sin\varphi \\ Y &= -\mathfrak{Y}\sin\lambda + Z\cos\lambda \\ Z &= -\mathfrak{X}\sin\varphi + A\cos\varphi \quad . \end{aligned}$$

Was die Einheiten betrifft, so hat diejenige für die Intensitätsgrößen lange geschwankt; es ist zu wünschen, daß jetzt nur noch die C-G-S-Einheit gebraucht werde; man pflegt sie mit $\Gamma$ zu bezeichnen; die GAUSSsche Einheit ist nur $^1/_{10}$ davon, die britische das 0,0461-fache. In Fällen, wo $\Gamma$ zu groß ist, kann man sich der Einheit $\gamma = 0{,}00001\,\Gamma$ bedienen, so namentlich bei den zeitlichen Änderungen. Winkelgrößen werden in Graden und Minuten, ihre Änderungen in Minuten ausgedrückt. Es ist jedoch zu beachten, daß diese Winkeländerungen

---

stand erschienen; erst E. MASCART, Traité de Magnetisme terrestre, Paris 1900, hat die Lücke wieder ausgefüllt, aber auch nur in bestimmten Richtungen. Als kurze populäre Darstellung ist zu nennen: A. NIPPOLDT, Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht, Leipzig 1903. In S. GÜNTHERs Handbuch der Geophysik, 2. Aufl., Stuttgart 1897, ist ein Abschnitt dem Erdmagnetismus gewidmet. Die Literatur bis 1881 findet man in HELLMANN, Repertorium der Meteorologie, Leipzig 1883. Regelmäßige Berichte gibt K. SCHERING alle zwei bis drei Jahre im Geographischen Jahrbuch. Ferner vgl. man: G. NEUMAYER, Über das gegenwärtig vorliegende Material für die erd- und weltmagnetische Forschung, Verh. d. D. Geogr.-Tages Berlin 1889. — Seit 1896 erscheint eine internationale Fachzeitschrift: Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity (in Amerika). Ganz neuerdings hat ADOLF SCHMIDT ein Archiv des Erdmagnetismus begründet, in dem das Material nutzfertig mitgeteilt wird, und wovon das erste Heft 1903 in Potsdam erschienen ist. Im übrigen ist die Literatur in zahlreichen Zeitschriften und Monographien zerstreut.

keine reinen Größen sind, da sie von den Intensitätsgrößen selbst abhängen; und es ist daher eine sehr berechtigte Forderung ADOLF SCHMIDTs, statt jener Winkeländerungen diejenigen, zu den Hauptkräften senkrechten Kräfte, gemessen in $\gamma$ anzugeben, durch deren Hinzutreten man sich die Richtungsänderung entstanden zu denken hat. Nennt man die Richtungsänderungen $\Delta D'$ bzw. $\Delta I'$, die Zusatzkräfte dagegen $\Delta D$ bzw. $\Delta I$, endlich die Intensitätsänderungen selbst $\Delta F$, $\Delta H$ usw., so hat man folgende Beziehungen:

$$F = F_0 + \Delta F \text{ usw.,} \qquad D = D_0 + \Delta D' \text{ usw.}$$
$$\operatorname{tg} \Delta D' = \Delta D : 10^5 H_0 \ , \qquad \operatorname{tg} \Delta I' = \Delta I : 10^5 F_0$$

oder für die meisten vorkommenden Änderungen hinreichend genau

$$\Delta D = 29{,}1\, H_0 \cdot \Delta D' \ , \qquad \Delta I = 29{,}1\, F_0 \Delta I' \ .$$

Ferner (für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ist nichts hinzuzufügen):

$$\Delta H = \Delta F \cos I - \Delta I \sin I \ , \qquad \Delta F = \Delta H \cos I + \Delta Z \sin I \ ,$$
$$\Delta Z = \Delta F \sin I + \Delta I \cos I \ , \qquad \Delta I = -\Delta H \sin I + \Delta Z \cos I \ ,$$

$$\Delta X = \Delta H \cos D - \Delta D \sin D \ , \qquad \Delta H = \Delta X \cos D + \Delta Y \sin D \ ,$$
$$\Delta Y = \Delta H \sin D + \Delta D \cos D \ , \qquad \Delta D = -\Delta X \sin D + \Delta Y \cos D \ .$$

Endlich, wenn man die, die Richtungsänderung bewirkende ablenkende Kraft (analog wie die Hauptkraft durch $F$, $D$, $I$) durch $f$, $d$, $i$ ausdrückt:

$$h = f \cos i \ , \quad \Delta Z = f \sin i \ , \quad \Delta X = h \cos d \ , \quad \Delta Y = h \sin d \ ,$$
$$\operatorname{tg} d = \Delta Y : \Delta X, \ h = \Delta X : \cos d = \Delta Y : \sin d, \ \operatorname{tg} i = \Delta Z : h, \ f = h : \cos i = \Delta Z : \sin i,$$
$$f = \sqrt{\Delta F^2 + \Delta D^2 + \Delta I^2} = \sqrt{\Delta H^2 + \Delta D^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$

usw.

## Örtliche Verteilung.

**Isomagnetische Linien.** Jedem Orte auf der Erdoberfläche entspricht ein bestimmter Wert der drei erdmagnetischen Elemente, d. h. der Deklination, der Inklination und der Horizontalintensität bzw. der anderen Größen, die als die drei Charakteristika gewählt werden. Verbindet man alle Punkte, für welche eine jener Größen den gleichen Wert hat, so erhält man Kurvensysteme, welche man isomagnetische Linien nennt. Das Bild, welches sie von der dargestellten Größe liefern, wird noch inhaltreicher, wenn man aus den unendlich vielen möglichen Kurven (entsprechend allen möglichen Werten jener Größe) solche auswählt, daß für je zwei benachbarte die Differenz der Werte die gleiche ist; die „Dichte" der Linien, d. h. ihre gegenseitige Nähe, gibt alsdann einen Maßstab für die Schnelligkeit der Wertänderung. Man sieht, daß diese Linien den Niveaulinien, Isobaren usw. verwandt sind. Im Gebiete des Erdmagnetismus kann man nun solcher Kurven eine ganze Anzahl unterscheiden, die wichtigsten sind die folgenden:

1. Isogonen, d. h. Linien gleicher Deklination.
2. Isoklinen, d. h. Linien gleicher Inklination.
3. Isodynamen, d. h. Linien gleicher Gesamtintensität des Erdmagnetismus.
4. Horizontal-Isodynamen, d. h. Linien gleicher Horizontalkomponente der Intensität.
5. Vertikal-Isodynamen, mit entsprechender Bedeutung.
6. Linien gleicher $X$-(Nord-) Komponente.
7. Linien gleicher $Y$-(Ost-) Komponente.



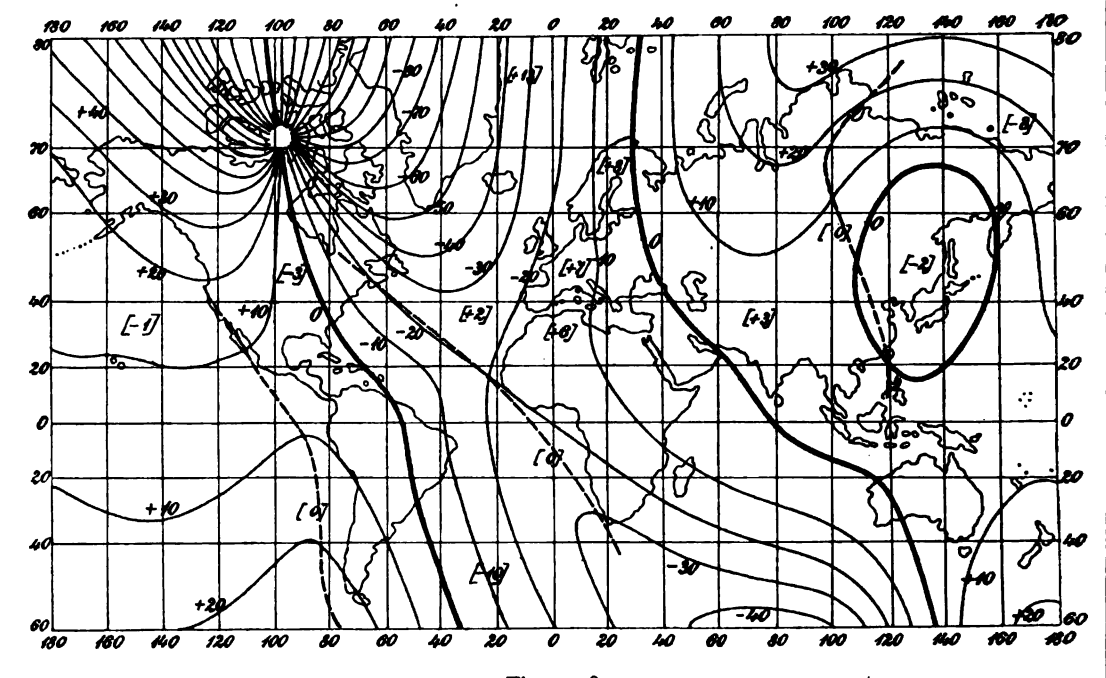
8. Magnetische Gleichgewichtslinien oder Niveaulinien, d. h. Linien gleicher Werte des magnetischen Potentials (s. w. u.).

9. Magnetische Kraftlinien oder Meridiankurven, d. h. Linien, welche man erhält, wenn man von Punkt zu Punkt in der der Kraftrichtung entsprechenden Richtung fortgeht.

10. Isanomalen, d. h. Linien, in welchen die Abweichung des wahren Wertes einer der obigen Größen von dem aus irgend einer Annahme abgeleiteten Werte die gleiche Größe besitzt.

11. Linien gleicher zeitlicher Änderung eines der Elemente, wovon später die Rede sein wird.

Den Kurvensystemen der Arten 1 bis 10 kommt, da die durch sie dargestellten Größen sich auch mit der Zeit ändern, eine Bedeutung nur für eine

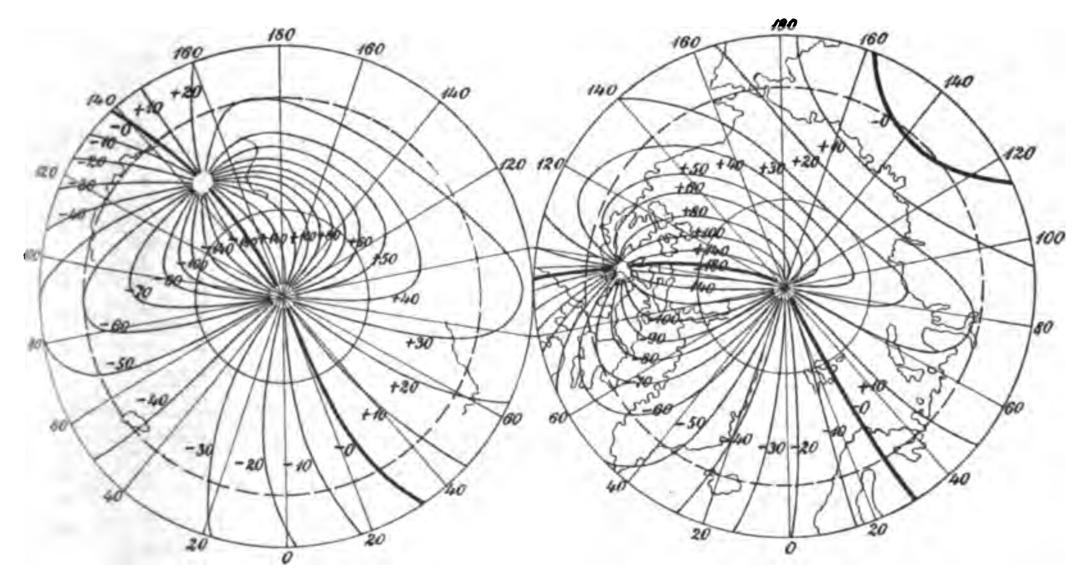



Figur 198.

bestimmte Epoche bei. Diese muß daher stets angegeben werden, und es dürfen überdies die Systeme nur unter Zugrundelegung solcher Messungen entworfen werden, welche dieser Epoche angehören oder ihr sehr naheliegen, ältere oder neuere Beobachtungen aber nur unter Reduktion auf diese Epoche und, da diese Reduktion noch ziemlich unsicher ist, überhaupt nur aushilfsweise und mit Vorsicht hinzugezogen werden.

Das Beobachtungsmaterial selbst stammt, von wenigen Ausnahmen abgesehen, aus dem 19. Jahrhundert, den wesentlichen Grundstock bildet das Werk von GAUSS und WEBER: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, der von ihnen ins Leben gerufen wurde und von 1837 bis 1843 tätig war. Auch das erste erdmagnetische Observatorium war 1833 von GAUSS und WEBER in Göttingen errichtet worden. Gegenwärtig gibt es deren über hundert, darunter etwa vierzig erster Ordnung, d. h. solche, die Registrierinstrumente besitzen und zugleich in der Lage sind, deren Angaben durch Beobachtungen mit absoluten Instrumenten zu kontrollieren. An der Spitze stehen die Observatorien zu Potsdam für Deutschland, Parc St. Maur bei Paris für Frankreich, Kew bei

London für England, Pawlowsk bei St. Petersburg für Rußland usw. Sie sind zugleich die Zentralen für die in neuerer Zeit in Angriff genommenen magnetischen Landesaufnahmen. Alles das aber würde das Material noch gänzlich mangelhaft lassen, wenn nicht die Ergebnisse großer magnetischer Reisen oder sonstiger Entdeckungsreisen, bei denen die magnetischen Beobachtungen einen Teil des Programms ausmachten, ergänzend hinzuträten. Unter den älteren derartigen Unternehmungen sind namentlich die Reisen von Ross und Humboldt zu erwähnen; ganz besonders wichtig aber sind die von Neumayer angeregten und organisierten internationalen Polarunternehmungen geworden, die den Nordpolargebieten gewidmete von 1882/83 und die den Südpolargebieten gewidmete von 1902/03. Immerhin bleibt noch viel zu tun; und es ist besonders von Adolf Schmidt betont worden, in wie hohem Maße das Netz vervollkommnet werden könnte, wenn auch nur einige wenige Stationen auf entlegenen Ozeaninseln neu hinzukämen.



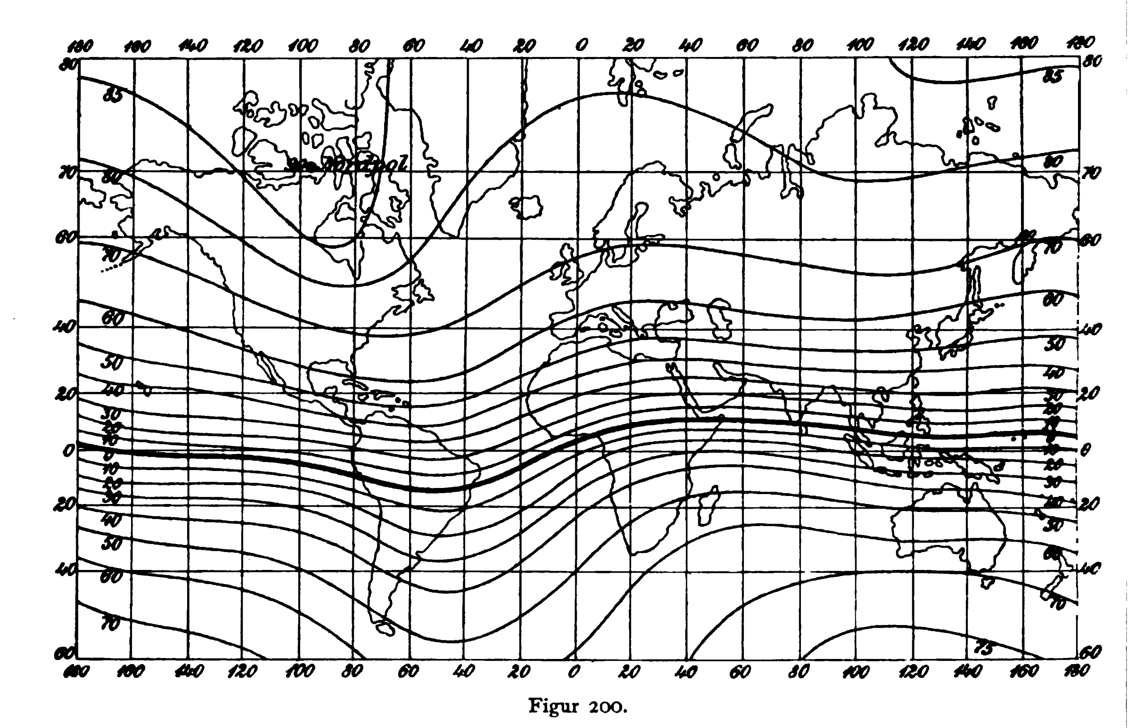
Figur 199.

Auf Grund des Materials sind die verschiedenen Karten oder Atlanten des Erdmagnetismus veröffentlicht worden; so der Atlas des Erdmagnetismus von Gauss und Weber (Leipzig 1840) und der Neumayersche Atlas des Erdmagnetismus in der zweiten Auflage von Berghaus Physikalischem Atlas (Gotha 1891). Die Epoche dieses letzteren, d. h. der Zeitpunkt, für den die in seinen Karten dargestellten Kurven exakt gültig sind, ist der Anfang des Jahres 1885 (bezeichnet mit 1885,0); ihnen sind die Kärtchen in der ersten Auflage dieses Handbuches nachgezeichnet. Ich habe nun den Versuch gemacht, für die vorliegende zweite Auflage die Karten auf eine neuere Epoche umzuzeichnen, etwa auf 1900; es zeigt sich aber, daß bei dem Maßstabe dieser Karten die Änderungen zu geringfügig sind, um die Neuherstellung lohnend erscheinen zu lassen; es sind daher nur die Vorzeichen der den Kurven beigefügten Zahlen der inzwischen getroffenen Übereinkunft (s. o.) entsprechend umgeändert worden.

**Deklination, Isogonen.** Die Deklination ist der Winkel zwischen dem magnetischen und dem geographischen Meridian; sie wird nach Übereinkunft positiv gerechnet, wenn sie östlich, negativ, wenn sie westlich ist. Sie nimmt auf der Erdoberfläche alle Werte von $0^0$ bis $+180^0$ und von $0^0 - 180^0$ an, hält sich jedoch in den meisten Gebieten zwischen weit engeren Grenzen, etwa zwischen $+20^0$ und $-30^0$ und steigt nur in den höheren Breiten und im

nördlichen atlantischen Ozean darüber hinaus. In Europa hält sie sich sogar zwischen $+3^0$ und $-22^0$ und speziell in Deutschland zwischen $-6^0$ und $-15^0$. In Figur 198 und 199 sind die Isogonen von 10 zu $10^0$ (in einigen polar gelegenen Gebieten in größeren Zwischenräumen) unter Beifügung des Wertes von $D$ dargestellt, und zwar in Figur 198 in MERCATORs Projektion für das Gebiet zwischen $80^0$ nördlicher und $60^0$ südlicher Breite, in Figur 199 in Polarprojektion für die Polargebiete[1].

Wie man sieht, treffen alle Isogonen in 4 Punkten zusammen, von denen 2 auf der nördlichen, 2 auf der südlichen Halbkugel liegen, und von jedem dieser Punktepaare ist der eine Punkt ein Erdpol, der andere ein von ihm nicht allzu weit entfernter Punkt, der im engeren Sinne als Deklinationspol bezeichnet werden kann, aber, wie sich bald zeigen wird, schlechthin magnetischer Pol ge-




Figur 200.

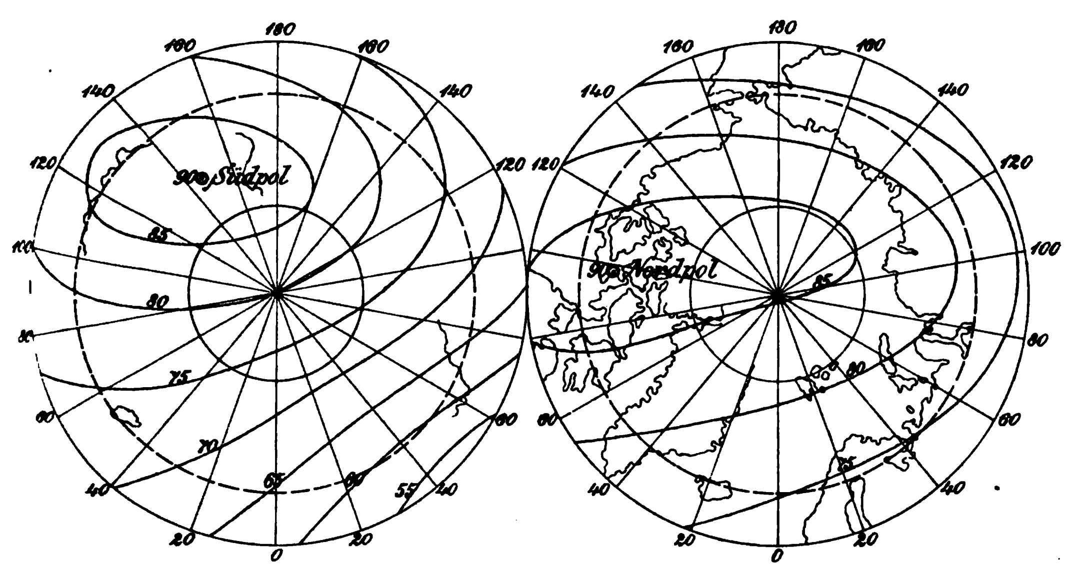
nannt werden darf. Daß in diesen 4 Punkten alle Isogonen zusammentreffen müssen, ist nach der Definition der letzteren leicht einzusehen. Es werden das nämlich diejenigen Punkte sein, in welchen der Wert der Deklination ein unbestimmter wird; nun ist die Deklination der Winkel zwischen zwei Richtungen, sie wird also unbestimmt, wenn irgend eine dieser beiden Richtungen unbestimmt wird; der geographische Meridian wird in den beiden Erdpolen unbestimmt, der magnetische da, wo die Horizontalkomponente $H$ des Erdmagnetismus null wird. Es folgt hieraus zugleich, daß die beiden nicht in die Erdpole fallenden Schnittpunkte der Isogonen Punkte sind, in denen $H = 0$ ist. Ihre Lage ist nach den genauesten Bestimmungen die folgende:

Magnetischer Nordpol: $70^0\,30'$ nördl. Br., $97^0\,40'$ westl. L.
„ Südpol: $73^0\,39'$ südl. Br., $146^0\,15'$ östl. L.

[1] Die Isogonen sind die ausgezogenen Linien, von den gestrichelten (ebenso wie von den eingeklammerten Zahlen) wird später die Rede sein.

Wie man sieht, sind diese Pole durchaus nicht die Enden eines Erddurchmessers. Der Nordpol liegt westlich von der Halbinsel Boothia, der Südpol zwischen Viktoria und Wilkesland.

Zwischen den Erdpolen und den ihnen benachbarten magnetischen Polen ändert sich $D$ außerordentlich rasch, hier liegen die Isogonen sehr dicht beieinander, in der Nähe des Äquators hingegen und nördlich davon liegen sie sehr weit auseinander. Von den einzelnen Isogonen lenken zunächst die beiden stark gezeichneten schrägen Linien die Aufmerksamkeit auf sich, die, vermöge ihrer Fortsetzung auf Figur 199 auch als eine einzige um die Erde herumgehende Linie aufgefaßt werden können. Es ist das die Linie, auf welcher $D = 0$ ist und welche agonische Linie oder Agone heißt. Streng genommen ist aber die Zusammenfassung der beiden agonischen Linien in eine einzige unerlaubt, weil auf zwei Strecken derselben, nämlich zwischen den beiden Nordpolen und zwischen



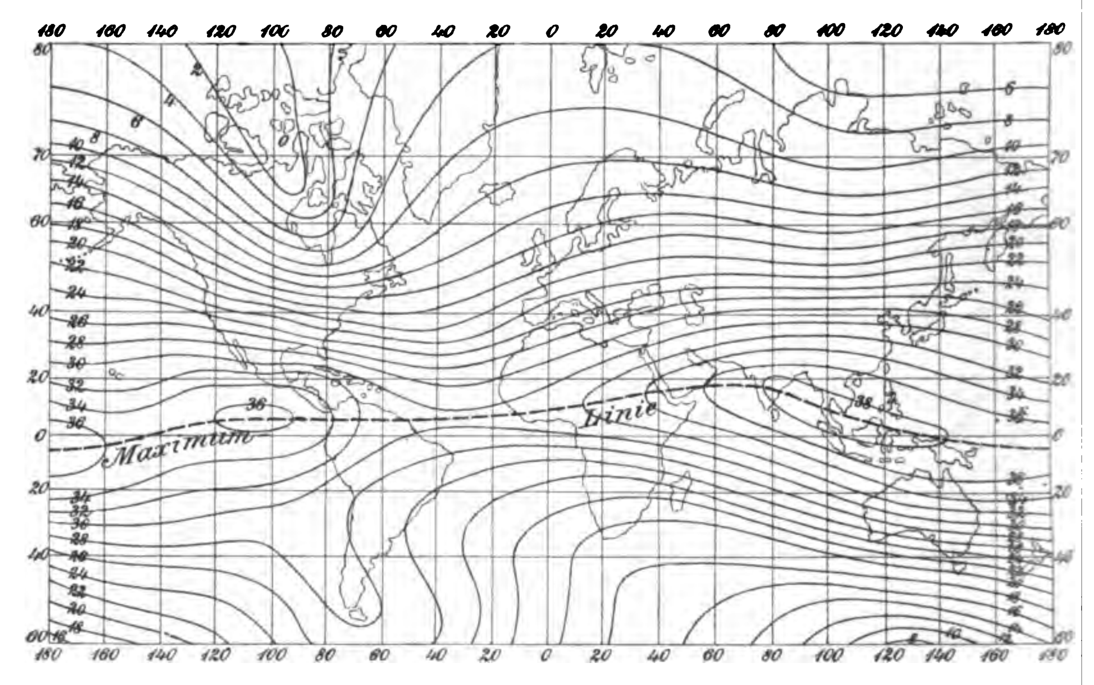

Figur 201.

den beiden Südpolen $D$ nicht null, sondern $\pm 180^0$ ist, die Nadel also zwar in den geographischen Meridian fällt, aber nicht mit ihrem Nordpol, sondern mit ihrem Südpol nach dem geographischen Nordpol hinweist. Die agonischen Linien grenzen das Gebiet westlicher, negativer Deklination (fast ganz Europa, Afrika, Vorder-Asien, die östlichen Drittel von Nord- und Süd-Amerika, die Westspitze von Australien) von dem Gebiete östlicher, positiver Deklination (das übrige) ab; sie schneiden den Äquator etwa in $78^0$ östlicher und $55^0$ westlicher Länge, also ebenfalls bei weitem nicht in zwei gegenüberliegenden Punkten. Außerdem ist noch eine in sich geschlossene, eine Anomalie darstellende agonische Linie vorhanden, welche eine Enklave westlicher Deklination (bis zu $-7^0$) in China, Japan und Ost-Sibirien umschließt. Trotzdem ist das Gebiet des östlichen $D$ nicht unwesentlich größer als dasjenige des westlichen $D$.

Die Isogonen, denen ein von null verschiedener Wert von $D$ entspricht, zerfallen in drei Klassen, nämlich 1. solche, welche vom Erdnordpol zum magnetischen Südpol oder vom magnetischen Nordpol zum Erdsüdpol laufen, also den Äquator passieren, 2. solche, welche vom geographischen zum magnetischen Nordpol oder vom geographischen zum magnetischen Südpol verlaufen, sich also auf eine einzige Erdhälfte beschränken, und 3. solche, welche in sich selbst geschlossen verlaufen, und zwar a) innerhalb oder unmittelbar außerhalb der

obigen geschlossenen agonischen Linie, b) im äquatorialen Teil des stillen Ozeans, westlich von Süd-Amerika (auf der Karte behufs Wahrung der Gleichförmigkeit der Darstellung nicht verzeichnet). Dazu kommen schließlich noch zwei Grenzfälle, nämlich 4. als Grenzfall zwischen 1. und 2. derjenige zweier sich in Spitzen berührender, scheinbar also sich schneidender Linien, die dasselbe $D$ besitzen und deren eine vom magnetischen Nord- zum geographischen Südpol, deren andere umgekehrt verläuft: verwirklicht für $D = -20^0$ und auf der Karte verzeichnet, und 5. als Grenzfall zwischen 1. und 3. der Fall einer Schleife zwischen Nord- und Südpol: verwirklicht für $D = +2^0$ in Asien und für $D = +7^0$ im äquatorialen Pacific.

**Inklination. Isoklinen.** Weit einfacher als bei der Deklination gestalten sich die Verhältnisse bei der Inklination, $I$, d. h., dem Winkel zwischen der

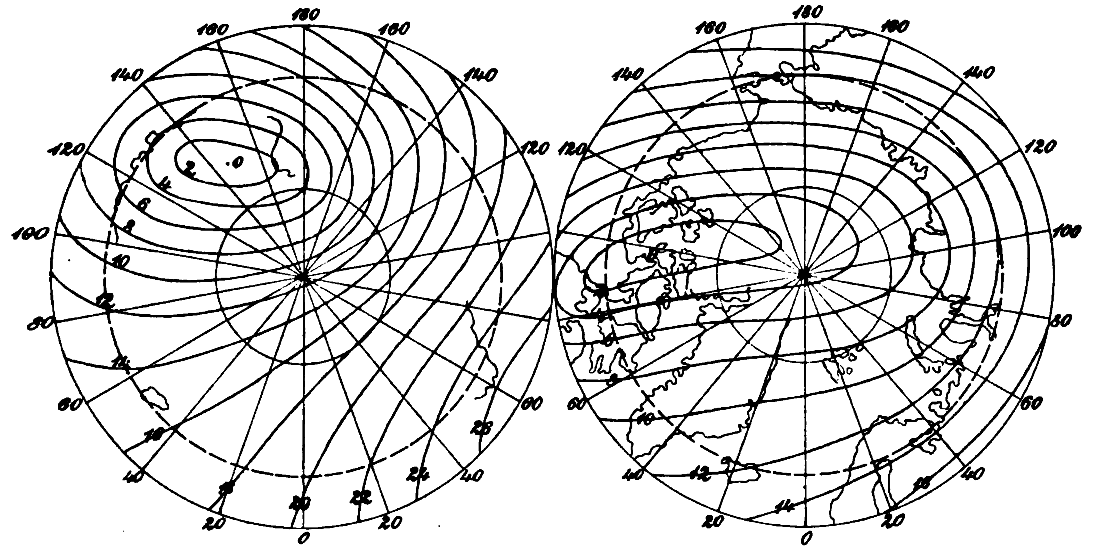



Figur 202.

Nadelrichtung im Raume und der Horziontalen, und bei den sie darstellenden Isoklinen, die in Figur 200 und 201 in analoger Weise wiedergegeben sind. Inklination und Isoklinen verhalten sich wenigstens in erster Annäherung so wie geographische Breite und Parallelkreise, d. h. $I$ ist in der Nähe des Äquators null, wächst nach beiden Polargebieten hin bis zu $90^0$ und die Isoklinen laufen im großen und ganzen von Westen nach Osten. In Deutschland bewegt sich $I$ zwischen den Grenzen $63^0$ und $69^0$. Die Abweichung der Isoklinen von den Parallelkreisen wird desto größer, je weiter man sich vom Äquator entfernt. Die Linie der Punkte $I = 0$, die „aklinische Linie, Inklinationsäquator oder magnetischer Äquator“ genannt, entfernt sich vom geographischen Äquator nirgends um mehr als $13^0$, am meisten nach Süden in Süd-Amerika, am meisten nach Norden zwischen Ost-Afrika und Ceylon, während sich beide Linien in zwei Punkten schneiden, nämlich in $8^0$ und $170^0$ westl. Länge (Busen von Guinea und stiller Ozean). Viel näher als dem Erdäquator kommt hiernach der magnetische Äquator einer anderen größten Kreislinie der Erde, welche gegen jenen um einen gewissen Winkel geneigt ist, eine Tatsache, welche verständlich wird,

wenn in Erinnerung gebracht wird, daß auch die Verbindungslinie der magnetischen Pole gegen die Erdachse, und zwar in demselben Sinne, geneigt ist.

Geht man nun vom Äquator nordwärts, so gewinnen die Isoklinen immer größere Vorsprünge vor den Parallelkreisen, und zugleich nimmt die europäisch-asiatische Ausbuchtung und die amerikanische Einbuchtung der Isoklinen immer mehr zu, derart, daß die 80° Linie sich zwischen den weiten Grenzen 50° und 78° nördl. Br. hinschlängelt, ein Verhalten, das freilich weniger der Kurve an sich, als vielmehr ihrer MERCATORschen Projektion charakteristisch ist, daß sich in der Polarprojektion in der verständlicheren Form ausdrückt, daß die Isoklinen in höheren Breiten in langgestreckte, ellipsenähnliche Kurven übergehen, deren Mittelpunkt eben vom geographischen Nordpol nach Amerika hin abweicht. Ähnlich auf der südlichen Halbkugel, nur daß hier die östliche Halbkugel eine




Figur 203.

Einbuchtung, die westliche eine Ausbuchtung aufweist. Schließlich schrumpfen die erwähnten Ellipsen mehr und mehr zusammen, und man gelangt zu güterletzt zu den Punkten $I = 90°$, den Inklinationspolen, die aber, weil aus $I = 90°$ wiederum $H = 0$ folgt, mit den Deklinationspolen zusammenfallen und mit ihnen gemeinsam Magnetpole der Erde heißen. Im geographischen Nordpole ist, wie noch bemerkt werden möge, etwa $I = 86°$, im geographischen Südpole dagegen nur etwa $I = 80°$. Endlich ist noch hervorzuheben, daß die Isoklinen sich zu beiden Seiten des magnetischen Äquators außerordentlich dicht zusammendrängen und in der Nähe der Pole weit auseinander treten, daß also $I$ sich dort sehr rasch, hier sehr langsam ändert, ein Verhalten, das übrigens wesentlich schon in der geometrischen Bedeutung der Inklination begründet ist.

**Horizontalintensität. $H$-Isodynamen.** Nach den Auseinandersetzungen im Art. „Magnetische Messungen" ist die der genauesten Messung zugängliche Größe nicht die gesamte, sondern die horizontale Komponente der Intensität des Erdmagnetismus, $H$. Diese Größe ist in Figur 202 und 203 in der bisherigen Weise durch die Horizontal-Isodynamen dargestellt; die beigefügten Zahlen bedeuten hundertel der absoluten C-G-S-Einheit. Die Größe $H$ schwankt hiernach zwischen 0 und 0,39, den ersteren Wert besitzt sie in den $H$-Polen, die, wie man nach dem obigen ohne weiteres einsieht, mit den $D$- und $I$-Polen, also mit den magnetischen Polen schlechthin identisch sind, den größten Wert nimmt

sie in der Nähe des Äquators, jedoch 6—8° nördlich von ihm, an, und zwar nicht überall, sondern nur in derjenigen geographischen Länge, welche etwa Hinter-Indien entspricht; das Maximum liegt etwa zwischen Siam und Borneo. In Deutschland bewegt sie sich zwischen den Werten 0,17 und 0,21.

Was die $H$-Isodynamen betrifft, so sind sie, wie man sieht, in der nördlichen gemäßigten Zone in erster Annäherung den Breitenkreisen ähnliche Linien, nur daß sie, ähnlich wie die Isoklinen, auf der östlichen Halbkugel nach Norden, auf der westlichen nach Süden ausbiegen, wobei aber hier die erstere Abweichung nur schwach, die letztere hingegen, besonders nach Norden hin, sehr stark wird. Auf der südlichen Halbkugel sind die Ausbiegungen umgekehrt, außerdem aber, zumal auf der westlichen Hälfte, viel stärker. Nach den Polen zu gehen auch diese Kurven in Kurven von der Gestalt gestreckter Ellipsen über, die nördliche Ellipse ist weit gestreckter als die südliche. Ein ganz anderes Bild, im Vergleich mit den Isoklinen, bieten dagegen die $H$-Isodynamen zu beiden Seiten des Äquators dar. Die letzte Isodyname nämlich, welche, einem Parallelkreise ähnlich, rund um die Erde läuft, ist sowohl auf der nördlichen wie auf der südlichen Halbkugel diejenige, welcher der Wert $H = 0{,}30$ entspricht. Dagegen bilden die höheren Werten entsprechenden Kurven sehr längliche, in sich zurücklaufende Linien, derart, daß jetzt jedem Werte von $H$ nur eine solche Linie entspricht, die aber teils auf der nördlichen, teils auf der südlichen Halbkugel liegt. Bei noch höheren Werten, etwa $H = 0{,}35$, findet alsdann eine Teilung jener geschlossenen Linie in zwei solche statt, so daß man schließlich zu zwei Punkten gelangt, in denen $H$ relative Maximalwerte annimmt, der eine, und zwar der absolute Maximalwert, ist der oben schon genannte (0,39 in Hinter-Indien), der andere beträgt etwa 0,37 und liegt westlich von Zentral-Amerika. In bezug auf die Dichte der Lagerung unterscheiden sich die $H$-Isodynamen ebenfalls von den Isoklinen, sie sind nicht am Äquator, sondern etwa bei $\pm 40^0$ am dichtesten konzentriert, die Unterschiede sind aber hier überhaupt nicht so bedeutend wie bei $I$.

Endlich läßt sich auch für die Horizontalintensität ein Begriff aufstellen, den man als Äquator, und zwar als $H$-Äquator bezeichnen könnte, nämlich die Verbindungslinie aller Punkte, deren jeder auf seinem Meridian den größten Wert von $H$ aufweist. Diese Linie ist in Figur 202 gestrichelt dargestellt, sie liegt, abgesehen von einem kleinen Stück in der Südsee, durchweg über dem Äquator, am meisten in Vorderindien. Eine Isodyname ist sie natürlich nicht, vielmehr schwankt $H$ auf ihr zwischen den Grenzen 0,31 und 0,39. Von dem eigentlichen magnetischen Äquator ($I = 0$) weicht der $H$-Äquator, wie ein Vergleich der Figuren 202 und 200 lehrt, fast überall nach Norden ab, auch ist der Verlauf ein wesentlich anderer.

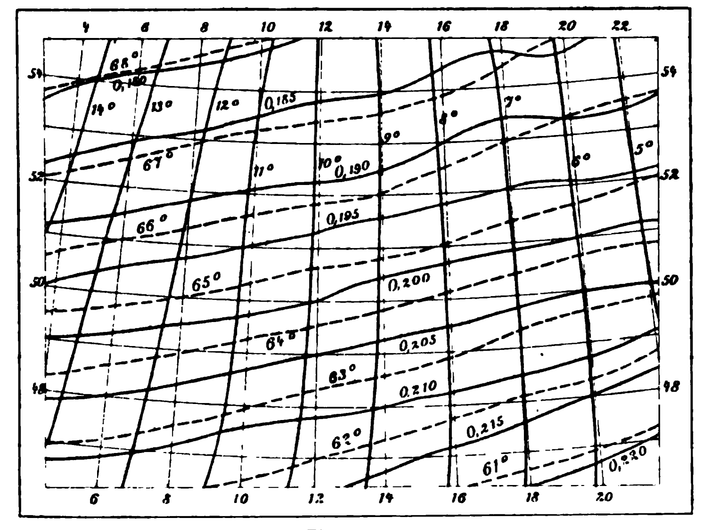
**Totalintensität. Total-Isodynamen.** Von der Vertikalintensität $Z$ ist wenig zu sagen; am magnetischen Äquator ist sie null, ihre Maxima liegen in der Nähe der Magnetpole und betragen +0,634 bzw. —0,674. Gehen wir also gleich zur Resultante $F$, der ganzen erdmagnetischen Kraft, über. Sie ist in Figur 204 für den mittleren Teil der Erde dargestellt, wieder in hunderteln des C-G-S-Wertes, die Polargegenden bieten nichts besonderes dar. Die Größe $F$ verhält sich gerade umgekehrt wie $H$, sie nimmt von der Äquatorgegend, wo — östlich von Süd-Amerika — ihr kleinster Wert 0,28 stattfindet, nach höheren Breiten hin mehr und mehr zu — in Deutschland bewegt sie sich zwischen den Grenzen 0,45 und 0,48 — und erreicht an einigen Stellen relative Maxima, eines südlich von Australien im Betrage von 0,69, eines im nördlichen Mittel-Sibirien (0,62) und eines, welches zugleich das absolute Maximum ist, in Nord-Amerika, östlich von Boothia etwa in 71° nördl. Br., mit dem Werte 0,71. Man kann diese Punkte, namentlich den ersten und letzten der drei genannten, mit dem Namen Intensitätspol oder Fokus belegen, sieht aber ein, daß kein Grund zu der Annahme vorliegt, diese Punkte möchten mit den Magnetpolen zu-



sammenfallen; in der Tat liegt der südliche Fokus sehr weit vom magnetischen Südpol entfernt, der nördliche Fokus liegt freilich dem magnetischen Nordpol

Figur 204.

ziemlich nahe, es ist aber zu bemerken, daß gerade in dieser Hinsicht der Fortschritt in der Ausmessung der betreffenden Gegenden ungeheure Umwälzungen zur




Figur 205.

Folge gehabt hat, Umwälzungen, welche den Fokus immer weiter nach Norden gerückt haben, so daß man auch heute noch nicht sagen kann, ob die angenommene Lage die richtige sei, zumal da die $F$-Isodynamen in dieser Gegend, wie die Karte zeigt, einen sehr krausen Verlauf aufweisen. Wie für die Maximal-

werte von $H$, so kann man endlich auch für die Minimalwerte von $F$ eine Kurve bilden, welche in der Zeichnung gestrichelt wiedergegeben ist; sie liegt zur Hälfte nördlich, zur Hälfte südlich vom Äquator, den sie in Kamerun und in der Südsee schneidet, und $F$ bewegt sich auf ihr zwischen den Werten 0,26 und 0,38. Von dem magnetischen Äquator weicht der $F$-Äquator beträchtlich, und zwar fast überall nach Süden, ab, noch stärker folglich vom $H$-Äquator. In den Punkten des Inklinationsäquators muß natürlich $H = F$ werden, wodurch man eine Kontrolle für den Vergleich der Horizontal- und der Total-Isodynamen in dieser Gegend erhält. Beide Größen aber, $H$ wie $F$, schwanken auf dem $I$-Äquator recht bedeutend, nämlich zwischen den Grenzen 0,27 und 0,39.

Im folgenden sind die erdmagnetischen Elemente für einige Breiten (linke Vertikalreihe) und Längen (oberste Horizontalreihe) tabellarisch, außerdem in Figur 205 für Deutschland graphisch dargestellt. Die Tabellen wie die Karte beziehen sich auf das Jahr 1905; als Grundlage dienten die Zahlen von NEUMAYER, ESCHENHAGEN u. a. für 1885, einige neuere Angaben sowie die bekannten Durchschnittswerte der jährlichen Säkularänderungen (s. w. u.). Einige Unsicherheit besteht sonach, sie dürfte aber ein hundertel selten übersteigen[1].

Deklination $D$ (negativ).

| | 2° | 4° | 6° | 8° | 10° | 12° | 14° | 16° | 18° | 20° | 22° | 24° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45° | 14,1 | 13,3 | 12,5 | 11,7 | 11,0 | 10,3 | 9,4 | 8,6 | 7,6 | 6,9 | 6,1 | 5,3 |
| 50° | 15,2 | 14,0 | 13,3 | 12,4 | 11,4 | 10,4 | 9,4 | 8,4 | 7,3 | 6,4 | 5,4 | 4,4 |
| 55° | 16,1 | 15,0 | 13,9 | 12,9 | 11,6 | 10,4 | 9,3 | 8,3 | 7,0 | 6,0 | 4,8 | 3,9 |

Inklination $I$.

| | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 45° | 62,4° | 61,5 | 61,0 | 60,3 | 59,8 | 59,4 |
| 46° | 63,2 | 62,3 | 61,8 | 61,2 | 60,7 | 60,2 |
| 47° | 64,0 | 63,2 | 62,6 | 62,2 | 61,5 | 61,1 |
| 48° | 64,7 | 64,0 | 63,4 | 63,0 | 62,4 | 61,8 |
| 49° | 65,3 | 64,6 | 64,2 | 63,8 | 63,2 | 62,7 |
| 50° | 66,0 | 65,3 | 65,0 | 64,6 | 63,9 | 63,6 |
| 51° | 66,6 | 66,3 | 65,8 | 65,4 | 64,7 | 64,3 |
| 52° | 67,3 | 66,9 | 66,4 | 66,1 | 65,7 | 65,1 |
| 53° | 68,0 | 67,5 | 67,0 | 66,7 | 66,5 | 65,9 |
| 54° | 68,6 | 68,2 | 67,7 | 67,4 | 67,2 | 66,7 |
| 55° | 69,2 | 68,9 | 68,4 | 68,0 | 67,7 | 67,3 |

Horizontalintensität $H$ (in Tausendteln).

| | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 45° | 212 | 216 | 219 | 223 | 226 | 231 |
| 46° | 207 | 212 | 214 | 219 | 222 | 226 |
| 47° | 203 | 207 | 210 | 214 | 218 | 221 |
| 48° | 199 | 203 | 206 | 210 | 213 | 217 |
| 49° | 195 | 199 | 202 | 205 | 209 | 212 |

[1] Im letzten Augenblicke konnten — bei der Korrektur — noch die Tabellen von A. SCHMIDT in LANDOLT-BÖRNSTEINs Tabellen (3. Aufl. 1905) benutzt werden; das Kärtchen mußte bleiben, wie es war, hat aber fast nur in den $D$ Fehler über ein hundertel.

| | 0° | 5° | 10° | 15° | 20° | 25° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50° | 191 | 195 | 198 | 201 | 204 | 207 |
| 51° | 187 | 191 | 194 | 197 | 199 | 202 |
| 52° | 184 | 187 | 190 | 192 | 194 | 197 |
| 53° | 180 | 183 | 186 | 188 | 190 | 192 |
| 54° | 176 | 179 | 182 | 184 | 186 | 188 |
| 55° | 172 | 175 | 178 | 180 | 182 | 184 |

Für Potsdam[1] gelten nach den Beobachtungen des dortigen Observatoriums die folgenden Werte:

| Jahr | Deklination | Inklination | Horizontal-Intens. | Vertikal-Intensität |
|---|---|---|---|---|
| 1901 | —9° 52,1′ | +66° 22,8′ | 0,18861 | 0,43128 |
| 1902 | —9° 48,0′ | +66° 20,8′ | 0,18873 | 0,43090 |
| 1903 | —9° 43,8′ | +66° 20,0′ | 0,18876 | 0,43068 |
| 1904 | —9° 39,4′ | +66° 19,6′ | 0,18880 | 0,43055 |

| Jahr | Totalintensität | Nördliche Komponente | Östliche Komponente |
|---|---|---|---|
| 1901 | 0,47072 | 0,18582 | —0,03233 |
| 1902 | 0,47042 | 0,18598 | —0,03212 |
| 1903 | 0,47022 | 0,18605 | —0,03190 |

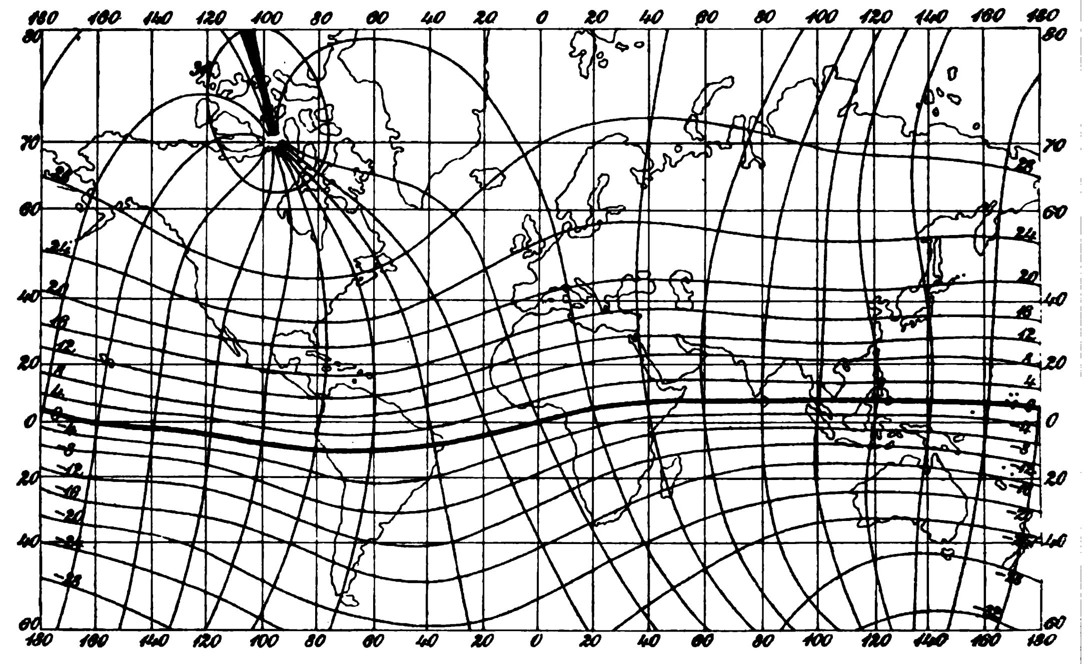
Übrigens ist die dem Observatorium übertragene magnetische Landesaufnahme von Preußen im wesentlichen abgeschlossen und zunächst die vorläufige Mitteilung der Hauptergebnisse angekündigt.

Für einige wichtige, über den Erdball zerstreute Orte mit Observatorien folgen hier noch die drei Elemente — meist für 1901 — nach der Zusammenstellung von AD. SCHMIDT.

| Ort | *D* | *I* | *H* | Ort | *D* | *I* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pawlowsk . . . | 0°40′ | 70° 36′ | 0,166 | Bukarest . . . . | — 4°13′ | 58°46′ | 0,233 |
| Sitka (1902/03) | 29 8 | 74 48 | 154 | Toronto . . . . | — 5 30 | 74 32 | 167 |
| Katerinenburg. | 10 6 | 70 41 | 178 | Nizza . . . . . | —11 56 | 60 10 | 224 |
| Kopenhagen . | —10 10 | 68 38 | 175 | Perpignan . . . | —13 35 | 59 58 | 224 |
| Stonyhurst . . . | —18 10 | 68 48 | 173 | Tiflis . . . . . . | 2 19 | 55 54 | 256 |
| Wilhelmshaven | —12 26 | 67 42 | 181 | Coimbra . . . . | —17 18 | 59 22 | 228 |
| Potsdam . . . . | — 9 54 | 66 24 | 189 | Baldwin (2/3) . . | 8 23 | 68 36 | 220 |
| Irkutsk . . . . | 2 1 | 70 16 | 201 | Cheltenham (2/3) | — 5 6 | 70 23 | 202 |
| de Bilt (Utrecht) | —13 48 | 66 56 | 185 | Lissabon . . . . | —17 16 | 57 53 | 235 |
| Valencia (Irl.) . | —21 30 | 68 27 | 178 | San Fernando . | —15 58 | 55 9 | 247 |
| Kew . . . . . . | —16 51 | 67 11 | 184 | Tokio . . . . . | — 4 37 | 49 3 | 299 |
| Greenwich . . | —16 28 | 67 7 | 185 | Zi-ka-wei . . . | — 2 23 | 45 44 | 323 |
| Uccles (Brüssel) | —14 11 | 66 9 | 190 | Hongkong . . . | 0 17 | 31 23 | 368 |
| Falmouth . . . | —18 27 | 66 44 | 188 | Honolulu (2/3) . | 9 17 | 40 15 | 293 |
| Prag . . . . . . | — 9 4 | — | 200 | Bombay . . . . | 0 23 | 21 26 | 374 |
| Parc St. Maur | —14 44 | 64 52 | 198 | Manila . . . . . | 0 52 | 16 14 | 381 |
| München . . . | —10 25 | 63 17 | 206 | Batavia . . . . | 1 6 | —30 7 | 368 |
| O'Gyalla . . . | — 7 26 | 62 32 | 212 | Mauritius . . . | — 9 27 | —54 8 | 238 |
| Odessa . . . . | — 4 27 | 62 18 | 219 | Rio de Janeiro . | — 8 3 | —13 20 | 250 |
| Pola . . . . . . | — 9 23 | 60 15 | 222 | Melbourne . . . | — 8 26 | —67 24 | 233 |

[1] AD. SCHMIDT, Drude Ann. **15**. 395. 1904. — Vgl. auch M. ESCHENHAGEN, ebenda **6**. 424. 1901. — AD. SCHMIDT, ebenda **10**. 890. 1903.

**Kraftlinien und Niveaulinien.** Den obigen Systemen von Linien schließen sich noch zwei weitere Systeme an, denen in wissenschaftlicher Hinsicht sogar eine noch größere Bedeutung zukommt. Es sind das diejenigen beiden Kurvenscharen, welche man in den verschiedensten Gebieten physikalischer Erscheinungen als Kraft- und Niveaulinien bezeichnet. Die Kraftlinien sind diejenigen Kurven, deren Richtung in jedem ihrer Punkte mit der Richtung der betreffenden, hier also der horizontalen Komponente der erdmagnetischen Kraft übereinstimmt; sie werden im vorliegenden Falle gewöhnlich magnetische Meridiane genannt und können entweder direkt durch Beobachtung der Nadel an verschiedenen Orten oder aus den Isogonen in leicht ersichtlicher Weise abgeleitet werden. Die Niveaulinien andererseits sind Linien, die überall diejenige Richtung haben, in welcher gar keine Kraft der betreffenden Art, hier also keine magnetische




Figur 206.

Kraft wirkt, für deren Punkte also das Potential $V$ den gleichen Wert hat; man nennt sie auch magnetische Gleichgewichtslinien oder Linien gleichen magnetischen Potentials $V$. Diese beiden Liniensysteme sind in Figur 206 dargestellt und zwar die Niveaulinien für je um 0,004 C-G-S-Einheiten abstehende Werte nicht von $V$, sondern von $V/r$, wo $r$ der äquatoriale Erdradius ist (nur die äußerste Kurve im Norden entspricht einem nur um 0,03 differenten Werte), die Zahlen bedeuten hundertel; von den Meridianen, für die es eine in der Natur der Sache begründete Auswahl nicht gibt, sind diejenigen gewählt, welche den Erdäquator in durch 20 teilbaren Längen östlich oder westlich von Greenwich schneiden. Es muß bemerkt werden, daß zwei Kurvensysteme von der Bedeutung der hier vorliegenden sich bekanntlich überall senkrecht schneiden: wenn das in der Figur nicht überall genau der Fall ist, so liegt dies daran, daß die Meridiane aus der Beobachtung, resp. aus den Isogonen, die Niveaulinien hingegen aus der Theorie (s. w. u.) abgeleitet wurden.

Diese Kurven bieten nun ein sehr anschauliches Bild der Verhältnisse dar, und zwar sowohl für $D$ als auch für $H$. Wo die Niveaulinien horizontal, die

Meridiane vertikal verlaufen, ist offenbar $D = 0$, durch Verbindung der bezüglichen Punkte erhält man also wieder die agonischen Linien der Figur 198. Wo die Niveaulinien von links unten nach rechts oben, die Meridiane von links oben nach rechts unten verlaufen, ist $D$ negativ (westlich), im entgegengesetzten Falle positiv (östlich). Wo die Niveaulinien dicht beieinander liegen, also am Äquator, ist $H$ groß, wo sie weit voneinander liegen, also in den Polargegenden, ist $H$ klein. Vor den Isogonen haben die Meridiankurven den Vorzug, daß sie nur in den magnetischen und nicht auch in den geographischen Polen zusammentreffen, und daß infolgedessen das Bild einfacher ist. Ebenso haben auch die Niveaulinien vor den Horizontal-Isodynamen, mit denen sie sonst einige Ähnlichkeit haben, den Vorzug, daß die geschlossenen Linien in der Nähe des Äquators wegfallen, das Bild also ebenfalls einfacher wird. Endlich ist darauf hinzuweisen, daß sich auch hier eine ausgezeichnete Linie vorfindet, nämlich diejenige Gleichgewichtslinie, für welche $V = 0$ ist, welche also die Erdgebiete mit positivem von den mit negativem Werte des magnetischen Potentials voneinander trennt; man kann sie Deklinations- oder Potential-Äquator nennen; von den übrigen magnetischen Äquatorlinien weicht sie nicht unwesentlich ab, am wenigsten noch vom Inklinations-Äquator.

An diesen Darstellungen muß es genügen; es sei aber noch auf die von Ad. Schmidt[1] gegebene Karte der $XYZ$ für 1885,0 hingewiesen.

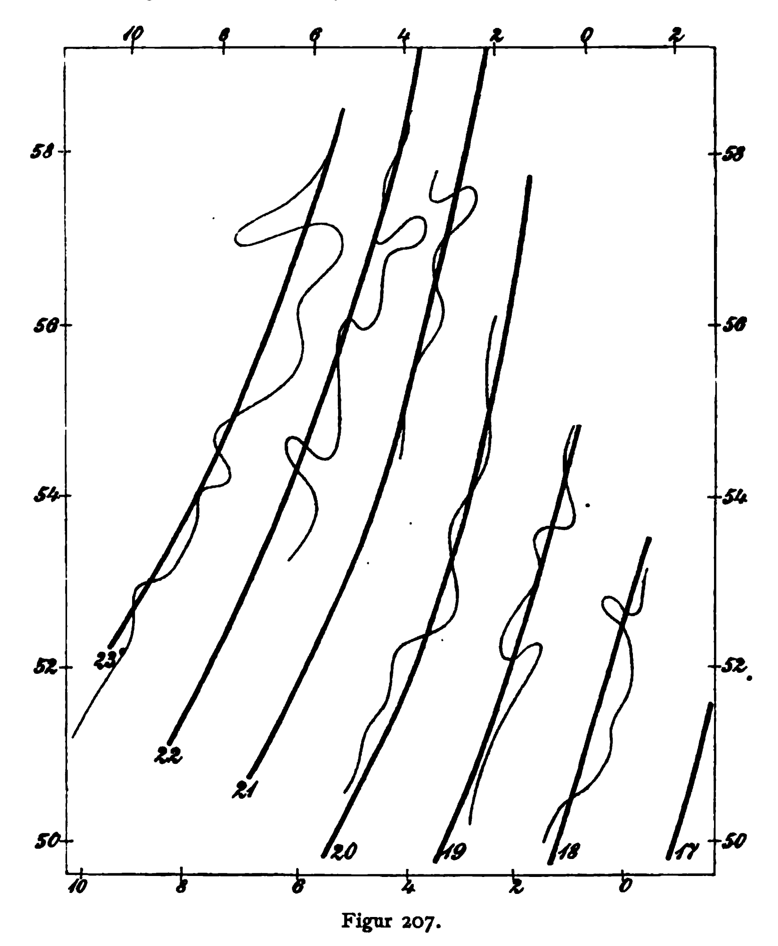
**Besondere örtliche Erscheinungen.** An vielen Stellen der Erdoberfläche treten anomale Werte der erdmagnetischen Elemente, d. h. solche auf, welche von denen der Umgebung mehr, als zu erwarten wäre, abweichen, und infolgedessen ergeben sich eigentümliche Anomalien im Verlaufe der im übrigen sanft gekrümmten isomagnetischen Linien. In den obigen Figuren zeigen sich solche Anomalien nur dann, wenn sie sich über große Gebiete erstrecken, z. B. die Wellen der Isodynamen 0,185 und 0,190 auf der deutschen Karte Figur 205; im weiteren Sinne könnte man natürlich selbst solche Gebilde wie die Deklinations-Enklave in Ost-Asien usw. als Anomalien größten Maßstabes bezeichnen. Solche große Gebiete nennt man regionale Störungsgebiete und stellt ihnen die lokalen Störungsgebiete gegenüber. Die meisten Anomalien sind lokalen Charakters, sie treten in jenen Karten nicht hervor, teils weil sie zu unscheinbar sind, teils aber, weil sie absichtlich eliminiert, die Kurven also entsprechend vereinfacht wurden. In diesem Sinne nennt man die obigen Linien terrestrische Kurven und stellt ihnen die magnetischen Lokalkurven gegenüber.

Die größten bekannten Störungsgebiete sind die in Süd-Rußland (Gouvernement Kursk), an der Insel Jussarö im finnischen Meerbusen, die großbritannische und einige in Nord-Amerika. Im Gouvernement Kursk finden sich statt der normalen Deklination von 0 bis 8° solche von 34 bis 96°, und zwar auf wenige hundert Meter Entfernung; die Inklination, die 68° betragen sollte, geht stellenweise bis auf 55° herunter, während an anderen die Nadel geradezu senkrecht steht; die Horizontalintensität schwankt zwischen 0,2 und 0,6, die vertikale zwischen 0,65 und 0,85; die Totalintensität endlich geht bis auf 1,03 hinauf, d. h. das Feld der Anomalie in Kursk ist stärker als das der magnetischen Erdpole; dabei ist das gestörte Gebiet so groß wie eine preußische Provinz. Das Störungsgebiet im finnischen Busen ist früher für die Schiffahrt sehr gefährlich gewesen. Für Großbritannien sind in Figur 207 beispielsweise die normalen und die wirklichen Isogonen verzeichnet. Man sieht, wie stark stellenweise die einen von den anderen abweichen, und wie mannigfaltig und stark die Lokalkurven zuweilen gekrümmt sind. So beträchtliche Abweichungen kommen natürlich nicht allenthalben, vielmehr vorzugsweise in der Nähe von Gebirgen vor, welche magnetische Massen enthalten, sowie in der Nähe von Küsten und Inseln — Ab-

[1] Ad. Schmidt, Petermanns Mitt. 1898, Tafel 11 (Bemerkungen dazu S. 154).

weichungen, welche ganz an diejenigen erinnern, welche Größe und Richtung der Schwerkraft unter denselben Umständen aufweisen. Es wird hiervon, insbesondere von dem Gebirgsmagnetismus, noch die Rede sein.

Endlich ist noch die Frage nach den Werten der erdmagnetischen Elemente in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche resp. in verschiedenen Tiefen unter ihr zu berühren. Leider liegen gegenwärtig in ersterer Hinsicht nur wenige, in letzterer gar keine erwähnenswerten Bestimmungen vor, was in Anbetracht der bezüglichen Schwierigkeiten nicht zu verwundern ist; namentlich




Figur 207.

leuchtet es ein, daß die Anstellung magnetischer Messungen im Luftballon — und gerade solche sind naturgemäß von besonderer Wichtigkeit — eine überaus heikle Aufgabe ist. Auf Bergen fand FORBES eine Abnahme von $H$ um $^1/_{30000}$ seines Wertes, von $I$ um 5″ auf je 100 englische Fuß, aus den Beobachtungen von KREIL und von HARTL in den Alpen läßt sich dagegen ein sicherer positiver Schluß nicht ziehen; in Ballons fanden GAY-LUSSAC, GLAISHER und andere so widersprechende Zahlen und selbst Vorzeichen der Änderung, daß man gar nichts oder höchstens so viel daraus schließen kann, daß die Änderung sehr klein ist und von den Fehlerquellen mehr oder weniger verdeckt wird. Immerhin wird hierauf bei der Theorie noch zurückzukommen sein[1]. In neuester Zeit hat man

[1] Vgl. z. B. G. B. AIRY, Üb. d. Magnetismus, deutsch v. F. TIETJEN, Berlin 1874. 77; A. v. HUMBOLDT, Kosmos 4. 93. 1858; KREIL, Denkschr. Wiener Akad. 1. 279. 1850; HARTL, Zeitschr. f. Meteor. 1881. 102.

übrigens die Frage wieder aufgenommen, indem man Lokalvariometer (S. 110) konstruierte, die mit besonderer Empfindlichkeit ausgestattet und den Anforderungen der Ballonfahrt angepaßt sind; es ist zu hoffen, daß sich hiermit die Frage klären lassen wird. Inzwischen kann man eine Abnahme von $H$ um etwa 0,0005 ihres Wertes pro Kilometer als Norm benutzen.

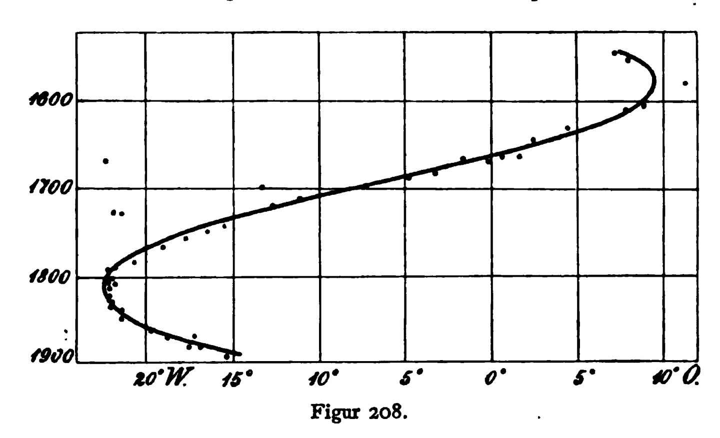
## Zeitliche Änderungen.

Schon in den ersten Zeiten magnetischer Beobachtungen erkannte man, daß die einem Orte zukommenden Werte der magnetischen Elemente sich mit der Zeit ändern. Gegenwärtig weiß man, daß diese Änderung sehr mannigfaltig ist und in dieser Hinsicht die Änderungen z. B. der Lufttemperatur noch weit übertrifft. Die erste Unterscheidung, die man machen kann, nämlich die zwischen periodischen und nichtperiodischen Änderungen, hält in letzter Instanz nicht Stich, da man bei der Kürze des Zeitraumes, den selbst die drei Jahrhunderte bisheriger Beobachtung darstellen, nicht wissen kann, ob nicht auch die scheinbar unperiodischen Veränderungen in Wahrheit periodisch sind. Es bleibt also im wesentlichen nur die Klassifizierung nach der Länge der Periode übrig, und es sind hier die säkularen (bei denen man aber nur mit großer Vorsicht von einer Periode sprechen darf), die vieljährigen, die jährlichen, die täglichen Schwankungen zu unterscheiden, wozu dann schließlich noch die dem Anscheine nach unregelmäßigen, größtenteils plötzlichen Veränderungen kommen. Von den meisten Änderungen wird die Deklination am stärksten, die Totalintensität am schwächsten betroffen.

**Säkulare Deklinationsänderung.** Wenn man für einen Ort die Werte von $D$ für zahlreiche Zeitpunkte eines größeren Zeitraumes kennt, so kann man daran gehen, sie durch eine Formel darzustellen, die alsdann die Rückberechnung der Werte für die übrigen Punkte jenes Zeitraumes mit einer gewissen Genauigkeit gestattet, während die Anwendung der Formel auf außerhalb gelegene Zeitpunkte, also die Extrapolation, gefährlich ist und oft ganz falsche Werte liefert; es muß also jener Zeitraum der Formel stets beigefügt werden. Am gebräuchlichsten ist die parabolische Formel

$$D = D_0 - a(t - t_0) - b(t - t_0)^2 \quad ,$$

in welcher $t_0$ ein fester Zeitpunkt, die sogenannte Epoche, $D_0$ die ihr entsprechende beobachtete Deklination, $t$ irgend eine Zeit, $D$ die entsprechende Deklination ist,




Figur 208.

und $a$ und $b$ Konstanten sind. Nur für wenige Orte hat man diese Konstanten bisher berechnen können, und auch für diese nur für sehr verschiedene Epochen und Zeiträume; eine Auswahl gibt die folgende Tabelle.

Säkulare Deklination.

| Ort | $-D_0$ | $a$ | $b$ | Zeitraum | $t_0$ | Autor |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Petersburg . . | 1° 37,64′ | −6,5200′ | — | 1873—1885 | 1873 | MÜLLER |
| Berlin . . . . | 18° 7,30′ | −0,2681′ | −0,070′ | 1730—1870 | 00 | ERMANN |
| Göttingen . . | 14° 51,70′ | −8,8430′ | −0,053′ | 1632—1885 | 67,52 | KOHLRAUSCH |
| Greenwich . | 20° 24,97′ | −7,8730′ | +0,049′ | 1858—1875 | 66 | NEUMAYER |
| Prag . . . . . | 12° 34,08′ | −7,0480′ | +0,092′ | 1855—1876 | 65 | „ |
| Wien . . . . | 11° 39,42′ | −7,3436′ | +0,017′ | 1853—1871 | 65 | „ |
| München . . | 14° 58,92′ | −7,2822′ | +0,005′ | 1842—1872 | 57 | „ |
| Mailand . . . . | 13° 31,00′ | −6,7270′ | −0,004′ | 1836—1884 | 80 | CHISTONI |
| Venedig . . . | 11° 49,00′ | −6,8250′ | −0,008′ | 1848—1884 | 80 | „ |
| Toronto . . . | 1° 57,58′ | +2,8890′ | −0,013′ | 1841—1871 | 56 | NEUMAYER |
| Rio de Janeiro | 0° 24,40′ | +8,0940′ | +0,022′ | 1670—1885 | 50 | WEYER |
| Melbourne . | 8° 19,74′ | +1,1800′ | +0,022′ | 1858—1884 | 71,5 | NEUMAYER |

Eine parabolische Formel ergibt für die dargestellte Größe bekanntlich zweimal den Wert null und dazwischen ein Maximum. So findet man z. B.

| | $D=0$ | $D_{max}$ | Betrag |
|---|---|---|---|
| für Berlin | 1673 und 1923 | 1798 | −18° 9′ |
| für Göttingen | 1632 und 1938 | 1785 | −19° 32′ , |

woraus der geringe Wert solcher Extrapolationen ersichtlich ist; denn nach den Zahlen für Potsdam (S. 483) ist ziemlich sicher, daß $D$ im Jahre 1923 noch mindestens −7° betragen wird.

Für Potsdam ist die Formel

$$D = -10^\circ\,17{,}24' + 5{,}14'(t - 1896{,}0) - 0{,}104'(t - 1896)^2$$

berechnet worden; aber es ist zweifelhaft, ob sie lange giltig bleiben wird[1].

Für Paris, wo sich die Beobachtungen bereits durch fast vier Jahrhunderte erstrecken, reicht die Parabel nicht aus, da sich hier auch ein östliches Maximum von $D$ ergeben hat; die betreffende, in Figur 208 dargestellte Kurve ist vielmehr wellen- resp. sinusartig, wobei allerdings kleinere Wellen und Unregelmäßigkeiten zur Vereinfachung des Bildes eliminiert worden sind; als besondere Werte findet man:

Maximum im Jahre 1580, Betrag + 9° 30′ ,
Null „ „ 1600
Minimum „ „ 1810, Betrag −22° 18′ .

Noch andere Orte weisen zwar ebenfalls Maxima und Minima auf, ohne jedoch dabei das Vorzeichen gewechselt zu haben (für New York z. B. sind die Extreme der letzten 200 Jahre −4° und −9°). Endlich sei noch ein Beispiel für eine Darstellung gegeben, welche sich für sehr lange Reihen zuweilen bewährt hat, und bei welcher zwei verschiedene Epochen $t_1$ und $t_2$, sowie zwei verschiedene Perioden $T_1$ und $T_2$ zugrunde gelegt werden:

$$D = D_0 + a\sin(t - t_1)\frac{360^\circ}{T_1} + b\sin(t - t_2)\frac{360^\circ}{T_2} \quad ;$$

für Christiania z. B. ist

[1] Vgl. AD. SCHMIDT, Drude Ann. **10**. 891. 1903 und **15**. 398. 1905. — Für andere Länder, namentlich die Ver. Staaten v. Nordamerika vgl. die Berichte von K. SCHERING im Geogr. Jahrbuch. — Für die Schweiz vgl. A. BATTELLI, Beibl. 1894. 482, wo die Orig.-Lit. zusammengestellt ist.

$$D_0 = -5{,}99^0\,,\quad a = 13{,}53^0\,,\quad t_1 = 1502{,}2\,,\quad T_1 = 420\,,$$
$$b = 0{,}53^0\,,\quad t_2 = 1517{,}5\,,\quad T_2 = 82\,,$$

und man findet

$D = 0$ in den Jahren 1530, 1681, 1950,
$D_{min}$ im Jahre 1822, Betrag $-20^0\ 1'$ ,
$D_{max}$ „ „ 1612, „ $+ 7^0 56'$ .

Am anschaulichsten ergeben sich die Veränderungen von $D$ durch Vergleichung der im Laufe der Jahrhunderte publizierten und neuerdings mehrfach zusammengestellten Isogonenkarten, namentlich für die Jahre 1600, 1700, 1800, 1858 und 1885. Nur wenige Gebiete haben während dieser Zeit ihr Vorzeichen gewahrt, so sind West-Australien und die Neu-England-Staaten stets westlich, Ost-Australien und Amerika (mit Ausnahme der Ostecke) stets östlich geblieben, Afrika ist wenigstens seit 1700 westlich; Europa und Asien hingegen haben Zeichenwechsel, und zwar zum Teil wiederholte, aufzuweisen. Die agonische Linie, die jetzt durch Amerika geht, bog früher (1600) stark nach Osten aus und umschloß fast ganz Europa, erst allmählich hat sie sich zurückgezogen und ihre heutige einfache Gestalt angenommen. Umgekehrt war damals die andere agonische Linie nahezu gerade, erst mit der Zeit bauchte sie sich nach Ost-Asien aus und schnürte schließlich die jetzige geschlossene Agone von sich ab[1].

Gegenwärtig ist die Säkularänderung der Deklination, die in Figur 198 durch die eingeklammerten Zahlen in Minuten pro Jahr angegeben ist, fast überall positiv, d. h. die Deklination wird östlicher, sie nimmt also, absolut genommen, da, wo sie westlich ist, ab, dagegen dort, wo sie östlich ist, zu; nur in Amerika, dem südlichen Atlantic und Ost-Asien (besonders in der Enklave) nimmt $D$ ab; ohne Säkularänderung sind gegenwärtig drei, in Figur 198 gestrichelte Linien, eine nahe der Westküste Amerikas hinlaufende, eine zweite, welche den Nord-Atlantic durchschneidet und dann westlich von Afrika hinläuft, und eine dritte in Ost-Asien. Die stärkste Zunahme findet in Nordwest-Europa statt, nämlich um 12′ jährlich, in Schottland beträgt sie 9, in Holland 8, in Deutschland 4 bis 6 (z. B. in Potsdam 4,2′, s. o. S. 483), in Rußland 3 bis 5; dabei wird diese Zunahme aber allmählich kleiner, sie betrug z. B. in Hamburg:

| 1856 | 1865 | 1873 | 1880 | 1885 | 1890 |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,4′ | 8,0′ | 7,4′ | 7,0′ | 6,4′ | 5,2′. |

**Säkulare Inklinationsänderung.** Sie ist wesentlich kleiner als die Änderung der Deklination. Die parabolische Formel

$$I = I_0 + a(t - t_0) + b(t - t_0)^2$$

ergibt folgende Werte:

| Ort | $I_0$ | $a$ | $b$ | $t_0$ | Autor |
|---|---|---|---|---|---|
| Upsala . . . . | 71° 0,0′ | −1,42 | +0,051′ | 1869 | Solander |
| Wilhelmshaven . | 68° 13,0′ | −1,44 | +0,039′ | 1870,5 | Eschenhagen |
| Berlin . . . . | 70° 19,5′ | −4,35 | +0,021′ | 1800 | Ermann |
| Göttingen . . . | 67° 1,0′ | −1,90 | +0,016′ | 1860,6 | Kohlrausch |
| Greenwich . . | 67° 56,2′ | −2,02 | −0,005′ | 1868 | Neumayer |
| München . . . | 64° 38,2′ | −2,52 | −0,007′ | 1857 | „ |
| Mailand . . . | 62° 11,0′ | −1,33 | +0,022′ | 1880 | Chistoni |
| Venedig . . . | 61° 38,0′ | −1,90 | +0,012′ | 1880 | „ |
| Washington . . | 71° 38,0′ | −0,15 | −0,016′ | 1880 | Geodetic Survey |
| Melbourne . . | −67° 6,0′ | +0,08 | +0,008′ | 1871,5 | Neumayer |

[1] Wegen der Geschichte der agonischen Linie in Amerika vgl. L. A. Bauer, Terr. Magn. 2. 1897.

Hiernach würde die bisher ununterbrochene Abnahme von $I$ in diesem Jahrhundert ihr Ende erreichen, und zwar für Berlin etwa 1902 mit 66° 38′, für Göttingen 1935 mit 65° 50′; tatsächlich zeigen die obigen Zahlen für Potsdam beinahe Konstanz (66° 21′), was allerdings auch andere Gründe haben kann (vgl. AD. SCHMIDT, a. a. O.). Welche Werte $I$ im Laufe der Zeiten angenommen hat und wie groß dabei die jährliche Änderung gewesen ist, möge das Beispiel von Paris zeigen:

| Jahr | $I$ | jährliche Änderung | Jahr | $I$ | jährliche Änderung |
|---|---|---|---|---|---|
| 1671 | 75° 0′ | 1,8′ | 1825 | 68° 0′ | 3,3′ |
| 1780 | 71° 48′ | 6,0′ | 1831 | 67° 40′ | 4,0′ |
| 1806 | 69° 12′ | 4,5′ | 1835 | 67° 24′ | 2,5′ |
| 1814 | 68° 36′ | 2,7′ | 1858 | 66° 26′ | 2,4′ |
| 1820 | 68° 20′ | 4,0′ | 1885 | 65° 20′ | — |

Die Inklination hat also ununterbrochen abgenommen, ohne daß jedoch in dem Verlauf dieser Abnahme ein Gesetz zu erkennen wäre; im Durchschnitt beträgt die jährliche Abnahme 2,7′, was auch heute noch etwa stimmt. In den Äquatorgegenden ist die Abnahme stärker, z. B. in Batavia im Durchschnitt der Jahre 1884 bis 1898: 7,15′.

Zurzeit nimmt die Inklination noch fast überall ab, in Deutschland um 1 bis 2′, ebenso in Großbritannien, in Frankreich, Italien und Österreich-Ungarn um 1 bis 3′, die Abnahme ist aber geringer, als sie noch vor kurzem war (z. B. in Großbritannien 1837 bis 1857 1,6 bis 2,7′, dagegen 1857 bis 1888 0,9 bis 1,9′); auch im westlichen Rußland nimmt $I$ ab, ferner in Afrika (bis zu 5′) und in den Vereinigten Staaten (um 2,5 bis 7,5′). Dagegen findet in Ozeanien und im mittleren Rußland gar keine Änderung, in Ost-Rußland eine kleine und in Asien eine etwas größere Zunahme statt. Eine Linie ohne Inklinationsänderung geht von den Aleuten nach Kalifornien, West-Indien, Brasilien und dem nördlichen Atlantic, eine zweite durch das europäische Rußland. Was endlich den magnetischen Äquator betrifft, so haben sich dessen Schnittpunkte mit dem geographischen Äquator sehr beträchtlich verschoben, der eine von ihnen lag z. B. 1700 unter 35° östl. L., 1780 unter 20° östl. L., jetzt liegt er unter 10° westl. L., er ist also jährlich etwa 15′ westwärts gewandert.

**Säkular-Änderung der Horizontalintensität.** Die parabolische Formel

$$H = H_0 + a(t - t_0) + b(t - t_0)^2$$

liefert folgende Werte:

| Ort | $100000\,H_0$ | $100000\,a$ | $1000000\,b$ | $t_0$ | Autor |
|---|---|---|---|---|---|
| Berlin . . . | 17594 | − 8 | 2 | 1800 | ERMANN |
| Göttingen . . | 18497 | +35 | 3 | 1870 | KOHLRAUSCH |
| Greenwich. . | 17694 | +16 | 5 | 1864 | NEUMAYER |
| Prag . . . | 19264 | +22 | 1 | 1865 | „ |
| Wien . . . | 20090 | +57 | 3 | 1865 | „ |
| München . . | 19694 | +26 | 1 | 1857 | „ |
| Venedig . . | 21370 | +17 | −1 | 1880 | CHISTONI |
| Toronto . . | 16145 | −15 | 8 | 1856 | NEUMAYER |
| Melbourne. . | 23630 | − 6 | 0 | 1871,5 | „ |

Das Berliner Minimum fiel hiernach in das Jahr 1816 und betrug 0,1753, das Göttinger nach KOHLRAUSCH in 1817 mit 0,1756, während nach SCHERING

die entsprechenden Zahlen 1823 und 0,1767 sind und ein Maximum für 1898 mit 0,1876 zu erwarten war; das letztere ist aber nicht eingetroffen, $H$ wächst noch langsam weiter. Allgemein sind, wie man sieht, die Änderungen von $H$ keine erheblichen, sie messen nach Hunderttausendteln der absoluten Einheit und betragen in Deutschland deren 4 bis 20, ebenso in Österreich, in Italien etwas mehr, in Frankreich (1848 bis 1885) 22 bis 28, neuerdings aber nur 17 bis 19, woraus hervorgeht, daß die Zunahme kleiner und kleiner wird, in Großbritannien 18 bis 22, in Rußland ist sie sehr klein und geht im östlichen sogar in eine Abnahme über, welche in Sibiren bis zu —30 ansteigt, während das südliche Asien wieder eine Zunahme hat. Ferner nimmt $H$ in West-Afrika zu, in Ost-Afrika und Australien ab, in Nordost-Amerika zu, im ganzen übrigen Amerika dagegen ab, und zwar in Süd-Amerika bis zu —80. Eine Linie ohne Änderung, die aber in einzelnen Teilen prekär und vielleicht nur ephemer ist, geht von 50° nördl. Br. und 120° westl. L. quer durch Nord-Amerika zwischen Bahama und Bermuda-Inseln nach Cap Verde, Zanzibar, den kleinen Sunda-Inseln und schließlich hinauf nach Nord-Amerika.

**Säkular-Änderung der Totalintensität.** Sie läßt sich offenbar durch Kombination der Änderungen der Inklination mit den Änderungen der Horizontalintensität ableiten. Aus

$$H = F \cos \iota$$

folgt nämlich

$$dH = -F \sin I \, dI + \cos I \, dF \quad ,$$

also

$$dF = \frac{dH + F \sin I \, dI}{\cos I} \quad .$$

Nun haben nach dem obigen $dH$ und $dI$ entgegengesetzte Vorzeichen; es wird also $dF$ desto kleiner ausfallen, je näher die beiden Glieder des Zählers ihrem absoluten Betrage nach einander kommen; und wenn sie sogar einander gleich werden, so wird $dF = 0$. Näherungsweise ist dies nun vielfach der Fall; im mittleren Deutschland z. B. hat man einerseits $F = 0{,}47$, $I = 66^{0}$, also $\sin I = 0{,}91$, $dI$, absolut genommen, gleich 1,5′, also im Bogenmaß 0,00044, und somit das zweite Glied gleich 0,00019, andererseits aber $dH$ ebenfalls gleich 0,00019, die Totalintensität bleibt also im wesentlichen unverändert (in Potsdam hat freilich von 1901 bis 1903, vgl. S. 483, eine deutliche Abnahme stattgefunden). Allgemein kann man sagen, daß die Säkular-Änderungen der Totalintensität, wo und wann sie überhaupt existieren, weit kleiner sind als die der Horizontalintensität und der Inklination, oder gar als die der Deklination.

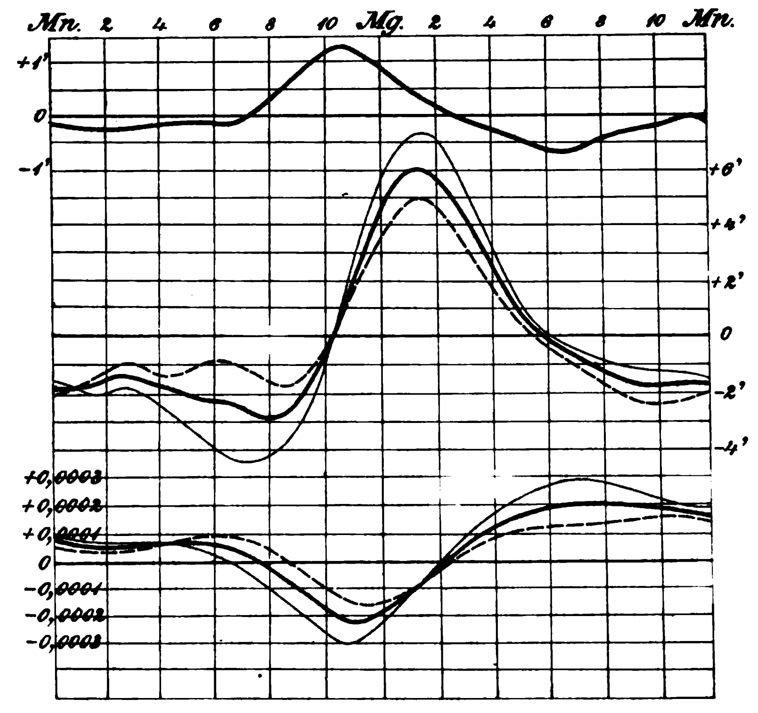
**Die Säkularänderungen für verschiedene Breiten und Längen.** Schließlich kann man versuchen, $\Delta D$, $\Delta I$, $\Delta H$ als Funktionen von $\varphi$ und $\lambda$ darzustellen; nach Ad. Schmidt erhält man dann auf Grund der Periode 1890 bis 1900:

$$\Delta D = \phantom{-}5{,}2' + 0{,}07'(\varphi - 50) - 0{,}03'(\lambda - 10) \quad ,$$
$$\Delta I = -1{,}6' + 0{,}01'(\varphi - 50) + 0{,}04'(\lambda - 10) \quad ,$$
$$\Delta H = \phantom{-}23\gamma - 0{,}6\,\gamma\,(\varphi - 50) - 0{,}4\,\gamma\,(\lambda - 10) \quad .$$

**Tägliche Schwankungen.** Sämtliche erdmagnetische Elemente ändern ihre Werte im Laufe des Tages. Am stärksten ist diese Änderung auch hier wieder bei der Deklination, schwächer bei Inklination und Horizontalintensität, bei denen sie überdies einen entgegengesetzten Verlauf nimmt, und am schwächsten infolgedessen bei der Totalintensität. In Figur 209 ist der tägliche Gang von $-D$, d. h. der westlichen Deklination (in der Mitte), $I$ (oben) und $H$ (unten) für Wilhelmshaven nach einjährigem Mittel (1883) auf Grund der Angaben registrierender Instrumente dargestellt, die starken horizontalen Linien geben die

Mittelwerte, die starken Kurven den täglichen Gang. Wie man sieht, variiert $D$ um 10′, $I$ um 2′, $H$ um 0,0004. Das Maximum von $-D$, also sein größter westlicher Wert, fällt auf 1 bis 2 Uhr nachmittags, das Minimum auf 8 Uhr morgens; das Maximum von $I$ und das Minimum von $H$ fallen auf 10 bis 11 Uhr vormittags, das Minimum von $I$ und das Maximum von $H$ auf 7 bis 9 Uhr abends. Bei allen Elementen sind die Änderungen am Tage stärker und gleichmäßiger als in der Nacht, in welcher sich übrigens meist noch ein zweites, wenn auch sehr schwaches Maximum resp. Minimum vorfindet. Während alle diese Kurven unsymmetrisch gegen den Mittag liegen, weist die Vertikalvariation Symmetrie auf[1].

Wie sich die täglichen Schwankungen der Deklination in den verschiedenen Zonen gestalten, zeigt Figur 210, deren fünf übereinander liegende Darstellungen



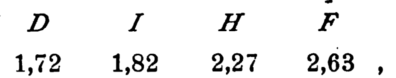

Figur 209.

sich, von unten nach oben, auf die südliche gemäßigte, südliche heiße, nördliche heiße, nördliche gemäßigte und nördliche kalte Zone beziehen und welche, wenn von dem Unterschied der ausgezogenen und gestrichelten Linien zunächst abgesehen wird, erkennen lassen, daß die täglichen $D$-Schwankungen (Millimeter bedeuten Minuten) am Äquator am kleinsten sind und nach den Polen hin immer größer werden, sowie, daß sich dabei das Maximum immer mehr nach den Nachmittagsstunden verschiebt. In der obersten Darstellung bezieht sich die ausgezogene Linie auf die westliche, die gestrichelte auf die östliche Hälfte der Polarzone, und es hängt offenbar mit der Nähe des Magnetpols zusammen, daß jene eine noch größere tägliche Schwankung aufweist als diese[2].

---

[1] Vgl. W. WEINSTEIN, Die Erdströme. Braunschw. 1900. S. 43 und Taf. IIa. — [2] Zuweilen stellt man die täglichen Schwankungen von $D$ und $I$ durch eine einzige Kurve dar (Abszissen $D$, Ordinaten $I$), welche dann gewissermaßen die Bewegung eines Endpunktes einer im Raume freien Nadel darstellt; vgl. w. u.

Noch ist die wichtige Tatsache anzuführen, daß die täglichen Schwankungen auch eine jährliche Periode besitzen, d. h. sie sind in den gemäßigten und kalten Zonen im Sommer stärker als im Winter, und in den heißen Zonen ist sogar der Verlauf in den beiden Jahreshälften der entgegengesetzte. Es geht dies deutlich aus den Figuren 209 und 210 hervor, in denen (abgesehen von der schon erwähnten obersten Darstellung der Figur 210) die schwach ausgezogenen Linien sich auf den Sommer, die gestrichelten auf den Winter beziehen. In Deutschland ist nach einer angestellten Berechnung das Verhältnis der täglichen Amplitude im Sommer zu derjenigen im Winter folgendes:



| $D$ | $I$ | $H$ | $\bar{F}$ |
|---|---|---|---|
| 1,72 | 1,82 | 2,27 | 2,63 , |

Mn. 2 4 6 8 10 Mttg. 2 4 6 8 10 Mn.

Figur 210.

so daß man sagen kann, die tägliche Schwankung sei im Sommer etwa doppelt so groß wie im Winter. Die Relativzahlen für die einzelnen Monate sind noch vielfach mit großen Unsicherheiten behaftet; als Beispiel mögen die Deklinationsschwankungen für Kiew dienen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Januar | 33 | April | 63 | Juli | 59 | Oktober | 48 |
| Februar | 41 | Mai | 58 | August | 60 | November | 40 |
| März | 52 | Juni | 60 | September | 56 | Dezember | 32 |

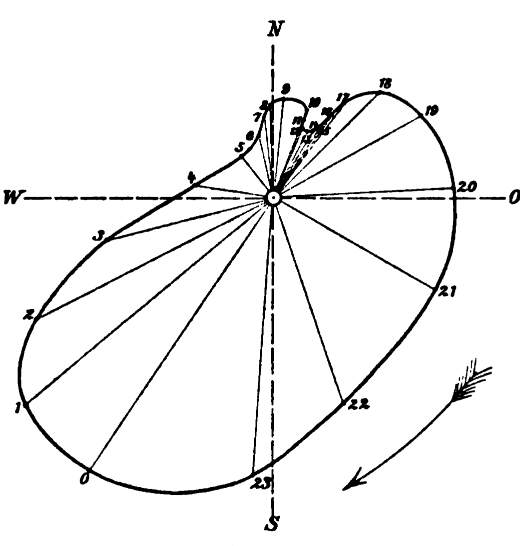
Sehr merkwürdig ist schließlich eine andere Ungleichheit, welche die tägliche $D$-Schwankung aufweist, und deren Periode und Phase mit derjenigen der Sonnenflecken übereinstimmt. Die folgenden Zahlen geben an, wie sich die tägliche Amplitude an Tagen maximaler Fleckenausbildung zu der an Tagen minimaler Ausbildung verhält.



| Ort | Verhältnis | Autor |
|---|---|---|
| Paris . . . . | 1,71 | CASSINI und ARAGO |
| Göttingen . . . | 1,74 | GAUSS |
| München . . . | 1,66 | LAMONT |
| Dublin . . . . | 1,52 | LLOYD |
| Hobarttown . . | 1,57 | KAY |
| Toronto . . . | 1,51 | YOUNGHUSBAND |

Das Verhältnis ist also rund das von 5 : 3; die Phasenübereinstimmung ist insofern keine vollständige, als die $D$-Amplitude der Häufigkeit der Sonnenflecke etwas nachhinkt.

**Vektordiagramme der täglichen Variation.** Eine noch weit anschaulichere und mehr besagende Darstellung der täglichen Variation erhält man durch ein von GAUSS angegebenes und von BEZOLD wieder aufgenommenes Verfahren. Man trägt vom Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems nach oben oder unten die Variationen der $X$-Komponente (Nord-Süd-Komponente), nach rechts oder links die der $Y$- (Ost-West-) Komponente auf, und zwar für jede Stunde des Tages; für jede Stunde erhält man dann einen Punkt in der Zeichnungsebene; verbindet man alle diese Punkte, so erhält man eine geschlossene Kurve, das Vektorendiagramm der täglichen Variation der Horizontalintensität nach Größe und Richtung. In Figur 211 ist es nach WEINSTEIN für Wilhelmshaven im Mittel aus den Beobachtungen des Jahres 1884 wiedergegeben; nach astronomischem Gebrauche bedeutet 0 Mittag, 12 Mitternacht; der Pfeil bezeichnet die Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird. Aus dieser Kurve kann man ohne weiteres den Gang von $H$, $X$, $Y$, $D$ einzeln entnehmen; die stärkste Ausbuchtung fällt in die Mittags-, eine auffällige Einbuchtung in die Mitternachtstunden. Für Wien ist das Diagramm sehr ähnlich, für Orte anderer Erdgegenden aber ganz anders, z. B. mit Schleifen (d. h. die Kurve schneidet sich selbst). Vergleicht man die Richtung der einzelnen Vektoren mit dem Gange der Sonne, so sieht man, daß die Horizontalvariation in Wilhelmshaven von $8^1/_2$ Uhr Vormittag bis $5^1/_2$ Uhr Nachmitternacht der Sonne voraneilt (am stärksten, nämlich um 80°, etwa um Sonnenuntergang), daß sie dagegen in den übrigen drei Frühstunden gegen die Sonne zurückbleibt. Statt Jahresmittelkurven der täglichen Variation kann man nun auch Monats- oder Jahreszeiten-Diagramme der täglichen Variation herstellen und durch deren Vergleichung den jährlichen Verlauf studieren; es sei hierfür auf WEINSTEIN[1] verwiesen. Dieser Autor hat übrigens auch eine noch allgemeinere Darstellung durchgeführt, nämlich Vektor-



Figur 211.

[1] B. WEINSTEIN, Die Erdströme usw. Braunschw. 1900. S. 41—66 und Tafeln IX ff.

diagramme der täglichen Totalvariation. Es würden das offenbar räumliche Darstellungen werden; um nun in der Ebene zeichnen zu können, wählt WEINSTEIN die drei Projektionen auf die Äquatorebene, die Tag- und Nachtebene und die Morgen- und Abendebene aus; man vergleiche die Tafel X seines Werkes.

**Tägliche Schwankung der Elemente (Abweichung vom Tagesmittel) für 1900/01 und Potsdam — annähernd für ganz Deutschland.**

Nach ADOLF SCHMIDT.

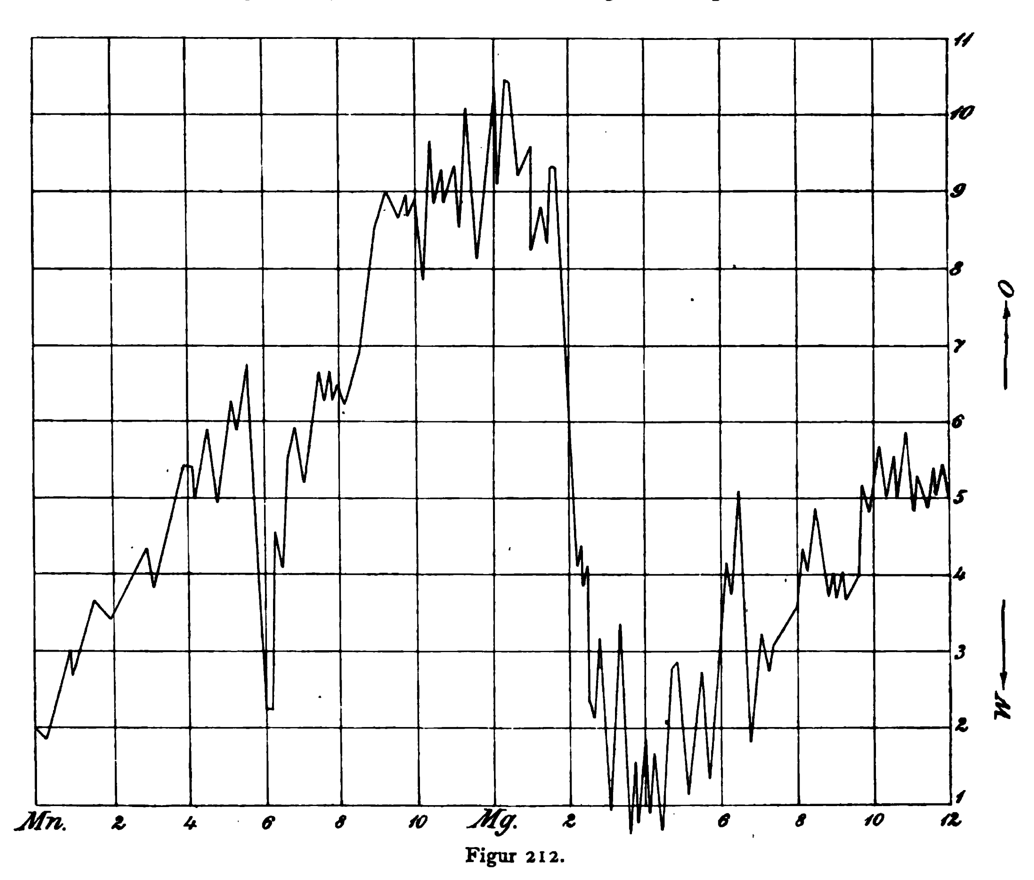
| | Ortszeit | Mn. | $3^h$ | $6^h$ | $9^h$ | Mttg. | $3^h$ | $6^h$ | $9^h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | Januar | +1,0′ | −0,1′ | −0,1′ | +0,4′ | −1,6′ | −1,2′ | 0,0′ | +1,5′ |
| | April | +0,8 | +0,9 | +1,8 | +3,5 | −3,8 | −3,6 | +0,1 | +0,6 |
| | Juli | +0,6 | +1,2 | +3,7 | +2,9 | −3,9 | −3,8 | −0,3 | +0,1 |
| | Oktober | +1,1 | +0,6 | +0,8 | +2,4 | −3,5 | −2,2 | −0,2 | +0,9 |
| $I$ | Januar | 0,0′ | 0,0′ | −0,4′ | −0,2′ | +0,4′ | +0,1′ | +0,2′ | +0,1′ |
| | April | −0,3 | −0,2 | −0,3 | +0,6 | +0,6 | 0,0 | −0,1 | −0,3 |
| | Juli | −0,4 | −0,2 | −0,1 | +1,0 | +0,7 | 0,0 | −0,2 | −0,6 |
| | Oktober | −0,2 | −0,2 | −0,4 | +0,6 | +0,7 | +0,1 | −0,2 | −0,3 |
| $H$ (in $\gamma$) | Januar | 0 | 0 | +6 | + 2 | − 7 | −2 | −2 | −1 |
| | April | +6 | +4 | +5 | − 9 | −16 | −1 | +4 | +6 |
| | Juli | +7 | +4 | +3 | −15 | −15 | 0 | +6 | +9 |
| | Oktober | +4 | +4 | +6 | − 9 | −13 | 0 | +3 | +5 |

**Andere periodische Schwankungen.** Außer den säkularen und den täglichen Veränderungen der magnetischen Elemente sind noch mehrere andere vermutet oder mit mehr oder weniger Sicherheit konstatiert worden. Es genüge, sie kurz anzuführen: 1. Eine jährliche Periode von $D$ ist u. a. in Rußland jetzt festgestellt, das Maximum fällt in den Juni, das Minimum in den November oder Dezember, die Differenz ist aber sehr geringfügig (rund 1′). 2. Eine halbjährige Periode mit den Äquinoktien und Solstitien als ausgezeichneten Punkten scheint stellenweise zu existieren. 3. In der Mondperiode fand SABINE für Toronto ein zweimaliges Maximum und Minimum mit den Amplituden 0,64′ für $D$, 0,07′ für $I$ und 0,0000012 für $F$. Auch KREIL glaubt neuerdings (Wiener Denkschr. Bd. 5) den Mondeinfluß auf $H$ zweifellos festgestellt zu haben. 4. Eine 19jährige Periode der Intensität, übereinstimmend mit der Bewegung der Mondknoten, fand HANSTEEN für Christiania. 5. Andere vielleicht vorhandene Perioden sind die 26tägige, die von HORNSTEIN (Wien. Ber. 1871, 15. Juni) gefunden wurde und fast genau der Sonnenrotation entspricht, die 11jährige (Sonnenflecke), die AD. SCHMIDT einer näheren Analyse unterzogen hat, und eine 40 bis 50jährige.

Bisher war stets von der Veränderung der Werte der Elemente an sich die Rede. Nun gibt es aber auch mehrfache Periodizitäten in deren Schwankungen, namentlich den täglichen. Davon, daß die tägliche Schwankung hinsichtlich ihrer Amplitude eine jährliche Periode hat, ist schon oben gesprochen worden; aber auch die Gestalt der Welle ist in den Jahreszeiten verschieden; dabei zeigt sich der Charakter der Veränderung als der einer Doppelwelle, d. h. die Periode ist mit einer halbjährigen überlagert. Am klarsten zeigt sich das für die Horizontalintensität, weniger für die Inklination, am schwächsten bei der Deklination. Sehr deutlich dagegen ist eine andere Periodizität der täglichen Amplitude, nämlich

die etwa elfjährige. Die ausgedehnteste Untersuchung hierüber hat W. ELLIS angestellt; es muß jedoch an diesem Hinweise genügen[1].

**Magnetische Störungen.** So nennt man plötzlich oder mindestens sehr rasch eintretende Veränderungen der magnetischen Elemente, insbesondere von $H$ und $D$. Sie markieren sich dadurch, daß die unter gewöhnlichen Umständen ruhige Magnetnadel sichtbar zu zittern anfängt und unter fortdauerndem Zittern ihre Richtung in kurzer Zeit, d. h. in einer oder wenigen Stunden zwischen oft sehr weiten Grenzen verändert. ESCHENHAGEN hat eine von 1 bis 5 ansteigende Skala der Störungen aufgestellt. Besonders heftige Störungen, wie sie namentlich




Figur 212.

in hohen Breiten nicht zu den Seltenheiten gehören, bezeichnet man nach HUMBOLDT auch als magnetische Gewitter. Eine Darstellung eines solchen gibt Figur 212, die sich auf die deutsche Polarstation Kinguafiord und den 15. November 1882 bezieht und eine $D$-Schwankung von über $10^0$ innerhalb weniger Stunden erkennen läßt. Ganz neuerdings hat AD. SCHMIDT eine besonders merkwürdige Störung in Potsdam am 13. bis 14. Dezember 1903 graphisch dargestellt und eingehend untersucht; eine noch stärkere fand am 31. Oktober statt, wobei $D$ innerhalb 7 Minuten um $3^0\,6'$ schwankte (a. a. O. S. 399).

Geringere magnetische Störungen, die sich auf Bruchteile eines Grades oder auf Minuten resp. auf kleine Bruchteile von $H$ beschränken, sind sehr häufig —

[1] Wenn man die Sonnenfleckenhäufigkeit, die mittlere jährliche Amplitude der Deklination und der Horizontalintensität in geeigneten Maßstäben für einen längeren Zeitraum in Kurven darstellt, erhält man einen überraschend parallelen Verlauf. Vgl. A. NIPPOLDT, Erdmagnetismus usw. S. 75 u. 76.

so häufig, daß sie z. B. bei der Berechnung des täglichen Ganges der magnetischen Elemente störend wirken und WILD veranlaßt haben, zwischen normalen und abnormen Tagen, d. h. Tagen ohne und mit Störungen zu unterscheiden, wobei alsdann für gewisse Zwecke die abnormen Tage von der Berücksichtigung auszuschließen sind.

Die magnetischen Störungen, welche zuerst auf Anregung von GAUSS und WEBER durch den magnetischen Verein an 28 Stationen systematisch beobachtet wurden, treten an verschiedenen Orten häufig ganz gleichzeitig auf, besonders nord-südwärts, während sie sich von Westen nach Osten zuweilen zeitlich fortpflanzen, wobei sie, wenn sie nicht größeren Betrages sind, ihren Einfluß oft wesentlich ändern, weil sie nach und nach auf verschiedene Tageszeiten fallen und sich folglich in verschiedener Weise mit den täglichen Schwankungen kombinieren. Der durchschnittliche Betrag der Störungen nimmt, wie gesagt, nach Norden zu, und es seien hierfür nach LAMONT folgende Relativzahlen angeführt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mailand . . | 1,0 | Brüssel . . | 1,3 | Dublin . . | 2,0 |
| München . | 1,1 | Berlin . . | 1,5 | Kopenhagen | 2,2 |
| Prag . . . | 1,2 | Breda . . | 1,6 | Stockholm . | 2,4 |
| | | Göttingen . | 1,8 | | |

Eine typische Störung besteht meist aus einem einleitenden Ruck, der Hauptstörung und der Nachstörung; letztere kann sich tage- und wochenlang hinziehen.

Endlich ist noch eine besondere Klasse von Störungen, die sogenannten Elementarwellen, zu nennen, ganz kleine, sehr zahlreiche Schwankungen, die oft in großen Gebieten identisch auftreten.

Auch die magnetischen Störungen, so unregelmäßigen Charakters sie sonst sind, lassen doch zeitliche Perioden erkennen. Sie sind nämlich am Tage häufiger und auch meist stärker als in der Nacht, wobei noch zuweilen, z. B. in München, der Gegensatz auftritt, daß am Tage die $D$-Störung mehr nach Westen, in der Nacht mehr nach Osten erfolgt; im Sommer sind die Störungen meist heftiger als im Winter, und während der Äquinoktien und des Sommer-Solstitiums sind sie oft am heftigsten. Zweifellos ist endlich der Parallelismus zwischen den magnetischen Störungen und den Sonnenflecken, sie treten beide in 11 jährigen Perioden häufiger resp. seltener auf, und zwar derart, daß die magnetischen Störungen den Sonnenflecken meist etwas nachhinken. Zur Veranschaulichung des Grades dieser Verschiedenheit mögen folgende Zahlen dienen:

Von 8760 Stundenwerten jeden Elementes waren in Potsdam als gestört zu betrachten:

| Jahr | $D$ | $H$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| 1901 | 229 | 462 | 110 |
| 1902 | 414 | 778 | 341 |
| 1903 | 1208 | 1756 | 1113 |

Wir kommen also zur Zeit offenbar in eine gewaltige Störungsperiode hinein.

## Theorie des Erdmagnetismus.

Die erdmagnetischen Erscheinungen regen die Frage an, was für Kräfte man sich als ihre Ursache, und wo man sich den Sitz dieser Kräfte zu denken habe. Was zunächst die letztere Frage betrifft, so sind zwei generelle Möglichkeiten: jene Kräfte haben ihren Sitz außerhalb oder innerhalb der Erde. Daß in der Hauptsache das erstere der Fall sei, ist schon deshalb nicht anzunehmen, weil die Erscheinungen sonst in hohem Grade von der Erddrehung

abhängen müßten, während in Wahrheit die täglichen Schwankungen nur ganz kleine Bruchteile der Elemente betreffen; und dann, weil bei der großen Entfernung der Himmelskörper die Wirkung keine so gewaltige sein könnte, wie sie tatsächlich beobachtet wird. Es könnten derartige Wirkungen keine direkten, sondern nur indirekte sein, und sie können nicht die Haupterscheinungen, sondern nur deren Variabilität und ev. einen kleinen Bruchteil der Dauerwerte berühren, wovon noch die Rede sein wird. Auch die Lufthülle, welche die Erde umgibt, und deren Sauerstoff allerdings magnetische Eigenschaften besitzt, hat jedenfalls nicht entfernt die Bedeutung für unsere Theorie, welche ihr FARADAY[1] zuschrieb. Es ist also im wesentlichen die Erde selbst als Sitz der Vorgänge, welche die beobachteten Erscheinungen veranlassen, anzusehen, und es fragt sich nur noch, ob man dabei an die Oberflächenschichten oder an das tiefere Innere zu denken habe. Aus den Erscheinungen an der Erdoberfläche und über derselben kann man das bekanntlich nicht entscheiden, da es für diese nach GAUSS stets eine Oberflächenverteilung des wirkenden Agens gibt, welche einer inneren Verteilung äquivalent ist (vgl. Art. Magnetismus, S. 57), und es kann daher auch aus den oben erwähnten Messungen in verschiedenen Höhen nicht, wie einige gemeint haben, auf eine große Tiefe der wirkenden Massen unter der Oberfläche geschlossen werden. Die Beschaffenheit der oberflächlichen Erdschichten aber, in denen wirksame Materialien nur sehr schwach und überaus sporadisch vorkommen, verweist auf das Erdinnere, welches ohnehin, nach den ermittelten Werten der Dichte, als aus anderen, schwereren Stoffen bestehend angesehen werden muß.

Von älteren Versuchen, den Sitz von, die erdmagnetischen Erscheinungen quantitativ ergebenden Magneten zu ermitteln, seien hier nur diejenigen von TOBIAS MAYER[2], auf die auch HUMBOLDT wieder zurückkam, und von HANSTEEN[3] erwähnt. Jener nahm einen einzigen, wenig ausgedehnten, aber sehr kräftigen Magneten im Mittelpunkte der Erde an, dieser deren zwei von unsymmetrischer Lage gegenüber der Äquatorialebene; beide Annahmen vermögen nur sehr roh die Tatsachen darzustellen, und selbst wenn sie es besser vermöchten, würden sie doch nicht den Charakter willkürlicher Darstellungen verlieren.

**GAUSSsche Theorie.** Von derartigen Willkürlichkeiten völlig frei ist die Theorie von GAUSS, welche in einer der klassischsten und bedeutsamsten Abhandlungen aus dem Gebiete der mathematischen Physik niedergelegt ist[4]. Sie geht lediglich von der Annahme aus, daß die in Rede stehenden Wirkungen im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernungen stattfinden, und daß es folglich ein erdmagnetisches Potential gibt, dessen allgemeine Darstellung der wesentliche Teil des Problems ist. Die Umgebung der Erde, und insbesondere der Raum, wo wir unsere erdmganetischen Beobachtungen anstellen, ist das erdmagnetische Feld, es ist durchsetzt von den Flächen gleichen Potentials, und die Schnitte dieser Flächen mit der Erdoberfläche sind die Niveaulinien oder magnetischen Gleichgewichtslinien; auf ihnen stehen die Kraftlinien oder magnetischen Meridiane senkrecht. Die Schnittlinie der Fläche vom Potential null mit der Erdoberfläche ist der magnetische Äquator, oben (S. 485) im Gegensatz zu der in der Praxis meist sogenannten Linie (dem Inklinationsäquator) als Potentialäquator bezeichnet. Ein Punkt, in welchem eine Niveaufläche die Erdoberfläche berührt, wo also das Potential auf dieser ein Maximum oder Minimum und die Kraft vertikal gerichtet ist, ist ein magnetischer Pol, und es könnte vom theoretischen Standpunkte aus natürlich viele solche Pole geben, wobei dann die eigentümliche Erscheinung eintreten würde, daß zwischen zwei gleichnamigen

[1] M. FARADAY, Exp. Unterr. über Elektr. Bd. 1. — [2] Vgl. J. B. BIOT, Traité de phys. 1816. Vol. 3. 139. — G. B. AIRY, Über den Magnetismus. S. 78. — [3] CH. HANSTEEN, Unters. über den Magnetismus der Erde. Christiania 1816. — [4] C. F. GAUSS, Allg. Theorie des Erdmagnetismus (1840), Werke, Bd. 5, S. 119.

Polen immer noch ein Punkt liegen würde, in welchem (vgl. Art. Magnetismus) das Potential in einer Richtung ein Maximum, in der darauf senkrechten ein Minimum wäre, und den man als „falschen Pol" bezeichnen könnte. Tatsächlich sind derartige Fälle nicht, wie man früher auf Grund ungenauer Kenntnisse vielfach annahm, verwirklicht; die Erde besitzt vielmehr, von ganz lokalen Erscheinungen abgesehen, nur einen Nordpol und einen Südpol ihres Magnetismus.

Nennt man das erdmagnetische Potential $V$, die Kraft $F$ und ihre Komponenten nach Norden, nach Osten und nach dem Zenit $X$, $Y$, $Z$, so hat man die Formeln:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad H = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\operatorname{tang} D = \frac{Y}{X}, \quad I = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Ferner ist die Änderung des Potentials auf einer Kurve, deren Element $ds$ mit der Kraftrichtung den Winkel $\vartheta$ einschließt,

$$V - V_0 = \int F \cos\vartheta \, ds,$$

und speziell auf der Erdoberfläche, wenn man statt $\vartheta$ den Winkel $t$ des Elementes $ds$ mit $H$, also $\cos t = \cos\vartheta / \cos I$ einführt und die Beziehung $H = F \cos I$ benutzt,

$$V - V_0 = \int H \cos t \, ds.$$

Von dem Wege ist dieses Integral hiernach unabhängig, und für einen geschlossenen Weg ist es null. Wendet man dies auf ein Polygon, z. B. ein Dreieck an, so folgt, daß man, wenn man für die drei Eckpunkte die (mit $t$ in einem leicht ersichtlichen Zusammenhange stehende) Deklination $D$ und für zwei von ihnen $H$ kennt, $H$ für den dritten Eckpunkt berechnen kann — eine Berechnung, welche für das Dreieck Göttingen—Mailand—Paris zu einer sehr befriedigenden Übereinstimmung mit der Beobachtung führt.

Auf der Erdoberfläche ist $V$ eine Funktion der geographischen Länge $\lambda$ und der Poldistanz (Komplement der geographischen Breite) $u$. Für die genauere Untersuchung müßte man die Erde als Ellipsoid mit dem äquatorialen Radius $a$ und der Exzentrizität $\varepsilon$ betrachten; die Formeln für $X$ und $Y$ würden alsdann lauten:

$$X = -\frac{[1 - \varepsilon(2 - \varepsilon)\cos^2 u]^{3/2}}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$Y = -\sqrt{1 - \varepsilon(2 - \varepsilon)\cos^2 u} \, \frac{1}{a \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Die erdmagnetischen Beobachtungen waren aber zu Gauss' Zeit und sind zum Teil auch heute noch nicht annähernd so fein durchgeführt, daß es nicht genügte, die Erde als Kugel zu betrachten und folglich

$$X = -\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial u}, \quad Y = -\frac{1}{a \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}$$

zu setzen. Zwischen $X$ und $Y$ besteht des weiteren die Beziehung

$$Y = \frac{1}{\sin u} \int_0^u \frac{\partial X}{\partial \lambda} du,$$

woraus der merkwürdige Satz folgt, daß, wenn $X$ für die ganze Erdoberfläche gegeben ist, $Y$ und somit auch $H$ berechnet werden kann; umgekehrt gilt der

Satz nur mit der Modifikation, daß, wenn $Y$ für die ganze Erdoberfläche und $X$ für irgend einen Meridian gegeben ist, $X$ und somit auch $H$ für die ganze Erdoberfläche berechnet werden kann.

Die Darstellung von $V$ erfolgt naturgemäß durch Kugelfunktionen. Sind $P_0$, $P_1$ usw. Funktionen von $\lambda$ und $u$, und ist $r$ die Entfernung vom Erdmittelpunkt, so hat man

$$V = \frac{a^2 P_0}{r} + \frac{a^3 P_1}{r^2} + \dots ,$$

wo jedoch $P_0$ wegen der gleichen Stärke des positiven und negativen Magnetismus in Wegfall kommt; eine zweite nach positiven Potenzen von $r$ steigende Reihe, welche hinzukommen würde, wenn nicht bloß innere, sondern auch äußere Massen wirksam wären, ist aus den obigen Gründen unterdrückt worden, und in der Tat erweist sich diese eine Reihe zur Darstellung der Haupterscheinungen fürs erste als ausreichend.

Das Potential $V$ genügt der Differentialgleichung $\Delta V = 0$, also in $r \lambda u$ der Gleichung

$$r \frac{\partial^2 (r V)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \operatorname{cotg} u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 ,$$

folglich muß allgemein $P_n$ der Gleichung

$$n(n+1) P_n + \frac{\partial^2 P_n}{\partial u^2} + \operatorname{cotg} u \frac{\partial P_n}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 P_n}{\partial \lambda^2} = 0$$

genügen, d. h. die $P_n$ sind Kugelfunktionen von der Form

$$P_n = g_{n,0} P_{n,0} + (g_{n,1} \cos\lambda + h_{n,1} \sin\lambda) P_{n,1} + \dots + (g_{n,n} \cos n\lambda + h_{n,n} \sin n\lambda) P_{n,n} ,$$

wo die $g$ und $h$ Konstanten und die $P_{n,m}$ nur noch Funktionen von $u$ sind, nämlich

$$P_{n,m} = \cos^{n-m} u - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} u$$
$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} u + \dots .$$

Es ist also $V$ für den ganzen Raum ermittelt, wenn die Konstanten $g$ und $h$ bekannt sind. Da nun für die Oberfläche

$$\frac{V}{a} = P_1 + P_2 \dots$$

ist, hierin aber die $g$ und $h$ vorkommen und $V$ für die Oberfläche bekannt ist, wenn z. B. $X$ bekannt ist (s. o.), so läßt sich die Bestimmung jener Konstanten leisten, und das Problem ist gelöst. Schließlich werden dann die Kraftkomponenten:

$$X = -\frac{a^3}{r^3} \left( \frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{a}{r} \frac{\partial P_2}{\partial u} + \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial P_3}{\partial u} + \dots \right) ,$$

$$Y = \frac{a^3}{r^3 \sin u} \left( \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \frac{a}{r} \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial P_3}{\partial \lambda} + \dots \right) ,$$

$$Z = \frac{a^3}{r^3} \left( 2 P_1 + 3 \frac{a}{r} P_2 + 4 \frac{a^2}{r^2} P_3 + \dots \right) ,$$

und speziell für die Erdoberfläche

$$X = -\left( \frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{\partial P_2}{\partial u} + \dots \right) , \quad Y = \frac{1}{\sin u} \left( \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} + \dots \right) ,$$

$$Z = 2 P_1 + 3 P_2 + 4 P_3 + \dots .$$

Hieraus folgen dann ohne weiteres die drei praktischen Größen $DIH$.

Die wirkliche Ausrechnung wird sich immerhin recht weitläufig gestalten, weil die Zahl der Glieder sehr groß ist. Es hat nämlich $P_1$ drei, $P_2$ fünf, $P_3$ sieben, $P_4$ neun Glieder; geht man also bis zu Größen vierter Ordnung, so hat man schon 24 Konstanten zu bestimmen, muß also, da jeder gegebene erdmagnetische Wert eine Gleichung liefert, mindestens für 8 Punkte der Erdoberfläche die beobachteten Werte von $DIH$ resp. die daraus berechneten von $XYZ$ zugrunde legen, in Wahrheit aber, um die unvermeidlichen Fehler auf ein geringes Maß zurückzuführen, weit mehr Punkte. Um die Rechnung zu vereinfachen, nahm Gauss als gegebene Punkte solche, welche auf Parallelkreisen in gleichen Abständen voneinander liegen. Für jeden dieser Parallelkreise kann man dann die Entwicklung

$$X = k + k_1 \cos\lambda + K_1 \sin\lambda + k_2 \cos 2\lambda + K_2 \sin 2\lambda + \ldots \quad ,$$
$$Y = l + l_1 \cos\lambda + L_1 \sin\lambda + l_2 \cos 2\lambda + L_2 \sin 2\lambda + \ldots \quad ,$$
$$Z = m + m_1 \cos\lambda + M_1 \sin\lambda + m_2 \cos 2\lambda + M_2 \sin 2\lambda + \ldots$$

bilden, erhält so viele Werte der Konstanten $klm$ usw., als Parallelkreise genommen wurden, und hat dann zur Bestimmung der $g$ und $h$ einfache Gleichungen, z. B. zur Bestimmung von $g_{1,0}$, $g_{2,0}$ usw. die Gleichungen

$$k = -g_{1,0}\frac{\partial P_{1,0}}{\partial u} - g_{2,0}\frac{\partial P_{2,0}}{\partial u} - \ldots \quad ,$$
$$m = 2 g_{1,0} P_{1,0} + 3 g_{2,0} P_{2,0} + \ldots \quad ,$$

während $l = 0$ sein muß und dadurch eine Kontrolle liefert; ganz ähnliche Gleichungen hat man für die anderen Koeffizienten; und da die Zahl dieser Gleichungen in jedem Falle größer ist als die der Koeffizienten, kann man die Methode der kleinsten Quadrate benutzen.

Gauss selbst hat die Rechnung für je 12 Punkte auf 7 Parallelkreisen durchgeführt, sie ist später wiederholt worden von Ermann und Petersen[1] für je 9 Punkte auf 10 Parallelkreisen, und zwar ebenfalls für die Epoche, auf welche sich die Gausssche Rechnung bezog (1830), dann von Quintus Icilius[2] für je 12 Punkte auf 10 Kreisen und für das Jahr 1880, endlich von Neumayer für je 72 Punkte auf 25 Parallelkreisen (also im ganzen 1800 Erdoberflächenpunkte) und zwar für 1885. Die Gaussschen und die Neumayerschen Zahlen[3] folgen hier zum Vergleiche, wobei aber zu bemerken ist, daß die Differenzen, welche die Zahlen aufweisen, großenteils auf die wirklichen Veränderungen, welche inzwischen in den erdmagnetischen Werten stattgefunden haben, zurückzuführen sind und nur zum anderen Teile der genaueren Berechnung entsprechen.

| Konstante | Gauss | Neumayer | Konstante | Gauss | Neumayer |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_{1,0}$ | +0,3235 | +0,3157 | $g_{2,2}$ | +0,0002 | −0,0057 |
| $g_{2,0}$ | −0,0077 | +0,0079 | $g_{3,2}$ | −0,0256 | −0,0279 |
| $g_{3,0}$ | −0,0066 | −0,0244 | $g_{4,2}$ | −0,0160 | −0,0198 |
| $g_{4,0}$ | −0,0380 | −0,0344 | $h_{2,2}$ | −0,0136 | −0,0126 |
| $g_{1,1}$ | +0,0311 | +0,0248 | $h_{3,2}$ | −0,0080 | −0,0004 |
| $g_{2,1}$ | −0,0506 | −0,0498 | $h_{4,2}$ | +0,0149 | +0,0071 |
| $g_{3,1}$ | +0,0430 | +0,0396 | $g_{3,3}$ | +0,0005 | −0,0033 |
| $g_{4,1}$ | −0,0533 | −0,0306 | $g_{4,3}$ | +0,0069 | +0,0068 |
| $h_{1,1}$ | −0,0625 | −0,0603 | $h_{3,3}$ | −0,0066 | −0,0055 |
| $h_{2,1}$ | −0,0021 | +0,0130 | $h_{4,3}$ | −0,0001 | +0,0051 |
| $h_{3,1}$ | +0,0167 | +0,0074 | $g_{4,4}$ | −0,0014 | −0,0008 |
| $h_{4,1}$ | +0,0224 | −0,0119 | $h_{4,4}$ | +0,0011 | +0,0010 |

[1] Ermann und Petersen, Die Grundlagen der Gaussschen Theorie. Berlin 1874.
[2] v. Quintus Icilius, Arch. d. Seewarte 1881. Nr. 2. — [3] Vgl. den Text zu Berghaus' Atlas.

Die vollständigen Werte von $V/a$, $X$, $Y$, $Z$ lassen sich nun leicht hinschreiben, sie sind aber zu vielgliedrig, um hier Platz finden zu können. Das magnetische Moment der Erde ergibt sich aus der GAUSSschen Rechnung zu $0{,}33092\,a^3 = 8{,}584 \cdot 10^{25}$, aus der NEUMAYERschen zu $0{,}32237\,a^3 = 8{,}362 \cdot 10^{25}$, also um $3\%$ kleiner, wobei aber zweifelhaft bleibt, wie viel von dieser Differenz auf die Neuberechnung und wie viel auf eine wirklich eingetretene Abnahme kommt. Gegenwärtig kann man etwa setzen:

$$M = 8{,}33 \cdot 10^{25} \quad ,$$

und nach L. A. BAUER nimmt dieser Betrag jährlich um $0{,}0033 \cdot 10^{25}$ ab.

Vergleicht man die Erde mit einem künstlichen Magneten, so kann man nach ERMANN und PETERSEN sagen: Die Erde würde aus 2700 Meilen Entfernung dieselbe Wirkung ausüben wie ein gut magnetisierter Stahlstab von 500 g Gewicht aus 1 m Entfernuug; oder auch: der Radius derjenigen mit der Erde konzentrischen eisernen Kugel, welche, bis zur Sättigung magnetisiert, dieselbe Wirkung ausüben würde wie die Erde, beträgt 243 km, also $^1/_{26}$ des Erdradius. Nach GAUSS kann man auch sagen, daß bei gleichmäßiger Verteilung jedes Kubikmeter der Erde so stark magnetisch sein würde wie acht gut magnetisierte Pfundstäbe.

Als magnetische Achse der Erde, d. h. als Achse ihres größten Moments (hierzu ist nur die Kenntnis der Glieder erster Ordnung von $V$ erforderlich) ergibt sich nach NEUMAYER die Linie

von $78^0\,20'$ nördl. Br. und $292^0\,43'$ östl. L.
nach $78^0\,20'$ südl. Br. und $112^0\,43'$ östl. L.;

sie ist natürlich ein Durchmesser der Erde, was von der Verbindungslinie der Pole (s. o.) nicht gilt.

Die Werte von $D$, $I$, $H$, welche GAUSS für zahlreiche Orte berechnet und mit den beobachteten zusammengestellt hat, weisen in einzelnen Fällen erhebliche, in zahlreichen anderen Fällen geringere Abweichungen auf, die zum Teil noch auf Rechnung der damals noch nicht besonders exakten Beobachtungen, zum Teil aber auf das Konto der Theorie selbst kommen; bei $D$ kommt einmal eine Differenz von $5^0$, einigemal eine von $3^0$ vor, die übrigen sind kleiner; bei $I$ sind die höchsten Unterschiede 4 bis $5^0$, bei $H$ kommt einigemal eine Differenz von $8\%$ des Wertes vor, solche von 3 bis $6\%$ sind ziemlich häufig. Bei der NEUMAYERschen Berechnung sind die Differenzen, entsprechend der größeren Anzahl von Grundpunkten, zwar kleiner, aber nicht in dem zu erwartenden Maße.

Endlich sei noch auf eine besondere Größe hingewiesen, nämlich auf die Dichte der GAUSSschen idealen Oberflächenverteilung wirksamer Massen. Sie ist durch die Formel

$$D = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{V}{a} - 2Z\right) = -\frac{1}{4\pi}(3P_1 + 5P_2 + \ldots)$$

gegeben, wo zur Reduktion auf absolutes Maß noch mit 0,000349 zu multiplizieren ist; sie hat nach GAUSS auf der nördlichen Halbkugel zwei, auf der südlichen aber nur ein Maximum (resp. Minimum). Auch diese Größe kann man durch Kurven gleicher Werte zur Anschauung bringen und erhält dann den Gleichgewichtslinien ähnliche, aber meist stärker gekrümmte Kurven.

**Theorie von ADOLF SCHMIDT**[1]. Der Umstand, daß die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung in neuerer Zeit sich kaum noch verringert haben, hat SCHMIDT veranlaßt, die GAUSSsche Theorie einer Vervollkommnung zu unterziehen, und zwar nach folgenden Richtungen:

[1] AD. SCHMIDT, Abhdlgn. Bayr. Akad., math.-phys. Klasse 19. I. 1895 (erschienen 1899).

1. **Berücksichtigung der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt.** Bedeutet $a$ den äquatorialen, $b$ den polaren Erdradius, $u$ die geographische, $v$ die geozentrische Poldistanz, so gelten die Formeln

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad , \qquad \operatorname{tg} v = \sqrt{1 + \varepsilon^2}\operatorname{tg} u \quad ,$$

wo $\varepsilon$ die Exzentrizität ist; und es treten dann an die Stelle der Komponenten $XYZ$ die neuen

$$\bar{X} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 v}\, X = \alpha X \ , \qquad \bar{Y} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}\, Y = \beta Y \quad ,$$

$$\bar{Z} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2 v}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} Z = \gamma Z \quad ,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Verhältniszahlen sind, nach denen sich eben diese Kräfte durch Berücksichtigung der Erdabplattung ändern.

2. **Bessere Weiterführung der Reihen.** Damit ist also nicht Weiterführung an sich gemeint; es wird vielmehr gezeigt, daß die entsprechenden Glieder der verschiedenen $P$ nicht von gleicher Größenordnung sind, und es werden deshalb statt der $P$ gewisse vielfache von ihnen, die Größen $R$, eingeführt, bei denen das der Fall ist, bei denen man also jetzt von allen Reihen gleich viel Glieder nehmen darf, ohne zu viel oder zu wenig zu nehmen befürchten zu müssen.

3. **Aufgabe der Annahme, daß die Gesamtkraft in der Erdoberfläche ein Potential habe.** Es wird vielmehr folgendermaßen verfahren. Aus den beobachteten Elementen für möglichst zahlreiche Orte sind $X$, $Y$, $Z$ und hieraus die — übrigens nur wenig abweichenden — sphäroidalen Größen $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ zu berechnen. Dann werden die Größen $\bar{X}\sin v$, $\bar{Y}\sin v$, $\bar{Z}$ durch Reihen dargestellt, die nach Kugelfunktionen von $v$ bzw. $\lambda$ (Länge) fortschreiten. Schließlich werden die Größen

$$U = \int_0^v \bar{X}\,dv \quad ,$$

$$W = \psi(v) - \int_0^\lambda \bar{Y} \sin v\, d\lambda$$

gebildet, wo $\psi(v)$ der von $\lambda$ unabhängige Teil von $W$ ist. Stellt sich nun heraus, daß diese beiden Größen identisch sind, so repräsentieren sie, mit $b$ multipliziert, das Potential:

$$V = bU = bW \quad .$$

Sind sie aber voneinander verschieden, so gibt es einen Teil von Kräften, die kein Potential besitzen, es müssen also elektrische Ströme senkrecht durch die Erdoberfläche hindurchgehen, und ihre Dichte muß $W - U$ sein. In welcher Weise diese Ströme innerhalb und außerhalb der Erde geschlossen sind, bleibt freilich unbestimmt, und damit auch der Anteil, den sie an den Werten von $U$ und $W$, also auch von $\bar{X}$ und $\bar{Y}$, und ferner an dem von $\bar{Z}$ haben. Hier bleibt also eine Willkürlichkeit. Es liegt nahe, über diese derart zu verfügen, daß der Anteil der Ströme möglichst gering sei, und daß insbesondere $\bar{Z}$ überhaupt nicht beeinflußt werde; es bleibt dann ein möglichst großer Teil mit Potential zurück; letzteres sei wieder $V$, die Intensität der so bestimmten Ströme sei $i$ (und $\bar{i} = \alpha\beta i$).

4. **Trennung der inneren und der äußeren Ursachen.** Hält man die eben besprochene Reihenentwicklung von $V$ mit der von $Z$ zusammen, so kann man das von äußeren von dem von inneren Agentien herrührende Potential trennen — in einer Weise, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Die beiden Teile von $V$ seien $V_a$ und $V_i$. Dabei bleibt es dahingestellt, ob diese beiden $V$ von Magneten oder elektrischen Strömen herrühren, nur müssen die letzteren

entweder ganz im inneren oder ganz im äußeren verlaufen, im Gegensatz zu den obigen Strömen, die die Erdoberfläche durchsetzen.

Die Berechnung erstreckt sich bis auf die Glieder sechster Ordnung. Als Mittelwert von $i$ ergibt sich ungefähr $1{,}7 \cdot 10^{-11}$ Ampere : qcm; auf ein Quadratmeter kommt also $^1/_6$ Mikroampere, auf ein Quadratkilometer $^1/_6$ Ampere — ein außerordentlich kleiner Betrag. Man hat deshalb diese Frage inzwischen von verschiedenen Seiten weiter bearbeitet, und zwar am einfachsten in der Weise, daß man untersuchte, ob das über eine geschlossene Kurve erstreckte Integral

$$\int H \cos\vartheta \cdot dl \quad ,$$

wo $dl$ ein Kurvenelement und $\vartheta$ der seine Richtung charakterisierende Winkel ist, gleich null oder von null verschieden sei; in jenem Falle gibt es keinen, in diesem gibt es einen die Fläche durchsetzenden Strom, und zwar von der Stärke des $4\pi^{\text{ten}}$ Teils des Integralwertes. Zuerst integrierte man über ganze Breitenkreise, dann über sphärische Trapeze, und je besser erforscht das Gebiet war, desto kleinere Werte erhielt man — für Europa (v. BEZOLD) 0,00081, für Österreich-Ungarn (LIZNAR) sogar nur 0,0000046. Man kann also sagen, daß kein sicherer Teil des erdmagnetischen Feldes von potentiallosen Ursachen herrühre, wenigstens des dauernden Feldes (s. w. u.).

Was nun die beiden $V$ betrifft, so ergibt die SCHMIDTsche Berechnung, daß auf die äußeren Ursachen ungefähr $^1/_{40}$ des ganzen Feldes kommt, also ein kleiner, aber über jeden Zweifel erhabener Teil. Schließlich wird das magnetische Moment der ganzen Erde

$$M = 8{,}348 \cdot 10^{25} \quad ,$$

also noch etwas kleiner als nach NEUMAYER; die Richtpunkte der Achse zu

$$\varphi = 78^0\,34{,}3' \,, \quad \lambda = 68^0\,30{,}6' \text{ w.} \quad ,$$

also nicht unerheblich abweichend von der NEUMAYERschen.

**Normaler und anormaler Magnetismus.** Es liegt nahe, den Versuch zu machen, das verwickelte Bild, das uns die Verteilung des Magnetismus auf der Erdoberfläche darbietet, in einfachere zu zerlegen oder auf einfachere zurückzuführen, zu denen dann sozusagen Korrektionsglieder hinzuzufügen wären. Denn aus den Tatsachen läßt sich jedenfalls so viel folgern, daß die Erde ungleichförmig magnetisiert ist; und diese Magnetisierung kann man nun darstellen als die Summe einer gleichförmigen und einer Zusatz-Magnetisierung. Der gleichförmigen müßten offenbar größte Kreise als magnetische Meridiane — in den magnetischen Polen sich schneidend — und ein auf ihnen senkrechter größter Kreis als magnetischer Äquator entsprechen, wozu dann dem letzteren parallele Kreise als Isoklinen und $H$-Isodynamen kämen. Wäre überdies die Richtung jener gleichförmigen Magnetisierung die der Erdachse, so würde das gedachte System von Kurven mit dem Gradnetz der Erde zusammenfallen. Das letztere System kann man nun offenbar in sehr einfacher Weise aus den Beobachtungen herausschälen, indem man für jeden Breitenkreis den Mittelwert der betreffenden Größe, z. B. des Potentials, bildet. Diesen Gedanken hat W. v. BEZOLD[1] durchgeführt und das erstaunlich einfache Resultat gefunden, daß der gedachte Mittelwert gleich $(g_{1,0}/a)\sin\varphi$ ist, wo $g_{1,0}$ der erste Koeffizient der ersten Kugelfunktion (S. 500), $a$ der Erdradius und $\varphi$ die Breite ist. Das besagt also: so kompliziert auch die erdmagnetische Verteilung ist, so enthält sie doch als erstes und größtes Glied einen Anteil, der gleichförmig und dessen Achse mit der Drehungsachse der Erde parallel ist. Geht man nun einen Schritt weiter und nimmt die ganze

[1] W. v. BEZOLD, Sitz.-Ber. Berl. Akad. 1895 und 1897.

erste Kugelfunktion, wie dies der amerikanische Erdmagnetiker L. A. BAUER[1] getan hat, so erhält man immer noch eine gleichförmige Verteilung, aber mit einer Achse, die gegen die Erdachse um etwa 11° geneigt ist; dabei zeigt sich, daß das magnetische Moment dieses Anteils schon fast das ganze Moment der Erde darstellt. Man kann dieses Glied den normalen Erdmagnetismus, den kleinen Rest den anormalen nennen. Man kann endlich mit v. BEZOLD wieder an die Mittelwerte für die einzelnen Breitenkreise anknüpfen und für jeden Punkt eines solchen Breitenkreises die Abweichung von jenem Mittelwerte bilden; dies ist die magnetische Anomalie des Ortes. Verbindet man dann die Orte mit gleicher Anomalie, so erhält man ein neues System von Kurven, die Isanomalen des erdmagnetischen Potentials, deren Theorie v. BEZOLD eingehend entwickelt hat. Es ist wichtig, daß man sich den Gegensatz zwischen Anomalie und anormalem Magnetismus vergegenwärtige: Anomalie ist die Abweichung von der gleichförmigen Verteilung um die Erdachse, der anormale Magnetismus ist die Abweichung von der gleichförmigen Verteilung um die magnetische Achse; oder auch: jene ist die Abweichung vom ersten Koeffizient des ersten Gliedes, dieser ist die Abweichung von dem ganzen ersten Gliede.

Die Analyse des Erdmagnetismus ist in neuester Zeit ein vielbehandeltes Problem geworden, und es ist dabei noch nicht in bezug auf alle hier in Betracht kommenden Grundfragen völlige Klärung eingetreten — man vgl. z. B. Abhandlungen von AD. SCHMIDT, v. BEZOLD und FRITZSCHE[2]. Eine sehr allgemeine Untersuchung über die Zerlegung in einfache Typen hat N. UMOW[3] veröffentlicht.

**Einfluß der Land- und Wasserverteilung.** Geht man nun daran, den Ursachen der magnetischen Anomalie nachzuspüren oder, bescheidener ausgedrückt, sich nach Symptomen umzusehen, die zur Erkenntnis jener Ursachen den Weg bahnen können, so wird man unwillkürlich daran denken, daß der Erdmagnetismus nicht die einzige Erscheinung ist, die solche Anomalien aufweist; die Größen der Meteorologie tun das in demselben Maße, wenn nicht noch stärker. Und damit werden wir auf diejenige Anomalie im Bau der Erdrinde hingewiesen, die von allen die augenfälligste ist: die Verteilung von Land und Wasser. Daß zwischen ihr und der Anordnung der magnetischen Linien ein gewisser Zusammenhang besteht, ist schon früher mehrfach bemerkt worden. So laufen manche Isogonen auf ziemlich langen Strecken der benachbarten Küstenlinie parallel (Japan, Süd-Amerika, West-Afrika). Isodynamen werden zuweilen von Küsten „abgelenkt", und in der Nähe von Inseln (Island), sowie innerhalb geschlossener Meeresbecken (Ostsee, Schwarzes Meer) finden oft ganz beträchtliche Anomalien der magnetischen Elemente statt. Die bestimmte Vermutung, daß hier ein quantitativer Zusammenhang vorliege, ausgesprochen und durch eine interessante Rechnung gestützt zu haben, ist das Verdienst MENZZERS[4], dem sich in neuester Zeit ESCHENHAGEN[5] angeschlossen hat. Denkt man sich, daß die Kontinente die magnetischen Pole, die sonst mit den Erdpolen zusammenfallen würden, nach einem gewissen Gesetz „abgelenkt" haben, so kann man ihre Lage berechnen. MENZZER findet auf diese Weise 69° nördl. Br. und 90° westl. L. für den Nordpol, resp. 76° südl. Br. und 165° östl. L. für den Südpol — Zahlen, deren Vergleichung mit den wahren immerhin zeigt, daß das Grundprinzip der Berechnung nicht durchaus von der Hand zu weisen ist; insbesondere wird es verständlich, daß die Nordpole weiter auseinander liegen als die Südpole; und es sei ferner angeführt, daß der magnetische Nordpol dem „Schwerpunkte" des europäisch-asiatischen Kontinentes gerade gegenüber, d. h. auf demselben Meridiane jenseits

---

[1] L. A. BAUER, vgl. die verschiedenen Bände von „Terrestrical Magnetismus". — [2] AD. SCHMIDT, Terr. Magn. I. 18. 1896. — W. v. BEZOLD, Sitz.-Ber. Berl. Ak. 1897. 414. — H. FRITZSCHE, St. Petersburg 1897. — [3] N. UMOW, Bull. Soc. de Moscou 1902. Nr. 1. — [4] MENZZER, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 5. 592. 1871. — [5] M. ESCHENHAGEN, Petermanns Geogr. Mitt. 1888. 142.

des geographischen Nordpoles liegt, während er in den Meridian des nordamerikanischen Schwerpunktes gerade hineinfällt.

**Einfluß der Bodengestaltung.** Ganz analog wie Kontinente im Vergleich zu Meeren beeinflussen zuweilen auch Gebirgsstöcke und Gebirgszüge im Vergleich zu Ebenen oder Tiefländern den Erdmagnetismus. Man kann diesen Einfluß in verschiedener Weise zur Anschauung bringen; einmal durch die isomagnetischen Linien, besonders die Isogonen, die nicht selten mit Gebirgszügen parallel laufen resp. sie, statt sie zu durchbrechen, in weitem Bogen umgehen (z. B. in Japan), oder endlich im Innern ringförmiger Gebirge, z. B. in Siebenbürgen, eine Schleife bilden; noch deutlicher aber durch eine graphische Darstellung der erdmagnetischen Elemente, bei welcher eine ideale Profillinie auf der Erde die Abszisse, eines jener Elemente die Ordinate ist. Zeichnet man dann über jener Abszisse auch noch die Kontur des wirklichen Profils, so findet man, wie z. B. Locke[1] im Staate New York (am Hudson), einen ganz analogen Verlauf beider Kurven: wo der Boden eben verläuft, tut es die $I$-Kurve auch, wo jene ansteigt, erhebt sich diese ebenfalls usw.

Man kann den geschilderten Einfluß der Kontinente und Gebirge als den größerer Massenkonzentration bezeichnen; inwieweit dabei eine Beziehung zu tektonisch-geologischen Verhältnissen stattfindet, wie Naumann[2] annimmt, muß dahingestellt bleiben.

**Gebirgsmagnetismus und Gesteinsmagnetismus.** In zahlreichen Fällen liegt nun aber die Ursache derartiger Einflüsse klar zutage: es ist der Magnetismus des die Oberflächenerhebungen bildenden Gesteins. Dazu gehören z. B. Magneteisenstein, Magnetkies, Granit, Gabbro, Basalt usw.; überhaupt stehen hier die plutonischen Gesteine im Gegensatz zu den neptunischen. In der Nähe solcher Gebirge und Berge hat man schon längst Abweichungen der Nadel beobachtet, und nicht selten ganz gewaltige, z. B. eine fast völlige Umkehrung der Deklinationsnadel, wobei oft ganz nahe beieinander gelegene Punkte die verschiedensten Richtungen und Intensitäten der magnetischen Kraft erkennen ließen; insbesondere hat sich auf den Gipfeln mancher Berge $H$ wesentlich größer als am Fuße derselben ergeben. Diese Erscheinung hat neuerdings O. E. Meyer[3] systematisch untersucht und sich dabei auch mit den beiden Möglichkeiten beschäftigt, welche die Erscheinung verständlich machen können. Nach der einen liegen die magnetischen Achsen der Felsmassen (von den einzelnen Steinen, die sich sehr verschieden verhalten können, abgesehen und nur das große Ganze betrachtet) horizontal, die Nordpole südlich, die Südpole nördlich, also entsprechend den Magnetpolen der Erde; nach der anderen fällt die vorherrschende Achsenrichtung des Gebirgsmagnetismus mit der Inklinationsrichtung zusammen und zwar so, daß sich die Nordpole unten, die Südpole oben befinden, also (wie bei der Induktion) umgekehrt wie bei der Erde. Beide Annahmen führen, wie man leicht sieht, zu der beobachteten Tatsache, sie führen aber andererseits auch zu gewissen entgegengesetzten Schlüssen, welche es ermöglichen, in jedem einzelnen Falle zu entscheiden, welche von beiden Vorstellungen die richtige ist. Nach der einen muß nämlich $H$ am nördlichen und südlichen Fuße des Berges kleiner sein als auf dem Gipfel oder an seinem östlichen oder westlichen Abhang, nach der anderen findet ein so einfaches Gesetz nicht statt, es wird dann vielmehr jeder der gedachten $H$-Werte hauptsächlich durch den magnetischen Zustand des unmittelbar unter dem Beobachtungsorte liegenden Gesteins bedingt sein. Beim Zobtenberg in Schlesien fanden sich z. B. folgende Relativzahlen:

[1] Locke, Smithsonian Contrib. **3**. 1. 1852. Vgl. E. Naumann, Die Erschein. d. Erdmagnetismus. Stuttgart 1887. S. 46. — [2] E. Naumann, a. a. O. Der Darlegung dieser Beziehung ist das Buch gewidmet. — An dasselbe hat sich eine längere Diskussion geknüpft. Naumann selbst scheint zuletzt einen vermittelnden Standpunkt angenommen zu haben. — [3] O. E. Meyer, Jahresb. d. schles. Ges. 1888. S. 49. — Münch. Ber. **19**. 167. 1889. — Wied. Ann. **40**. 489. 1890.

| Ort | östlich | südlich | Gipfel | westlich | nördlich |
|---|---|---|---|---|---|
| Gestein | Serpentin | Serpentin | Gabbro | Granit | Granit |
| $H$ | 1,004 | 0,988 | 1,014 | 1,013 | 1,020 |

Man hat sich also hier für die zweite Annahme zu entscheiden und — was mit unseren übrigen bezüglichen Kenntnissen übereinstimmt — anzunehmen, daß Gabbro und Granit stärker magnetisch sind als Serpentin. Auch für das Riesengebirge ist es wahrscheinlich, daß die Achse mit der Inklination zusammenfällt; und da für den Vesuv nach MELLONI, für amerikanische Berge nach LOCKE usw. das gleiche gilt, so dürfte der Gebirgsmagnetismus wohl überall im großen und ganzen das gleiche Verhalten aufweisen. Andererseits finden sich anormal schwache Werte des Magnetismus da, wo die geologische Aufnahme Hohlräume festgestellt hat (Labrador, Nordfrankreich usw.).

Vom Gebirgsmagnetismus zu trennen ist der Gesteinsmagnetismus, der einzelne Bergkegel, Felsen usw. betrifft; von den vielen Theorien desselben hat wohl jetzt, wenigstens für die Mehrzahl der Fälle, die von POCKELS und FOLGHERAITER[1] den Sieg davongetragen, wonach es sich um die Wirkung von Blitzschlägen handelt.

**Beziehungen zur Temperatur.** Auch diese sind zahlreich und zum Teil so deutlich, daß man schon frühzeitig auf sie aufmerksam wurde. So ist die südliche Halbkugel einerseits kälter, andererseits stärker magnetisch, der Inklinationspol und die Intensitätspole (s. o. S. 479 u. 480) fallen nahe mit den Kältepolen der Erde zusammen, der magnetische sowohl wie der Temperaturäquator liegen meist nördlich vom geographischen, und die Gestalt der Isodynamen weist vielfach auffallende Ähnlichkeiten mit den Isothermen auf, z. B. die skandinavische Ausbiegung nach Norden, die sibirische und nordamerikanische Einbiegung nach Süden usw. Inwieweit dieser Parallelismus zwischen Kälte und starkem Magnetismus auf irdischen oder außerirdischen Verhältnissen beruht, kann gegenwärtig noch nicht entschieden werden.

**Magnetische oder elektrische Natur des Erdmagnetismus**[2]. Auf die Frage, ob der Erdmagnetismus von Magneten oder von elektrischen Strömen herrühre, ist bisher nicht eingegangen worden; die mathematischen Theorien sind hiervon, soweit die Ströme die Erdoberfläche nicht durchsetzen, wie wir sahen, unabhängig. Es sind offenbar drei Fälle möglich: permante Magnete oder weiche Eisenmassen, die durch elektrische Ströme magnetisch erhalten werden, oder elektrische Ströme als solche. Die Annahme permanenter Magnete erweist sich bei näherem Zusehen als unhaltbar. Denn im Erdinnern kann man solche der dort herrschenden hohen Temperatur halber, bei der alle uns bekannten Stoffe die Fähigkeit, magnetisch zu werden, verlieren — vgl. Art. Beziehungen des Magnetismus zur Temperatur — nicht annehmen; auch würden sich dann die starken Anomalien an der Oberfläche nicht recht begreifen lassen. Man muß also an die Erdrinde denken, an die Schicht, in der sich der Wechsel von Land und Wasser vollzieht; diese Schicht aber besteht wiederum in der Hauptsache aus sehr schwach magnetisierbaren Substanzen. Es muß deshalb die Theorie der permanenten Magnete und — aus ähnlichen Gründen — die der temporären Magnete fallen gelassen werden, so daß nur noch die Theorie elektrischer Strö-

[1] F. POCKELS, N. Jahrb. f. Min. 1897. I. 66; daselbst findet man auch eine Übersicht über die Geschichte und das Tatsachenmaterial des Phänomens. — F. POCKELS, Wied. Ann. **63**. 195. 1897; **65**. 458. 1898. — FOLGHERAITER, in zahlreichen Abhandlungen (Rom). — Ferner Arbeiten anderer Italiener, wie KELLER, ODDONE und SELLA. — [2] Es ist unmöglich, aus den zahlreichen Arbeiten, betreffend die physikalische Theorie des Erdmagnetismus, einzelne herauszugreifen und zu zitieren; es muß deshalb auf die Fortschritte der Physik, das geogr. Jahrbuch und ähnliche Sammlungen verwiesen werden.

mungen übrig bleibt. Diese aber hat sich, wenn auch noch viel zu erklären übrig bleibt, in der letzten Zeit in befriedigender Weise konsolidiert. Erstens lehrt uns das Phänomen der Erdströme (s. w. u.), daß in der Erdrinde Ströme verlaufen können, und diese Erdströme weisen sogar einen höchst merkwürdigen Zusammenhang mit den erdmagnetischen Erscheinungen auf; zweitens zeigt eine einfache Betrachtung, daß die Ströme, die anzunehmen sind, um den Erdmagnetismus zu liefern, eine durchaus mäßige und mögliche Stärke haben dürfen; drittens aber kann man sich mit der Richtung, die man ihnen zuschreiben muß, unschwer abfinden. Um nämlich zunächst das BEZOLDsche Breitenkreis-Mittel zu erhalten, muß man jene Ströme in ostwestlicher Richtung fließend annehmen; die Anomalie kommt dann zustande, wenn man ein zweites System von Strömen hinzunimmt, das die Landmassen, entsprechend der besseren Leitfähigkeit des mit Grundwasser durchtränkten Bodens, noch besonders längs der Küstenlinien umkreist; diese Küstenströme lenken sozusagen die Ostweströme ab, und zwar, wenn man sie die Küsten gegen den Uhrzeigersinn durchlaufend denkt, derart, daß die tatsächliche Achse herauskommt; schließlich hat man nur nötig, ein bestimmtes Verhältnis zwischen den Ostwest- und den Kontinental-Strömen anzunehmen, um den Winkel von 11° zu erhalten, unter dem die magnetische gegen die Erdachse steht. Zu erörtern bleibt dann nur noch, warum diese Ströme gerade ostwestlich (bzw. gegen den Uhrzeiger) laufen, und es drängt sich dabei sofort der Gedanke an die Erddrehung auf; zugleich aber rückt nun auch die Frage heran, welchen Charakters denn diese Ströme sein sollen, ob vom Charakter der Reibungs-, der galvanischen, der thermoelektrischen, der Konvektionsströme usw. Alle diese Möglichkeiten sind diskutiert worden, gegen alle sind Bedenken erhoben worden. Am meisten Anspruch auf Beachtung verdient jedenfalls die Vorstellung, daß es sich um Verschiebungsströme handelt, und zwar um scheinbare, d. h. nur relativ gegen die Erddrehung existierende; mit anderen Worten, daß die Erde durch den ruhenden Äther hindurch rotiert, und daß der so relativ zurückbleibende Äther das Phänomen der elektrischen Ostwest- und, infolge der Widerstandsverschiedenheiten, der Gegenuhrzeiger-Strömungen erzeugt. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß nicht auch andere Ursachen mitwirken können, wie der durch jene Strömungen erzeugte Magnetismus, die luftelektrischen Strömungen, die Radio-Aktivität usw. Diese Agentien werden sich aber weniger auf den zeitlich konstanten Teil des Erdmagnetismus erstrecken, als vielmehr auf die verschiedenen, oben behandelten zeitlichen Veränderungen desselben; zu diesen müssen wir uns also noch mit einigen Worten wenden.

**Theorie der Variationen des Erdmagnetismus.** Dieses Thema ist eigentlich erst in neuester Zeit ernsthaft in Angriff genommen worden; und schon ist eine Reihe von äußerst interessanten Ergebnissen zu verzeichnen; hier kann nur auf das Wichtigste eingegangen werden, wofür die sehr übersichtliche Darstellung von NIPPOLDT[1] benutzt werden möge. Näheres findet man in den Arbeiten von W. v. BEZOLD, L. A. BAUER, A. SCHUSTER, H. FRITSCHE, v. CARLHEIM-GYLLENSKIÖLD u. a.[2]

Was zunächst die säkulare Variation betrifft, so betrachtet BAUER die Kurve, die ein Punkt der verlängerten Achse einer Magnetnadel infolge der säkularen Änderungen von $D$ und $I$ beschreibt — offenbar eine ovale Kurve, für verschiedene Orte von verschiedener Gestalt, im allgemeinen aber immer im Uhrzeigersinne durchlaufen. Andererseits erhält man ebenfalls eine Kurve, wenn man, nur das Dauerglied des Erdmagnetismus berücksichtigend, die Nadel längs

[1] A. NIPPOLDT, Erdmagnetismus usw. S. 54ff. — [2] W. v. BEZOLD, Sitz.-Ber. Berl. Akad. 1897 (2. Teil). — L. A. BAUER, Terr. Magn. 1897ff. Vgl. auch seine Inaug.-Diss. Berlin 1895. — A. SCHUSTER, Trans. Lond. Soc. 1889. — Rep. Brit. Ass. 1894. 571. — H. FRITSCHE, Die tägliche Periode usw. Petersb. 1902. — v. CARLHEIM-GYLLENSKIÖLD, Stockholm Observ. **5**, Heft 5. 1896.

eines Breitenkreises herumführt. Das interessante Ergebnis ist nun, daß diese beiden Kurven fast übereinstimmen. Die säkulare Variation kommt also dadurch zustande, daß das Dauerfeld um die Erde herumwandert. Will man näher hierauf eingehen, so muß man aus den säkularen Beobachtungen die zeitliche Änderung der GAUSSschen Koeffizienten berechnen; man findet dann, daß die Sache nicht ganz so einfach ist, daß vielmehr eine Zerlegung des Dauermagnetismus erforderlich ist in Anteile, die mit verschiedener Geschwindigkeit rotieren; die kürzeste Periode beträgt 300, die längste 3100 Jahre. Warum nun eine solche Rotation stattfindet, ist eine Frage für sich; am einfachsten ist die Annahme, daß die magnetische Achse um die Erdachse rotiert; es kann aber hierüber noch nichts Entscheidendes gesagt werden.

Wir kommen nun zu der täglichen Variation; diese kann man sich als ein periodisches, dem Dauerfelde übergelagertes Feld denken. Wenn man nun die Komponenten dieses Feldes, die man etwa mit $X'$, $Y'$, $Z'$ bezeichnen kann, als Funktionen der Zeit in der Form von FOURIERschen Reihen (mit cos und sin) und deren Koeffizienten ihrerseits als FOURIERsche Reihen der geographischen Breite (wieder mit cos und sin) darstellt, so erhält man eine harmonische Analyse des Verlaufes der betreffenden Variation. Es ergibt sich nun, wie BEZOLD gezeigt hat, eine Reihe von merkwürdigen Zusammenhängen, derart, daß man aus dem Verhalten einer Komponente das der anderen berechnen kann. Ferner lassen sich, die Existenz eines Potentials der Größen $X'$, $Y'$, $Z'$ angenommen, die inneren und die äußeren Kräfte voneinander trennen; und SCHUSTER hat nachgewesen, daß — umgekehrt wie bei dem Dauerfelde — hier der Hauptanteil auf die äußeren Kräfte entfällt. Schließlich kann man aus dieser Theorie das Potential $v'$ der täglichen Variation berechnen und kartographisch durch die Linien gleichen Potentials $V'$ veranschaulichen (FRITSCHE). Die Darstellung gilt aber nur für einen bestimmten Zeitpunkt, weil das in Rede stehende Kurvensystem, im Gegensatz zu allen früheren, nicht auf der Erdoberfläche, sondern im Weltraum fest ist. Es besteht im wesentlichen aus einigen Systemen geschlossener Kurven, die man sich, wenn man die Theorie der elektrischen Ströme zugrunde legt, als Stromwirbel vorzustellen hat; um die negativen Pole wirbeln die Ströme im Uhrzeigersinne, um die positiven entgegengesetzt. Der kräftigste positive Pol liegt unter 30° Breite und 30° westlich von dem Punkte, der gerade Mittag hat. Nach alledem dürfte es kaum noch einem Zweifel unterliegen, daß man sich als Ursache der täglichen Schwankungen elektrische Strömungen in der Atmosphäre, besonders in deren besser leitenden oberen Schichten, vorzustellen hat; eine Annahme, durch die die magnetischen Vorgänge in einen sehr einfachen Parallelismus mit den entsprechenden meteorologischen gebracht werden. Dieser Parallelismus erfährt übrigens, was gleich hier mit erledigt werden möge, eine weitere sehr schöne Ausdehnung, wenn man mit AD. SCHMIDT[1] auch die magnetischen Störungen, wenigstens die kräftigen, auf wandernde elektrische Stromwirbel, analog den Luftwirbeln (Zyklonen), zurückführt, wodurch der ihnen längst beigelegte Name „magnetische Gewitter“ oder „Ungewitter“ eine tiefere Bedeutung erhalten würde.

Die jährlichen Variationen, sowohl die der Werte wie die der täglichen Amplitude, sind ähnlich behandelt worden; es muß aber an diesem Hinweise genügen (s. auch w. u.).

**Einfluß der Sonne.** Daß zwischen dem Stande der Sonne und den Variationen des Magnetismus ein Zusammenhang besteht, kann keinem Zweifel unterliegen; das zeigt schon die Existenz der jährlichen und der täglichen Periode, die Phase dieser letzteren und die Tatsache, daß die täglichen Schwankungen am Tage stärker als in der Nacht, im Sommer stärker als im Winter sind. Nur

[1] ADOLF SCHMIDT, Meteor. Z. 1899. 385.



darf man nicht mehr annehmen, daß es sich hier um eine Wirkung eines Sonnenmagnetismus handle; dazu sind die Schwankungen viel zu groß. Es wäre nämlich das Verhältnis der Sonnenwirkung $S$ zur Erdwirkung unter den günstigsten Verhältnissen durch die Formel

$$\frac{S}{E} = \frac{1}{4} \frac{M_s}{M_e} \left(\frac{2\,r}{d}\right)^3$$

bestimmt, wo $M_s$ und $M_e$ die Magnetisierungsintensitäten von Sonne und Erde sind, $r$ der Radius der Sonne und $d$ ihr Abstand von der Erde ist; die Ausrechnung ergibt, wenn $M_s = M_e$ gesetzt wird, $S/E$ rund zu $2 \cdot 10^{-7}$, woraus ein Einfluß auf die Deklination im Betrage einer zwanzigstel Sekunde, also eine ganz unmerkliche Änderung folgen würde, während sie tatsächlich oft 10 Minuten und mehr beträgt. Um eine solche zu erzeugen, müßte die Sonne 12000 mal so stark magnetisiert sein (wohl verstanden auf die Raumeinheit) wie die Erde, also stärker, als wenn sie gänzlich aus bestmagnetisiertem Stahl bestände. Der Einfluß der Sonne ist also ein indirekter, und es liegt am nächsten, der Wärmestrahlung die vermittelnde Rolle zuzuschreiben, aber auch dieser nur eine indirekte, insofern mit den durch die Wärmestrahlung erzeugten Luftströmungen die oben erwähnten elektrischen Strömungen in der Atmosphäre Hand in Hand gehen. Etwas anders liegt die Sache hinsichtlich der elfjährigen Periode, also hinsichtlich des Einflusses der Häufigkeit der Sonnenflecke. Allerdings steht ja fest, daß diese auch die Wärmestrahlung beeinflußt; aber darüber hinaus besteht eine ganz direkte Wirkung eines einzelnen Flecken, wie sie zuerst 1859 von CARRINGTON und seitdem häufig beobachtet worden ist: zu der Zeit, wo ein Fleck oder vielmehr die Fackel den Meridian passiert, tritt das Maximum der Störung ein. Die Fackeln aber strahlen nach den heutigen Anschauungen direkt Elektrizität aus, und ein Teil dieser Teilchen gelangt bis auf die Erde. Verfolgt man dies näher, so findet man Verständnis nicht nur für die tägliche, sondern auch für die 26 tägige Periode (Sonnenrotation), sowie für die Bedeutung der die Erdoberfläche durchsetzenden, oben erwähnten elektrischen Vertikalströme; die Frage, inwieweit hierbei die normale Luftelektrizität und die Radioaktivität eine Rolle spielt, ist noch nicht geklärt[1].

Übrigens steht es gegenwärtig fest, daß auch der Mond und die Planeten Einfluß ausüben. In bezug auf den ersteren kommen verschiedene Perioden in Betracht, und es ergibt sich, daß das Bild dieser Einflüsse ganz ähnlich ist wie das Bild des Mondeinflusses auf die Gezeiten, derart, daß man geradezu an eine Wirkung auf die Erdrinde gedacht hat.

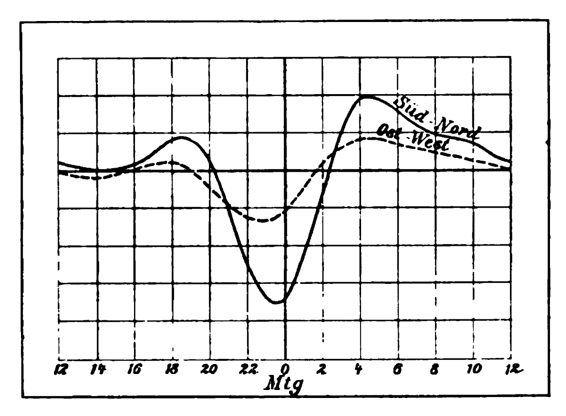
## Erdströme.

Bald nachdem sich herausgestellt hatte, daß es zum Telegraphieren mittels elektrischer Ströme eines Rückleitungsdrahtes nicht bedarf, daß vielmehr die Erde selbst diese Rückleitung übernimmt, wurde die Frage aufgeworfen, ob nicht auch spontan in der Erde Ströme entstehen, und schon BARLOW konnte diese Frage im bejahenden Sinne entscheiden, indem er einen Erdstrom nachwies. Die erste eingehende Untersuchung über diesen Gegenstand stellte LAMONT an, es folgten dann zahlreiche weitere Experimentalreihen. Wenn trotzdem aus diesen Beobachtungen keine brauchbaren allgemeinen Resultate zu ziehen sind, liegt das an der Komplikation der Erscheinung und den störenden Nebeneinflüssen.

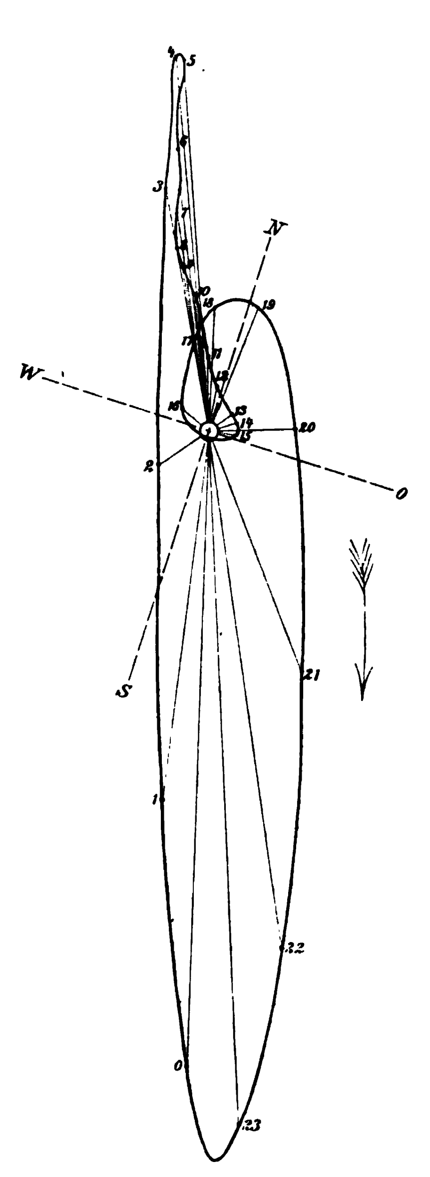
[1] Man vgl. noch Arbeiten von MELANDER (Acf. Soc. Fenn. **20**. 1900) über den Einfluß der Bestrahlung und von L. A. BAUER (Terr. Magn. 7. 155. 1902) über die Wirkung totaler Sonnenfinsternis. Es ergibt sich das höchst interessante Resultat, daß die Wirkung ganz analog der täglichen Variation ist, sich aber quantitativ zu ihr verhält wie die Mondfläche zur Erdfläche.

Namentlich sind Temperatureinflüsse, die Kontaktdifferenz der Erdplatten, zwischen denen der Strom zirkuliert, ihre Verbindung mit der Erde, der sogenannte Plattenstrom, die Polarisation, die atmosphärische Elektrizität usw. von wesentlicher Bedeutung. Erst neuerdings hat man es mehr oder weniger verstanden, geeignete Anordnungen zu treffen, um aus der am Galvanometer oder dem es ersetzenden Beobachtungsinstrumente gemachten Ablesung wenigstens einigermaßen wahrscheinliche Schlüsse auf die Vorgänge in der Erde ziehen zu können. In dieser Hinsicht sind namentlich die Untersuchungen von SCHERING, WEINSTEIN, der deutschen Telegraphendirektion, dem Observatorium in Kew, endlich von BRANDER in Finnland und BATTELLI in Italien zu nennen.

Hiernach steht zunächst so viel fest, daß ohne Unterlaß Ströme durch den Beobachtungskreis hindurchfließen; sie sind meist schwach, zuweilen stärker und weisen überdies fortwährende Schwankungen auf. Nun kann man aus diesem Gewirr einen konstanten Teil herausschälen, und dieser zeigt ein Verhalten, das den Schluß nahelegt: der konstante Strom sei gar kein Erdstrom, sondern ein galvanischer oder sonstwie erzeugter Plattenstrom; wenigstens zum weitaus größten Teile. Läßt man daher diesen Teil ganz weg, so bleibt nur noch der variable Strom übrig, von dem man freilich auch nicht sagen kann, ob er nicht einen




Figur 213.




Figur 214.

fremden Anteil einschließt — denn der Plattenstrom könnte ja außer seinem konstanten auch einen variablen Teil haben. Indessen hindert das die Analyse des eigentlichen Erdstroms nicht wesentlich. Diese Analyse ergibt nun im wesentlichen, daß der Erdstrom ganz ähnliche Periodizität bezitzt wie die erdmagnetischen Elemente. Die wichtigste Periode ist die tägliche; sie ist in Figur 213 nach WEINSTEIN dargestellt, und zwar für einen Süd-Nord-Strom (Linie Berlin-

Dresden) und für einen Ost-West-Strom (Linie Berlin-Thorn). Wie man sieht, ist die Schwankung für den Süd-Nord-Strom stärker als für den Ost-West-Strom, der Gang aber für beide ganz entsprechend. Maxima nach der einen Seite finden morgens und nachmittags, ein Maximum nach der anderen Seite findet kurz vor Mittag statt. In den vier Jahren 1884 bis 1887, aus denen in unserer Figur die Mittel gebildet sind, hat sich an der Gestalt nichts erhebliches geändert, die Amplitude ist aber kleiner geworden. Ferner sind die Kurven je nach der Jahreszeit verschieden, im Sommer ist die Amplitude am größten, im Winter am kleinsten. Besonders anschaulich ist auch hier die Darstellung durch Vektordiagramme; ein solches ist, der Figur 211 entsprechend, in Figur 214 wiedergegeben. Eine eingehende Analyse zahlreicher derartiger Kurven und Vektordiagramme findet man in dem Werke von WEINSTEIN. Im einzelnen liegen die Verhältnisse, z. B. die Beziehung der Rosette zur Sonnenbahn, hier nicht so einfach wie beim Erdmagnetismus. Eine Durchschnitts- oder vorherrschende Richtung des Erdstroms anzugeben, dürfte hiernach ebenfalls mißlich sein; vielfach wird als solche SW bis NO angegeben. Dagegen ist es von Interesse, daß in Leitungen, die nicht horizontal verlaufen, die Erdströme stets nach oben fließen. Was endlich die Intensität und die Spannung der Erdströme betrifft, so widersprechen sich die Angaben zum Teil in außerordentlichem Maße, auch wo es sich um dieselbe Epoche handelt; es spielt eben hier die räumliche Ausbreitung der Ströme, der Widerstand der Schließung und mancherlei anderes eine große Rolle. Außerdem schwankt die Stärke der Ströme tatsächlich in sehr weiten Grenzen; und zu gewissen Zeiten kann man geradezu, wie beim Magnetismus, von Störungen sprechen. So waren die Erdströme z. B. in der Woche vom 28. August bis 4. September 1859 so stark, daß in Deutschland 100 Elemente zu ihrer Kompensation noch nicht hinreichten.

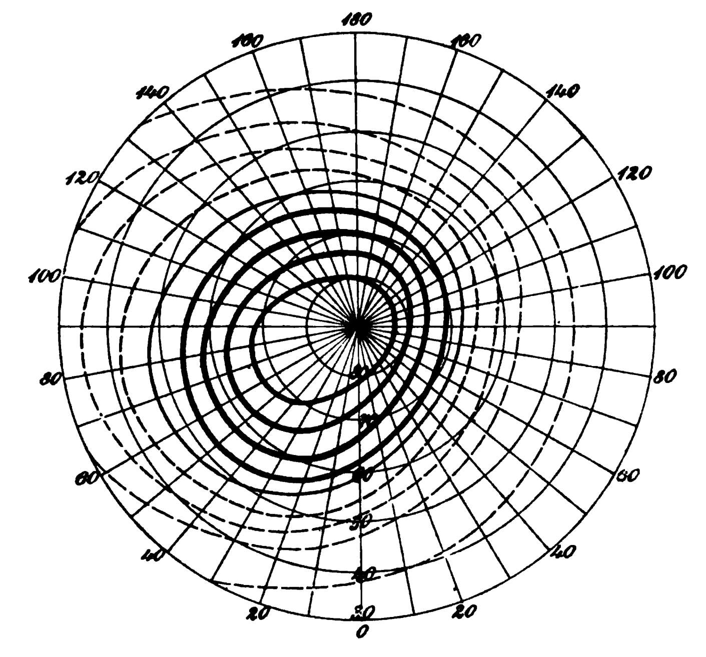
Nach alledem kann es keinem Zweifel unterliegen, daß zwischen den beiden Phänomenen — Erdstrom und Erdmagnetismus — eine Beziehung besteht; es frägt sich nur, welche der beiden Erscheinungen man als primär, welche als sekundär betrachten soll. Es würde zu weit führen, hier die Gründe zu diskutieren, die für die primäre Rolle der Erdströme sprechen; bei WEINSTEIN werden sie ausführlich dargelegt. So viel aber ist klar, daß wir damit die schon ohnehin für den Erdmagnetismus aufgestellten Hypothesen auf eine tatsächliche Basis stellen, indem wir die in der Erde verlaufenden, ihr scheinbaren Magnetismus erteilenden Ströme nunmehr wirklich kennen. Der Versuch freilich, diese Auffassung quantitativ durch die Berechnung der möglichen magnetischen Wirkung der Erdströme zu erhärten, scheitert daran, daß diese Wirkung ganz wesentlich auch von der von den Strömen umkreisten Fläche abhängt, und daß wir über diese Fläche gar nichts sicheres wissen. Auch ist schließlich noch zweierlei zu betonen: erstens, daß man sich hier Ursache und Wirkung nicht allzuschroff gegenüberstehend denken darf, daß vielmehr wahrscheinlich eine gegenseitige Steigerung beider Phänomene aus an sich kleinen Beträgen heraus anzunehmen ist; und zweitens, daß die Erdströme nur den inneren Teil der Agentien zum Ausdruck bringen, denen wir nun noch den äußeren zur Seite stellen müssen. Das führt uns auf den letzten Punkt unserer Betrachtung.

## Polarlicht.

In bezug auf das Tatsächliche dieser Erscheinung muß auf die zahlreiche Literatur[1], sowie auf Bd. 4, S. 723, wo sie vom luftelektrischen Standpunkte be-

[1] Vgl. z. B. MUNCKE in GEHLERS Wörterbuch Bd. 7, S. 113. — H. FRITZ, Das Polarlicht. Leipzig 1881. — LEMSTRÖM, Arch. de Gen. 54, 55 usw. — UNTERWEGER, Wien. Denkschr. 1885. — Eine sehr übersichtliche Darstellung der Erscheinung und der Theorie gibt B. WEINSTEIN in: Himmel und Erde 1889/90, S. 234 u. 360, 1890/91, S. 101 u. 540.

handelt ist, verwiesen werden; hier sei nur erwähnt, daß das Polarlicht eine meist sanfte, aber durch ihre Größe und Mannigfaltigkeit imponierende Lichterscheinung ist, welche am nördlichen oder südlichen Himmel auftritt und deshalb auch Nordlicht bzw. Südlicht genannt wird. Ihre Beziehung zum Erdmagnetismus, die uns hier allein interessiert, ist eine durchgehende. Die geometrische Achse der Erscheinung, falls eine solche sich konstruieren läßt, stimmt mit der Richtung der Inklinationsnadel überein, die Ebene, in der sich die Erscheinung aufrollt, ist meist senkrecht zum magnetischen Meridian, und wenn die Strahlen des Lichtes hinreichend ausgebildet sind, so vereinigen sie sich nahe dem Punkte, nach welchem das obere Ende der freien Magnetnadel zeigt. Das Auftreten des Lichtes fällt mit den magnetischen Störungen zusammen, wobei ein Parallelismus in der Intensität beider Erscheinungen stattfindet und fast stets selbst dann, wenn




Figur 215.

an einem Orte nur eine Störung, aber kein Licht auftritt, geschlossen werden kann, daß letzteres irgendwo anders sichtbar geworden ist. Die Häufigkeit der Polarlichter endlich unterliegt bestimmten örtlichen und zeitlichen Gesetzen.

Die örtliche Häufigkeit ist wie die Totalintensität des Erdmagnetismus am Äquator am kleinsten und zwar gleich null, selbst noch bis zu 10° beiderseitiger Breite sind Polarlichter nicht beobachtet worden; nach Norden und Süden hin nimmt dann die Häufigkeit erst langsam, später rapide zu, erreicht aber schon weit vor den Polen das Maximum, um dann sehr rasch wieder abzunehmen. So sind beispielsweise in Italien durchschnittlich jährlich 0,1, in Deutschland 1 bis 5, in Dänemark 10, in Schweden und Norwegen 20 bis 100 Polarlichter zu sehen, in Spitzbergen aber wieder viel weniger; bei gleicher Breite haben ferner die amerikanischen Orte meist einen viel größeren Reichtum an Polarlichtern als die europäischen oder gar die asiatischen, und in Labrador z. B. vergehen in manchen Jahren nur wenige Nächte ohne Polarlicht. Die Linien, welche Punkte verbinden, in denen durchschnittlich gleich viele Polarlichter im Jahre auftreten, heißen Isochasmen, sie sind in Figur 215 dargestellt und verraten eine ganz ent-

schiedene Ähnlichkeit mit den Isoklinen und Isodynamen. Die Linie größter Häufigkeit geht durch Alaska, die Hudsonbai, zwischen Island und Schottland hindurch, schneidet etwa das Nordkap und Nowaja Semlja und zieht sich dann nördlich der sibirischen Küste hin. Ein wenig nördlich von dieser Linie läuft ein anderer Streifen hin, welchen man die neutrale Zone nennt, und der die Eigenschaft hat, daß in ihm die Polarlichter ebensooft als Nordlicht wie als Südlicht auftreten, südlich von ihr dagegen überwiegend (und weiter südlich ausschließlich) als Nordlicht, nördlich von ihr überwiegend als Südlicht. Das Zentrum der Isochasmen ist natürlich schwer zu bestimmen, und es kann daher auch nicht als sicher gelten, daß es, wie NORDENSKJÖLD meint, eine nicht unbeträchtliche Entfernung vom magnetischen Pole habe.

In zeitlicher Hinsicht ist das Polarlicht eine Erscheinung mit zahlreichen Perioden, verhält sich also ebenfalls ganz wie der Erdmagnetismus. Die bisher am deutlichsten erkannten Perioden sind die 11jährige, die also mit der der Sonnenflecke und der magnetischen Störungen übereinstimmt, die jährige, wonach die Nordlichter im Winter entschieden häufiger sind als im Sommer, die halbjährige, jedoch nur in mittleren Breiten deutlich ausgeprägte (größte Häufigkeit zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen, kleinste zur Zeit der Sonnenwenden), eine Mondperiode und endlich eine tägliche Periode (Maximum zwischen 8 und 10 Uhr abends, Minimum 11 Uhr vormittags). Die wichtigste zeitliche Eigentümlichkeit der Polarlichter ist und bleibt aber ihr Zusammentreffen mit den magnetischen Störungen. Sie treten damit ebenso wie die Erdströme in einen offenbaren ursächlichen Zusammenhang mit den erdmagnetischen Erscheinungen überhaupt.

**Theorie des Polarlichtes**[1]. Daß das Polarlicht eine elektrische Erscheinung sei, wurde schon zu der Zeit, da man sich überhaupt wissenschaftlich mit der Elektrizität zu befassen anfing, erkannt und läßt sich gegenwärtig nicht mehr bezweifeln. Es frägt sich nur: erstens, woher diese Elektrizität stammt, und zweitens, welcher Art der elektrische Vorgang sei. In ersterer Hinsicht hat man früher vielfach an die Erde gedacht, sei es an ihr Inneres oder an ihre feste oder flüssige Oberfläche, sei es endlich an ihre Lufthülle. Am bekanntesten von diesen Theorien ist wohl die von DE LA RIVE geworden, wonach die mit den Luftströmungen fortgeführte atmosphärische Elektrizität sich, wenn die Spannung ein gewisses Maß erreicht, entlädt, und zwar entweder in der Form von Gewittern oder in der von Polarlichtern — jenes mehr in mäßigen, dieses mehr in hohen Breiten; in der Tat ergänzen sich beide Erscheinungen örtlich und zeitlich in ihrer Häufigkeit, jene nehmen mit zunehmenden Sonnenflecken ab, diese zu. Indessen bleibt doch, neben manchem anderen, der Gegensatz bestehen, daß die Gewitter sich in sehr geringen, die Polarlichter in sehr großen Höhen abspielen; und dadurch ist man immer mehr dazu gedrängt worden, den Ursprung in der Sonne zu suchen. Namentlich war es SIEMENS, der diese Hypothese in den Vordergrund stellte und durch die auffallenden Beziehungen der Polarlichter zu den Vorgängen auf der Sonne begründete.

Was andererseits die Natur des elektrischen Vorgangs betrifft, um den es sich hier handeln soll, so spiegelt sich in der Reihe der aufgestellten Hypothesen die ganze Geschichte unserer Kenntnis und Auffassung der elektrischen Erscheinungen wieder. Alle Formen dieser Erscheinungen sind herangezogen worden, und für jede sind gewichtige Gründe beigebracht worden. Zuerst spielte die Entladungslehre die führende Rolle, und zwar anfangs die Annahme gewaltsamer, später die dem Charakter des Phänomens mehr gerecht werdende Annahme

[1] Es ist unmöglich, die Literatur über die Theorie des Polarlichtes, seine künstliche Nachahmung und seine Beziehung zum Erdmagnetismus auch nur auszugsweise anzugeben. Es sei daher auf GÜNTHERS Lehrb. d. Geophysik, 2. Aufl., sowie auf die Zeitschriften verwiesen. Hervorzuheben sind die Arbeiten von DE LA RIVE, EDLUND, BIRKELAND, LEMSTRÖM, PAULSEN, EBERT, WEINSTEIN u. a.

sanfter Entladungen; dann dachte man, gestützt auf die Leitfähigkeit der höheren Schichten, auch an wirkliche elektrische Ströme; dann wurde die Erscheinung auf elektromagnetische Wellen begründet; zurzeit erfreut sich die Kathodenstrahl-Theorie der größten Anerkennung; und die Lehre von der Radioaktivität wird auch hier vermutlich noch eingreifen. Nur auf einige dieser Theorien kann hier mit ein paar Worten eingegangen werden. Bemerkt sei, daß für einige dieser Theorien auch experimentelle Stützen beigebracht worden sind; so haben EBERT und BIRKELAND Laboratoriumsversuche, LEMSTRÖM u. a. künstliche Darstellungen im großen versucht.

Von den Entladungstheorien dürften die von EDLUND und LEMSTRÖM, die sich nur durch einen gewissen Gegensatz in der Richtung der sich abspielenden Prozesse unterscheiden, ein besonderes Interesse beanspruchen, zumal da es dem letzteren gelungen ist, in Lappland durch geeignete Vorrichtungen künstliche Nordlichter in größerem Maßstabe zu erzeugen. Hiernach ist die Luft zwar in den unteren Schichten der Atmosphäre ein Isolator, in den oberen aber ein Leiter, so daß man sich gewissermaßen die Erdkugel von einer durch eine isolierende Luftschale von ihr getrennten leitenden Luftschale umgeben denken kann; die Kugel und diese letztere Schale sind häufig oder stets entgegengesetzt geladen, und der Austausch von Elektrizität, welcher bei gewisser Spannung zwischen ihnen erfolgt, kann zweierlei Formen annehmen: die gewaltsame, das sind die Gewitter, und die sanfte, das sind die Polarlichter — Entladungsformen, welche auch sonst bekannt genug sind; in mäßigen Breiten wird die eine, in hohen die andere Form häufiger sein; jene hat keinen merklichen, diese dagegen einen beträchtlichen Einfluß auf die Magnetnadel. — Mit Recht hat WEINSTEIN die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, daß es sich bei den Polarlichtern, statt um Entladungen, auch um wirkliche, in der Atmosphäre in sich selbst geschlossene elektrische Ströme handeln kann, deren Richtung dann nicht mit den Strahlen, sondern mit den darauf senkrechten Bögen der Lichterscheinung zusammenfallen würde, eine Auffassung, welche manche Beziehungen weit besser verständlich machen würde als die obige, und welche die Polarlichter in vollständigen Parallelismus mit den Erdströmen bringen würde. — Andererseits hat EBERT gezeigt, daß man die hervorstechendsten Züge der Polarlichter sehr gut darstellen kann, wenn man annimmt, daß die Sonne die Erde mit elektromagnetischen Wellen bestrahlt; dabei tritt dann auch eine nahe Beziehung zur Sonnencorona hervor. — Nach der von PAULSEN, BIRKELAND, ARRHENIUS u. a. ausgebildeten Kathodenstrahlentheorie endlich besteht das Polarlicht in einem durch Kathodenstrahlen, die von der Sonne kommen, erzeugten Leuchten der Luft; es handelt sich also hier um von der Sonne ausgesandte Teilchen, die in die Lufthülle der Erde gelangen; je nach der Konfiguration des Feldes, das sie hier antreffen, nehmen sie durch Ablenkung die verschiedenartigen Gestalten an, die wir beobachten. Hierzu hat namentlich BIRKELAND sehr lehrreiche Experimente angestellt, die zum Teil auch die Einzelheiten vollkommen begreiflich machen, so die Formen, die örtlichen und zeitlichen Verschiedenheiten, die Beweglichkeit, das Spektrum usw. Es muß aber an diesen kurzen Andeutungen genügen[1].

[1] Hiermit stehen auch die Arbeiten von L. A. BAUER im Zusammenhange (vgl. die Anmerkung zu S. 510).

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

# Elektrizität II

# Elektrodynamik

Von K. WAITZ

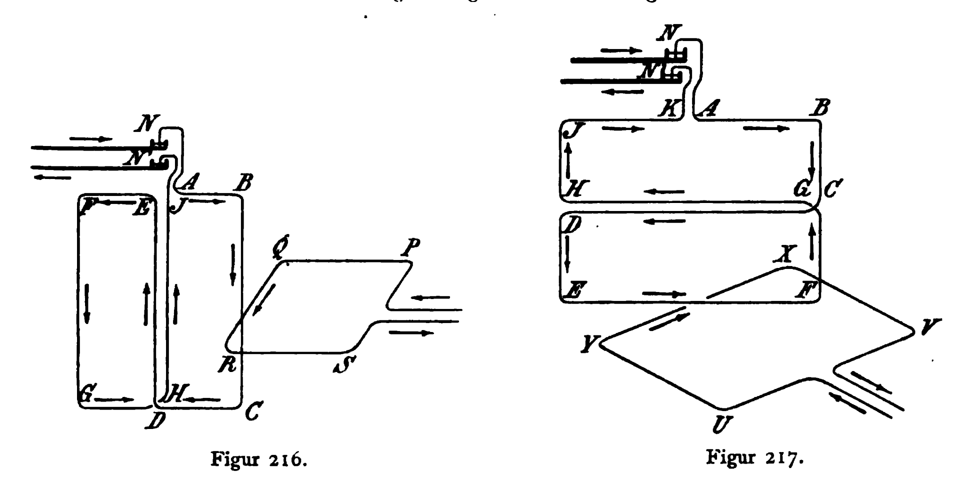
# Elektrodynamik.*)

Von K. Waitz.

## 1. Ponderomotorische Wirkung stationärer Ströme.

Unter elektrodynamischen Erscheinungen im engeren Sinn, von denen hier zunächst nur die Rede sein soll, versteht man die Wirkungen von stationär durchströmten, linearen, geschlossenen Leitern (Draht oder dgl.) aufeinander; oder wie man sagt, die ponderomotorische, den Stromträger bewegende Wirkung eines geschlossenen elektrischen Stromes auf einen andern, im Gegensatz zu der elektromotorischen, die (s. Induktion) die Elektrizität im Stromträger bewegt.

Diese Wirkung wurde gleich nach Oersteds Entdeckung der elektromagnetischen Erscheinungen von Ampère[1] vermutet und aufgefunden; Beispiele für sie sind Ampères Versuchsanordnungen Figur 216 und Figur 217.




Figur 216.  Figur 217.

Der bewegliche Stromleiter besteht aus einem doppelten Rechteck *ABCDEFGHI*. Dasselbe wird im Sinne der Buchstaben vom Strome durchflossen und hängt in zwei Quecksilbernäpfchen *N* und *N'*. Da ein einzelnes, drehbar aufgehängtes und stromdurchflossenes Rechteck von magnetischen Kräften

*) Wir beschränken uns hier im wesentlichen auf die ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Leitungsströme, da später die moderne Theorie der Elektrodynamik (die Maxwellsche und die Elektronentheorie) in zusammenhängender Weise behandelt werden wird.

[1] A. M. Ampère, Gilberts Ann. **67**. 113—155; 225—257. 1821; Mémoire sur la théorie mathematique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences dans les séances des 4 et 26 déc. 1820, 10 juin 1822, 22 déc. 1823, 12 sept. et 23 nov. 1825: Mémoires de l'Académie T. **6**. Année 1823. 1827.

beeinflußt, insbesondere durch den Erdmagnetismus in eine bestimmte Lage gedreht wird, so benutzte AMPÈRE die eben beschriebene Kombination von zwei im entgegengesetzten Sinne umströmten Rechtecken, welche dem Einfluß des Erdmagnetismus entzogen sind.

Wird das feste, ebenfalls von einem Strom durchflossene Rechteck $PQRS$ (Figur 216) so aufgestellt, daß $QR$ und $BC$ parallel sind, so findet Anziehung statt. Dieselbe erfolgt auch, wenn beide Drähte einen spitzen Winkel bilden. Liegt ferner (Figur 217) das feste Rechteck $UVXY$ unter dem beweglichen, welches sich um die durch $NN'$ gehende Achse drehen kann, so geschieht dies in der Weise, daß die Drähte $EF$ und $YX$ parallel werden.

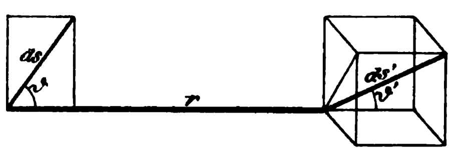
Aus solchen und ähnlichen Versuchen leitete AMPÈRE die Sätze ab:

1. Geradlinige parallele Stromleiter ziehen sich an oder stoßen sich ab, wenn sie von gleich oder entgegengesetzt gerichteten Strömen durchflossen werden.

2. Solche Stromleiter ziehen sich auch an oder stoßen sich ab, wenn die Ströme in ihnen einen spitzen oder einen stumpfen Winkel miteinander machen.

3. Zwei gegeneinander drehbare gekreuzte Leiter suchen sich so parallel zu stellen, daß sie in gleicher Richtung von ihren Strömen durchflossen werden.

AMPÈRE führt die elektrodynamischen Erscheinungen auf sein Grundgesetz zurück, das die anziehende oder abstoßende Kraft $\mathfrak{F}$ angibt, mit der zwei Stromelemente längs ihrer Verbindungslinie aufeinander wirken sollten. Wir geben es seiner historischen Wichtigkeit halber an. Sind (s. Figur 218) $ds$ und $ds'$ die zwei Stromelemente, die von Strömen mit der Stärke $i$ und $i'$ durchflossen werden, ist $r$ die Verbindungslinie von $ds$ nach $ds'$, $\vartheta$ resp. $\vartheta'$ der Winkel zwischen $ds$ und $r$ resp. $ds'$ und $r$ und $\varepsilon$ der Winkel zwischen $ds$ und $ds'$, so ist



Figur 218.

$$\mathfrak{F} = \frac{i\,i'\,ds\,ds'}{r^2}\left\{\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' - \cos\varepsilon\right\} .$$

Dabei ist eine abstoßende Kraft als positiv gerechnet.

Die Einheit der Stromstärke ist hier im sogenannten elektrodynamischen Maße gemessen, d. h. der Strom ist gleich eins, der in der Einheit der Entfernung auf einen gleichen parallelen Stromleiter die Einheit der Kraftwirkung ausübt, wenn beide Leiter die Länge eins haben.

Dieses AMPÈREsche Elementargesetz war durch Zerlegung der Wirkung geschlossener Ströme aufeinander gewonnen, zu deren Berechnung stets eine Summierung der einzelnen Elementarkräfte der Stromelemente über eine in sich geschlossene Leitung nötig ist. Bei solcher Prüfung aber ist eine eindeutige Lösung nicht möglich, da etwa vorhandene Elementarwirkungen, welche bei Integration über einen geschlossenen Weg verschwinden, stets verborgen bleiben müssen. In der Tat sind später noch andere Elementargesetze aufgestellt worden, die für geschlossene Ströme zu gleichen Resultaten wie AMPÈREs Gesetz führen.[1]

Grundgesetze von umfassenderer Bedeutung, die auch die Erscheinungen der Induktion darstellen sollten, haben W. WEBER[2] und CLAUSIUS[3] aufgestellt, vgl. über sie in dem Kapitel „Erklärungsversuche der elektrischen Erscheinungen".

Die ponderomotorischen Wirkungen von durchströmten Leitern führt man jetzt nicht mehr auf die Fernwirkungen von Stromelementen, sondern auf die Veränderungen des elektromagnetischen Feldes zurück, das mit den Strömen ent-

[1] H. GRASSMANN, Pogg. Ann. **64**. 1—18. 1845. Vgl. auch J. STEFAN, Wien. Ber. **59** (2). 693—769. 1869. — MARGULES, Wien. Ber. **78** (2). 779—789. 1878. — H. GRASSMANN, Crelles J. **83**. 57—64. 1877. — [2] W. WEBER, Elektrodynamische Maßbestimmungen I. 1846; Werke **3**. 132 bis 211. — [3] R. CLAUSIUS, Crelles J. **82**. 85—131. 1876; Wied. Ann. **1**. 14—38. 1877.

steht und vergeht, und dessen Eigenschaften, z. B. in den Galvanometern, immer als bestes Maß für die elektrische Strömung gedient hat.

Wir nehmen im folgenden stets an, daß die Strömung in den Leitern durch deren Bewegung nicht geändert werde und denken uns alle Größen im elektromagnetischen Maße ausgedrückt. Dann besteht (s. Artikel: Elektromagnetismus) zwischen einer magnetischen Doppelschicht (Schale) von der Stärke $\Phi$ und einem elektrischen Strom von der Intensität $i$, der in der Kontur der Schale fließt, völlige Äquivalenz in der Wirkung nach außen. Dabei ist $i$ für $\Phi$ zu setzen, und der Umlaufssinn des Stromes ist zu der Richtung der Magnetisierung der Schale so zu wählen, wie die Drehbewegung einer einbohrenden Rechtsschraube zu deren Fortschreitungsrichtung. Mit der Magnetisierungsrichtung der Schale soll auch die Richtung der positiven Normale zusammenfallen, die wir uns auf der vom Strom umrandeten „Stromfläche" errichtet denken.

Nach diesen Bestimmungen verändert sich bei Bewegung der Stromleiter nur die wechselseitige magnetische Energie zwischen ihnen. Sind, wie bei AMPÈRES Versuchen, beide Stromträger starr, (1) beweglich und (2) fest, so gibt die Änderung des von (2) durch die Stromfläche von (1) gesandten magnetischen Induktionsflusses die bei der Bewegung geleistete Arbeit. Stabiles Gleichgewicht tritt ein, wenn dieser Induktionsfluß ein Maximum ist.

$\mathfrak{B}$ bezeichne die magnetische Induktion, $dS$ ein Element der Stromfläche, $n$ seine positive Normale, so ist die Arbeit bei kleiner Verschiebung von (1):

$$(1) \qquad A = i_1 \delta \left\{ \int \mathfrak{B}_n dS_1 \right\} = i_1 \delta Q_{21} = i_1 i_2 \delta L_{21} \quad ,$$

wo $Q_{21}$ den magnetischen Induktionsfluß, den der Strom $i_2$ durch die Stromfläche des Leiters (1) sendet, bedeutet und $L_{21}$ dieselbe Größe angibt, wenn $i_2 = 1$ ist. Hieraus ist das Symbol $L_{12}$ leicht verständlich, und da es sich nur um relative Lagenänderungen von (1) und (2) handelt, wird

$$L_{12} = L_{21}$$

und

$$(2) \qquad A = i_1 i_2 \delta L_{21} = i_1 i_2 \delta L_{12} \quad .$$

Da bei stabilem Gleichgewicht $L_{12}$ ein Maximum sein muß, so werden sich drehbare, gekreuzte Leiter nach der dritten oben angeführten AMPÈREschen Regel zu stellen suchen, und ebenso folgen die beiden andern Regeln.

## Kraft, die ein Stromelement in einem Magnetfeld angreift.

Es ist oft nützlich, die Arbeit $A$ nicht durch Gleichung (1) auszudrücken, sondern als von Kräften geleistet anzusehen, die an den Elementen $ds$ der Stromkurve wirken. Da die Stromfläche (Fläche der äquivalenten magnetischen Schale) nur durch ihre Kontur (die Stromkurve) gegeben ist, so muß das möglich sein.

Wir suchen also einen Ausdruck für Kräfte, die, an den einzelnen Elementen des Leiters wirkend, bei dessen Verschiebung im Magnetfeld dieselbe Arbeit leisten wie der Ausdruck (1). Dabei darf sich der Stromleiter deformieren, neue Elemente dürfen in den Stromkreis ein- oder alte aus ihm austreten, nur soll die Stromstärke $i$ stets dieselbe bleiben.

Das Element $ds$ werde um die kleine Strecke $\delta l$ verschoben, dann überstreicht es ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt durch $(\delta l, ds)$ angedeutet werde. Die Änderung der magnetischen Induktionsströmung durch die Stromfläche ist dabei gegeben durch das Volum des Parallelepipedons, dessen Kanten $\delta l$, $ds$ und $\mathfrak{B}$ sind. Dieser Beitrag ist positiv, wenn die Drehung von $\delta l$ nach $ds$ und die Richtung von $\mathfrak{B}$ mit dem Drehungs- und Fortschreitungssinn einer Rechtsschraube übereinstimmen, d. h. wenn $\delta l$, $ds$ und $\mathfrak{B}$ ein Rechtssystem bilden. Ist $\alpha$ der Winkel zwischen $ds$ und $\mathfrak{B}$, und bezeichnet $\beta$ den Winkel zwischen

der positiven Normale des Parallelogramms $(ds, \mathfrak{B})$ und $\delta l$, so ist das Volum jenes Parallelepipedons:

$$\mathfrak{B}\, ds\, \delta l \sin\alpha \cos\beta \quad ,$$

also

$$A = i\,\delta\left\{\int \mathfrak{B}_n\, dS\right\} = i\int \mathfrak{B} \sin\alpha \cos\beta\, ds\, \delta l \quad .$$

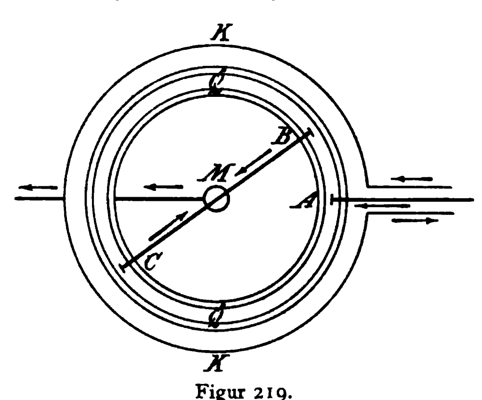
Setzt man

(3)
$$i\,\mathfrak{B} \sin\alpha\, ds = F\, ds \quad ,$$

so kann man dies als eine Kraft auffassen, die in Richtung der positiven Normale des Parallelogramms $(ds, \mathfrak{B})$ wirkt und, das Element $ds$ angreifend, die verlangte Arbeit $A$ bei der kleinen Verschiebung des Stromträgers leistet. Diese Kraft steht also senkrecht zu $ds$ und zu $\mathfrak{B}$. Ihre Komponenten nach den rechtwinkligen Koordinatenachsen wären:

$$F_x ds = i(\mathfrak{B}_z dy - \mathfrak{B}_y dz)$$
$$F_y ds = i(\mathfrak{B}_x dz - \mathfrak{B}_z dx)$$
$$F_z ds = i(\mathfrak{B}_y dx - \mathfrak{B}_x dy) \quad ,$$

wo $dx$, $dy$, $dz$ die Projektionen von $ds$ auf die Koordinatenachsen sind.



Figur 219.

Mit Hilfe des Ausdrucks (3), der nichts anderes als das erweiterte BIOT-SAVARTsche Gesetz ist, lassen sich die Rotationserscheinungen von Strömen, die im Magnetfeld anderer Ströme auftreten, ebenso berechnen, wie die analogen Erscheinungen im Felde von Magneten. Ein Apparat, der diese Rotation zeigt, ist z. B. Figur 219, schematisch dargestellt. Der mit Quecksilber gefüllten Rinne $Q$ wird bei $A$ der Strom zugeführt, durch den um $M$ drehbaren Bügel $BC$ und $M$ selbst fließt er ab. $M$ ist eine vertikale Messingsäule, oben mit einem Quecksilbernapf, in diesen taucht eine an $BC$ in der Mitte senkrecht befestigte Drahtspitze. Der Bügel $BC$ balanciert entweder auf dieser Spitze, oder er ist an einem Faden aufgehängt. Dieser Apparat ist von einem Kreisstrom $K$ oder einer stromdurchflossenen Spule, von der $K$ einen Teil bildet, umgeben, so daß das Magnetfeld $(\mathfrak{B})$ konstant und die Kraftlinien senkrecht zu $BC$ stehen. Bezeichnet $i$ die Intensität des durch $BM$ abfließenden Stromes, so wirkt auf $ds$ die Kraft $F ds = i\mathfrak{B} ds$, demnach ist das den Arm $BM$ von der Länge $l$ bewegende Drehungsmoment:

$$\mathfrak{N} = \int_0^l s\, F\, ds = \frac{i}{2}\mathfrak{B}\, l^2 \quad .$$

Geben die Pfeile in der Figur die Stromrichtung an, so findet die dauernde Rotation entgegen der Uhrzeigerdrehung statt.

In einfacherer Weise würde sich die ganze Betrachtung in der Sprache der Vektorrechnung darstellen, die Kraft würde, wenn deutsche Buchstaben Vektoren bezeichnen, sein:

(3a)
$$\mathfrak{F} = i[d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{B}] \quad .$$

Wäre der durchströmte Leiter nicht linear, so würde an die Stelle von $i\,d\mathfrak{s}$ der Ausdruck $\mathfrak{j}\,d\tau$ treten, wo $\mathfrak{j}$ die Stromdichte (Strom durch die Flächeneinheit) und $d\tau$ das Volumelement bedeutet. Für (3a) wäre also zu schreiben:

(3b)
$$\mathfrak{F} = [\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{B}]\, d\tau \quad .$$

Die in Gleichung (2) auftretende Größe $L_{12}$ heißt der Koeffizient der wechselseitigen Induktion der zwei Ströme; er ist nur abhängig von der gegenseitigen Lage und der Form der beiden Stromkurven und muß sich also, statt durch ein Flächenintegral wie bisher, durch Linienintegrale über die Stromkurve darstellen lassen. Das kann man mit Hilfe des STOKESschen Satzes, der die Zurückführung von Flächenintegralen auf Linienintegrale lehrt. Er sagt aus: Hängt ein Vektor $\mathfrak{A}$ mit einem Vektor $\mathfrak{B}$ so zusammen, daß für die Komponenten die Gleichungen bestehen:

$$(4)\qquad \mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\ ; \qquad \mathfrak{B}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\ ; \qquad \mathfrak{B}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\quad ,$$

oder in Vektorbezeichnung:

$$(4\text{a})\qquad \mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}\quad ,$$

so gilt:

$$(5)\qquad \int \mathfrak{A}_s\, ds = \int \mathfrak{B}_n\, dS$$

oder

$$(5\text{a})\qquad \int \mathfrak{A}_s\, ds = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, dS\quad ,$$

wo das Integral links über die geschlossene Randkurve $s$ der Fläche $S$ genommen ist, über die sich das Integral rechts erstreckt. Umlaufssinn der Randkurve und positive Normale $n$ der Fläche sind wieder wie Drehungs- und Fortschrittsrichtung einer Rechtsschraube zu nehmen.

Denken wir uns nun einen linearen Strom (1) im Magnetfeld eines Stromes (2) oder eines ihm äquivalenten magnetischen Blattes von der Stärke $\Phi_2$, so sind die Komponenten der Feldstärke dieses Blattes am Ort $x_1$, $y_1$, $z_1$ des Elementes $dS_1$, der Stromfläche (1) (s. Artikel: Elektromagnetismus)

$$\mathfrak{H}_x = \Phi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dz_2}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{dy_2}{r} \right\} \quad \text{usw.}\quad ,$$

wo die Integrale über die Kontur des Blattes (2) zu nehmen sind, also werden die Komponenten der magnetischen Induktion des Stromes (2) an dem Orte von $dS_1$, wenn $\mu$ überall konstant:

$$\mathfrak{B}_x = \mu\, i_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dz_2}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{dy_2}{r} \right\}$$

$$\mathfrak{B}_y = \mu\, i_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \int \frac{dx_2}{r} - \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dz_2}{r} \right\}$$

$$\mathfrak{B}_z = \mu\, i_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dy_2}{r} - \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dx_2}{r} \right\}$$

Definieren wir nun einen Vektor:

$$(6)\qquad \mathfrak{A} = \mu \int\limits_{s_2} \frac{i_2\, ds_2}{r}\quad ,$$

das Integral über die Stromkurve (2) genommen, so ist $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential des linearen Stromes (2) in einem Punkte, der den Abstand $r$ von den einzelnen Linienelementen $ds_2$ hat. Die Komponenten von $\mathfrak{A}$ sind:

$$(7)\quad \mathfrak{A}_x = \mu \int\limits_{s_2} \frac{i_2\, ds_2 \cos(s_2\, x)}{r} = \mu \int\limits_{s_2} \frac{i_2\, dx_2}{r}\ ; \qquad \mathfrak{A}_y = \mu \int\limits_{s_2} \frac{i_2\, dy_2}{r}\ ; \qquad \mathfrak{A}_z = \mu \int\limits_{s_2} \frac{i_2\, dz_2}{r}$$

also werden, da $i_2$ vor das Integral gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z_1} \ ; \qquad \mathfrak{B}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x_1} \ ; \qquad \mathfrak{B}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y_1} \quad ,$$

d. h. die $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$ stimmen mit den gleichnamigen Größen in (4) überein, es besteht also zwischen der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ und dem Vektor $\mathfrak{A}$ die Beziehung (5). Also:

$$\int \mathfrak{B}_n \, dS_1 = \int_{s_1} \mathfrak{A}_{s_1} \, ds_1 \quad ,$$

hier den Wert (6) eingesetzt:

$$\int \mathfrak{B}_n \, dS_1 = i_2 \, \mu \int_{s_2}\int_{s_1} \frac{ds_2 \, ds_1 \cos(ds_2 \, ds_1)}{r} \quad ,$$

das mit (1) verglichen gibt:

$$L_{21} = L_{12} = \mu \int_{s_1}\int_{s_2} \frac{ds_1 \, ds_2}{r} \cos(ds_2 \, ds_1) \quad , \tag{8}$$

wo $r$ die Entfernung von $ds_1$ und $ds_2$ voneinander bedeutet.

Von diesem Ausdruck hängt also die Wirkung der zwei stromdurchflossenen, linearen geschlossenen Leiter aufeinander ab, sie hat schon F. Neumann[1] von einem ganz analogen Ausdruck, dem „elektrodynamischen Potential"

$$P = -i_1 \, i_2 \iint \frac{ds_1 \, ds_2}{r} \cos(ds_1 \, ds_2) \tag{9}$$

abgeleitet.

Sind die Ströme nicht linear, so hat man die Formeln als für die einzelnen Stromfäden gültig anzusehen und über alle Fäden zu summieren.

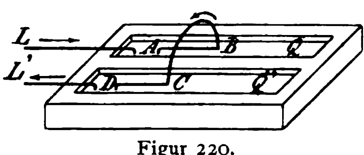
Das Vektorpotential geht dann über in

$$\mathfrak{A} = \mu \int \frac{\mathfrak{j} \, d\tau}{r} \quad , \tag{10}$$

wo $\mathfrak{j}$ die Stromdichte und $d\tau$ ein Volumelement des Leiters ist. —

Auch auf den eigenen Stromträger übt ein Strom elektrodynamische Wirkungen aus, wie schon Ampère beobachtete, indem er einen Teil der Strombahn beweglich machte (s. Figur 220).

In zwei nebeneinander liegenden Rinnen von Quecksilber $Q$ und $Q'$ (Figur 220) schwimmt der Drahtbügel $ABCD$. Wird dieser Vorrichtung durch die Leiter $L$ und $L'$ ein elektrischer Strom zugeführt, so bewegt sich der Draht nach rechts. Ampère erklärte diese Erscheinung durch die abstoßende Wirkung einer Strombahn ($L$) auf eine andere $AB$, wenn beide in derselben Gerade liegen. — Das magnetische Feld des Stromes sendet auch durch dessen eigene Stromfläche magnetische Induktionslinien hindurch, und stabiles Gleichgewicht kann erst eintreten, wenn dieser Induktionsfluß ein Maximum geworden. Das bewegliche Leiterstück muß sich also so weit und in solchem Sinne verschieben, daß dieser Bedingung genügt wird. Kehrt man den Strom um, so muß die Verschiebung in die entgegengesetzte übergehen.



Figur 220.

[1] F. Neumann, Abhandlungen der Berliner Akad. 1845.

In Analogie mit der wechselseitigen magnetischen Energie $L_{12} \cdot i_1 i_2$ zweier Ströme wird die magnetische Energie eines Stromes (1) sich durch den Ausdruck darstellen lassen:

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 = \frac{1}{2} \mu i_1^2 \int_{s_1}\int_{s_1} \frac{ds_1\, ds_1'}{r} \cos(ds_1\, ds_1') \quad , \tag{11}$$

wo

$$L_1 = \mu \int_{s_1}\int_{s_1} \frac{ds_1\, ds_1'}{r} \cos(ds_1\, ds_1') \tag{12}$$

der **Koeffizient der Selbstinduktion** ist. Dabei ist die Integration zweimal über dieselbe Stromkurve zu nehmen, wobei jede Kombination $ds_1\, ds_1'$ doppelt vorkommt, so daß der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt werden muß. Hier darf der Strom nicht als linear angesehen werden, sondern man hat die zweimalige Integration über alle Kombinationen je zweier Stromfäden auszuführen und dann zu summieren, d. h. man hat für jeden einzelnen Stromfaden das Produkt aus seiner Stromstärke in den von ihm umschlungenen Induktionsfluß zu bilden und alle diese Produkte zu summieren. So erhält man die magnetische Energie des Stromkreises, aus der dann der Selbstinduktionskoeffizient folgt.

Es ist also streng genommen zu definieren:

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 = \mu \int\int \frac{d\tau_1\, d\tau_1'}{r} \mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{i}_1' \quad , \tag{12a}$$

wo die $\mathfrak{i}$ wieder Stromdichten und $d\tau$ Volumelemente bedeuten.

Die gesamte magnetische Energie zweier stationärer Ströme ist also:

$$T = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 L_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2) \quad . \tag{13}$$

## Elektrodynamische Apparate.

Die AMPÈREschen Versuche zur Demonstration der elektrodynamischen Wirkungen hat man in mannigfacher Weise abgeändert.[1]

Besonders suchte man die Reibung der meist auf Spitzen sich drehenden Drahtgestelle zu vermeiden, indem man sie bifilar an zwei vertikalen Zuleitungsdrähten aufhing, oder die Anwendung des lästigen Quecksilbers durch passende Rollensysteme ersetzte.[2]

Die Anziehung paralleler gleichgerichteter Ströme demonstriert man u. a. mit der ROGETschen Spirale[3], die zugleich dienen kann, um den Strom automatisch zu unterbrechen und wieder zu schließen. Eine lose gewundene Drahtspirale wird an ihrem einen Ende vertikal aufgehängt, das untere Ende, durch ein kleines aufgeschobenes Gewicht beschwert, taucht in einen Quecksilbernapf. Leitet man den Strom durch das obere Ende und durch das Quecksilber der Spirale zu und ab, so ziehen sich die einzelnen übereinander liegenden Windungen an, die Spirale verkürzt sich, das untere Drahtende wird aus dem Quecksilber gehoben und so der Strom unterbrochen; das Übergewicht zieht den Draht in das Quecksilber zurück und das Spiel beginnt von neuem.

Dauernde Rotationen eines beweglichen stromdurchflossenen Leiterstückes brachte schon AMPÈRE hervor. Diese Rotationsapparate sind durchaus den sogenannten elektromagnetischen Rotationsapparaten analog, nur erzeugt hier statt eines permanenten Magneten ein elektrischer Strom das Magnetfeld, in dem die Rotation stattfindet. Ein Schema dieser Konstruktionen zeigt Figur 219.

---

[1] Literatur s. G. WIEDEMANN, Die Lehre von der Elektr. 2. Aufl. **3.** 1—12. 1895. — [2] A. RAPS, Zeitschr. für Instrumentenkunde. **14.** 48. 1894. — [3] ROGET, Pogg. Ann. **36.** 550. 1835.

Die wichtigsten elektrodynamischen Apparate sind die zur Messung der elektrischen Ströme konstruierten: Elektrodynamometer und elektrodynamische Wage; ihre Besprechung findet sich im 4. Band.

## 2. Die MAXWELL-HERTZsche Theorie.

### a) Erste Hauptgleichung.

Nachdem FARADAY gezeigt hatte, daß die Wirkung der elektrischen Kräfte von der Natur des Mediums abhängt, durch das die Kräfte hindurchwirken, konnte die Fernwirkungstheorie in der alten Gestalt nicht mehr aufrecht erhalten werden, an ihre Stelle ist die MAXWELLsche Theorie[1] getreten, nach der die elektrischen Wirkungen Zeit zu ihrer Ausbreitung brauchen; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird gleich der Lichtgeschwindigkeit gefunden. Diese Folgerung haben die genialen Versuche von HERTZ[2] bewiesen und so den Sieg der Nahewirkungstheorien über die der Fernwirkung entschieden.

Zu den Leitungsströmen, von denen bisher allein die Rede war, treten nach der MAXWELLschen Theorie noch die Verschiebungsströme in den Dielektricis. Diese ergänzen ungeschlossene Leitungsströme zu geschlossenen, so daß nur geschlossene Ströme vorkommen. Die Größe der elektrischen Verschiebung ($\mathfrak{D}$) durch die Flächeneinheit ist (s. Handbuch IV, S. 86) definiert durch:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E} \quad ,$$

wo $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante und $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldintensität bezeichnet.

Die Dichte des Verschiebungsstromes ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \quad .$$

Diese Verschiebungsströme sollen nun nach der MAXWELL-HERTZschen Theorie ebensolche elektromagnetische Wirkungen ausüben wie die Leitungsströme, so daß das Gesetz über den Zusammenhang zwischen der Intensität $i$ der elektrischen Ströme und der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$, die sie begleitet, von den Leitungsströmen direkt auf die Verschiebungsströme übertragen werden kann.

Dieses Gesetz war bei Benutzung des elektromagnetischen Maßes:

$$\int_s \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi i \quad ,$$

wo $s$ eine geschlossene Kurve ist, die den elektrischen Strom $i$ umschlingt. Benutzt man das gemischte GAUSSsche Maßsystem, in dem die Dielektrizitätskonstante ($\varepsilon$) und die magnetische Permeabilität ($\mu$) reine Zahlen sind, so lautet die Gleichung:

$$\int_s \mathfrak{H}_s\, ds = \frac{4\pi}{c} i \quad ,$$

wo $c$ die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther. Legt man durch die Kurve $s$ als Kontur eine Fläche $S$, und ist $\mathfrak{C}$ die Dichte des Gesamtstromes (Leitungs- und Verschiebungsstroms), der durch $S$ hindurchgeht, d. h.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \quad , \tag{14}$$

[1] J. CL. MAXWELL, A Treatise on Electricity and Magnetism. 2 vol. Oxford 1873; deutsch von WEINSTEIN, Berlin 1883. — [2] H. HERTZ, Erste Abhandlung Wied. Ann. **31**. 421. 1887. Alle hierher gehörenden Arbeiten gesammelt in dem 2. Band der Ges. Werke: Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig 1894.

so schreibt sich die erste Hauptgleichung der MAXWELLschen Theorie:

$$\text{(I)} \qquad \int_s \mathfrak{H}_s\, ds = \frac{4\pi}{c}\int_S \mathfrak{C}_n\, dS \quad .$$

Zieht man die Kurve $s$ immer enger zusammen, so erhält man die Differentialform:

$$\text{(Ia)} \qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{H}) = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{C}$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\frac{4\pi}{c}\mathfrak{C}_x = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\,, \quad \frac{4\pi}{c}\mathfrak{C}_y = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\,, \quad \frac{4\pi}{c}\mathfrak{C}_z = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \quad .$$

Die Gleichung sagt aus: Das Linienintegral der magnetischen Kraft längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist proportional dem von der Kurve umrandeten elektrischen Strom, d. h. dem Strom, der durch eine Fläche hindurchgeht, die jene Kurve zur Kontur hat. Der Satz bezieht sich auf ruhende Körper, er wird von MAXWELL und HERTZ[1] verallgemeinert auf bewegte Körper: die Kurve $s$ und die Fläche $S$ sollen dabei stets durch dieselben materiellen Teilchen hindurchgehen, eine Bedingung, die bei Ruhe der Körper selbstverständlich erfüllt ist.

Setzt man (14) in (I) ein und schreibt $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ statt $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$, so ist

$$\int \mathfrak{H}_s\, ds = \frac{4\pi}{c}\left\{\int \mathfrak{j}_n\, dS + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n\, dS\right\} \quad ,$$

wo $\frac{d}{dt}$ die gesamte Änderung des Verschiebungsstromes durch die Fläche $S$ im Zeitelement $dt$, dividiert durch $dt$, bedeutet. Diese Änderung setzt sich zusammen aus der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{D}$ für ein bestimmtes Element des Raumes, die wie bei ruhenden Körpern mit $\partial$ bezeichnet werde, und aus der Änderung, die durch die Bewegung des Flächenelementes im Raum, d. h. durch die Bewegung der materiellen Teilchen, bewirkt wird. Der letzte Teil wird von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Bewegung abhängen. Berücksichtigt man dies, so gehen die in rechtwinkligen Koordinaten geschriebenen Gleichungen über in die ihnen zuerst von HERTZ[2] gegebene Form:

$$\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) = \mathfrak{j}_x + \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial t} + \mathfrak{v}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{D}_x \mathfrak{v}_y - \mathfrak{D}_y \mathfrak{v}_x)$$
$$- \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{D}_z \mathfrak{v}_x - \mathfrak{D}_x \mathfrak{v}_z) \quad ,$$

$$\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) = \mathfrak{j}_y + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial t} + \mathfrak{v}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{D}_y \mathfrak{v}_z - \mathfrak{D}_z \mathfrak{v}_y)$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{D}_x \mathfrak{v}_y - \mathfrak{D}_y \mathfrak{v}_x) \quad ,$$

$$\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) = \mathfrak{j}_z + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial t} + \mathfrak{v}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{D}_z \mathfrak{v}_x - \mathfrak{D}_x \mathfrak{v}_z)$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{D}_y \mathfrak{v}_z - \mathfrak{D}_z \mathfrak{v}_y) \quad ,$$

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **41**. 369. 1890 und Ges. Werke **2**. 216. S. auch z. B. E. COHN, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900. 534. — M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität, Leipzig 1904. **1**. 424. — [2] H. HERTZ, l. c.

oder kurz in Vektorbezeichnung

$$\text{(Ib)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{rot}[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{v}]\right\} \quad .$$

Dies ist die erste Hauptgleichung der MAXWELLschen Theorie für bewegte Körper. Sie stimmt mit (Ia) unter Beachtung von (14) völlig überein, wenn wir die Dichte des elektrischen Gesamtstromes definieren durch:

$$\text{(Ib}'\text{)} \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\mathfrak{D} + \operatorname{rot}[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{v}] \ .$$

Die Bedeutung der letzten beiden Posten auf der rechten Seite ergibt sich so: Nach MAXWELL ist $\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho$, wo $\varrho$ die Dichte der wahren Elektrizität nach HERTZ. $\mathfrak{v}\cdot\varrho$ ist also eine Elektrizitätsbewegung, bei der eine Ladung der Dichte $\varrho$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch den Raum hindurchgeführt wird, d. h. der Konvektionsstrom, es ist also die Dichte des Konvektionsstromes:

$$\mathfrak{v}\cdot\varrho \ .$$

Seine Wirkungen wurden zuerst von ROWLAND untersucht (s. Handbuch IV, S. 426) und werden manchmal Rowland-Effekt genannt.

$\operatorname{rot}[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{v}]$ ist ein Vektor, der senkrecht zur Ebene $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{v}$ steht, so daß $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{v}$ und der Vektor ein Rechtssystem bilden. Das letzte Glied der rechten Seite von (Ib′) stellt also eine Elektrizitätsbewegung in Richtung dieses Vektors in einem Dielektrikum dar, das mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt wird und in dem eine Verschiebung $\mathfrak{D}$ besteht. Die Wirkung einer solchen Elektrizitätsbewegung hat RÖNTGEN[1] zuerst beobachtet, so heißt dieser Posten meist Röntgenstrom, und es ist also die Dichte des Röntgenstromes:

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{v}] \ .$$

Die MAXWELL-HERTZsche Theorie verlangt also, daß bei bewegten Körpern der Gesamtstrom ($\mathfrak{C}$) sich zusammensetze aus Leitungsstrom ($\mathfrak{i}$), Verschiebungsstrom ($\mathfrak{V}$), Konvektionsstrom ($\mathfrak{K}$) und Röntgenstrom ($\mathfrak{R}$):

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{i} + \mathfrak{V} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R} \quad ,$$

und daß alle diese Ströme magnetische Wirkungen ausüben, da ja das Magnetfeld ($\mathfrak{H}$) von allen den einzelnen Stromteilen abhängt.

Man könnte nun die Richtigkeit der Gleichung (I), und also auch die Annahme über die magnetische Wirkung der vier verschiedenen Stromarten, durch ihren Erfolg für erwiesen ansehen, da es gelungen ist, das große Tatsachenmaterial, das die Beobachtungen geliefert haben, in der Formel (I) zusammenzufassen. Trotzdem hat man sich natürlich bemüht, diese Hypothese auch direkt zu stützen und durch Versuche die magnetische Wirkung der vier Stromanteile nachzuweisen, das ist, wie schon für Konvektions- und Röntgenstrom angegeben, auch gelungen. Es sollen im folgenden einige der zu diesem Zweck ausgeführten Untersuchungen kurz dargestellt werden.

## b) Versuche über die magnetische Wirkung der Konvektionsströme.

Ein Konvektionsstrom wird nach dem Obigen dadurch erzeugt, daß eine wahre elektrische Ladung (mit ihrem materiellen Träger) sich durch den Raum bewegt. Über seine magnetische Wirkung ist großenteils schon in der ersten

[1] W. C. RÖNTGEN, Sitzungsber. der Berliner Akad. 1888. 23. — Wied. Ann. **35.** 264. 1888; **40.** 93. 1890.

Hälfte dieses Bandes (s. S. 426) berichtet worden. Es mögen noch die Versuche von EICHENWALD[1] näher geschildert werden, da von ihm in ähnlicher Anordnung auch die anderen beiden Arten von Strömen untersucht wurden. Zwei kreisförmige Micanitplatten $A_0$ und $B_0$ (25 cm Durchmesser, 0,6 mm dick), auf horizontalen Achsen befestigt, standen einander gegenüber und waren am Rande mit 1,5 cm breiten Staniolstreifen ($A$ und $B$) beklebt, die an einer Stelle durch einen radialen 0,5 mm breiten Schlitz unterbrochen sind. Je einer von zwei auf der Achse sitzenden, von ihr isolierten Schleifringen mit Bürste ist mit je einem Ende der beiden Belegungen verbunden; das andere Ende von $A$ ist geerdet, das von $B$ isoliert. $B$ wurde auf Potentiale ($V$) zwischen 1875 und 6250 Volt geladen und in Rotation (25—150 ($n$)-Umdrehungen pro Sekunde) versetzt. Ist $C$ die Kapazität von $B$, so ist die Intensität des so entstehenden Konvektionsstromes

$$C V n \quad .$$

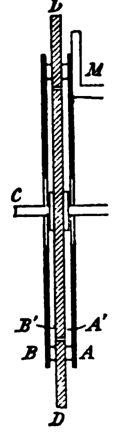
Dieser Strom wirkt auf den unteren Teil eines astatischen Magnetsystems eines Magnetometers, dessen oberer Teil 15 cm von dem unteren entfernt ist. Der untere Teil wird möglichst nahe über den oberen Rand der rotierenden Scheibe $B_0$ gebracht und die Nadel erleide eine Ablenkung $a$. Dann wird durch die Belegung $B$ bei stillstehender Scheibe $B_0$ ein konstanter Strom $i$ geschickt, der die Ablenkung $b$ am Magnetometer bewirke. Es ist somit

$$\frac{VCn}{a} = \frac{i}{b} \quad ,$$

und bestimmt man die Kapazität von $B$ für sich, so kann man $a$ ausrechnen und mit dem beobachteten Wert vergleichen. Die Übereinstimmung der beiden $a$-Werte war überraschend groß; man konnte so die Wirkung der Konvektionsströme auf 5 % genau finden. Der Konvektionsstrom war etwa von der Ordnung $10^{-5}$ Amp.

## c) Versuche über die magnetische Wirkung des Röntgenstromes.

RÖNTGEN hat in den oben zitierten Arbeiten gezeigt, daß, wenn ein Dielektrikum in einem elektrostatischen Feld sich bewegt, dadurch magnetische Kräfte geweckt werden. Er ließ zu dem Zwecke eine horizontale Glas- oder Hartgummischeibe zwischen zwei ruhenden geladenen Metallscheiben um eine vertikale Achse rotieren und beobachtete die Wirkung auf die untere Nadel eines astatischen Paares. Die Nadel hing möglichst dicht über der oberen Metallscheibe, nahe deren Rand und senkrecht zu einem Radius der Metallscheibe. Bei Kommutieren der Ladungen (etwa 10 000 Volt) zeigte sich ein Ausschlag von 2—3 Skalenteilen für 229 cm Skalenabstand. Die Wirkung war also sehr schwach, sie trat aber regelmäßig ein und war so, als ob die durch die Polarisation der dielektrischen Scheibe erzeugten scheinbaren Ladungen des rotierenden Dielektrikums einen Konvektionsstrom darstellten. Diese Erscheinung wird bestätigt durch die Beobachtung von PENDER[2], daß eine im elektrischen Wechselfeld rotierende Ebonitscheibe in einem benachbarten Leiter Induktionsströme erzeugte. Die Berechnung von PENDER unter der Annahme, daß auf den beiden Seiten der Scheibe entgegengesetzte Konvektionsströme fließen, gibt gute Übereinstimmung mit der Beobachtung.



Figur 221.

[1] A. EICHENWALD, Phys. Zeitschr. **2.** 703. 1901; **4.** 310. 1903; Ann. d. Ph. **11.** 1 u. 421. 1903; **13.** 919. 1904. — [2] H. PENDER, Phil. Mag. (6) **5.** 43. 1903.

Die genauesten Messungen von EICHENWALD[1] sind nach dem Prinzip der RÖNTGENschen Methode gemacht. Aus einer ebenen Hartgummiplatte $DD$ (s. Figur 221) (40 cm hoch, 30 cm breit, 1 cm dick) wurde in der Mitte eine Kreisscheibe $A'B'$ von 25 cm Durchmesser herausgeschnitten. Die Scheibe rotierte um eine horizontale Messingachse $C$ in dem homogenen Feld des ruhenden Kondensators $A$, $B$. $A$ und $B$ sind zwei Messingscheiben von 31 cm Durchmesser und 3,3 mm Dicke; sie waren 0,86 mm von $A'B'$ entfernt und wurden zu Potentialdifferenzen ($V$) von etwa 7—8000 Volt geladen. In $A$ war oben eine radiale Furche gemacht, um das Magnetometer $M$ (s. oben) mit seinen unteren Nadeln bis auf 8 mm an die Hartgummischeibe heranbringen zu können. Man erhält als Mittelwert des Ausschlages ($a$) in $M$ beim Kommutieren der Ladungen von $A$ und $B$, wenn die Scheibe $n$ Umdrehungen in der Sekunde machte:

$$a = 1{,}357 \cdot 10^{-5} V n \quad .$$

Die Ablenkungen wechseln mit dem Sinne der Ladung von $A$ und $B$ und mit dem Sinne der Rotation von $A'B'$ ihr Zeichen, ganz wie es die Annahme verlangt, daß bei der Rotation in den beiden Seitenflächen von $A'B'$ zwei Konvektionsströme gleicher Richtung aber mit entgegengesetzten Ladungen fließen.

Diese Wirkung wurde verglichen mit der Wirkung konstanter Ströme ($i$). Es wurde deshalb statt der Hartgummischeibe eine gleich große Holzscheibe eingesetzt und auf beiden Seiten derselben 20 isolierte konzentrische Kupferkreise angeordnet und durch jeden von ihnen ein bekannter Strom geleitet. Die Wirkung eines solchen Kreisstromes vom Radius $r$ in der Fläche $A'$ resp. $B'$ auf das Magnetometer schreibt EICHENWALD

$$A' = i f_1(r) \ , \qquad B' = i f_2(r) \quad .$$

Der Konvektionsstrom an derselben Stelle $r$, dessen scheinbare Dichte $\omega$, wird bei $n$ Umdrehungen also eine Wirkung ausüben:

$$da = 2\pi r\, dr\, \omega\, n f(r) \quad .$$

Die gesamte Wirkung beider Konvektionsströme auf $A'$ und $B'$

$$a = 2\pi\omega n \int_0^{r_0} \{f_1(r) - f_2(r)\} r\, dr = \frac{2\pi\omega n}{i} \int_0^{r_0} (A' - B') r\, dr$$

$(A' - B') r\, dr$ wird aus den Beobachtungen mit den konstanten Strömen unter Anbringung einer Randkorrektion ermittelt. $b$ findet sich, wenn $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante, $d$ die Dicke der Hartgummischeibe und $d_0$ der Abstand der Kondensatorplatten $A$ und $B$ ist,

$$\omega = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{V}{\frac{d}{\varepsilon} + d_0 - d} \quad .$$

So ergibt sich, wenn alles auf $i = 0{,}957 \cdot 10^{-3}$ Amp. bezogen wird,

$$a = 1{,}325 \cdot 10^{-5} V n \quad .$$

Also eine ganz überraschend genaue Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Die Rotation eines geladenen Kondensators zusammen mit seinem Dielektrikum (die rotierende Ebonitscheibe $A'B'$ war auf beiden Seiten mit Staniol beklebt und die Scheiben $A$ und $B$ entfernt) ergab auch eine Ablenkung der Magnetnadel (bei $V =$ etwa 10 000 Volt ungefähr 9 Skalenteile) und zwar unabhängig von der Natur des Isolators (Glas oder Hartgummi). Das ist nach dem Obigen zu erwarten, da der wahre Konvektionsstrom durch die Rotation der

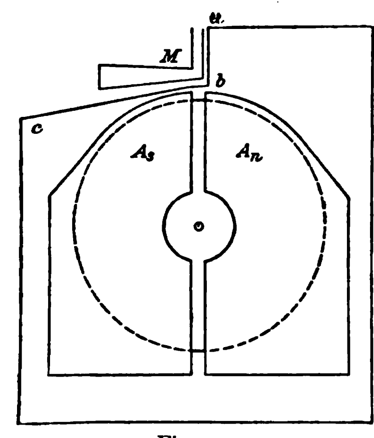
[1] A. EICHENWALD, Ann. d. Ph. 13. 927. 1904.

Belegungen: $\varepsilon C V n$ und der scheinbare durch die Rotation des Dielektrikums: $-(\varepsilon - 1) C V n$ sich zusammensetzt, so daß wird:

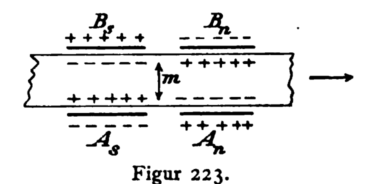
$$i = C V n \quad .$$

## d) Versuche über die magnetische Wirkung der Verschiebungsströme.

Der allerdings indirekte Beweis, daß die Verschiebungsströme in Dielektricis eine elektromagnetische (genauer Induktions-)Wirkung ausüben, ist von HERTZ[1] geliefert worden. Denselben Einfluß zeigen dann viele Versuche von RIGHI[2], der u. a. untersuchte, wie die Induktionswirkung eines Oszillators auf einen Resonator sich ändert, wenn verschieden gestaltete (Kugel, Zylinder) Dielektrika in die Nähe des Resonators gebracht wurden. — Eine direkte Entscheidung der Frage, ob elektromagnetische Wirkungen von Verschiebungsströmen ausgeübt werden, hatte RÖNTGEN[3] schon vor HERTZ versucht. Er ließ dabei eine Ebonitscheibe (16 cm Durchmesser, 5 mm dick) um eine vertikale Achse zwischen zwei mit Staniol ring-




Figur 222.




Figur 223.

förmig belegten festen Scheiben rotieren. Die Belegung der oberen Scheibe war zur Erde abgeleitet, die Belegung der unteren Scheibe bestand aus zwei gegenüberstehenden voneinander isolierten Halbringen, die entgegengesetzt geladen waren. Die Teilchen der Ebonitscheibe wechseln jedesmal beim Passieren der Trennungszone der beiden Halbringe ihren elektrischen Zustand, und es entstehen also in den beiden Hälften dieser Zone zwei entgegengesetzt gerichtete Verschiebungsströme senkrecht zur Ebene der Ebonitscheibe. Diese Ströme suchte RÖNTGEN durch ihre Wirkung auf die untere Nadel eines astatischen Paares nachzuweisen. Die Nadel hing möglichst nahe über der oberen ruhenden Scheibe, ihr Mittelpunkt lag in der Verlängerung der Drehungsachse, sie selbst war parallel dem Trennungsschlitz der Halbringe. Wurden die Ladungen der letzteren kommutiert und dadurch die Richtung der Ströme umgekehrt, so erhielt RÖNTGEN Ausschläge von etwa 1,5 mm bei einen Skalenabstand von 3 m. Die Wirkung war also sehr klein und ließ sich auch nicht immer ganz sicher voraussehen.

Andere Versuche z. B. von WHITEHEAD[4] führten zu einem negativen Resultat, so daß WHITEHEAD eine magnetische Wirkung der Verschiebungsströme als nicht vorhanden bezeichnete.

Dann hat EICHENWALD[5] die Methode von RÖNTGEN wieder aufgenommen und, wie es scheint, mit ihr gute Ergebnisse erzielt. Bei ihm rotiert wie früher die Hartgummischeibe von 25 cm Durchmesser um eine horizontale Achse zwischen

[1] H. HERTZ, Sitzber. d. Berl. Akad. 10. Nov. 1887. Beschreibung der Versuche s. Artikel „Induktion" S. 631. — [2] A. RIGHI, Die Optik der elektr. Schwingungen; deutsch v. B. DESSAU, Leipzig 1898. S. 56 usw. — [3] W. C. RÖNTGEN, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 195. — [4] J. WHITEHEAD, Phys. Zeitschr. **4**. 229. 1903. S. auch S. P. THOMSON, Proc. Roy. Soc. **45**. 392. 1889; W. DE NICOLAIEVE, Jour. de Phys. (3) **4**. 245. 1895; R. BLONDLOT, ibid. (4) **1**. 8. 1902. — [5] A. EICHENWALD, l. c.

zwei möglichst nahestehenden vertikalen Micanitscheiben, die zwei Staniolbelegungen $A_s$ und $A_n$ haben.

Die beiden Hälften $A_s$ und $A_n$ (s. Figur 222) resp. $B_s$ und $B_n$ sind durch einen Zwischenraum von 1 cm voneinander getrennt. Figur 223 zeigt im Grundriß die paarweise entgegengesetzt geladenen Belegungen $A$ und $B$ und die untere Magnetnadel $m$ des Magnetometers $M$ in ihrer der Drehungsachse parallelen Stellung, möglichst dicht über dem obersten Rand der rotierenden Scheibe. Der Verschiebungsstrom verläuft in dem Teil der Ebonitscheibe, der von Belegungen frei ist, von $A$ nach $B$, d. h. etwa parallel der Magnetnadel, wenn die Scheibe im Sinne des Pfeiles rotiert. Die Beobachtungen wurden ganz wie bei den Versuchen über den Röntgenstrom angestellt; die Ausschläge ($a$) beim Kommutieren der Ladungen waren 5—6 Skalenteile nach beiden Seiten, Skalenabstand 2,3 m. Man erhielt

$$a = 7{,}8 \cdot 10^{-6} Vn \quad .$$

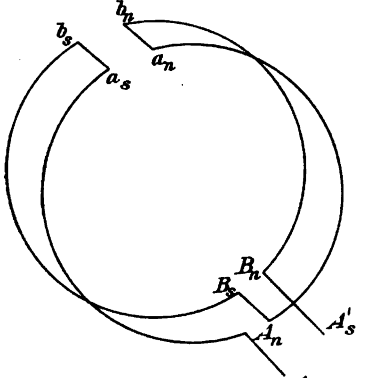
Der Vergleich mit der Wirkung konstanter Ströme auf das Magnetometer geschah analog wie früher, indem die Hartgummischeibe durch eine gleiche Holzscheibe ersetzt wurde, auf der Kupferdrähte eingekittet waren, die den Weg des Röntgenstromes und Verschiebungsstromes (s. Figur 224)

$$A_s\, a_s\, b_s\, B_s\, A_n\, a_n\, b_n\, B_n\, A_s'$$

nachahmten. Die Bahn der allein auf die Magnetnadeln wirkenden Verschiebungsströme ist $a_s b_s$, $B_s A_n$, $a_n b_n$, $B_n A_s'$. Es wurde (s. oben) die Wirkung einer Reihe solcher konstanter Ströme von verschiedenem Radius untersucht und daraus in der früher angegebenen Art $a$ berechnet. Es ergab sich

$$a = 7{,}20 \cdot 10^{-6} Vn \quad ,$$

d. h. eine Abweichung um $8{,}5\,^0/_0$ von dem beobachteten Wert, also eine durchaus genügende Übereinstimmung.



Figur 224.

---

Nach den angeführten Versuchen darf man wohl die magnetischen Wirkungen der drei Gattungen von Strömen: reine Konvektionsströme, Röntgenströme und Verschiebungsströme als sicher nachgewiesen ansehen, und man hat als Ausdruck der auf das Volumelement $d\tau$ in einem Magnetfeld wirkenden Kraft (im GAUSSschen Maßsystem)

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c}[\mathfrak{C}\mathfrak{B}]\,d\tau \quad .$$

Aus dem Werte von $\mathfrak{C}$ ergibt sich[1], daß nach dieser Theorie eine Kraft $\mathfrak{F}$ existieren muß, wenn ein ruhendes ungeladenes Dielektrikum, in dem Verschiebungsströme bestehen, sich in einem Magnetfeld befindet. Diese Kraft wäre für die Volumeinheit:

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\mathfrak{B}\right] \quad .$$

Wegen des Parallelismus der elektrischen und magnetischen Größen muß auch analog in einem elektrischen Feld eine Kraft wirken auf ein von einem

[1] S. z. B. H. A. LORENTZ, Enzyklopädie der math. Wiss., Leipzig 1904. $V_2$. 112. — M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität, Leipzig 1904. 1. 421.

magnetischen Strom durchflossenes ruhendes, ungeladenes Dielektrikum, deren Größe ist:

$$\frac{1}{c}\left[\mathfrak{T}\,\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right] \quad .$$

Die Existenz dieser Kraft hat schon HERTZ[1] aus der MAXWELLschen Theorie gefolgert, sie wird deshalb von POINCARÉ[2] HERTZsche Kraft genannt.

Es wirkte also im elektrischen und magnetischen Feld auf die Volumeinheit des Dielektrikums die Kraft:

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{T}\mathfrak{B}] \quad ,$$

die sich nur in sehr schnell veränderlichen Feldern bemerkbar machen würde.

Ist das Dielektrikum der freie Äther, wo

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi}\ ; \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} \quad ,$$

so würde auf die Volumeinheit des freien Äthers die ponderomotorische Kraft

$$\frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

ausgeübt. Man müßte also den freien Äther als mit Trägheit begabt und ponderomotorischen Kräften unterliegend ansehen.

Diese Schwierigkeit wird durch die LORENTZsche Elektronentheorie vermieden. — Die angegebenen wirkenden Kräfte sind natürlich nicht Fernkräfte, sondern die MAXWELLschen Spannungen im Felde (s. Artikel Elektrostatik). HERTZ[3] hat sie auf Grund des Energieprinzips aus den Gleichungen für bewegte Körper abgeleitet.

## 3. Die Elektronentheorie.

Die LORENTZsche Elektronentheorie[4] kommt formal zu ganz demselben Ausdruck für den Zusammenhang der magnetischen Kraft und elektrischen Strömung:

$$c \cdot \mathrm{rot}(\mathfrak{H}) = 4\pi\,\mathfrak{C}\ ^{5} \quad ,$$

wo $\mathfrak{C}$ sich wieder aus den vier Bestandteilen: Leitungsstrom ($\mathfrak{j}$); Verschiebungsstrom ($\mathfrak{B}$); Konvektionsstrom ($\mathfrak{K}$) und Röntgenstrom ($\mathfrak{R}$) zusammensetzt:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{j} + \mathfrak{B} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R}\ ^{5} \quad .$$

Wegen der Bedeutung dieser Größen muß auf den späteren Abschnitt über Elektronentheorie verwiesen werden.

Hier sei nur hervorgehoben, daß das oben angeführte Resultat der MAXWELLschen Theorie, wonach die Elemente des freien Äthers ponderomotorische Kräfte erleiden können, durch die Grundannahmen der LORENTZschen Theorie vermieden wird. In ihr wird der alles durchdringende Äther als stets ruhend gedacht und angenommen, daß also keine Beschleunigungen bei ihm auftreten, keine Kräfte auf ihn wirken. Sollen dann die ponderomotorischen Kräfte durch

---

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **23**. 84. 1884 u. Ges. Werke **1**. 295. S. auch H. v. HELMHOLTZ, Wied. Ann. **53**. 135. 1894. — W. WIEN, Beilage zu Wied. Ann. **65**. — G. MIE, Wied. Ann. **68**. 129. 1899. — [2] H. POINCARÉ, Electricité et optique. 2 édit. 410. — [3] H. HERTZ, Wied. Ann. **41**. 389. 1890 u. Ges. Werke **2**. 275. S. auch H. LORENTZ, l. c. 107 u. M. ABRAHAM, l. c. 413. — [4] Anfänge der Theorie: H. A. LORENTZ, Akad. van Wet. te Amsterdam. **18**. 68—77 und Wied. Ann. **9**. 641. 1880. Weitere Ausarbeitung: H. A. LORENTZ, La théorie electromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leiden 1892; Arch. néerl. **25**. 363. 1892; Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895. — [5] H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wiss. $V_2$. 149. 208.

das System der Maxwellschen Spannungen dargestellt werden, so ergibt die Theorie[1] noch Zusatzkräfte zu diesen, die für alle von Elektrizität freien Volumelemente des Raumes (den Äther) gerade die Wirkung der Spannungen aufheben. Dabei verliert allerdings das Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion im Newtonschen Sinne seine Gültigkeit, an seine Stelle tritt der Satz, daß die Summe der mechanischen und elektromagnetischen Bewegungsgröße[2] für ein System konstant ist.

In der Elektronentheorie hat der Röntgenstrom $\mathfrak{R}$ eine andere Bedeutung als bei Hertz, da in jener Theorie der Äther nicht wie bei Hertz mit der Materie sich bewegt und doch elektrische Verschiebung, oder nach der Bezeichnung von Lorentz elektrische Erregung haben kann, deren Mittelwert mit $\bar{\mathfrak{d}}$ bezeichnet wird. Aber auch in der Materie kann durch Polarisations-Elektronen elektrische Erregung ($\mathfrak{P}$) auftreten, indem diese Art von Elektronen sich nur um ihre „Mittelpunkte" in einem physikalisch unendlich kleinen Bereich bewegen können, während die Mittelpunkte die Bewegung der Materie mitmachen. Dadurch wird das Dielektrikum elektrisch polarisiert: das $\mathfrak{D}$ der Maxwellschen Theorie besteht demnach hier aus zwei Teilen:

$$\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{P} \quad .$$

Der Röntgenstrom würde durch die Bewegung der polarisierten Teilchen des Dielektrikums als „scheinbarer" Konvektionsstrom erzeugt, es wird also $\bar{\mathfrak{d}}$, das dem ruhenden Äther angehört, bei ihm nicht in Betracht kommen, und in der Elektronentheorie wird die Dichte des Röntgenstromes definiert sein durch:

$$\mathfrak{R} = \mathrm{rot}[\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{v}] \quad .$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Auffassungen von Hertz und Lorentz gibt für den oben angeführten Versuch von Eichenwald mit einem Kondensator, der als Ganzes (mit dem Dielektrikum) rotiert, verschiedene Resultate.

Nach Hertz ist der Röntgenstrom definiert durch:

$$\mathfrak{R} = \mathrm{rot}[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{v}] \quad .$$

Da nun der Vektor $[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{v}] = \mathfrak{U}$ an der Trennungsfläche der metallischen Belegung und des Dielektrikums im Kondensator unstetig ist[3], so ergibt sich, daß $\mathfrak{R}$ ein Flächenstrom $\mathfrak{R}^S$ sein muß, der aus dem Sprung von $\mathfrak{U}$ an der Trennungsfläche ($S$) der Medien 1 und 2 folgt:

$$\mathfrak{R}^S = [\mathfrak{n} \cdot \{\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1\}] \quad ,$$

wo $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der Normale $n$ (von 1 nach 2 hin) auf der Trennungsfläche bezeichnet. Ist das Feld homogen und wie $\mathfrak{D}$ parallel zur Richtung von $n$, um die der Kondensator in positiver Richtung rotiert, so ist im Dielektrikum $\mathfrak{U}$ radial nach der Drehungsachse hin gerichtet und hat den Wert

$$|\mathfrak{U}| = \mathfrak{D}_n |\mathfrak{v}| \quad .$$

Also hat $\mathfrak{R}^S$ an der Grenzfläche dieselbe Größe und ist entgegengesetzt gerichtet wie $\mathfrak{v}$.

Der Konvektionsstrom der Belegung ist auch ein Flächenstrom, aber in der Richtung von $\mathfrak{v}$ und hat die Größe

$$\omega |\mathfrak{v}| \quad ,$$

wenn $\omega$ die Flächendichte der Ladung ist. Da $\omega = \mathfrak{D}_n$, so müssen sich beide Flächenströme aufheben, d. h. der im ganzen rotierende Kondensator dürfte keine Wirkungen nach außen zeigen, das widerspricht dem Versuch Eichenwalds. —

[1] S. z. B. H. A. Lorentz, l. c. 162. 255. — [2] M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. 105. 1903. — [3] H. A. Lorentz, l. c. 98.

Nach der LORENTZschen Theorie dagegen heben sich die beiden Wirkungen des Röntgenstromes und Konvektionsstromes nicht auf, sondern ihre endliche Differenz ergibt sich dem Potentialgefälle zwischen den beiden Belegungen proportional, das ist aber das Resultat des Versuches, der somit durchaus zugunsten der Elektronentheorie spricht.

Auf weitere Versuche zwischen der HERTZschen und der Elektronentheorie zu entscheiden, kann hier nicht eingegangen werden, da zu ihrem Verständnis eine Darstellung der beiden Theorien nötig wäre, die erst an späterer Stelle gegeben wird. Naturgemäß knüpfen solche Versuche oft an die verschiedene Auffassung des Äthers in den beiden Theorien an, sie sprechen, wie schon der FIZEAUsche Mitführungsversuch, für die LORENTZsche Annahme eines ruhenden Äthers. Dabei bietet freilich der MICHELSONsche[1] Interferenzversuch Schwierigkeiten und führt zu der Hypothese, daß die Dimensionen der Körper infolge der Erdbewegung um Größen zweiter Ordnung geändert werden. — Diese Schwierigkeit sucht die COHNsche Theorie[2] zu vermeiden, die aber, ohne auf den Mechanismus der elektrischen Erscheinungen, wie LORENTZ Theorie, einzugehen, ihre Ausgangsgleichungen aufstellt. —

Eine Darstellung und Vergleichung der MAXWELL-HERTZschen und der Elektronentheorie, wie eine Übersicht der neueren Bemühungen, die elektrischen Erscheinungen mit den Prinzipien der Mechanik zu verknüpfen und ausgedehnte Literaturnachweise finden sich in den oft zitierten Abhandlungen von H. A. LORENTZ in Enzyklopädie der math. Wissenschaften $V_2$, Heft 1. Leipzig 1904: 13. MAXWELLs elektromagnetische Theorie und 14. Weiterbildung der MAXWELLschen Theorie, Elektronentheorie.

Für den Gegenstand dieses und des nächsten Artikels sind außer den zitierten noch besonders wichtig folgende Werke:

M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität. Bd. 1: Einführung in die MAXWELLsche Theorie der Elektrizität von A. FÖPPL; 2. vollständig umgearbeitete Auflage von M. ABRAHAM. Leipzig 1904. Bd. 2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung 1905.

E. COHN, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900.

E. WIECHERT, Die Grundlagen der Elektrodynamik in „Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen". Leipzig 1899.

J. J. THOMSON, Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893.

O. HEAVISIDE, Electrical Papers 2 vol. und Electromagnetic Theory 2 vol.

L. BOLTZMANN, Vorlesungen über MAXWELLs Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 2 Bde. Leipzig 1891 und 1893.

P. DRUDE, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage. Stuttgart 1894.

H. EBERT, Magnetische Kraftfelder, 2. Aufl. Leipzig 1905.

J. ZENNECK, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Stuttgart 1905.

G. HELM, Die Theorien der Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung. Leipzig 1904.

[1] A. A. MICHELSON, Amer. Journ. of Sc. (3) **22**. 120. 1881 und A. A. MICHELSON und E. W. MORLEY, ibid. **34**. 333. 1887. — [2] E. COHN, Ann. d. Phys. **7**. 20. 1902; Sitzungsber. d. Berlin. Akad. 1904. 1294 u. 1404.

# Induktion

von K. Waitz.

## 1. Entdeckung und Grundversuche.

Hatten auch schon Ampère[1] und Arago[2] einige jetzt als Induktionserscheinungen zu bezeichnende Phänomene beobachtet, so blieben diese doch unverstanden, und es war dem Genie von Faraday vorbehalten, das neue große Gebiet von elektrischen Erscheinungen zu entdecken und seine experimentellen Gesetze zu erforschen. Seine Untersuchungen finden sich in den zwei ersten und in der neunten Reihe von Faraday: Experimental researches in Electricity 1831, 1832, 1835[3].

Das Wort Induktion benutzte Faraday in sehr verschiedenartiger Weise, so wie das auch noch jetzt geschieht. Im folgenden verstehen wir darunter: die Beeinflussung (Erzeugung, Veränderung) von elektrischer Strömung durch Veränderung des Magnetfeldes, in dem die Strömung vor sich geht, oder durch relative Lagenänderung des durchströmten Körpers oder einzelner seiner Teile gegen die Richtung der Kraftlinien des Feldes.

Wir beschreiben zunächst die Grundversuche Faradays.

1. Zwei lange, gut isolierte Drähte werden nebeneinander auf einen Holzzylinder gewickelt. Durch den einen Draht wird der Strom einer galvanischen Kette geleitet. Die Enden des zweiten Drahtes führen zu einem Galvanometer. Faraday erwartete offenbar[4], daß gleichzeitig auch ein Strom in dem benachbarten Draht fließen würde. Einen andauernden Strom vermochte er allerdings nicht zu beobachten. Wohl aber zeigte das Galvanometer beim Schließen des ersten Stromes einen Ausschlag, beim Öffnen desselben einen solchen im entgegengesetzten Sinn. „Der durch den einen Draht hindurchgehende Strom induziert also in dem anderen Draht einen ähnlichen Strom, dessen Dauer aber nur eine augenblickliche ist und den Charakter einer elektrischen Welle, wie sie bei der Entladung einer Leydener Flache entsteht, besitzt“[5].

2. Ein langer Draht wird zickzackförmig auf einem Brette befestigt und mit der Kette verbunden. Auf einem zweiten Brett wird in gleicher Weise ein anderer Draht angebracht und mit dem Galvanometer verbunden. Wird der eine Draht dem anderen genähert, also das eine Brett so auf das andere gelegt, daß die einzelnen Drahtteile parallel sind, so zeigt das Galvanometer einen Strom an, welcher sofort wieder verschwindet. Bei der Entfernung der Drähte entsteht ein kurzer, entgegengesetzt gerichteter Strom. „Bei Annäherung der Drähte

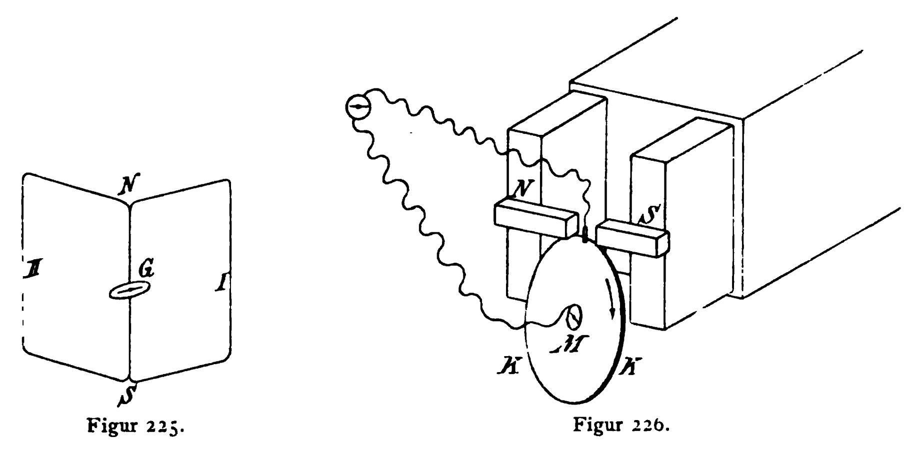
[1] A. M. Ampère, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, V., 283. 1822; Ampère et Colladon, Bull. des Sciences math. **6**. 211. 1826; Pogg. Ann. **8**. 518. 1826. — [2] F. Arago, Ann. de Chim. et de Phys. **27**. 363. 1824; **28**. 325. 1825; Pogg. Ann. **3**. 343. 1825. — [3] Übersetzt von Poggendorf in Pogg. Ann. **25**. 91 ff. 1832. Von Kalischer, 3 Bde., Berlin, Springer 1889; Ostwalds Klassiker, Nr. 81 u. 126. — [4] Vgl. auch J. Tyndall, Faraday und seine Entdeckungen. Deutsche Übersetzung herausgegeben durch Helmholtz. S. 20—21. 1870. — [5] Exp. res. I., Nr. 6—17.



war die Richtung des induzierten Stromes entgegengesetzt der des induzierenden Stromes; wurden sie voneinander entfernt, so war der induzierte Strom dem induzierenden gleichgerichtet. Blieben die Drähte an der Stelle, so wurde kein Strom induziert"[1].

Die soeben beschriebenen Versuche bezeichnet FARADAY als „Voltaelektrische Induktion" oder kurz als Voltainduktion.

3. Die eine Hälfte eines Eisenringes wird mit einer Drahtspirale umgeben, durch welche der Strom einer Kette geleitet werden kann. Die andere Hälfte des Ringes trägt eine gleiche Spirale, deren Enden zum Galvanometer führen. Beim Schließen und Öffnen des Stromes der Kette sind die Ablenkungen des Galvanometers sehr groß und haben entgegengesetzte Richtungen. Die Nadel bleibt in Ruhe, solange der primäre Strom unverändert fließt. Werden die Enden der zweiten Spirale mit Kohlenspitzen versehen, welche einander genähert werden, so konnte beim Schließen der Batterie ein kleiner Funke beobachtet werden[2].




Figur 225. Figur 226.

4. Wird in eine Drahtrolle ein Stahlmagnet gebracht oder aus derselben herausgezogen, so entstehen in der Rolle Induktionsströme von entgegengesetztem Vorzeichen[3].

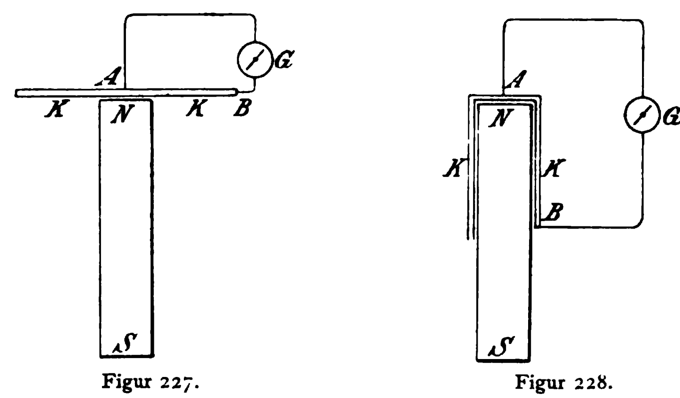
5. Der Anker eines hufeisenförmigen Stahlmagnetes ist mit Drahtwindungen versehen, deren Enden zum Galvanometer führen. Das Aufsetzen und Abreißen des Ankers erzeugt kurze Ströme von entgegengesetzter Richtung[4].

6. Eine Drahtrolle, deren Enden mit dem Galvanometer verbunden sind, erhält einen Kern aus gut ausgeglühtem, unmagnetischem Eisen. Das System wird mit seiner Achse in die Richtung der Inklinationsnadel gebracht und dann so umgekehrt, daß das obere Ende nach unten kommt. Es erfolgt ein Ausschlag am Galvanometer. Die Ursache der Induktion ist hier der Erdmagnetismus, durch welchen der Eisenstab zu einem Magnet geworden ist, dessen Pole sich bei der Anstellung des eben beschriebenen Versuches umkehren. Derselbe Versuch gelingt auch, wenn der Eisenkern fehlt, doch ist der Induktionsstrom dann erheblich schwächer[5].

7. Die Induktionswirkung des Erdmagnetismus läßt sich noch in folgender Weise zeigen. Ein großes Rechtek von Kupferdraht (Figur 225) ist so mit dem Galvanometer *G* verbunden, daß dasselbe um die Seite *NS* aus der Lage I in die Lage II gedreht werden kann. Bei dieser Bewegung erfolgt eine Ablenkung in der einen Richtung, die umgekehrte bei der entgegengesetzten Drehung[6].

[1] Exp. res. I., Nr. 18—26. — [2] Exp. res. I., Nr. 27—33. — [3] Exp. res. I., Nr. 39 bis 42. — [4] Exp. res. I., Nr. 43—59. — [5] Exp. res. II., Nr. 140—147. — [6] Exp. res. II., Nr. 171—180.

8. Die Pole eines starken magnetischen Magazins (Figur 226) sind mit den Ansatzstücken *N* und *S* von Eisen versehen. In größter Nähe derselben kann eine Kupferscheibe *K* um eine Messingachse *M* gedreht werden. Am Rande derselben zwischen *N* und *S* ist ein Schleifkontakt angebracht, von welchem ein Draht zu dem Galvanometer führt. Die andere Zuleitung derselben ist um die Messingachse geschlungen. Wird die Scheibe in Rotation versetzt, so wird ein Strom induziert, welcher so lange konstant ist, als die gleichmäßige Drehung andauert. Bei Umkehrung der Drehungsrichtung wird auch der Strom der entgegengesetzte. Dieser Versuch ist von großem Interesse. Zunächst konnte Faraday mit Recht die beschriebene Vorrichtung als eine „neue Elektrisiermaschine" bezeichnen. Der Strom, welchen dieselbe liefert, ist im Gegensatz zu den bisher besprochenen kurzen Induktionsströmen ein konstanter. Ferner handelt es sich hierbei um die Induktion in einem körperlichen Leiter im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Induktionserscheinungen in Drähten. Endlich war Faraday in der Lage, durch diese und ähnliche Versuche die bis dahin rätselhaft gebliebenen Erscheinungen des Aragoschen Rotationsmagnetismus zu erklären [1].




Figur 227. Figur 228.

Wird die Induktion durch magnetische Kräfte (irgend welchen Ursprungs, also herrührend von Stahlmagneten, vom Erdmagnetismus, von Elektromagneten) bewirkt, so bezeichnet man dieselbe als Magnetinduktion.

9. Ein zylindrischer Magnetstab *NS* (Figur 227) ist an seinem einen Ende mit einer Kupferscheibe *K* versehen, an welcher Schleifkontakte *A* und *B* angebracht sind, welche zu einem Galvanometer führen. Rotieren Scheibe und Magnet gemeinsam um ihre Achse, so entstehen Induktionsströme. Dasselbe findet statt, wenn die Scheibe allein rotiert. Keine Ströme entstehen, wenn der Magnetstab allein rotiert.

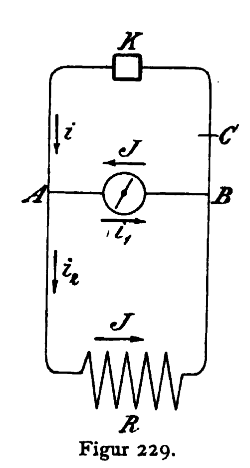
Die Versuche gelingen noch besser, wenn man die eine Hälfte des Magnets mit einer Kupferkappe *K* (Figur 228) umgibt und die Schleifkontakte in *A* und *B* anbringt. Endlich kann man die Kupfermassen ganz fortlassen und erhält Induktionsströme, wenn der Magnet allein rotiert und gleichzeitig in *A* und *B* entsprechenden Punkten auf ihm selbst die Ableitungen zum Galvanometer angebracht sind. Doch sind in diesem Fall die Induktionsströme erheblich schwächer [2]. Diese Erscheinungen wurden später als „unipolare Induktion" bezeichnet.

10. Zwei gleich lange Drähte von Kupfer und Eisen sind nebeneinander so auf einen Zylinder gewickelt, daß ein in den Innenraum eingeführter Magnetstab in denselben Induktionsströme von entgegengesetzter Richtung erregt. Werden

[1] Exp. res. I., Nr. 81—139. — [2] Exp. res. II., Nr. 217—230.

ihre freien Enden auf der einen Seite miteinander verbunden, während an den beiden Enden die Zuleitungen zum Galvanometer angebracht sind, so zeigt dasselbe bei Einführung eines Magnetes in die Doppelspirale keine Ablenkung. Aus diesen und aus ähnlichen Versuchen ist zu schließen, daß der Vorgang der Induktion unabhängig von dem Material des Leiters ist. Dies ist auch dann der Fall, wenn der Leiter aus einer leitenden Flüssigkeit besteht[1].

11. Da nach Versuch 1. in jedem Draht ein Strom induziert wird, wenn in einem benachbarten parallelen Draht ein Strom entsteht oder verschwindet, so war zu vermuten, daß bei einer einzigen Rolle, in welcher ein Strom zu fließen beginnt oder aufhört, jede Windung auf die benachbarten eine induzierende Wirkung ausüben würde. Derartige Induktionsströme, welche also in dem eigenen Stromkreis bei Änderung der Stromintensität entstehen, bezeichnet man als Extraströme. FARADAY untersuchte dieselben eingehend, indem er einen ihm von JENKIN mitgeteilten Versuch weiter verfolgte. Letzterer hatte gefunden, daß man einen kräftigen elektrischen Schlag erhält, wenn man eine Kette öffnet, in deren Schließungskreis sich ein Elektromagnet befindet, und dabei die Zuleitungen zu dem Elektromagnet mit beiden Händen berührt. FARADAY beobachtete, daß dieselbe Wirkung — nur schwächer — auch dann eintritt, wenn an Stelle des Elektromagnets eine Drahtspirale ohne Eisenkern oder überhaupt nur ein langer, geradlinig verlaufender Draht sich befindet. Dagegen erfolgte kein Schlag, wenn die Kette durch einen kurzen Draht geschlossen war. Ebenso wie die physiologischen Wirkungen verhalten sich die Öffnungsfunken an der Unterbrechungsstelle. Sie sind stark, wenn die Schließung einen Elektromagnet enthält, dagegen sehr schwach bei einem kurzen Verbindungsdraht. FARADAY erklärt diese Erscheinungen durch das Entstehen eines Induktionsstromes bei Unterbrechung des Stromkreises, wobei die elektromotorische Kraft ihren Hauptsitz in den Windungen der Spirale hat. Es gelang ihm, die verschiedensten Wirkungen dieses „Öffnungsextrastromes“ nachzuweisen. Um durch denselben die Nadel eines Galvanometers abzulenken, wurde die folgende Anordnung getroffen. Die Kette $K$ (Figur 229) enthält in ihrem Schließungskreis eine Rolle $R$ (gewöhnlich mit Eisenkern). In der Zweigleitung $AB$ befindet sich ein Galvanometer. Die Ablenkung der Nadel desselben durch den Zweigstrom $i$ wird durch eine einseitige Hemmung verhindert. Wird jetzt der Stromkreis in $C$ unterbrochen, so erfolgt eine Ablenkung der Nadel durch den Öffnungsextrastrom $J$, der hauptsächlich in $R$ entsteht und dort dem primären Strom $i_2$ gleichgerichtet ist. In ähnlicher Weise läßt sich auch der Schließungsextrastrom nachweisen. Es sei zunächst der Strom in $C$ geschlossen. Das Galvanometer wird abgelenkt; durch einseitige Hemmung wird die Nadel verhindert, bei Öffnung des Stromes in ihre Gleichgewichtslage zurückzukehren. Wird jetzt der Strom in $C$ von neuem geschlossen, so erfolgt zunächst ein Schließungsextrastrom (wiederum hauptsächlich in der Rolle $R$), von dem wenigstens ein Zweigstrom durch $AB$ in demselben Sinne wie $i_1$ geht. Infolgedessen erhält die Nadel einen momentanen Stoß, durch welchen sie noch über ihre bereits vorhandene konstante Ablenkung hinaus einen Ausschlag macht.



Figur 229.

Ersetzt man das Galvanometer durch einen dünnen Platindraht, welcher durch den konstanten Strom schwach glüht, so wird bei der Unterbrechung in $C$ das Glühen gesteigert[2].

[1] Exp. res. II., Nr. 198—216. — [2] Exp. res. IX., Nr. 1048—1118. 1835.

In den mitgeteilten Versuchen, die von FARADAY noch in mannigfachster Weise variiert wurden, sind alle Fälle von Induktion enthalten.

Wir fassen die Resultate nochmals kurz zusammen.

### Voltainduktion.

In den Leitern werden elektrische Ströme erzeugt:

a) wenn dieselben in der Nähe von stromdurchflossenen Leitern bewegt werden,

b) wenn in ihrer Nähe elektrische Ströme entstehen, verschwinden oder ihre Stärke verändern. Hierhin gehört auch der Fall der Induktion im eigenen Schließungskreise, bei Veränderung der Intensität in demselben.

### Magnetinduktion.

In den Leitern werden Ströme induziert:

a) wenn dieselben in einem magnetischen Kraftfeld bewegt werden, insbesondere, wenn sie Magnetpolen genähert oder von ihnen entfernt werden,

b) wenn in ihrer Nähe der Magnetismus in Eisenmassen entsteht, verschwindet oder seine Intensität ändert.

Selbstverständlich können die beiden Arten von Induktionen gleichzeitig vorkommen, ein Fall, der besonders bei Benutzung von Elektromagneten eintritt.

Die oben kurz angeführten Bewegungen sind als relative anzusehen, so daß ebenso gut wie die Leiter, auch die Magnete und die Ströme bewegt werden können.

Die vollständige Wesensgleichheit der kurz verlaufenden Induktionsströme mit den anderen bekannten Strömen, z. B. denen einer Voltaschen Säule, und die Möglichkeit, durch jede Art von Elektrizitätsströmung in Leitern Induktion zu erzeugen, zeigten FARADAY und seine Nachfolger[1].

## 2. Gesetze der Induktionsströme in linearen geschlossenen Leitungen.

### a) Richtung der Induktionsströme.

Die Richtung des Stromes, der durch relative Bewegung eines Leiters gegen elektrische Ströme oder Magnete in dem Leiter induziert wird, hat LENZ[2] in dem Satz angegeben:

Wenn sich ein metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stromes oder eines Magneten bewegt, so wird in ihm ein Strom erregt, der eine solche Richtung hat, daß er in dem Draht, wenn er in Ruhe wäre, eine gerade entgegengesetzte Bewegung hervorbringen würde, wofern man denselben nur in der Richtung der erteilten Bewegung und der entgegengesetzten beweglich voraussetzt.

FRANZ NEUMANN[3] drückt das kürzer so aus: „Die nach der Richtung der Bewegung des Leiters zerlegte Wirkung des induzierenden auf den induzierten Strom ist immer negativ."

Denselben Dienst leistet die Dreifingerregel von FLEMING[4]: Bringt man den Daumen der rechten Hand in Richtung der Verschiebung des induzierten Leiterstückes, den Zeigefinger in Richtung des induzierenden Magnetfeldes, so gibt der dritte Finger, senkrecht zu den beiden andern ausgestreckt, die Richtung des Induktionsstromes an. Maximale Induktion findet statt, wenn Leiterstück, Richtung des Magnetfeldes und Richtung der Verschiebung ein rechtwinkliges Achsenkreuz bilden. Da jeder elektrische Strom ein Magnetfeld darstellt, so kann man all-

---

[1] Literatur s. G. WIEDEMANN, Die Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl., IV, S. 1—58. 1898. — [2] E. LENZ, Pogg. Ann. 31. 439—494. 1834. — [3] F. NEUMANN, Abhandl. der Berliner Akad. 1845. — [4] J. A. FLEMING, Electrician. 14. 396. 1884.

gemein sagen: Die Richtung des Induktionsstromes in einem Leiterstück ist derart, daß seine elektromagnetische Wirkung die ihn erzeugende Veränderung des Magnetfeldes zu hemmen sucht.

Das gilt auch für die Erscheinungen der Selbstinduktion, denn bei der Schließung eines Stromkreises ist der in ihm erzeugte Induktionsstrom dem Schließungsstrome entgegengesetzt gerichtet, während bei der Öffnung der verschwindende Strom mit dem induzierten Extrastrom gleiche Richtung hat.

### b) Elektromotorische Kraft und Intensität der Induktionsströme.

Die quantitativen Gesetze der Induktionsströme wurden nach FARADAY von LENZ [1], FELICI [2], W. WEBER [3], EDLUND [4] u. a. [5] experimentell erforscht. Eine mathematische Theorie der Induktion hat zuerst FRANZ NEUMANN [6] in zwei schönen Abhandlungen gegeben. Sie setzt allerdings die Gültigkeit des AMPÈREschen Gesetzes der Wirkung zweier Stromelemente aufeinander voraus, doch ist sie von so großer, nicht nur historischer, Wichtigkeit, daß wir eine ganz kurze Skizze von ihr folgen lassen. NEUMANN geht von dem LENZschen Satze (s. oben) aus und bildet aus ihm zwei einfache und naturgemäße Annahmen über die Größe $e$ der in einem Leiterelement $ds$ in der Zeiteinheit induzierten elektromotorischen Kraft, wenn das Element sich im elektrodynamischen oder magnetischen Kraftfeld von der Stärke $F$ mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt. Ist $F_v$ die in Richtung der Bewegung fallende Komponente von $F$, so setzt NEUMANN:

$$e\,ds = -a\,F_v\,v\,ds \quad .$$

Ist $dl$ die Strecke, um die in der Zeit $dt$ das Leiterelement verschoben wird, d. h.

$$v = \frac{dl}{dt} \quad ,$$

also:

$$e\,ds\,dt = -a\,F_v\,dl\,ds$$

gibt die im Zeitelement $dt$ induzierte elektromotorische Kraft an, diese ist nach der Bedeutung der rechten Seite dieser Gleichung, gleich der Arbeit, die bei der Verschiebung von $ds$ gegen die Kraft des Feldes geleistet wird, wenn man sich $ds$ von dem Strom $a$ durchflossen denkt. Dabei hängt $a$, die NEUMANNsche Induktionskonstante, nur von der Wahl der Einheiten ab. Benutzen wir das elektromagnetische Maßsystem, dann ist $a = 1$.

NEUMANN kommt, nachdem er die Anwendung des OHMschen Gesetzes auf die mit der Zeit veränderlichen Induktionsströme gerechtfertigt hat, zu dem Resultat, daß die in einer geschlossenen Leitung (1) induzierte elektromotorische Kraft gleich ist der Änderung des Potentials der das Feld erzeugenden Ströme oder Magnete bezüglich der geschlossenen, von einem Strom mit der Intensität 1 durchflossenen Leitung.

Ist z. B. das induzierende System (2) ein geschlossener Strom, so ist dessen elektrodynamisches Potential bezüglich der Leitung (1) [s. Artikel: Elektrodynamik, Gleichung (9)]

$$P = -i_2 \int\limits_{s_1}\int\limits_{s_2} \frac{ds_1\,ds_2}{r} \cos(ds_1\,ds_2) \quad ,$$

---

[1] E. LENZ, Pogg. Ann. **34**. 385. 1835. — [2] R. FELICI, Ann. de Chim. et de Phys. (3). **34**. 64. 1852; **39**. 222. 1853; Nuovo Cimento **9**. 345. 1859. — [3] W. WEBER, Elektrodynamische Maßbestimmungen. Abhandl. d. kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1846; Webers Werke **3**. 92. — [4] E. EDLUND, Pogg. Ann. **77**. 161. 1849. — [5] Literatur s. G. WIEDEMANN, Lehre von d. Elektr. **4**. 23—58. 1898. — [6] F. NEUMANN, l. c. u. Abhandl. der Berliner Akad. 1847.

und ist die magnetische Permeabilität überall $\mu = 1$, so wird

$$P = -Q \quad ,$$

wo $Q$ den magnetischen Induktionsfluß bedeutet, den (2) durch die Stromfläche (1) hindurchsendet. Demnach

$$dt \int_s e\,ds = \bar{e} = -\frac{dQ}{dt}dt \quad , \tag{1}$$

also die ganze während der endlichen Zeit der Veränderung induzierte elektromotorische Kraft:

$$E = Q_0 - Q' \quad , \tag{2}$$

wo $Q_0$ resp. $Q'$ die Kraftströmung am Anfang resp. Ende des Vorganges bezeichnen. Hätte die Permeabilität den konstanten Wert $\mu$, so wäre

$$Q = \mu\, i_2 \int\limits_{s_1}\int\limits_{s_2} \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1\, ds_2) = i_2\, L_{12} \quad .$$

$$L_{12} = \mu \int\limits_{s_1}\int\limits_{s_2} \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1\, ds_2) \tag{3}$$

heißt der **Koeffizient der wechselseitigen Induktion** der zwei Leitungen aufeinander, so erklärt sich der schon im Artikel Elektrodynamik gebrauchte Name.

Sind die beiden Leitungen in Gestalt und relativer Lage unverändert, so ist $L_{12}$ konstant und die Induktion von (2) auf (1) findet nur durch Änderung der Stromstärke $i_2$ statt, d. h. es ist:

$$\bar{e} = -L_{12}\frac{di_2}{dt}dt \quad .$$

Ist nur eine Leitung vorhanden, so tritt an Stelle der wechselseitigen Induktion die **Selbstinduktion**, deren elektromotorische Kraft durch die Änderung des magnetischen Induktionsflusses bestimmt ist, den der elektrische Strom durch seine eigene Stromfläche hindurchsendet, und für $L_{12}$ tritt ein der **Koeffizient der Selbstinduktion**

$$L = \mu \int\limits_{s_1}\int\limits_{s_1} \frac{ds_1\, ds_1'}{r} \cos(ds_1\, ds_1') \quad , \tag{4}$$

wo $ds_1$ und $ds_1'$ zwei Elemente derselben Leitung bedeuten, über die zweimal zu integrieren ist (s. Artikel: Elektrodynamik).

Die Elektrizitätsmenge des in der gesamten Leitung während des ganzen Vorganges induzierten Stromes nannte NEUMANN den **Integralstrom**, seine elektromotorische Kraft haben wir mit $E$ bezeichnet, während $\bar{e}$ die elektromotorische Kraft des **Differentialstromes** ist. Die Intensität des Stromes findet man nach dem OHMschen Gesetz.

HELMHOLTZ[1] zeigte 1847, daß die Existenz der Induktionsströme eine notwendige Folge aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie ist, nachdem OERSTED und AMPÈRE die elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen von Strömen auf Magnete und untereinander entdeckt hatten. Er denkt sich z. B. einen Leiterkreis vom Widerstand $w$ durch einen Strom $i$ durchflossen, der von der innern elektromotorischen Kraft $K$ (z. B. einer Kette) erzeugt wird. Bewegte sich der Leiterkreis relativ gegen einen Magneten, so wird in der Zeit $dt$ die Arbeit geleistet [s. Artikel: Elektrodynamik, Gleichung (1)]

$$A = i\frac{dQ}{dt}dt \quad .$$

[1] H. HELMHOLTZ, Über die Erhaltung der Kraft 1847; Ges. Abhandl. 1, 62.

Im Stromkreis wird die JOULEsche Wärme $i^2 w\,dt$ erzeugt, und zur Erhaltung des Stromes auf der Intensität $i$ wird von der Kette die Arbeit aufgewandt $Ki\,dt$, folglich

$$Ki\,dt = i^2 w\,dt + i\frac{dQ}{dt}dt \quad ,$$

also

$$iw = K - \frac{dQ}{dt} \quad , \tag{5}$$

d. h. die Stromintensität ist eine andere als bei relativer Ruhe von Magnet und Leiterkreis. (5) hat die Form des OHMschen Gesetzes und $-\frac{dQ}{dt}$ wird als induzierte elektromotorische Kraft bezeichnet. Die Gleichung kann nach dem Prinzip der Kontinuität auch auf den Grenzfall $K = 0$ ausgedehnt werden, dann wird während der Zeiteinheit in der anfänglich stromlosen, geschlossenen Leitung dieselbe elektromotorische Kraft $-\frac{dQ}{dt}$ induziert wie bei F. NEUMANN. Ganz allgemein gilt der Satz: Die in einer geschlossenen, linearen Leitung induzierte elektromotorische Kraft ist gleich der negativen Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Induktionsflusses (der Kraftströmung[1]), der von der Leitung umschlossen wird (d. h. der durch die Stromfläche der Leitung hindurch geht).

Wird die Induktion in einer geschlossenen Leitung dadurch hervorgerufen, daß ein Stück der stets geschlossen bleibenden Leitung sich im Magnetfeld bewegt, z. B. rotiert, so spricht sich der allgemeine Satz oft für die Anwendung bequemer so aus: Die in der Leitung induzierte elektromotorische Kraft ist gleich der Anzahl der von dem bewegten Leiterstück in der Zeiteinheit durchschnittenen Kraftlinien.

## 3. Das WEBERsche Grundgesetz.

Einen großartigen Versuch, die Erscheinungen der Induktion, Elektrodynamik und der statischen Elektrizität unter einen Ausdruck zu fassen, hat W. WEBER[2] in dem nach ihm benannten Gesetz gemacht. Seine Anschauungen zeigen vielfache Analogie mit den Vorstellungen der neueren Elektronentheorie, unterscheiden sich aber von dieser u. a. dadurch, daß sie als Ausgangspunkt die Fernwirkungen und die Gültigkeit des AMPÈREschen Gesetzes nehmen. WEBER denkt sich alle elektrischen Wirkungen von elektrischen Teilchen $q$ und $q'$ ausgehend, die in der Ruhe nach dem COULOMBschen Gesetz aufeinander wirken, während ihre relative Bewegung und Beschleunigung die elektrodynamischen und Induktionserscheinungen hervorbringen. Jene folgen dem AMPÈREschen Gesetz, diese ergeben für geschlossene Bahnen das F. NEUMANNsche Induktionsgesetz.

Der allgemeine Ausdruck WEBERs für die zwischen den elektrischen Teilchen $q$ und $q'$ wirkende Abstoßung lautet:

$$\frac{q\,q'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2\,c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2\,r\frac{d^2 r}{dt^2}\right]\right\} \quad ,$$

wo $c$ eine sehr große Geschwindigkeit, merklich die Lichtgeschwindigkeit, und $r$ den Abstand von $q$ und $q'$ bedeutet.

---

[1] Meist spricht man statt von dem magnetischen Induktionsfluß kürzer und ungenauer von der Kraftströmung durch die Stromfläche. Im folgenden wird das zuweilen auch geschehen, wo eine Verwechselung nicht möglich ist, um das so oft und fast verwirrend wiederkehrende Wort Induktion manchmal zu vermeiden. — [2] W. WEBER, Elektrodynamische Maßbestimmungen 1846; Gesammelte Werke 3. 132 usw.

Eine wirkliche Gültigkeit kann dieses Gesetz nicht beanspruchen, auch fehlen ihm heute die theoretischen Grundlagen, doch hat es zu wichtigen und interessanten Folgerungen und Diskussionen[1] geführt und bezeichnet den umfassendsten Versuch der strengen Fernwirkungstheorien, die elektrischen Erscheinungen einheitlich darzustellen[2].

## 4. Die MAXWELL-HERTZsche Theorie.

Wie in dem Artikel „Elektrodynamik" ausgeführt, gelangt die MAXWELL-HERTZsche Theorie zu ihrer ersten Hauptgleichung, indem sie die für geschlossene Leitungsströme gefundenen Resultate auf jede mögliche elektrische Strömung ausdehnt. In ähnlicher Weise wird die zweite Hauptgleichung dieser Theorie durch Verallgemeinerung des FARADAYschen Induktionsgesetzes gewonnen.

Das Gesetz gab die in einer geschlossenen linearen Leitung induzierte elektromotorische Kraft durch die Änderung des magnetischen Induktionsflusses, der von der Leitung umschlungen war. Die MAXWELLsche Theorie dehnt das auf jede beliebige Kurve $s$ aus und definiert als elektromotorische Kraft der Induktion in einem Kurvenelement $ds$ die Komponente $\mathfrak{E}_s$ der an dem Orte von $ds$ induzierten Feldstärke $\mathfrak{E}$, die in Richtung von $ds$ wirkt.

Es wäre also die elektromotorische Kraft in der beliebigen in sich geschlossenen Kurve $s$ das Linienintegral der Feldintensität längs $s$, d. h.

$$e = \int_s \mathfrak{E}_s \, ds \quad .$$

Die Änderungsgeschwindigkeit des von der Kurve umrandeten magnetischen Induktionsflusses ist

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_S \mathfrak{B}_n \, dS\right\} \quad ,$$

wo die positive Normale $n$ auf $dS$ und die Umlaufsrichtung der Kontur $s$ der Fläche $S$ wie früher im Sinne einer Rechtsschraube zu nehmen sind.

Ruht die Strombahn und also auch ihre Stromfläche im Raum, und ersetzen wir dann die $d$ durch die runden $\partial$, so wird bei Anwendung des GAUSSschen Maßsystems die zweite Hauptgleichung der MAXWELLschen Theorie für ruhende Körper:

$$\text{(II)} \qquad \int \mathfrak{E}_s \, ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \mathfrak{B}_n \, dS\right\}$$

oder in Differentialform:

$$\text{(IIa)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \quad .$$

Das wäre bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} \\
\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} \\
\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} \quad .
\end{aligned}$$

---

[1] S. u. a. H. HELMHOLTZ, Borchardts Journal **72**. 1. 1870; **75**. 35. 1872 u. Ges. Abhdlg. **1**. 545 usw. — W. WEBER, Abhdlg. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Klasse **10**. 1. 1874 usw. — Literatur s. G. WIEDEMANN, l. c. **4**. 840—892. — [2] Auf weiteres kann hier nicht eingegangen werden. Eine Darstellung und Besprechung der verschiedenen Fernwirkungsgesetze findet sich in der Enzyklopädie d. math. Wiss. $V_2$, Heft 1; Artikel von R. REIFF und A. SOMMERFELD, Standpunkt der Fernwirkung, Elementargesetze. Leipzig 1904.

Hätte man bewegte Körper, so gilt der Ausdruck für die Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Induktionsflusses noch, es setzt sich aber jetzt die Änderung des Induktionsflusses durch die Fläche $S$ (wie in dem analogen Fall der ersten Hauptgleichung) aus zwei Teilen zusammen. Aus einem ersten, der sich auf die Änderung von $\mathfrak{B}$ an einem bestimmten Punkt des Raumes bezieht, und den wir wie früher mit dem runden $\partial$ bezeichnen wollen, und aus einem zweiten Teil, der sich auf die Änderung von $\mathfrak{B}$ in den verschiedenen Punkten des Raumes bezieht, zu dem $dS$ bei seiner Bewegung gelangt. Der letzte Teil wird wieder von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ dieser Bewegung abhängen. Dabei soll die Kurve $s$ stets durch dieselben materiellen Teilchen gehen, und ebenso soll das für die Fläche $S$ gelten.

Man erhält sonach für bewegte Körper die ganz analoge Umwandlung des $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ wie bei der ersten Hauptgleichung für $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$, d. h. es wird ausführlich geschrieben die zweite Hauptgleichung der MAXWELLschen Theorie für bewegte Körper:

$$\text{(IIb)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{B} + \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{v}]\right\}$$

und in rechtwinkligen Koordinaten[1]:

$$-c\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial t} + \mathfrak{v}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{v}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{v}_x)$$
$$- \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_z\mathfrak{v}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{v}_z) \quad ,$$

$$-c\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial t} + \mathfrak{v}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{B}_y\mathfrak{v}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{v}_y)$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{B}_x\mathfrak{v}_y - \mathfrak{B}_y\mathfrak{v}_x) \quad ,$$

$$-c\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial t} + \mathfrak{v}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{B}_z\mathfrak{v}_x - \mathfrak{B}_x\mathfrak{v}_z)$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{B}_y\mathfrak{v}_z - \mathfrak{B}_z\mathfrak{v}_y) \quad .$$

Nimmt man mit HERTZ an, daß es ebenso wie wahre Elektrizität auch wahren Magnetismus gäbe, so wäre in (IIb) $\operatorname{div}\mathfrak{B} = \varrho_m$, wo $\varrho_m$ die Dichte des wahren Magnetismus bezeichnet, nimmt man aber an, was die Betrachtung vereinfacht und zur Darstellung der Tatsachen genügt, daß alle magnetischen Induktionslinien in sich geschlossen sind, es also keinen wahren Magnetismus gibt, so wird $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ und (IIb) reduziert sich auf

$$\text{(IIb}') \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{v}]\right\} \quad .$$

Die beiden Hauptgleichungen (Ib) uud (IIb) sind ganz ähnlich gebaut, und die Analogie würde vollkommen sein, wenn es auch magnetische Leitungsströme gäbe. Man bezeichnet deshalb die Glieder der rechten Seite von (IIb) manchmal als **magnetischen Strom**, der also auch aus mehreren Teilen bestehen kann.

Dieser Parallelismus zwischen der magnetischen Kraft und den Verschiebungsströmen mit der elektrischen Kraft und den magnetischen Strömen ist besonders von HEAVISIDE[2] betont und auch von HERTZ[3] zu Folgerungen benutzt worden.

---

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **41**. 369. 1890. — [2] O. HEAVISIDE, Electrical Papers **1**. 441, 449, 451 usw. — [3] H. HERTZ, Wied. Ann. **23**. 84. 1884 und Ges. Werke **1**. 295.

Der zweite Teil des magnetischen Stromes, der nach (IIb′) für bewegte Körper vorhanden sein muß, wird u. a., wie wir später sehen werden, durch die Erscheinungen der unipolaren Induktion nachgewiesen.

## 5. Die Elektronentheorie.

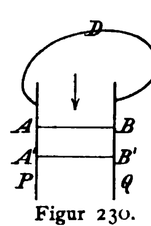
Es kann, wie bei der ersten Hauptgleichung, formal eine volle Übereinstimmung zwischen der zweiten Hauptgleichung der Elektronentheorie und der MAXWELL-HERTZschen Theorie hergestellt werden, so daß Gleichung (IIa) auch für jene Theorie als zweite Hauptgleichung (Induktionsgesetz) angesehen werden darf. Dabei besteht natürlich wieder die Verschiedenheit in der Auffassung, nach der u. a. der Verschiebungsstrom ($\mathfrak{T}$) (die elektrische Erregung) in die zwei Teile zerfällt: die elektrische Erregung $\bar{\mathfrak{d}}$ des ruhenden Äthers und die Polarisation $\mathfrak{P}$ des materiellen Dielektrikums

$$\mathfrak{T} = \bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{P} \quad .$$

Diese Verschiedenheit hat Veranlassung zu Versuchen gegeben die Folgerungen der beiden Theorien miteinander zu vergleichen; die Versuche, besonders der WILSONsche, sprechen zugunsten der Elektronentheorie.

## 6. Versuche über Induktionswirkungen eines im Magnetfeld bewegten Dielektrikums.

Um eine Folgerung der HERTZschen Theorie zu prüfen, ließ BLONDLOT[1] zwischen zwei parallelen, vertikalen, durch einen Draht verbundenen Metallplatten $P$ und $Q$ (s. Figur 230) in vertikaler Richtung (Pfeil) einen Luftstrom mit Geschwindigkeiten bis zu 140 m pro Sekunde hindurchströmen. Parallel den Platten und senkrecht zur Luftbewegung (senkrecht zur Ebene der Zeichnung) liefen die Kraftlinien eines homogenen Magnetfeldes von etwa 10 000 C. G. S. Die Teilchen, die in einem Augenblick auf der Linie $AB$ lagen, mögen nach der Zeit $dt$ nach $A'B'$ gelangt sein. Setzen wir für Luft $\mu = 1$ und ist $AB = l$ und nimmt man nach (II) $\int \mathfrak{H}_n dS$ über das Rechteck $ABB'A'$, so wird



Figur 230.

$$\int \mathfrak{E}_s ds = \pm \frac{1}{c} l |\mathfrak{H}| \, \mathfrak{v}| \quad ,$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Richtung des Vektors $[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{H}]$ mit der Richtung von $AB$ übereinstimmt oder nicht.

Bei stationärem Zustand ist im Draht $\mathfrak{E} = 0$, es besteht also in Richtung von $A$ nach $B$ zwischen den Platten eine elektrische Kraft

$$\pm \frac{1}{c} |\mathfrak{H}| |\mathfrak{v}| \quad .$$

Das entspricht einer elektrischen Verschiebung, so daß die Platten $P$ und $Q$ Ladungen haben müssen, deren Flächendichte

$$\pm \frac{\varepsilon}{4\pi c} |\mathfrak{H}| |\mathfrak{v}| \quad \text{und} \quad \mp \frac{\varepsilon}{4\pi c} |\mathfrak{H}| |\mathfrak{v}| \quad .$$

Diese Ladungen müssen im Moment, wo die Bewegung anfing oder das Magnetfeld erregt wurde, durch einen Strom im Draht $D$ entstanden sein. BLONDLOT konnte aber diesen nach der Rechnung beträchtlichen Strom nicht nachweisen.

[1] R. BLONDLOT, C. R. 133. 778. 1901 u. Journ. d. Phys. 1. 8. 1902.

Nach der Elektronentheorie liefert nur die Polarisation der bewegten Luftteilchen einen Beitrag zu der den induzierten Strom erzeugenden Ladung, nicht die Verschiebung in dem ruhenden Äther, es wird also nach ihr die Größe der Ladung auf $P$ und $Q$:

$$\pm\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}|\mathfrak{H}|\,|\mathfrak{v}| \quad \text{und} \quad \mp\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}|\mathfrak{H}|\,|\mathfrak{v}| \quad .$$

Ebenso findet sich die Stärke des Stromes im Verbindungsdraht aus dem Wert, den die HERTZsche Theorie gibt, durch Multiplikation mit $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$.

Nun ist für Luft $\varepsilon$ nur sehr wenig verschieden von 1, also ist das Resultat von BLONDLOT nach der Elektronentheorie zu erwarten.

Ein positives Resultat zugunsten der Elektronentheorie erhielt WILSON[1], als er einen hohlen Ebonitzylinder, der auf der inneren und äußeren Oberfläche dünne metallische Belegungen hatte, um seine horizontal gestellte Achse in einem Magnetfeld rotieren ließ. Das Magnetfeld wurde durch eine Stromspule erzeugt, die den Zylinder in ihre Höhlung einschloß, die Umdrehungszahl ($n$) konnte bis auf fast 200 in der Sekunde gesteigert werden. Die Ladungen, die nach der Theorie die beiden Belegungen des rotierenden Zylinders im Magnetfeld erhalten, wurden durch ein Elektrometer gemessen, dessen eines Quadrantenpaar mit der äußeren Belegung verbunden war, während die innere Belegung und das andere Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet wurde.

Die induzierte elektromotorische Kraft hängt wieder nach der LORENTZschen Theorie nur von der Polarisation ab, sie ist, wenn $r_2$ der äußere und $r_1$ der innere Radius des Hohlzylinders:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\frac{n\pi}{c}(r_2^2-r_1^2)|\mathfrak{H}| \quad ,$$

da $\mu = 1$ zu setzen, d. h. gleich der durch einen ebenso gestalteten Leiter induzierten, multipliziert mit dem Faktor $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$.

Für die Ladung des Elektrometers muß aber auch noch die Verschiebung im ruhenden Äther berücksichtigt werden, die $= V$, der elektrostatischen Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen. Beide Verschiebungen sind radial, senkrecht zur Drehungsachse gerichtet.

Durch seine Messungen konnte WILSON quantitativ die angegebenen Folgerungen der Theorie bestätigen, so daß damit das aus der HERTZschen Theorie folgende Resultat, nach dem $\varepsilon$ an die Stelle von $\varepsilon - 1$ zu treten hätte, widerlegt ist.

## 7. Änderung der elektromagnetischen Energie durch Strahlung.

Die Erkenntnis, daß die elektrischen Wirkungen (die elektromagnetische Energie) Zeit brauchen, wie das Licht, um im Raum fortzuschreiten, verlangt, daß ein endlicher Raumteil, in dem sich ein bestimmter Betrag von elektromagnetischer Energie findet, durch Strahlung Energie verliert, wenn er nicht in eine für die elektromagnetische Energie undurchdringliche Hülle eingeschlossen ist. Dieser Begriff des Energieflusses ist schon 1884 von POYNTING[2] entwickelt worden, er ergibt sich aus den MAXWELLschen Gleichungen, wie folgt[3]:

---

[1] H. A. WILSON, Phil. Trans. Roy. Soc. **204**, A. 121. 1904. — [2] J. H. POYNTING, Phil. Trans. Roy. Soc. **175**. 343. 1884. S. auch W. WIEN, Wied. Ann. **45**. 685. 1892. — KR. BIRKELAND, ibid. **52**. 357. 1894. — G. MIE, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. IIa **107**. 1113. 1898. — [3] S. z. B. H. HERTZ, Ges. Werke **2**. 232.

Geht man aus von den zwei Hauptgleichungen für ruhende Körper:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\left(\mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) \qquad \text{und} \qquad c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \quad ,$$

und multipliziert man die erste mit $\mathfrak{E}$, die zweite mit $\mathfrak{H}$ und integriert über einen Raum, dessen Element $d\tau$, so wird:

$$c\int(\mathfrak{E} \operatorname{rot}\mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{rot}\mathfrak{E})\, d\tau = 4\pi\int \mathfrak{E}\,\mathfrak{j}\, d\tau + \int\left(4\pi\,\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) d\tau \quad .$$

Da

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,\mathfrak{E} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H} \quad ,$$

so geht das zweite Integral der rechten Seite über in:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\varepsilon}{2}\cdot\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{2}\,\mathfrak{H}^2\right) d\tau \quad .$$

Links ist

$$\mathfrak{E} \operatorname{rot}\mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\operatorname{div}[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}] \quad .$$

Verwandelt man noch das Raumintegral links nach dem GAUSSschen Satz in ein Oberflächenintegral, so erhält man, wenn $n$ die positive Normale auf $dS$ bezeichnet:

$$-c\int[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}]_n\, dS = 4\pi\int \mathfrak{E}\,\mathfrak{j}\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 + \mu\,\mathfrak{H}^2)\, d\tau \quad .$$

Setzt man

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}] \quad ,$$

so heißt $\mathfrak{S}$ der Energiefluß, der Strahlvektor oder der POYNTINGsche Vektor: er steht senkrecht zu der durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gelegten Ebene, so daß $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$ ein Rechtssystem bilden.

Man kann dann die Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 + \mu\,\mathfrak{H}^2)\, d\tau\right\} = -\int \mathfrak{E}\,\mathfrak{j}\, d\tau - c\int \mathfrak{S}_n\, dS \quad .$$

Die linke Seite stellt die Änderung der elektromagnetischen Energie, d. h. der Summe der elektrischen und der magnetischen Energie, dar, das erste Glied rechts ist die JOULEsche Wärme, die in Leitern bei der Strömung von der Dichte $\mathfrak{j}$ entwickelt wird, das letzte Glied gibt den Energiefluß durch die Oberfläche des Raumes an, und $\mathfrak{S}$ ist die Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchtritt. Die Gleichung sagt also aus, daß neben JOULEscher Wärme noch ein Energieverlust durch Ausstrahlung stattfindet.

Bei dieser Betrachtung ist angenommen, daß in jeder Volumeinheit des elektromagnetischen Feldes ein Energiebetrag

$$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 + \mu\,\mathfrak{H}^2)$$

sich befinde, man nennt ihn die Energiedichte und denkt sich also die Energie wie eine Substanz im Raum verbreitet.

## 8. Modelle.

Man hat die elektrodynamischen und Induktionserscheinungen besonders in England vielfach durch mechanische Modelle zu veranschaulichen und aus deren Bewegungen Rückschlüsse auf die elektrischen Vorgänge zu machen gesucht.

Schon MAXWELL konstruierte solche Modelle. Wir können nicht näher auf diese Untersuchungen eingehen, sondern führen nur einige derartige Konstruktionen an:

Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **30**. 30. 1890 oder Scient. Papers **3**. 376.
J. J. THOMSON, Elemente d. math. Th. d. El. u. d. Magn. Deutsch von Wertheim. Braunschweig 1897, 311.
O. LODGE, Modern views in electricity. London 1889. 177, 193 usw.
H. EBERT, Wied. Ann. **49**. 642. 1893. Magnet. Kraftfelder. 2. Aufl. Leipzig. 1905. 314.
L. BOLTZMANN, Vorles. über Maxwells Theorie. Leipzig 1891. 42 u. Tafel.
F. HASENÖHRL, Wien. Sitz.-Ber. IIa **105**. 900. 1896.
A. GARBASSO, Atti dell Assoc. elettrotecnica ital. vol. II. fasc. **2**. 1898 u. Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht **15**. 326. 1902.

Dann sind noch Arbeiten von FITZGERALD, SOMMERFELD und LARMOR zu nennen; besonders der letztere machte in ausgedehnter Weise Anwendung von solchen Konstruktionen.

## 9. Quasistationäre Ströme.

Der Einfluß der Verschiebungs- neben den Leitungsströmen macht sich erst bemerklich, wenn die (bei der Induktion ja stets vorhandene) Veränderlichkeit der Strömung eine sehr schnelle oder die Bahn eine sehr lange ist, so daß der Strom nicht mehr in allen Punkten seiner Bahn merklich dieselbe Phase hat und die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegen die Geschwindigkeit, mit der der Strom sich ändert, nicht mehr sehr groß ist. Dann dürfen die für stationäre Strömung gewonnenen Resultate nicht mehr ohne Modifikation verwendet werden, das tritt z. B. bei so schnellen Schwingungen ein, wie sie HERTZ zuerst erzeugt hat. Zunächst behandeln wir nur Induktionserscheinungen, bei denen die Leitungsströme allein zu berücksichtigen sind, sogenannte quasistationäre Ströme, und dürfen dann von Gleichung (5) ausgehen.

Die KIRCHHOFFschen Sätze der Stromverzweigung sind dabei nicht direkt anwendbar; die hier geltenden allgemeinen Gleichungen sind zuerst von HELMHOLTZ[1] angegeben und experimentell geprüft worden, doch gestaltet sich in praxi die Sache meist einfacher. Der erste Satz gilt auch hier, für jeden Verzweigungspunkt ist $\Sigma(i) = 0$. Der zweite KIRCHHOFFsche Satz schreibt sich für einen aus $p$ Zweigen bestehenden, geschlossenen Umgang:

$$\Sigma_p (i_p w_p) = \Sigma_p \left(K_p - \frac{dQ_p}{dt}\right) \quad ,$$

wo

$$Q_p = L_{1p} i_1 + L_{2p} i_2 + \ldots + \tfrac{1}{2} L_p i_p + L_{rp} i_r + \ldots$$

die gesamte Induktion aller im Leiternetz vorhandenen Zweige bezüglich des $p$ten Zweiges bedeutet.

Sind in einem geschlossenen Umgang z. B. Spiralen vorhanden, so ist deren Selbstinduktion und wechselseitige Induktion weit überwiegend über die der geraden Drähte und jene braucht allein berücksichtigt zu werden.

Für eine solche Drahtspule muß die Induktion in allen einzelnen Windungen summiert werden, um die Wirkung der ganzen Spule zu erhalten, d. h. der Induktionsfluß durch eine Spule von $h$ Windungen ist $(\Sigma_h \mathfrak{B}_n S_h)$, wenn $S_h$ die Fläche der $h$ten Windung bezeichnet. $S = \Sigma_h (S_h)$ heißt die Windungsfläche der Spule. Man kann sie bei Herstellung der Spule aus den Dimensionen und der Anzahl der einzelnen Windungen finden, oft aber ist es nötig, sie auf andere Weise zu bestimmen. Das geschieht z. B. nach F. KOHLRAUSCH[2] mittelst magnetischer Fernwirkung der von einem konstanten Strom durchflossenen Spule auf

[1] H. HELMHOLTZ, Pogg. Ann. **83**. 505. 1851; Ges. Abhandl. **1**. 429. — [2] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **18**. 513. 1883. S. auch F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **18**. 433. 1883. — A. HEYDWEILLER, Wied. Ann. **41**. 876. 1890.

die Nadel einer Tangentenbussole deren Kreis derselbe Strom durchfließt. Durch Vergleich und passende Kombination der Wirkung der Spule und des in seinen Dimensionen bekannten Kreises der Bussole auf die Nadel findet man die Windungsfläche.

## 10. Durch Bewegung hervorgerufene Induktionserscheinungen in geschlossenen, linearen, stromlosen Leitungen.

Ist die in der Leitung vor Beginn des Induktionsvorgangs vorhandene elektromotorische Kraft $K = 0$, so reduziert sich die Induktionsgleichung auf

$$i w = -\frac{dQ}{dt}$$

und bleibt der Widerstand der Leitung ungeändert, so wird der Integralstrom, d. h. die ganze durch die Leitung fließende Elektrizitätsmenge:

$$G = \int_0^t i\,dt = \frac{1}{w}(Q_0 - Q') = \frac{\mathfrak{E}}{w} \quad ,$$

wenn $t$ die Zeit, innerhalb deren der ganze Induktionsvorgang abläuft. $Q_0$ und $Q'$ sind dabei die Werte des magnetischen Induktionsflusses durch die Stromfläche vor und nach der die Induktion erzeugenden Änderung und $\mathfrak{E}$ die gesamte induzierte elektromotorische Kraft. $G$ wie $\mathfrak{E}$ sind demnach unabhängig von der Selbstinduktion in der Leitung und von der Geschwindigkeit, mit der jene Änderung ausgeführt wird; man kann bei Berechnung der beiden Größen diese Änderung also beliebig langsam geschehen lassen.

### a) Stromlose Spule, der aus der Unendlichkeit ein permanenter Magnet genähert wird.

$$Q_0 = 0 \quad \text{und} \quad G = -\frac{Q'}{w} \, , \qquad \mathfrak{E} = -Q' \quad ,$$

$Q'$ ist nur von der Endlage des Magneten gegen die Spule abhängig.

Man erhält den Wert von $Q'$, indem man die Summe der Kraftströmungen bildet, die von den zwei Polen durch die Spule hindurchgesandt werden.

Haben wir statt der Spule einen einzigen Drahtkreis, in dessen Achse sich der Magnet befindet, ist die Polstärke $\pm m$, Abstand der zwei Pole voneinander $l$, Entfernung der Pole vom Kreiszentrum in der Endlage des Magneten $z$ und $l + z$ (s. Eigur 231), so ist

$$\mathfrak{E} = 2\pi m \left\{ \frac{l + z}{\sqrt{R^2 + (l + z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\} \quad .$$

Wird der Magnet aus großer Entfernung durch den Drahtkreis senkrecht hindurchgeschoben, bis die Mittelpunkte von Kreis und Magnet zusammenfallen, so erreicht $\mathfrak{E}$ seinen größten Wert, es wird $z = -\frac{l}{2}$ und

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi m l}{\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad .$$

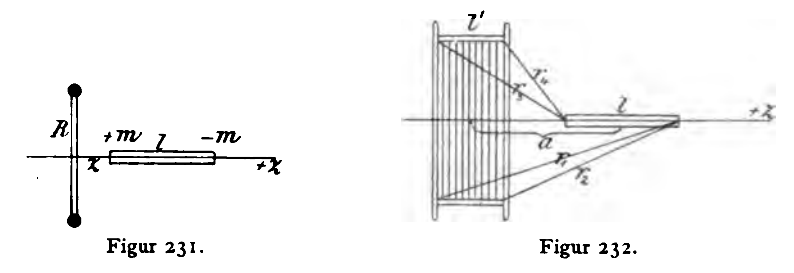
An Stelle des einfachen Drahtkreises befinde sich eine Spule mit $n$ Windungen von der Länge $l'$ und dem Radius $R$ (s. Figur 232), der Magnet liege in

der Spulenachse und die Entfernung seines Zentrums von dem der Spule sei $a$. Dann erhält man die Kraftströmung, die der Magnet durch die Spule in dieser Lage hindurchsendet und also $\mathfrak{E}$, indem man den vorletzten Ausdruck für $\mathfrak{E}$ mit $\frac{n\,dz}{l'}$ multipliziert und zwischen den Grenzen $\pm\frac{l'}{2}$ integriert. Dann ist:

$$\mathfrak{E} = \frac{2\pi m n}{l'}(r_1 - r_2 - r_3 + r_4)$$

und fallen die Zentren von Spule und Magnet zusammen:

$$E = \frac{4\pi m n}{l'}\left\{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l+l'}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(\frac{l-l'}{2}\right)^2}\right\} .$$




Figur 231. Figur 232.

Haben wir eine Spule, deren Radius $R$ klein gegen die Längendifferenz von Magnet und Spule ist, und ist die Länge der Spule oder die des Magneten groß gegen $R$, so wird genähert:

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi m n}{l'}\left(\frac{l+l'}{2} \mp \frac{l-l'}{2}\right) ,$$

je nachdem

$$l > l' \quad \text{oder} \quad l < l' .$$

Für $l > l'$ ist: $\mathfrak{E} = 4\pi m n$

$l < l'$ ist: $\mathfrak{E} = \frac{4\pi m n l}{l'} = 4\pi M n_1$ ,

wo $M$ das magnetische Moment des Stabes, $n_1$ die Anzahl Windungen auf der Längeneinheit sind.

Mißt man $\mathfrak{E} = G \cdot w$ ($w$ = Gesamtwiderstand der Leitung) mit einem ballistischen Galvanometer, so kann man nach diesen Formeln das magnetische Moment des Stabes bestimmen. Befindet sich in der Spule ein Stab von weichem Eisen, der durch äußere Kräfte magnetisiert wird, so kann man in analoger Weise die Größe der magnetischen Induktion und die Stärke der Magnetisierung in ihm messen (s. Artikel: Magnetismus).

### b) Bewegung einer geschlossenen Leitungsbahn in einem homogenen Magnetfelde (Erdinduktor).

Wird die Leitungsbahn, ohne ihre Gestalt zu ändern, parallel mit sich in einem homogenen Felde verschoben, so bleibt die Zahl der magnetischen Induktionslinien, die durch ihre Fläche hindurchtreten, unverändert; es wird also in ihr kein Strom induziert. Anders bei Drehung des Leiters.

Der Leiter sei eine Spule mit der Gesamtwindungsfläche $S$, die durch ein Galvanometer geschlossen ist, und befinde sich in dem als homogen anzusehenden Felde des Erdmagnetismus.

1. Die Spule stehe vertikal und die Normale von $S$ falle in die Richtung der Horizontalkomponente $H$ des Erdmagnetismus. Die Spule werde um eine vertikale Achse aus dieser Richtung in die entgegengesetzte gedreht, also

$$Q_0 = H \cdot S \; ; \qquad Q' = -HS \; ;$$

$$\mathfrak{E}_1 = 2\,HS \; ; \qquad G_1 = \frac{2\,HS}{w} \quad .$$

2. Die Spule liege horizontal, Normale von $S$ falle in die Richtung der Vertikalkomponente $V$ des Erdmagnetismus. Bei Drehung um eine horizontale Achse, so daß die Normale von $S$ in die entgegengesetzte Lage kommt, wird:

$$\mathfrak{E}_2 = 2\,VS \; ; \qquad G_2 = \frac{2\,VS}{w} \quad .$$

Also

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{V}{H} = \operatorname{tg}\varphi \quad ,$$

wo $\varphi$ die Inklination bezeichnet. Diese Methode, die Inklination mit dem sogenannten Erdinduktor zu bestimmen, rührt von W. WEBER[1] her (s. Artikel: Magnetismus).

Den Erdinduktor hat W. WEBER[2] auch benutzt, um den Widerstand $w$ in absolutem, elektromagnetischem Maße, das für unsere Gleichungen gilt, auszudrücken, d. h. eine „Ohmbestimmung" zu machen. Dazu diente ihm die Formel für $G_1$; kennt man die Galvanometerkonstante und hat man $H$ in absolutem Maße bestimmt, so liefert diese Gleichung direkt den Wert $w$ in diesem Maße (s. Artikel: Absolute Maße.)

Nach denselben Überlegungen läßt sich die mittlere Stärke $|\mathfrak{H}|$ eines nicht homogenen starken Magnetfeldes an seinen einzelnen Stellen bestimmen, z. B. zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, wo die Kraftlinien merklich senkrecht zu den Polflächen verlaufen. Man bringt eine kleine, flache Drahtspule von der Gesamtfläche $S$ senkrecht zu den Kraftlinien zwischen die Polschuhe, verbindet sie durch lange, parallele Drähte mit einem Galvanometer und dreht sie schnell aus ihrer Lage in eine solche, daß ihre Normale senkrecht zu den Kraftlinien steht, oder man bringt die Spule plötzlich ganz aus dem Bereiche des Magnetfeldes. Wieder gilt

$$G = \frac{|\mathfrak{H}| \cdot S}{w} \quad ,$$

so daß sich $|\mathfrak{H}|$ findet, wenn die übrigen Größen bekannt sind.

### c) Bewegliches Leiterstück.

Ein bewegliches Leiterstück, das einen Teil einer stromlosen Leitungsbahn in einem Magnetfelde bildet, ist z. B. vorhanden bei den elektrodynamischen und elektromagnetischen Rotationsapparaten, wenn bei ihnen die Strombahnen mit beweglichem Leiterstück keine elektromotorische Kraft $K$ enthalten. Bei der Bewegung des Leiterstückes im Magnetfelde wird die Anzahl der magnetischen Induktionslinien, die die Leiterbahn umschließt, verändert und also in ihr ein Strom induziert, dessen elektromotorische Kraft von dieser Änderung von $Q$ abhängt. Von derselben Änderung hängt aber bei den elektrodynamischen Rotationsapparaten (s. Artikel: Elektrodynamik) die geleistete Arbeit ab, und

[1] W. WEBER, Abhandl. d. Götting. Gesellschaft d. Wissensch. 1853; Pogg. Ann. **90**. 209; Werke **2**. 279. — [2] W. WEBERS Werke **3**. 276.

beide Erscheinungen treten also für gleich gestaltete Apparate in unmittelbare Parallele.

Denkt man sich z. B. beim Schema des AMPÈREschen Rotationsapparates, Figur 219, S. 522, die Leitungsbahn anfänglich stromlos und den Arm $MB$ von der Länge $l$ dauernd und gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ gedreht, so ist die induzierte elektromotorische Kraft im Zeitelemente $dt$:

$$\bar{e} = -\frac{dQ}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}dt \quad .$$

Wird $MB$ aber vom Strome 1 durchflossen, so ist nach früherem die bei der Drehung um $d\vartheta$ geleistete Arbeit

$$A = \frac{dQ}{d\vartheta}d\vartheta = \mathfrak{N}\cdot d\vartheta \quad ,$$

wo $\mathfrak{N}$ das Drehungsmoment ist, dessen Wert früher als

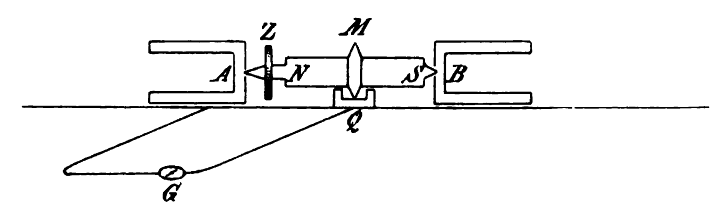
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{B}\cdot\frac{l^2}{2}$$

gefunden wurde. Also

$$\bar{e} = -\mathfrak{B}\cdot\frac{l^2}{2}\frac{d\vartheta}{dt}dt \quad .$$

## d) Unipolare Induktion.

Die, wie oben angeführt, von FARADAY entdeckte Erscheinung wurde von W. WEBER[1] eingehend untersucht und erhielt von ihm den Namen unipolare Induktion, statt dessen findet sich manchmal auch die Bezeichnung axiale oder Rotationsinduktion. WEBERs Apparat (s. Figur 233) besteht aus einem zylindrischen, um seine Achse $AB$ drehbaren Magnetstab. Die Drehung geschieht durch eine (in der Figur fortgelassene) Kurbel mit Zahnrad, das in das Zahnrad $Z$ eingreift. Auf dem Magnet sitzt eine in den Quecksilbernapf $Q$ eintauchende Messingscheibe $M$; in der Leitung zwischen $A$ und $Q$ befindet sich ein Galvanometer $G$, das, wenn der Magnet rotiert, einen dauernden Strom anzeigt.




Figur 233.

Weitere Untersuchungen über die unipolare Induktion hat PLÜCKER[2] angestellt. Er bediente sich dazu eines von FESSEL konstruierten Apparates, bei dem der zylindrische Magnetstab mit einem Hohlzylinder von Kupfer umgeben war. Es war die Einrichtung getroffen, daß

1. der Magnet allein,
2. der Kupferzylinder allein,
3. Kupferzylinder und Magnet zusammen rotieren konnten.

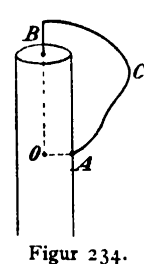
[1] W. WEBER, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 1839. 3. 63; Pogg. Ann. 52. 353. 1841; W. WEBERs Werke 2. 153. — [2] J. PLÜCKER, Pogg. Ann. 87. 352. 1852.

Werden das eine Ende und die Mitte des Kupferzylinders durch Schleifkontakte mit einem Galvanometer verbunden, so wird im Fall 1 kein Strom erzeugt; bei Anordnung 2 und 3 aber entstehen Ströme von merklich gleicher Stärke.

Diese Versuche sind die Umkehrung eines elektromagnetischen Rotationsversuches. Die Entstehung des Induktionsstromes erklärt sich durch die relative Bewegung des Magnetfeldes und der Leitungsbahn, deren einer Teil bei der Anordnung der Figur 233 in den bewegten Magneten fällt. Bei einer ganzen Umdrehung des Magneten schneiden alle von dem Pole $A$ ausgehenden Kraftlinien einmal die Stromfläche. Ist $m$ die Polstärke, so sendet der Pol $4\pi m$ solcher Linien aus, und macht der Magnet $p$ Umdrehungen in der Sekunde, dann ist $4\pi m p$ die induzierte elektromotorische Kraft.

In mannigfacher Weise hat man die Versuchsanordnung abgeändert[1], um zwischen den verschiedenen älteren Theorien der Induktion (und bei dem entsprechenden elektromagnetischen Rotationsversuch zwischen den Elementargesetzen) zu entscheiden; da aber stets geschlossene Ströme bei den Experimenten benutzt werden und alle Theorien für solche Ströme zu denselben Resultaten führen, war eine Entscheidung auf diese Weise unmöglich.

Ferner brachte man mit den Erscheinungen der unipolaren Induktion die Frage in Verbindung, ob ein rotierender Magnet die von ihm ausgehenden und durch seinen Körper sich wieder schließenden magnetischen Induktionslinien mit sich im Raume herumführe oder nicht. Aber auch für diese Frage bietet der Versuch mit geschlossenen Strömen keine klare Entscheidung. Denn hält man an dem Grundsatz fest, daß es nur auf die relative Bewegung von Stücken der Leitungsbahn gegen die Magnetkraftlinien ankommt, so kann man als Ursache der Induktion ansehen: entweder die Bewegung der Leitungsbahnen im sich drehenden Magneten gegen das feststehende Magnetfeld[2] oder die Bewegung des Magnetfeldes gegen die unveränderlich liegenden Leitungsbahnen.



Figur 234.

Endlich ergab, wie A. BEER[3] zuerst zeigte, die Auffassung PLÜCKERS, daß, wenn man die Drahtschleife entfernte und den Magneten allein rotieren ließ, dieser an seiner Oberfläche elektrische Ladungen haben müßte, während nach F. NEUMANNS Ansicht solche Ladungen nicht auftreten sollten. PLÜCKER zog aus seiner Vorstellung die Konsequenz, es müsse die rotierende Erde unter dem Einfluß des Erdmagnetismus an den Polen eine Anhäufung von positiver Elektrizität, am Äquator aber negative Ladung zeigen. Experimentell sind solche Ladungen noch nicht nachgewiesen worden, aber auch die MAXWELLsche Theorie führt zu dem Resultat, daß auf der Oberfläche des rotierenden Magneten Ladungen vorhanden seien.

Zur Berechnung[4] hat man die zweite Hauptgleichung für bewegte Körper zu benutzen [s. (IIb′) S. 545]. Die induzierte elektromotorische Kraft wird dabei aus dem zweiten Glied der rechten Seite gewonnen, so daß, wenn der stationäre Zustand eingetreten ist:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}] \quad .$$

Für jede geschlossene Linie stimmt deshalb das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ (d. h. die in dieser Bahn induzierte elektromotorische Kraft) mit dem Linienintegral des rechts stehenden Vektors überein. Stellt Figur 234 schematisch die Versuchs-

[1] Literatur siehe G. WIEDEMANN, l. c. 119—136. Neuere Literatur am Schluß des Abschnittes. — [2] Wie FARADAY schon zu zeigen suchte. Exp. Res. §§ 3091—3122, 1851. — [3] A. BEER, Pogg. Ann. **94**. 177. 1854. — [4] Siehe z. B. H. A. LORENTZ, Enc. d. math. Wiss. **5**, Heft 2. 100. 1904.

anordnung dar, bei der die äußere Leitung $BCA$ in $B$ und $C$ auf den Magneten schleift, so ist:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\int [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{s} \quad ,$$

wo $d\mathfrak{s}$ ein Wegelement der geschlossenen Bahn $AOBCA$ bedeutet. Fällt die Drehachse $OB$ des Magneten mit der $z$-Achse zusammen, ruht die Drahtschleife $BCA$ und ist $u$ die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit der der Magnet rotiert, so wird:

$$\mathfrak{E} = -\frac{u}{2\pi c}\int \mathfrak{B}_z\, dS \quad ,$$

wo $dS$ ein Element der Kreisfläche vom Radius $OA$, was für die Polstärke $m$ des Magneten in den oben gegebenen Ausdruck übergeht.

Ist die Drahtschleife $BCA$ entfernt, so ist im ganzen äußeren Raum das elektrische Feld durch ein Potential $V$ bestimmt, so daß:

$$V_B - V_A = -\frac{u}{2\pi c}\int \mathfrak{B}_z\, dS$$

die Potentialdifferenz an der Oberfläche gibt, wonach sich dann das äußere elektrische Feld und die Ladungen auf der Oberfläche finden lassen.

Im folgenden findet sich neuere Literatur, die zum Teil (wegen des untrennbaren Zusammenhanges) auch elektromagnetische Rotationsversuche behandelt.

E. Lecher, Wien. Ber. **103**. 949. 1894 und Wied. Ann. **54**. 276. 1895; Wien. Ber. **108**. 977. 1899 und Wied. Ann. **69**. 781. 1899.

L. Fleischmann, Zeitschr. für d. phys. u. chem. Unterricht **8**. 361. 1895.

W. König, Wied. Ann. **60**. 519. 1897 und Ann. d. Phys. **2**. 854. 1900; **3**. 513. 1900.

E. Hagenbach, Progr. d. Univ. Basel 1900 und Ann. d. Phys. **4**. 233. 1901.

Raveau, L'éclair. électr. **22**. 161. 1900; Beibl. **24**. 705. 1900.

H. Poincaré, L'éclair. électr. **23**. 41. 1900; Beibl. **24**. 1013. 1900.

G. R. Olshausen, Ann. d. Phys. **6**. 681. 1901.

O. Grotrian, Ann. d. Phys. **6**. 794. 1901; **10**. 270. 1903.

F. Huth, Über die Unipolarerscheinungen. Diss. Halle 1902.

E. Dorn, Ann. d. Phys. **11**. 589. 1903.

J. A. Vollgraff, Elektromagnet. Drehungen und unipolare Induktion. Diss. Leiden 1903.

J. Valentiner, Die elektromagnet. Rotation und die unipolare Induktion. Karlsruhe 1904. Beibl. **28**. 1062. 1904.

E. Hoppe, Phys. Zeitschr. **5**. 650. 1904; **6**. 340. 1905.

J. Valentiner, Phys. Zeitschr. **6**. 10. 1905.

R. Weber, Phys. Zeitschr. **6**. 143. 1905.

## 11. Induktionserscheinungen in ruhenden, geschlossenen Leitungen bei Ein- und Ausschaltung von galvanischen Ketten.

### a) Eine Leitung.

Sobald sich in einer geschlossenen stromdurchflossenen Leitung die Stromintensität ändert, muß nach früherem ein Induktionsstrom in der Leitung entstehen, und es gilt die Gleichung (5) S. 543:

$$i w = K - \frac{dQ}{dt} \quad .$$

Ist nur die einzige Leitung vorhanden, so ist, wenn $L$ ihren Selbstinduktionskoeffizienten bezeichnet:

$$Q = L i \quad ,$$

also:

$$i w = K - L\frac{di}{dt} \quad .$$

Befindet sich in dem Stromkreis nur die innere elektromotorische Kraft $K$ einer konstanten Kette und schließt man den Kreis zur Zeit

$$t = 0 \ , \quad \text{so ist für diesen Moment} \quad i = 0 \ ,$$

also, wenn $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen, das Integral der Gleichung:

$$i = \frac{K}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right) ,$$

und der Strom hat nach Schluß nicht sogleich seine volle Stärke $\frac{K}{w}$, nähert sich dieser aber um so schneller, je größer $\frac{w}{L}$ ist. Meist ist $\frac{w}{L}$ sehr groß, so daß der Grenzwert von $i$ in kleinen Bruchteilen einer Sekunde erreicht wird. Enthält aber die Leitung Drahtspulen mit vielen Windungen und massiven Eisenkernen, so kann $L$ so groß werden, daß eine merkliche Zeit vergeht, ehe $i$ seinen maximalen Wert erreicht. Das macht sich bei großen Elektromagneten geltend, die erst einige Zeit nach Stromschluß ihre volle Stärke gewinnen.

$\frac{L}{w}$ hat die Dimension einer Zeit und wird Zeitkonstante des Stromkreises genannt.

Der Induktionsstrom $-\frac{K}{w}e^{-\frac{w}{L}t}$ heißt der Schließungsextrastrom, und sein ganzer Betrag ist:

$$-\frac{K}{w}\int_0^\infty e^{-\frac{w}{L}t} = -\frac{LK}{w^2} \ .$$

Hat sich der stationäre Zustand hergestellt, und man öffnet jetzt die Leitung, so entsteht in ihr der Öffnungsextrastrom, der entgegengesetzt gerichtet und in seiner Gesamtstärke (wenn der Widerstand der Leitung merklich derselbe bleibt) gleich dem Schließungsextrastrom ist.

Die Elektrizitätsmenge, die in der Zeit $t$ durch die Leitung geht, ist

$$\int_0^t i\,dt = \frac{K}{w}\left\{t - \frac{L}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right)\right\} \ .$$

Diese Folgerungen aus den Induktionsgesetzen wurden von HELMHOLTZ[1] experimentell bestätigt. Ein Stromkreis mit Galvanometer wurde geschlossen und nach kurzer meßbarer Zeit wieder geöffnet, der Ausschlag des Galvanometers gab ein Maß für die in der Zeit $t$ durch die Leitung gegangene Elektrizitätsmenge[2].

Bei Ableitung dieser Gleichungen ist angenommen, daß in den Stromkreis momentan eine elektromotorische Kraft $K$ eingeschaltet und später wieder momentan ausgeschaltet werde, ohne daß sich an dem Widerstand $w$ des Kreises etwas ändere. In Wirklichkeit wird aber z. B. in dem zweiten Falle der Stromkreis unterbrochen, d. h. sein Widerstand wird schnell von dem Werte $w_0$ auf unendlich gebracht. $w$ ist also während der Dauer $\tau$ des Unterbrechungsvorgangs eine Funktion der Zeit $t$. Die Gleichung lautet also z. B. für die Öffnung des Stromkreises, wenn $w = f(t)$ gesetzt wird:

$$i f(t) = K - L\frac{di}{dt} \ .$$

[1] H. HELMHOLTZ, Pogg. Ann. **83**. 505. 1851; Ges. Abh. I. 429. — [2] Weitere Literatur auch für das Folgende s. WIEDEMANN, Die Lehre v. d. Elektr. 2. Aufl. IV. 140—170. 1898.

Will man ein Bild von dem Verlauf des Öffnungsextrastroms haben, so muß man für die Form der unbekannten Funktion $f(t)$ eine Annahme machen. ARONS[1] setzt z. B.

$$w = w_0 \frac{\tau}{\tau - t} \quad ,$$

wo $w_0$ der Widerstand des geschlossenen Kreises ist, d. h. für $t = 0$: $i = \frac{K}{w_0}$.
Nach Integration findet sich die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion

$$\mathfrak{E} = -L\frac{di}{dt} = K\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T} - \tau}\left\{\left(\frac{\tau - t}{\tau}\right)^{\frac{\tau - \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}} - 1\right\} \quad ,$$

wo $\mathfrak{T}$ die Zeitkonstante ist.

Bei vielen Versuchsanordnungen sucht man $\tau$ möglichst klein zu machen; wird $\tau < \mathfrak{T}$, so können während sehr kurzer Zeit ganz außerordentlich große Spannungen (Hunderttausende von Volt) durch den Extrastrom bei der Öffnung entstehen.

Solche rapide Unterbrechung findet z. B. bei dem Vakuumunterbrecher von MAC FARLAN MOORE[2] statt. Dies ist ein im Vakuum schwingender WAGNERscher Hammer, der mit vorgeschalteter Drahtspule ein kleines Induktorium ersetzen kann[3].

## b) Zwei Leitungen.

Wirken die beiden Leitungen induzierend aufeinander, so lauten in den früheren Bezeichnungen die Gleichungen:

$$i_1 w_1 - K_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} = 0 \tag{1}$$

$$i_2 w_2 - K_2 + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} = 0 \quad . \tag{2}$$

Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$i_1 - \frac{K_1}{w_1} = a_1 e^{\beta t} + b_1 e^{\beta' t} \quad , \qquad i_2 - \frac{K_2}{w_2} = a_2 e^{\beta t} + b_2 e^{\beta' t} \quad , \tag{3}$$

wo $\beta$ und $\beta'$ die reellen (und negativen) Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(L_1 L_2 - L_{12}^2)\beta^2 + (L_1 w_2 + L_2 w_1)\beta + w_1 w_2 = 0 \tag{4}$$

und die $a$ und $b$ Konstanten sind, die sich aus den Bedingungen der Aufgabe bestimmen.

Besonders wichtig ist der Fall, wo eine der beiden Leitungen keine elektromotorische Kraft $K$ enthält, dann haben wir die Anordnung des Induktionsapparates. Sei $K_2 = 0$, so ist 1 die primäre, 2 die sekundäre Leitung, der Strom in 1 heißt der induzierende, der in 2 der induzierte.

Schließungsstrom. Schließt man die primäre Leitung, so entsteht in der sekundären der sogenannte Schließungsinduktionsstrom, kurz Schließungsstrom. Geschieht die Schließung zur Zeit $t = 0$, so bestehen dafür die Bedingungen $i_1 = 0$, $i_2 = 0$. Nach Eintritt des stationären Zustandes in der primären Leitung haben wir für $t = \infty$:

$$i_1 = \frac{K_1}{w_1} \,, \qquad i_2 = 0 \quad .$$

[1] L. ARONS, Wied. Ann. 63. 177. 1897. — [2] MAC FARLAN MOORE, Elektrotechn. Zeitschr. 17. 637. 1896. — [3] J. ELSTER u. H. GEITEL, Wied. Ann. 69. 483. 1899.

Man erhält nach Bestimmung der Konstanten $a$ und $b$ in (3):

$$(5)\qquad \begin{cases} i_1 = \dfrac{K_1}{w_1}\left\{1 - \dfrac{\beta(w_1+\beta' L_1)e^{\beta t} - \beta'(w_1+\beta L_1)e^{\beta' t}}{w_1(\beta-\beta')}\right\} \\ i_2 = -\dfrac{L_{12}K_1(e^{\beta t}-e^{\beta' t})}{\sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 L_{12}^2}} \end{cases}.$$

Dabei bedeutet $\beta$ die größere der beiden Wurzeln der Gleichung (3).

Hiernach nähert sich der primäre Strom erst schnell, dann langsamer ansteigend seinem Grenzwert, der sekundäre erreicht ein Maximum und fällt auf null zurück. Der gesamte Schließungsinduktionsstrom wird:

$$(6)\qquad J_2 = \int_0^\infty i_2\,dt = -\frac{L_{12}K_1}{w_2 w_1} = -\frac{L_{12}}{w_2}\cdot C\,,$$

wo $C$ die Intensität des konstanten primären Stromes bezeichnet.

Öffnungsstrom. Bei plötzlicher Unterbrechung des primären Kreises fällt $i_1$ von $C$ auf null, also hat der gesamte Öffnungsinduktionsstrom den entgegengesetzt gleichen Wert wie $J_2$. Über den zeitlichen Verlauf dieses Stromes aber läßt sich nichts Sicheres sagen (s. S. 556), da die Widerstandsänderung im primären Kreis in unbekannter Weise durch den Öffnungsfunken vom Wert $w_1$ bis zu unendlich sich ändert. Denkt man sich diesen Funken möglichst unterdrückt, so daß die Änderung von $w_1$ bis unendlich fast momentan geschieht, dann kann man in erster Annäherung annehmen, daß der Öffnungsstrom in der sekundären Leitung verläuft, nachdem der primäre Strom schon auf null gesunken ist, d. h. man darf

$$i_1 = 0 \quad \text{für} \quad t = 0$$

setzen. Gleichung (2) wird dann

$$i_2 w_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0\,,$$

also:

$$i_2 = \text{const}\, e^{-\frac{w_2}{L_2}t}\,.$$

Die Konstante bestimmt sich durch die Bedingung, daß der gesamte Öffnungs- und Schließungsstrom einander gleich, und es wird:

$$(7)\qquad i_2 = \frac{L_{12}C}{L_2}\cdot e^{-\frac{w_2}{L_2}t}\,.$$

Der Öffnungsstrom setzt also, unter der obigen Annahme, mit seinem größten Wert ein und sinkt dann schnell auf null.

Schließungs- und Öffnungsstrom eines Induktionsapparates zeigen demnach ein sehr verschiedenes Verhalten, was auch der Versuch bestätigt, und es müssen alle Wirkungen (z. B. die physiologischen), die von einem schnellen Anwachsen der Stromintensität abhängen, bei dem Öffnungsstrom stärker sein als beim Schließungsstrom.

Die Richtigkeit dieser Formeln ist schon zum Teil von HELMHOLTZ[1] experimentell bestätigt worden.

---

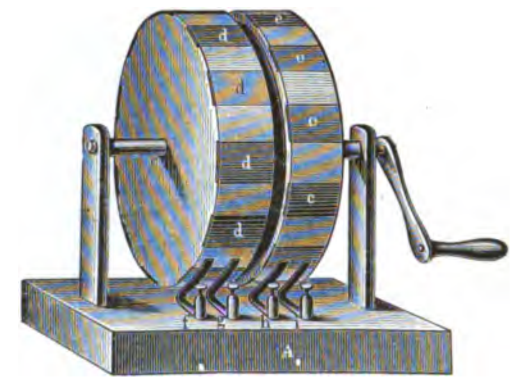
[1] H. HELMHOLTZ, l. c. Weitere Literatur WIEDEMANN: Elektrizität, l. c.

## 12. Apparate zur Erzeugung von Induktionsströmen.

Um die Wirkung der stets schnell verlaufenden und oft auch schwachen Induktionsströme zu verstärken und so Ströme zu erzeugen von ganz außerordentlicher Intensität und Spannung, muß man die Änderung des Magnetfeldes, die wir als Ursache der Induktion kennen gelernt haben, stets in gleicher Art und schneller Aufeinanderfolge wieder hervorbringen. Dazu ergeben sich nach dem bisherigen die zwei Möglichkeiten: a) Die relativen Bewegungen der induzierenden Systeme gegen die Leitungen, in denen der Induktionsstrom fließen soll, gehen periodisch in gleicher Weise (durch Rotation usw.) vor sich; b) in einer Leitung vorhandene Ströme ändern beständig ihre Intensität, am einfachsten durch schnell wiederholtes Ein- und Ausschalten der in der Leitung vorhandenen elektromotorischen Kräfte, und diese Leitung wirkt induzierend auf eine zweite.

Von den nach dem ersten Gesichtspunkt gebauten Apparaten, den sogenannten magnetelektrischen und elektromagnetischen Maschinen (Dynamomaschinen), wollen wir nur eine ältere Konstruktion anführen; was weiter in den Rahmen dieses Buches gehört, findet sich im Artikel: Technische Anwendungen der Induktion.

Unter den Apparaten zweiter Art betrachten wir genauer nur das in der Wissenschaft fast ausschließlich benutzte, meist kurz als „Induktionsapparat“, „Funkeninduktor“ oder „Rühmkorff“ bezeichnete Instrument, dessen Theorie im wesentlichen schon der vorige Abschnitt enthält.



Figur 235.

Bei solchen Konstruktionen entstehen im allgemeinen schnell aufeinander folgende Ströme von entgegengesetzter Richtung und gleicher Stärke, sog. Wechselströme. Das ist für manche Erscheinungen und Untersuchungsmethoden, z. B. die Wärmewirkungen, Effekte am Elektrodynamometer, ohne Belang, für andere Zwecke aber, z. B. Beobachtungen am Galvanometer usw., muß der Wechselstrom zu Gleichstrom gemacht werden. Dazu benutzt man Vorrichtungen, die entweder nur gleichgerichtete Ströme in die äußere Leitung treten lassen, oder Kommutatoren[1], die bei Umkehr des Stromes in der Maschine deren Verbindung mit der Leitung umkehren. Die Apparate der ersten Art heißen Disjunktoren[2] oder Analysatoren.[3] Eine zweckmäßige Form eines solchen hat in Abänderung einer Doveschen Anordnung G. Wiedemann[5] ergeben.

Zwei Räder (Figur 235) sitzen auf einer Achse mit Kurbel, durch welche sie gemeinsam in Rotation versetzt werden können. Die Räder sind von Metall; auf ihrem Umfang sind in regelmäßigen Abständen Plättchen (*d*, *e*) von isolierendem Material eingelegt. Gegen jedes Rad schleifen zwei Metallfedern, welche mit den Klemmschrauben *f*, *g* und *h*, *i* in Verbindung stehen. Die Räder sind so gegeneinander gestellt, daß die Federn bei der Drehung nicht gleichzeitig die leitenden Teile der Peripherie verlassen. Es sei nun *f*, *g* mit der primären, *h*, *i* mit der sekundären Leitung verbunden. Wird bei der Rotation der primäre Kreis unterbrochen, während der sekundäre noch geschlossen ist, so gelangen die Öffnungsströme zum Galvanometer. Dagegen ist der sekundäre Kreis offen, wenn der primäre ge-

[1] Z. B. schon konstruiert von Pixii, Ann. de chim. et de phys. **50**. 322. 1832. — [2] H. W. Dove, Pogg. Ann. **43**. 511. 1838. — [3] H. Buff, Pogg. Ann. **127**. 58. 1866. — [4] G. Wiedemann, l. c. S. 6.

schlossen wird. Die Schließungsströme können daher nicht zum Galvanometer gelangen. Will man letztere messen, erstere ausschließen, so muß das eine der beiden Räder gegen das andere in geeigneter Weise verstellt werden. Die bei gleichmäßiger Rotation zum Galvanometer gelangenden Induktionsströme derselben Richtung bewirken eine konstante Ablenkung der Nadel, welche der Anzahl der Unterbrechungen in der Zeiteinheit proportional ist. Diese Wirkung wird verdoppelt, wenn man eine Vorrichtung benutzt, bei welcher sowohl die Schließungs- als auch die Öffnungsströme zum Galvanometer geleitet werden, jedoch so, daß jedesmal zuvor die Zuleitungen zum Galvanometer vertauscht worden sind. Weiter kann man auch den primären Strom, anstatt ihn einfach zu öffnen und zu schließen, jedesmal umkehren. Einen solchen rotierenden Kommutator hat H. HERTZ[1] angegeben und benutzt. Ferner hat H. HIMSTEDT[2] „zwei verschiedene Formen eines selbsttätigen Disjunktors" näher untersucht. Einmal benutzt derselbe zwei elektromagnetisch erregbare Stimmgabeln, welche nur einen geringen Unterschied der Schwingungszahl haben. Durch die Schwingungen der ersten Gabel wird ein Strom abwechselnd geschlossen und unterbrochen; die zweite Gabel wird dadurch in Schwingungen versetzt, daß der intermittierende Strom durch ihre Elektromagnetwindungen hindurchgeschickt wird. Hierdurch stimmen ihre Schwingungen der Anzahl nach mit derjenigen der ersten Stimmgabel genau überein. Jedoch haben beide Stimmgabeln einen Phasenunterschied. Benutzt man daher die eine Gabel, um den primären Strom zu öffnen und zu schließen, und bringt an der zweiten Gabel eine Unterbrechungsvorrichtung an, welche in dem sekundären Kreis sich befindet, so wird derselbe zwar in demselben Tempo, aber etwas früher oder später als der primäre Kreis geöffnet und geschlossen. Es gelangt daher nur die eine Art von Strömen zum Galvanometer. Bei der zweiten Form des Disjunktors wird das phonische Rad von PAUL LA COUR benutzt.

S. auch: F. J. KOCH, Ann. d. Phys. **14**. 547. 1904. — F. W. ADLER, Ann. d. Phys. **15**. 1033. — A. W. GRAY, Ann. d. Phys. **15**. 596. 1904.

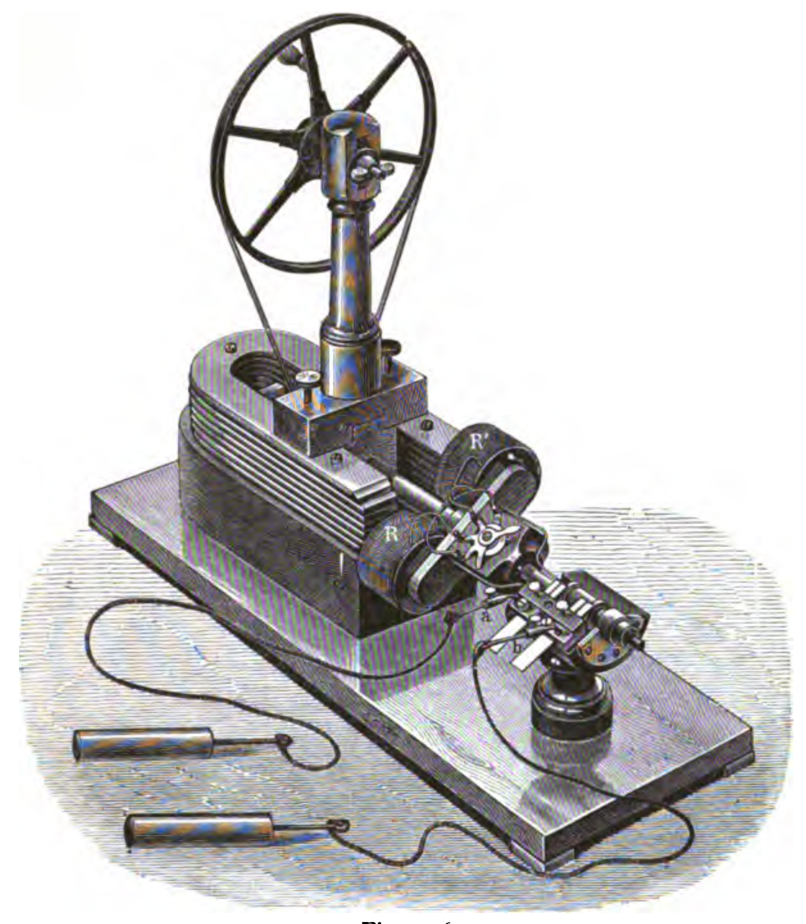
### a) Magnetelektrische Maschinen.

Sie sollten die neue Elektrizitätsquelle der Induktion zur Erzeugung von starken und möglichst gleichmäßigen Strömen benutzen, indem bei der relativen Bewegung der Leiter und Magnete gegeneinander mechanische Arbeit aufgewandt wurde. Die ersten Maschinen dieser Art wurden von DAL NEGRO[3] und PIXII[4] angegeben. Nach mancherlei Verbesserungen durch SAXTON, von ETTINGSHAUSEN u. a. erhielten dieselben durch STÖHRER eine Form, welche sich längere Zeit erhalten hat.

Die einfachere STÖHRERsche Maschine besteht aus einem System horizontaler Hufeisenmagnete. Vor den Polen derselben kann ein hufeisenförmiger Eisenanker um eine horizontale Achse in Rotation versetzt werden. Derselbe trägt (Figur 236) zwei Rollen $R$, $R'$ aus dünnem, gut isoliertem Kupferdraht. Die Enden desselben können durch eine besondere Vorrichtung (Pachytrop) so miteinander verbunden werden, daß die als Elektromotoren anzusehenden Rollen entweder hinter- oder nebeneinander geschaltet sind. Wenn sich bei der Rotation die eine Rolle einem Magnetpol nähert, ihr Eisenkern also magnetisch wird, so entsteht in ihr ein Induktionsstrom. Ein Strom von entgegengesetzter Richtung tritt auf, wenn die Rolle bei dem Magnetpol vorübergegangen ist und sich von demselben entfernt. Bei der Annäherung an den entgegengesetzten Pol entsteht ein Strom der letzten Richtung, bei der Entfernung wieder ein solcher in dem ersten Sinne. Hiernach findet also bei einer ganzen Umdrehung ein zweimaliger Zeichenwechsel statt. Wären daher die beiden Rollenenden mit zwei von-

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **10**. 427. 1880. — [2] H. HIMSTEDT, Wied. Ann. **22**. 276. 1884. — [3] DAL NEGRO, Phil. Mag. **31**. 45. 1832. — [4] Ann. de chim. et de phys. **50**. 322. 1832.

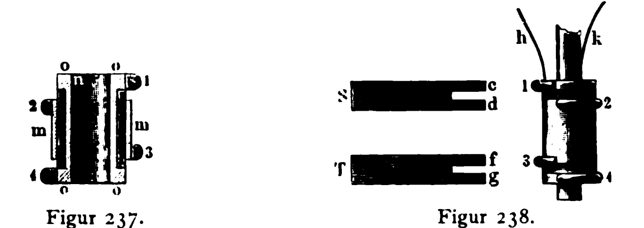
einander isolierten, auf der Achse angebrachten Metallringen verbunden, auf welchen zwei Federn schleifen, von denen die weitere Leitung ausgeht, so würden in derselben




Figur 236.

schnell wechselnde Ströme verlaufen. Um denselben fortdauernd in der äußeren Leitung gleiche Richtung zu geben, ist auf der Achse ein Kommutator angebracht.

Die Figur 237 gibt einen horizontalen Durchschnitt dieser Vorrichtung. Dieselbe besteht aus zwei konzentrischen Halbzylindern *m* und *n*, welche voneinander isoliert




Figur 237. Figur 238.

und mit den beiden Enden der Induktionsrollen verbunden sind. Sie tragen außerdem je zwei Halbringe von Metall, der innere Zylinder 1 und 4, der äußere 2 und 3. Auf denselben schleifen zwei gabelförmige Schleiffedern, die mit der äußeren Leitung verbunden sind. Dieselben sind in der Figur 238 getrennt von

dem Kommutator gezeichnet. In dem dargestellten Augenblick würde *c* auf 1, *f* auf 3 schleifen. Es möge dann der positive Strom von *S* nach *T* gehen. Nach einer halben Umdrehung wechselt der Induktionsstrom sein Zeichen. Jetzt schleift aber *d* auf 2 und *g* auf 4. In der Leitung *S*—*T* hat daher der Strom seine Richtung beibehalten. Trotzdem ist der Strom nicht konstant, sondern sinkt im Augenblick des Vorüberganges der Rollen bei den Polen auf null, während kurz vorher und nachher die elektromotorische Kraft ihren größten Wert erreicht. Infolgedessen übt die Maschine bei schneller Drehung kräftige, physiologische Wirkungen aus.

Stöhrer[1] konstruierte später noch wirksamere Maschinen. Bei denselben stehen drei Hufeisenmagnete in vertikaler Stellung. Über diesen rotiert um eine vertikale Achse ein System von sechs Rollen mit Eisenkernen, bei welchen also, ohne Anwendung eines geeigneten Kommutators, ein sechsmaliger Stromwechsel bei jeder Umdrehung stattfinden würde.

W. Weber[2] hat die Wirkung einer solchen, mit einem Kommutator versehenen Maschine untersucht, indem er bei verschiedener Rotationsgeschwindigkeit und bei Veränderung des äußeren Widerstandes die Stromstärke durch Ablenkung einer Magnetnadel bestimmte. Bezeichnet man die Anzahl der Stromwechsel in der Sekunde mit $n$, so ließ sich die Stromstärke durch die Formel:

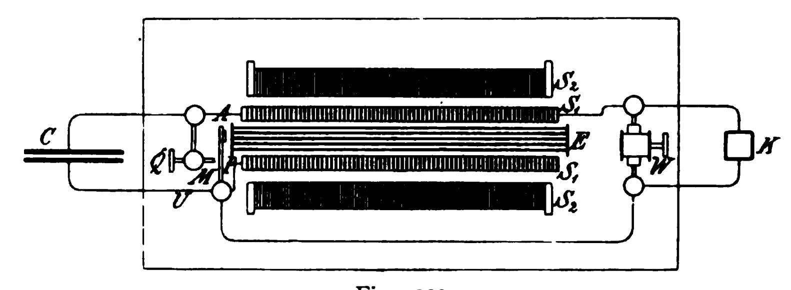
$$i = \frac{an}{1 + bn + cn^2}$$

ausdrücken. Aus derselben geht hervor, daß die Stromstärke für einen bestimmten Wert von $n$ ein Maximum erreicht.

Indem wir hier noch auf ältere Untersuchungen der magnetelektrischen Maschinen von Sinsteden[3] verweisen, brechen wir die Besprechung der weiteren Entwicklung der magnetelektrischen Maschinen ab.

## b) Der Induktionsapparat.[4]

Der Induktionsapparat besteht aus zwei Drahtspulen, von denen die „primäre", die beim Betrieb des Apparates beständig geöffnet und geschlossen wird, eine elektromotorische Kraft (konstante Kette) enthält, während in der „sekundären" die zu den Versuchen dienenden Induktionsströme verlaufen.




Figur 239.

Die beiden Spulen liegen meist direkt ineinander, so daß die sekundäre $S_2$ die primäre $S_1$ umschließt (s. Figur 239, die einen Horizontaldurchschnitt gibt). Bei kleinen Apparaten, vorwiegend für medizinische Zwecke gebaut, läßt sich, nach der Konstruktion von E. du Bois-Reymond, $S_2$ oder $S_1$ aus der Lage in der Figur

[1] E. Stöhrer, Pogg. Ann. **61**. 217. 1844. — [2] W. Weber, Pogg. Ann. **61**. 431. 1844; Gesammelte Werke **2**. 260. — [3] W. Sinsteden, Pogg. Ann. **76**. 524. 1849; **92**. 220. 1853. — [4] S. u. a. H. Armagnat, La bobine d'induction. Paris, Gauthier-Villars, 1905; mit Literaturverzeichnis bis 1905.

seitlich auf eine Schlittenvorrichtung verschieben, so daß immer kleinere Stücke von $S_1$ noch in die Höhlung von $S_2$ hineinragen; dadurch wird natürlich die Stärke der Induktion von $S_1$ auf $S_2$ sehr vermindert.

Im Innern der Höhlung von $S_1$ befindet sich ein zylindrischer Eisenkern $E$, meist aus dünnen voneinander isolierten Drähten oder Lamellen bestehend. Er verstärkt die Induktion sehr beträchtlich, würde aber, wäre er aus einem Stück, selbst von kräftigen Induktionsströmen (Wirbelströmen) durchflossen werden, die z. B. bei Unterbrechung des Primärstromes das schnelle Verschwinden der Magnetisierung verhinderten. Der Eisenkern dient meist auch dazu, den Gang des selbsttätigen Unterbrechers $U$ zu unterhalten.

Statt eines stabförmigen Eisenkerns hat man auch fast in sich geschlossene (bis auf 1 cm Zwischenraum) Kerne benutzt und mit ihnen bessere Induktionswirkungen erreicht, sie aber wegen Unbequemlichkeit der Konstruktion nicht beibehalten [1].

### $\alpha$) Der Unterbrecher.

Von der Konstruktion des Unterbrechers hängt ein großer Teil der Wirkung des Induktionsapparates ab. Je größer die Zahl der Unterbrechungen in der Sekunde, um so größere Elektrizitätsmengen fließen durch die sekundäre Spule, dabei darf aber die Schließung nicht zu kurze Zeit dauern, damit die Stärke des Primärstromes ihren vollen Wert erreichen kann. Je plötzlicher die Stromschwankungen im primären Kreise geschehen, in je kürzerer Zeit die Unterbrechung vollendet ist, um so größer ist die in der Sekundärspule induzierte elektromotorische Kraft.

Der Öffnungsstrom, der nach früherem sehr viel schneller als der Schließungsstrom verläuft, erzeugt an den Enden der Induktionsrolle eine viel größere Spannung, so daß unter gewöhnlichen Verhältnissen die Funkenentladungen der Induktorien nur von dem Öffnungsstrom bewirkt werden. Alle Umstände, die die Öffnung des primären Kreises beschleunigen und den, die völlige Unterbrechung verzögernden, Funken schwächen, vergrößern also die Spannung des Öffnungsstromes der sekundären Spule und die Länge ihrer Funkenstrecke. Deshalb wählt man als Trennungsstücke schwer verdampfende Metalle (Platin, Platiniridium), die in einer schlecht leitenden Flüssigkeit (Alkohol, Petroleum) sich gegenüberstehen, wo sich der Öffnungsfunke nicht so leicht wie in Luft ausbildet. Auch der mit den beiden Enden des Unterbrechers verbundene Kondensator $C$ dient diesem Zweck, da infolge seiner Ladung durch den Öffnungsextrastrom die Potentialdifferenz an der Unterbrechungsstelle schnell abnimmt.

Eine einfache Form des Unterbrechers zeigt die Figur. $M$ ist ein federndes Messingstück (oder Eisenstück ohne $A$), an dessen Ende bei $A$ sich ein Eisenstück befindet, das, sobald der Strom geschlossen ist, von dem Elektromagneten $E$ angezogen wird. Der Schluß erfolgt durch den Kommutator $W$ und die vorn aus Platin bestehende Schraube $Q$, die ein auf $M$ bei $P$ ($Q$ gegenüber und nicht gezeichnet) befindliches Platinplättchen berührt. Wird die Anziehung auf $A$ wirksam, so erfolgt eine Stromunterbrechung, $M$ schwingt zurück, schließt den Strom wieder usw.

Der viel benutzte Deprez [2]-Unterbrecher ist dem hier beschriebenen ähnlich, hat nur kürzere Schwingungsdauer, die durch eine verschieden zu spannende Feder geändert werden kann.

Andere Arten von Unterbrechern: Der WAGNERsche oder NEEFsche Hammer, der Stimmgabelunterbrecher usw. sind schon in früheren Artikeln beschrieben. Auf Einzelheiten der Konstruktion können wir hier nicht eingehen.

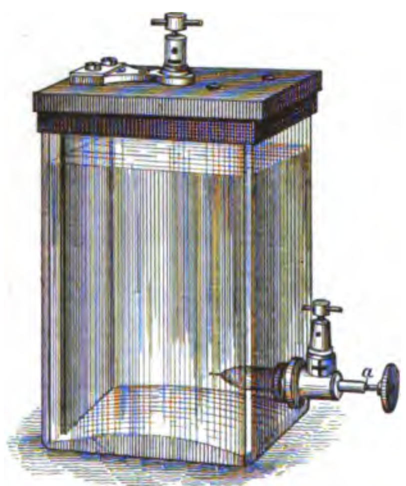
---

[1] S. z. B. FR. KLINGELFUSS, Ann. d. Phys. **5**. 838. 1901. — [2] M. DEPREZ, Compt. rend. **92**. 1283. 1881; Beibl. **5**. 615.



Erwähnt seien noch die Saitenunterbrecher von M. Wien[1], Nernst[2], Pupin[3] und Arons[4], bei denen die Schwingungen von Metallsaiten die Unterbrechungen des Stromes bewirken. Die Schwingungszahl der Saiten (bis 500 bei Wien, 8—900 bei Arons) gibt die Anzahl der Unterbrechungen in der Sekunde. Ebenso wie diese bedürfen andere Unterbrecher eigener galvanischer Ketten oder Motoren zu ihrem Betrieb, z. B. viele der zahlreichen Quecksilberunterbrecher, von denen der Foucaultsche Interruptor[5] oft bei großen Induktorien benutzt wird, aber keine große Zahl von Stromschlüssen in der Sekunde liefert.

Sehr zahlreiche und regelmäßige Unterbrechungen kann man dagegen mit manchen Quecksilberstrahlunterbrechern erhalten, vor allem mit dem von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft zu Berlin konstruierten Turbinenunterbrecher. Bei ihm taucht ein vertikales offenes Rohr ($R$), das in einer Art Schraube endigt, in Quecksilber ($H$), das oben mit einer Schicht nichtleitender Flüssigkeit (Alkohol, Petroleum) bedeckt ist. $R$ wird durch eine (oft auf derselben Achse montierte) Turbine in schnelle Rotation versetzt, das Quecksilber steigt durch die Wirkung der Schraube in $R$ in die Höhe und spritzt aus einem seitlichen Ansatzrohr ($S$) in feinem Strahl aus. Der Mündung von $S$ gegenüber steht ein metallischer horizontaler Kreisring, der durch isolierende Zwischenräume in eine Anzahl leitender Segmente geteilt ist. Das Quecksilber $H$ wird mit dem einen Ende, die leitenden Segmente mit dem andern Ende der Primärspule verbunden. So oft der Quecksilberstrahl eines der Segmente trifft, ist Stromschluß, so oft er auf einen isolierenden Zwischenraum trifft, Stromöffnung vorhanden. Die Rotationsgeschwindigkeit und damit die Unterbrechungszahl kann in weiten Grenzen abgeändert werden.



Figur 240.

Ein in mancher Hinsicht großer Fortschritt ist durch die Konstruktion eines elektrolytischen Flüssigkeitsunterbrechers von Wehnelt[6] gemacht worden. Bei ihm dient als Unterbrecher eine in den primären Kreis eingeschaltete Flüssigkeitszelle (Figur 240), meist aus verdünnter Schwefelsäure mit dünnem Platindraht als Anode $a$ und großer Platin- oder Bleikathode. Die Anode (aktive Elektrode) taucht nur wenig in die Schwefelsäure ein, ist z. B. in eine Glasröhre eingeschmolzen, aus der nur einige Millimeter des dünnen Platindrahtes hervorsehen. Der in den Elektrolyten austretende Strom hat also an der Anode sehr große Dichtigkeit, ist diese zu einem gewissen hohen Betrag gestiegen (z. B. durch Anwendung größerer elektromotorischer Kräfte von 70 Volt und mehr in der Leitung), so verdampft die der Anode anliegende Flüssigkeitsschicht, der Strom ist unterbrochen. Hierdurch entsteht in der primären Spule der Öffnungsextrastrom, dessen Spannung genügt, die isolierende Gashülle zu durchbrechen und wieder Stromschluß zu bewirken, so daß das Spiel von neuem beginnen kann. Die Anzahl der Unterbrechungen in der Sekunde betrug dabei z. B. 200—2000, wenn die Länge des sekundären Funkens von 50 bis auf 3 cm herabgesetzt wurde.

---

[1] M. Wien, Wied. Ann. **44**. 683. 1891. — [2] W. Nernst, Zeitschr. für phys. Chemie. **14**. 622. 1894. — [3] M. J. Pupin, Sill. Journ. (3) **45**. 325. 1893. — [4] L. Arons, Wied. Ann. **66**. 1177. 1898. — [5] L. Foucault, Compt. rend. **43**. 44. 1856. S. auch G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektr. 2. Aufl. IV. 558 und andere Konstruktionen 555—562. — [6] A. Wehnelt, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 76. 1899. Ausführlicher: Wied. Ann. **68**. 233. 1899.

Eine Modifikation des Wehnelt-Unterbrechers ist der Lochunterbrecher, den H. TH. SIMON[1] zuerst in praktisch brauchbare Form gebracht hat. Bei ihm kann jede der beiden Elektroden (große Bleiplatten, Platinstifte oder dgl. in Schwefelsäure) als positive oder negative dienen, sie sind aber durch eine isolierende Scheidewand mit einer oder mehreren kleinen Öffnungen voneinander getrennt. In der Flüssigkeit dieser kurzen engen Löcher ist dann die Stromdichte wieder sehr groß und bedingt Vorgänge wie oben geschildert. SIMON[2] hat auch zuerst den Zusammenhang zwischen der Periode $\tau$ des Wehnelt-Unterbrechers und den übrigen die Erscheinung bedingenden Größen abzuleiten gesucht. Nach ihm ist

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{L}{w} + \frac{C_1 w}{K^2} + C_2 \quad ,$$

wobei $L$, $K$ und $w$ Selbstinduktion, elektromotorische Kraft und Widerstand des ganzen primären Stromkreises und $C_1$ und $C_2$ Konstanten sind. Die Formel ist nicht vollständig, stellt aber eine Anzahl von Beobachtungen, z. B. von RUHMER[3], genähert dar. KLUPATHY[4] macht darauf aufmerksam, daß die JOULEsche Wärme beim Wehnelt-Unterbrecher nicht ausreicht, um eine genügende Erhitzung der Flüssigkeit an der aktiven Elektrode hervorzubringen, er führt noch die Peltier-Wärme in die Rechnung ein und kommt so zu einer etwas komplizierteren Formel für $\tau$. Endlich hat GOLDHAMMER[5] andere Ausdrücke für $\tau$ abgeleitet, die aber noch nicht experimentell geprüft sind. Während eine erfolgreiche Benutzung des ursprünglichen Wehnelt-Unterbrechers eine große elektromotorische Kraft (70 bis 200 Volt) im Primärkreis verlangt, hat STARKE[6] ihm eine Form gegeben, daß er auch bei Bestimmung von Leitfähigkeiten, Dielektrizitätskonstanten usw. mit Vorteil verwandt werden kann. Dabei bildet die negative Elektrode ein kurzer Platindraht von einigen Zehntel Millimetern Dicke, als positive dient ein kleines Endchen allerfeinsten Platindrahtes (0,02—0,03 mm dick), beide tauchen in verdünnte Schwefelsäure. Günstigster Wert für $K = 10-12$ Volt.

Bei Verwendung des Flüssigkeitsunterbrechers muß der Kondensator $C$ entfernt werden.

Über Benutzung, Veränderung und Vereinfachung des Wehnelt-Unterbrechers seien noch aus der Literatur erwähnt:

A. VOLLER und B. WALTER, Wied. Ann. **68**. 526. 1899.
A. BLONDEL, C. R. **128**. 815. 1899.
P. BARY, C. R. **128**. 925. 1899.
H. ARMAGNAT, C. R. **128**. 988. 1899.
A. G. ROSSI, Atti R. Ac. delle Scienze, Torino. **34**. 1899.
O. M. CORBINO, N. Cim. (4) **11**. 62. 1900.
L. ZEHNDER, Ann. d. Phys. **12**. 417 und 1174. 1903.
W. VAN DAM, Ann. d. Phys. **12**. 1172. 1903.

---

Da alle Unterbrecher mehr oder weniger inkonstant arbeiten, werden die Vorgänge im Induktionsapparat unregelmäßig und schwer zu übersehen, deshalb hat man neuerdings, statt des konstanten Stromes mit Unterbrecher, Wechselstrom benutzt.[7] Schickt man Wechselstrom von hoher Wechselzahl durch die Primärspule, so kann man die in ihr auftretenden effektiven Spannungen sicher bestimmen und hieraus auch auf die Maximalspannungen in der Sekundärspule Schlüsse ziehen.

Um dabei in dem sekundären Kreis Gleichstrom zu haben, läßt F. J. KOCH[8] in der unterbrochenen Schließungsbahn dieses Kreises eine metallische Nadel

[1] H. TH. SIMON, Wied. Ann. **68**. 860. 1899. — [2] H. TH. SIMON, Wied. Ann. **68**. 273. 1899. — [3] E. RUHMER, Phys. Zeitschr. **1**. 166, 211. 1900. — [4] E. KLUPATHY, Ann. d. Phys. **9**. 147. 1902. — [5] D. A. GOLDHAMMER, Ann. d. Phys. **9**. 1070. 1902. — [6] H. STARKE, Verh. d. deutschen phys. Gesellsch. **3**. 125. 1901. — [7] S. z. B. H. EBERT, Wied. Ann. **65**. 766. 1898; s. auch W. WIEN, Phys. Zeitschr. **4**. 586. 1903. — [8] F. J. KOCH, Ann. d. Phys. **14**. 547. 1904; s. auch B. WALTER, ibid. **15**. 407. 1904.

rotieren, die die Leitung nur in dem Augenblick genügend schließt, wo die gewünschte Stromphase dort eintrifft.

### β) Die Spulen.

Die primäre Spule des Induktoriums besteht meist aus wenigen Lagen dickeren (1—3 mm Durchmesser) Drahtes, während die sekundäre Spule sehr viele Windungen (viele Tausende) gut isolierten dünnen (ca. 0,2 mm Durchmesser) Drahtes enthält, ihre weit voneinander entfernten Enden führen zu Klemmschrauben, den sogenannten Polen des Apparates. Auf die Konstruktion, Dimensionen usw. kann hier nicht eingegangen werden, wir führen nur als Beispiel die Resultate von FR. KLINGELFUSS[1] an, der in neuer Zeit systematische Versuche über rationelle Konstruktion der Induktionsapparate angestellt hat. Er findet, daß ein beinahe in sich geschlossener Eisenkern bedeutend größere Wirkungen gibt als ein stabförmiger; um die Dimensionen aber nicht zu sehr anwachsen zu lassen, behält er die Stabform fast immer bei. Nachstehende, von FR. KLINGELFUSS selbst zusammengestellte Tabelle gibt eine Übersicht über die Dimensionen usw. der von ihm konstruierten Induktorien.

| Windungszahl der Primärspule (*P*) bei Benutzung mechanischer Unterbrecher | elektrolytischer Unterbrecher | Zahl der Unterabteilungen von *P* | Windungszahl der Sekundärspule | Länge des Eisenkerns in cm | Schlagweite in cm | Kapazität des Kondensators in Mikrofarad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 410 | 58 | 3 | 9 000 | 20 | 10 | 0,08 |
| 428 | 58 | 5 | 13 500 | 30 | 15 | 0,08 |
| 450 | 58 | 5 | 18 000 | 40 | 20 | 0,08 |
| 483 | 60 | 5 | 27 000 | 60 | 30 | 0,08 |
| 360 | 64 | 9 | 36 000 | 70 | 40 | 0,16 |
| 450 | 80 | 16 | 45 000 | 85 | 50 | 0,24 |
| 540 | 96 | 16 | 54 000 | 100 | 60 | 0,24 |
| 630 | 112 | 16 | 63 000 | 120 | 70 | 0,24 |
| 720 | 128 | 25 | 72 000 | 136 | 80 | 0,24 |
| 810 | 144 | 25 | 81 000 | 155 | 90 | 0,24 |
| 900 | 160 | 25 | 90 000 | 170 | 100 | 0,24 |

Die Eisenkerne der ersten vier angeführten Apparate haben 15 qcm, die der folgenden 45 qcm Querschnitt und bestehen aus weichen, durch lackierte Papiere voneinander isolierten Blechen. Die Primärspule hat, mit Ausnahme der kleinen Apparate, nur eine einzige Lage, ist aber durch passende Abzweigungen, die an Kontaktknöpfe führen, in Unterabteilungen geteilt, von denen man jede einzeln oder beliebig viele kombiniert einschalten kann. Die erste Kolumne enthält die Zahl aller vorhandenen Windungen der Primärspule, deren Benutzung zugleich die beste Wirkung (für Funkenentladungen) bei Anwendung eines mechanischen Interruptors mit einer Unterbrechungszahl von 80—100 in der Sekunde gibt. In der zweiten Kolumne findet sich die Windungszahl einer Unterabteilung, die der besten Wirkung für Funkenentladungen bei Verwendung des Wehnelt-Unterbrechers entspricht. Der Durchmesser des Drahtes der Sekundärspule ist meist 0,2 mm.

Die Wickelung der aus einem nicht unterbrochenen Draht bestehenden Sekundärspule ist bei KLINGELFUSS[2] sehr eigentümlich. Sie beginnt auf einer Stirnseite am innern Durchmesser und geschieht zuerst in einer ebenen Spirale bis zum äußeren Durchmesser, setzt sich fort in eine zweite ebene Spirale, die

[1] FR. KLINGELFUSS, Ann. d. Phys. 5. 837. 1901; 9. 1198. 1902. — [2] F. KLINGELFUSS, Mitt. d. Phys. Gesellsch. Zürich, 1903, Nr. 4, S. 5.



von außen und innen gewickelt ist usw. Zur Isolation der wachsenden Potentialdifferenzen zwischen zwei benachbarten Lagen wird beim Aufwickeln die Dicke des Isolators zwischen den Lagen mit wachsender Drahtlänge vergrößert. Es sind also die innersten Windungen der beiden erwähnten, benachbarten, ebenen Spiralen, die große Potentialdifferenz haben, durch viel dickere Isolationsschichten voneinander getrennt, als die äußersten Lagen mit geringerem Spannungsunterschied.

### γ) Der Kondensator.

Der Kondensator wurde von FIZEAU[1] angegeben. Sein schon oben bezeichneter Zweck ist, die Ausgleichung des Öffnungsextrastromes der primären Spule durch einen Funken möglichst zu verhindern und eine schnellere Unterbrechung zu bewirken. Ist die Stärke des induzierenden Stromes gegeben, so verlangt, wie WALTER[2] gezeigt hat, jeder Induktionsapparat zum Maximum seiner Leistung eine bestimmte Kapazität des Kondensators, die sich mit geänderter Stromstärke auch ändert.[3] Außerdem aber entstehen in dem System: Kondensator + Primärspule elektrische Schwingungen, die je nach ihrer Periode günstig oder ungünstig auf die Induktionsspule wirken können. Ist die Unterbrechung, wie beim Wehnelt-Interruptor, schon an sich rapid, oder wenn man z. B. die Primärleitung durch einen Schuß mit der Büchse plötzlich unterbricht[4], so wird der Kondensator überflüssig oder sogar schädlich.[5]

### δ) Die Spannung.

Die Spannung an den Polen des Induktionsapparates hat experimentell A. OBERBECK[6] in folgender Weise zu bestimmen versucht. Der eine Pol des Induktoriums war mit einer Kugel verbunden, der eine verschiebbare Nadelspitze gegenüberstand. Man näherte die Nadel der Kugel, bis ein merkliches Ausströmen der Elektrizität aus der Kugel stattfand, d. h. bis ein mit der Nadel verbundenes BRAUNsches Elektrometer einen andauernden Ausschlag (von 200 Volt) gab. Vorher waren die Entfernungen der Nadel bestimmt, bei denen für bekannte statische Ladungen der Kugel ein Ausströmen eintritt. Nach OBERBECK ist das Verhältnis der Maximalspannung der sekundären Spule zu der Klemmspannung der angewandten Kette im primären Strom für eine gegebene Art der Unterbrechung bei einem Induktorium angenähert konstant. Die zu einer Schlagweite von 10 cm gehörige Spannung wird auf 60 000 Volt angegeben.

Angenähert verhalten sich die Spannungen der sekundären und primären Spule wie die Windungszahlen dieser Spulen, man nennt diesen Quotient das Übersetzungs- oder Transformationsverhältnis. Danach findet KLINGELFUSS[7], indem er die primäre Spannung aus der Schlagweite eines mit dem Unterbrecher verbundenen Funkenmikrometers bestimmt, die Spannung an den Polen der Induktionsrolle bei 20 cm Schlagweite zwischen positiver Spitze und negativer Platte etwa 150 000 Volt, während WALTER[8] sie zu etwa 130 000 Volt erhält. Bei Betrieb der primären Spule mit Wechselstrom bestimmte W. VOEGE[9] diese Spannung für dieselbe Schlagweite zwischen zwei Spitzen zu 120 000 Volt.

Eine obere Grenze dieser Spannung ($V$) ergibt sich nach RAYLEIGH[10] aus der Bemerkung, daß die Energie der Entladung nicht größer sein kann als die Energie des primären Stromes vor dessen Unterbrechung. Ist $C$ die Kapazität

---

[1] H. FIZEAU, Compt. rend. **36**. 418. 1853; Pogg. Ann. **89**. 173. 1853. — [2] B. WALTER, Wied. Ann. **62**. 300. 1897; **66**. 623. 1898. — [3] F. KLINGELFUSS, Ann. d. Phys. **5**. 860. 1901; s. auch J. E. IVES, Phys. Rev. **17**. 175. 1903; Phil. Mag. (6) **6**. 411. 1903. — [4] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (6) **2**. 581. 1901. — [5] P. DUBOIS, Wied. Ann. **65**. 86. 1898. — [6] A. OBERBECK, Wied. Ann. **62**. 124. 1897; **64**. 193. 1898. — [7] F. KLINGELFUSS, Ann. d. Phys. **5**. 853. 1901. — [8] B. WALTER, Wied. Ann. **62**. 321. 1897. — [9] W. VOEGE, Ann. d. Phys. **14**. 556. 1904. — [10] Lord RAYLEIGH, l. c.

der Induktionsspule, $i_1$ die Intensität des primären Stromes, $L_1$ seine Selbstinduktion, so muß also sein:

$$\frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \quad ,$$

d. h.

$$V = i_1 \sqrt{\frac{L_1}{C}} \quad .$$

Der Induktionsapparat transformiert den primären Strom von großer Intensität und geringer Spannung in den Induktionsstrom der sekundären Spule von großer Spannung und geringer Intensität, er gehört also zur Klasse der für die Technik so wichtigen Transformatoren, auf die an dieser Stelle nicht einzugehen ist.

Über Induktionsapparate und ihre Theorie siehe noch u. a. die Arbeiten von:

J. C. POGGENDORFF, Pogg. Ann. **94**. 289; **95**. 156. 1855.
W. SINSTEDEN, Pogg. Ann. **96**. 353. 1855.
R. COLLEY, Wied. Ann. **44**. 109. 1891.

Aus neuerer Zeit:

W. HESS, Wied. Ann. **66**. 980. 1898.
H. ABRAHAM, Journ. de Phys. (3) **6**. 316. 1897.
K. R. JOHNSON, Ann. d. Phys. **2**. 179, 498; **3**. 438, 744. 1900; **4**. 137, 722. 1901.
R. BEATTIE, Phil. Mag. (5) **50**. 139. 1900.
Ferner Literaturangaben in G. WIEDEMANN, l. c. **4**. 552—573 und in dem zitierten Buch von H. ARMAGNAT.

## 13. Induktion in körperlichen Leitern.[1]

### a) Erste Beobachtungen. — Berechnung.

Schon im Jahre 1824 hatte ARAGO[2] Erscheinungen beobachtet, die er als Rotationsmagnetismus bezeichnete, und die man zuerst nur dadurch zu erklären wußte, daß man eine neue Wirkung des Magnetismus auf die Metalle annahm; FARADAYs Untersuchungen[3] (1832) erwiesen dann, daß es sich um einen Fall von Magnetoinduktion in körperlichen Leitern handelte.

Die ARAGOschen Versuche ergaben im wesentlichen folgende Resultate:

1. Rotiert eine Metallscheibe um eine vertikale Achse unter oder über einem in horizontaler Ebene drehbaren Magnetstab (Deklinationsnadel), dessen Zentrum mit dem der Scheibe in derselben Vertikallinie liegt, so wird die Nadel im Sinne der Rotation abgelenkt und beginnt, bei schnellerer Bewegung der Scheibe, in gleichem Sinne zu rotieren. Auch umgekehrt kann durch den rotierenden Magneten die Scheibe in Rotation versetzt werden.

2. Eine über oder unter der ruhenden Scheibe schwingende Magnetnadel erfährt eine viel stärkere Dämpfung, als wenn die Scheibe nicht vorhanden ist.

3. Hängt seitlich über der Scheibe an einem Arm eines Wagebalkens ein vertikaler Magnet, so wird er bei der Rotation der Scheibe abgestoßen.

4. Wird eine Inklinationsnadel so orientiert, daß sie vertikal steht und über die rotierende Scheibe nahe deren Zentrum gebracht, so wird sie nach diesem hin abgelenkt; bringt man die Nadel nahe dem Rand der Scheibe, so ist die Ablenkung entgegengesetzt.

Hiernach übt also die horizontal rotierende Scheibe auf einen Magnetpol eine Kraft aus die eine tangentiale, eine vertikale und eine radiale Komponente hat.

Weitere Untersuchungen[4] ergaben, daß die angeführten Wirkungen wesentlich von der Leitfähigkeit der Scheibe abhängen und um so stärker werden, je größer diese ist.

[1] Literatur s. auch WIEDEMANN, Die Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl. **4**. 501—549. 1898. — [2] F. ARAGO, Ann. de chim. et de phys. **27**. 363. 1824; **28**. 325. 1825; **32**. 217. 1826. — [3] M. FARADAY, Exp. Res. I. Nr. 81—139. 1832. — [4] C. BABBAGE und J. F. W. HERSCHEL, Phil. Trans. 1825. 467. — NOBILI und BACELLI, Bibl. univ. **31**. 47. 1826 u. a.

Alle diese und zahlreiche verwandte Erscheinungen erklären sich nach FARADAYS Entdeckungen leicht als Induktionswirkungen, da ja bei ihnen allen eine Bewegung von Leitern (Scheibe oder dgl.) im Magnetfeld stattfindet. Die Richtung der entstehenden Induktionsströme muß der LENZschen Regel folgen, d. h. ihre elektromagnetische Wirkung muß die erzeugende Bewegung zu hemmen suchen; also sind die induzierten Ströme bei den unter 1. angeführten Versuchen in den sich der Nadel nähernden resp. sich von ihr entfernenden Teilen der Scheibe so gerichtet, daß sie abstoßende resp. anziehende Kräfte auf die Pole der Nadel ausüben usw. Bei genaueren Untersuchungen ist auch die Selbstinduktion des rotierenden Leiters zu berücksichtigen.

Für die ältere Theorie war die quantitative Erklärung der angegebenen Erscheinungen schwierig. Da die Formeln für lineare geschlossene Ströme nicht mehr ausreichten, mußte man auf die allgemeinsten Gesetze der Elektrizitätsbewegung zurückgehen, wie sie z. B. das WEBERsche Gesetz zu geben suchte. Das tat KIRCHHOFF[1], wandte die so gefundenen Gleichungen aber nur auf die Bewegung der Elektrizität in langen, dünnen Drähten an. JOCHMANN[2] behandelte dann die Aufgabe einer im Magnetfeld rotierenden, unendlich ausgedehnten Platte und einer Kugel bei langsamer Rotation, ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion, und fand Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung. Weitere Rechnungen für eine Kugel unter dem Einfluß periodischer, äußerer Kräfte hat LORBERG[3] ausgeführt. — Untersuchungen über die Elektrizitätsbewegung in körperlichen Leitern ergaben dann HELMHOLTZ[4] Einwände gegen das WEBERsche Gesetz, der Grundlage der oben genannten Berechnungen, an die sich eine eingehende Diskussion zwischen HELMHOLTZ[5], W. WEBER, C. NEUMANN, J. BERTRAND u. a. über die Grundfragen der Elektrodynamik anschloß und die eine allgemeinere Anerkennung der MAXWELLschen Theorie vermittelte.

Eine elegante Theorie der Induktion in einer unendlich ausgedehnten, sehr dünnen Scheibe und deren Anwendung auf die ARAGOsche Scheibe hat MAXWELL[6] nach der Methode der magnetischen Bilder gegeben. Weiter seien noch genannt die Arbeiten von OBERBECK[7], HIMSTEDT[8], NIVEN[9], LARMOR[10] und besonders von HERTZ[11], der die Rotation von unmagnetischen und magnetischen Hohl- und Vollkugeln im Magnetfeld und verwandte Probleme behandelte. Neuerdings hat R. GANS[12] aus den allgemeinen MAXWELL-HERTZschen Gleichungen die Lösungen für Drehung von Rotationskörpern im statischen Magnetfeld abgeleitet.

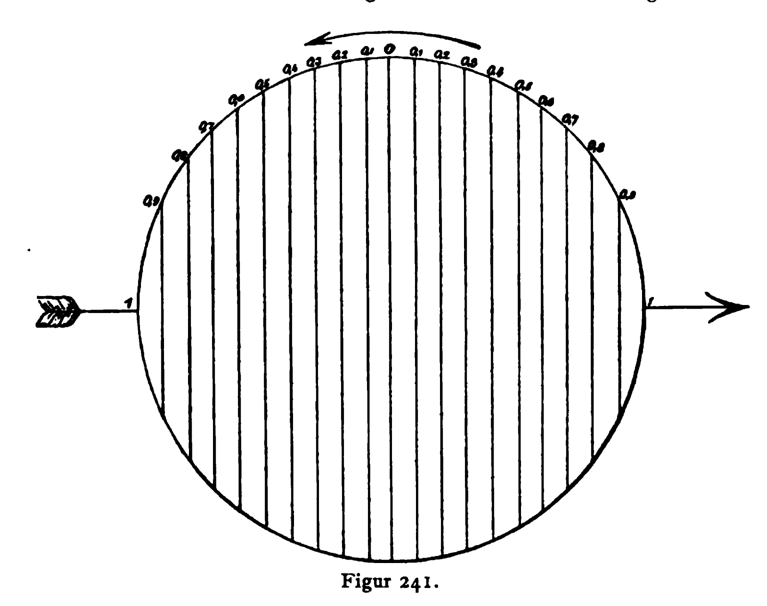
## b) Rotation von körperlichen Leitern im Magnetfeld.

Rotiert ein Leiter von der Gestalt eines Rotationskörpers in einem unveränderlichen Magnetfeld mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $n$ um seine Drehungsachse, so bildet sich in ihm ein System von Induktionsströmen aus, das im Raum ruht, und dessen Form für spezielle Fälle z. B. MATTEUCCI[13] aus der Gestalt der isoelektrischen Linien ableiten wollte. Sucht man mit passend aufgesetzten Schleifkontakten Punkte auf dem rotierenden Körper, von denen aus kein Strom durch ein angeschlossenes Galvanometer fließt, so erhält man die isoelektrischen Linien, doch stehen, was schon JOCHMANN[14] bemerkte, die

---

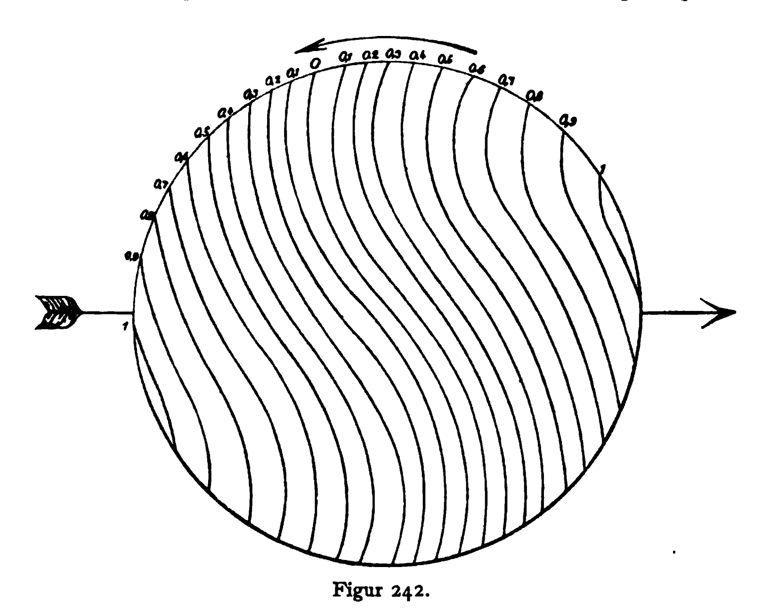
[1] G. KIRCHHOFF. Pogg. Ann. **102**. 529. 1857; Ges. Abhandl. 154. — [2] E. JOCHMANN, Borchardts Journal **63**. 158 u. 329. 1864; Pogg. Ann. **122**. 214. 1864. — [3] H. LORBERG, Borchardts Journal **71**. 53. 1870. — [4] H. v. HELMHOLTZ, Borchardts Journal **72**. 57. 1870; Wiss. Abhandl. **1**. 545. — [5] H. v. HELMHOLTZ, Borchardts Journal **75**. 35. 1873; **78**. 273. 1874 usw.; Wiss. Abhandl. **1**. 629—791, wo auch die andere Literatur nachzusehen. — [6] CL. MAXWELL, Proc. of. Roy. Soc. **20**. 160. 1872. — [7] A. OBERBECK, Grunerts Archiv **56**. 394. 1872. — [8] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **11**. 812. 1880. — [9] C. NIVEN, Proc. of Roy. Soc. **30**. 113. 1880. — [10] J. LARMOR, Phil. Mag. (5) **17**. 1. 1884. — [11] H. HERTZ, Dissertation, Berlin 1880 und Ges. Werke **1**. 37. — [12] R. GANS, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **48**. 1. 1902. — [13] C. MATTEUCCI, Ann. de Chim. et de Phys, (3). **49**. 129. 1857. — [14] E. JOCHMANN, l. c. Pogg. Ann. 217.

Strömungskurven auf diesen Linien nicht senkrecht, wie man annahm, und sind also nicht so direkt zu erhalten. Steigert man die Geschwindigkeit der Rotation,



Figur 241.

so verschieben sich nach Beobachtungen von NOBILI[1], MATTEUCCI[2] u. a. die isoelektrischen und Strömungslinien im Sinne der Rotation, da jetzt die Selbstinduktion in dem Körper bemerklich wird und eine Verzögerung in der Aus-

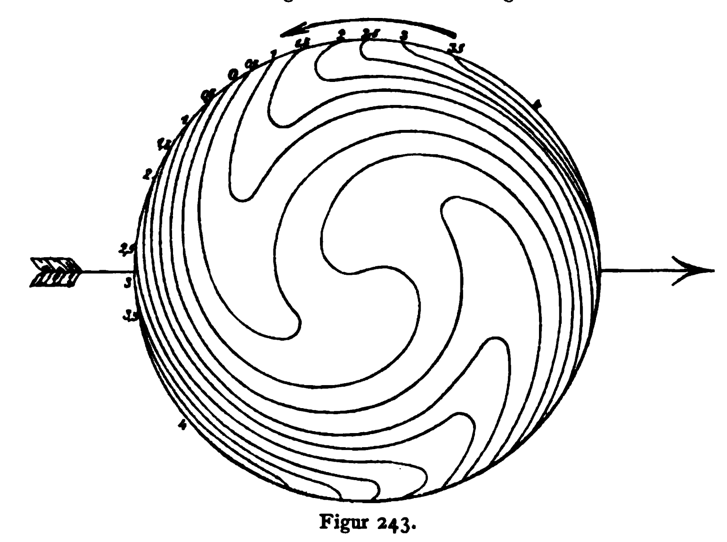


Figur 242.

bildung der Stromlinien bewirkt. Hierdurch erklärt sich auch die oben erwähnte vertikale Kraftkomponente einer horizontal rasch rotierenden Scheibe gegen ein bewegliches Magnetsystem.

[1] L. NOBILI, Pogg. Ann. **27**. 426. 1833. — [2] C. MATTEUCCI, l. c.

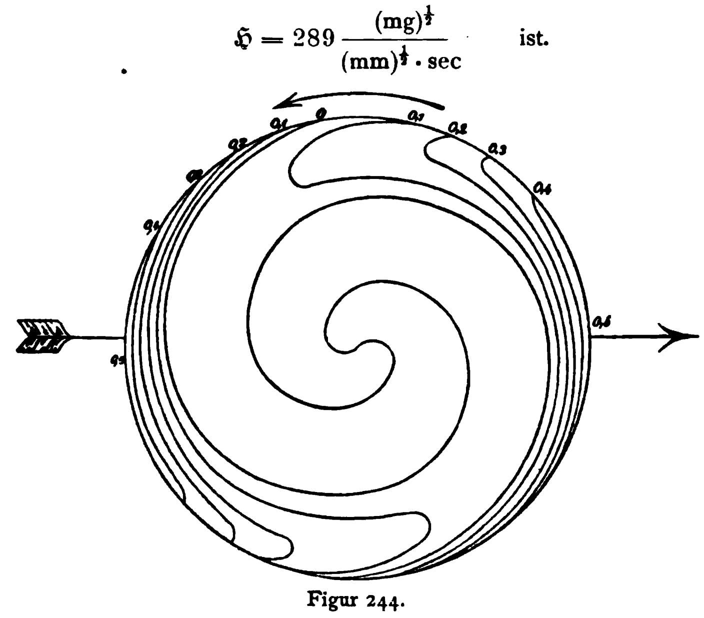
Die Figuren 241—244 geben nach HERTZ[1] ein Bild dieser Verhältnisse, wenn sich eine Vollkugel von 5 cm Radius um einen Durchmesser ($z$-Achse) unter dem Einflusse eines homogenen, zur Drehungsachse senkrechten Magnet-



Figur 243.

feldes (dessen Richtung der gerade Pfeil angibt) dreht. Die geschlossenen Strombahnen sind sämtlich Kreise, deren Ebene der Drehungsachse parallel. Die Kurven stellen die Dichtigkeit der Strömung in der Äquatorebene dar durch die Linien $j_z$ = const, die beigeschriebenen Zahlen geben die Werte von $j_z$ in absolutem Maße, wenn die wirkende Kraft

$$\mathfrak{H} = 289 \frac{(\mathrm{mg})^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{mm})^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{sec}} \qquad \text{ist.}$$



Figur 244.

Figur 241 und 242 beziehen sich auf eine Kupferkugel bei fünf Umdrehungen in der Sekunde, 241 ohne, 242 mit Berücksichtigung der Selbstinduktion, Figur 243 auf dieselbe Kugel bei 50 Umdrehungen, Figur 244 auf eine Eisenkugel bei fünf

[1] H. HERTZ, l. c. 130.

Umdrehungen in der Sekunde; der Widerstand des Eisens ist sechsmal so groß als der des Kupfers und $\mu = 200$ angenommen.

Die Berechnung hat von den beiden Hauptgleichungen der MAXWELLschen Theorie auszugehen, die als (Ib) in dem Artikel „Elektrodynamik" und als (IIb) S. 545 bezeichnet sind. Die Strömung würde sich, da

$$\mathfrak{j} = \sigma \mathfrak{E}$$

ist, wo $\sigma$ die Leitfähigkeit bedeutet, aus Gleichung (IIb) ergeben. Ist im Innern des Leiters kein wahrer Magnetismus vorhanden, so gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \quad .$$

Nach Eintreten des stationären Zustandes wird

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0 \quad ,$$

es vereinfacht sich (IIb) also in

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{rot} [\mathfrak{B}\, \mathfrak{v}] \quad .$$

Bei langsamer Rotation kann in $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$ als die gegebene gleichförmige Feldstärke angesehen werden. Durch weitere Umformung unter Benutzung der Gleichung (Ib) und Beachtung der Grenzbedingungen ergibt sich bei Rotation einer Kugel um die durch ihren Mittelpunkt gehende $z$-Achse in einem homogenen, der $x$-Achse parallelen Magnetfeld von der Stärke $H$:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\mu}{c} \cdot \frac{u}{2} H \cdot z \; ; \qquad \mathfrak{E}_y = 0 \; ; \qquad \mathfrak{E}_z = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{u}{2} H \cdot x$$ [1] .

d. h. die Ströme verlaufen in Kreisen, deren Ebenen parallel der Rotationsachse und der Richtung des Feldes sind.

### c) Dämpfung und Erwärmung der bewegten Körper durch Induktionsströme.

Die durch Bewegung von Leitern im Magnetfeld induzierten Ströme suchen diese Bewegung stets zu hemmen und vernichten sie bald, wenn nicht beständig neue Antriebskräfte wirken. Das wird z. B. durch das WALTENHOFENsche[2] Pendel demonstriert, bei dem der Pendelkörper eine schwere Kupferscheibe ist, die zwischen den Polen eines starken Elektromagneten senkrecht zur Feldrichtung hin- und herschwingt. Wird der Elektromagnet erregt, so kommt das Pendel schnell zur Ruhe; ebenso wird eine Kupferkugel durch Erregung des Elektromagneten zum plötzlichen Stillstand gebracht, wenn sie, zwischen den Polen an einem gedrillten Faden aufgehängt, an dessen Detorsion teilnimmt. — Diese Art der Dämpfung hat HIMSTEDT[3] zur Bestimmung des spezifischen Widerstandes einer Kupferkugel benutzt, und R. H. WEBER[4] verglich die Leitfähigkeiten von Legierungen, indem er Zylinder aus den Legierungen in einem Magnetfeld um ihre Achse schwingen ließ und das der Leitfähigkeit proportionale logarithmische Dekrement der Schwingungen bestimmte.

Die umgekehrte Erscheinung, die Dämpfung schwingender Magnete in der Nähe von Metallmassen, wendet man bei Galvanometern an, wo man nach GAUSS'[5] Vorgang die Magnetnadel in eine Kupferhülle einschließt. Dadurch wird die Zahl ihrer Schwingungen sehr vermindert, ja deren Gang kann aperiodisch gemacht werden[6].

---

[1] R. GANS, l. c. — [2] A. v. WALTENHOFEN, Wied. Ann. 19. 928. 1883. — [3] F. HIMSTEDT, l. c. 830. — [4] R. H. WEBER, Wied. Ann. 68. 705. 1899. — [5] C. F. GAUSS, Resultate d. magnet. Vereins 1837. 18. — [6] Siehe Handbuch IV. 276.

Wie früher erwähnt, und wie die Theorie direkt ergibt, ist die Dämpfung einer über einer Metallplatte schwingenden Magnetnadel um so stärker, je größer die Leitungsfähigkeit des Metalles. Davon machen die magnetischen Metalle, besonders natürlich Eisen, eine Ausnahme. Eisen dämpft außerordentlich viel stärker, als seiner Leitfähigkeit entspricht, und nur ein kleiner Bruchteil der Dämpfung durch Eisen rührt von den Induktionsströmen in dem Metalle her, die Hauptwirkung ist vielmehr, wie WARBURG[1] erkannt hat, der Hysteresis des Eisens zuzuschreiben. Schwingt die Magnetnadel über einer Eisenscheibe hin und her, so magnetisiert sie die Teilchen der Scheibe, über die sie hinwegstreicht, temporär, und zwar sind die Teilchen, nach denen sie hinschwingt, im aufsteigenden, die, von denen sich die Nadel entfernt, im absteigenden Ast des Magnetisierungsprozesses. Wegen der Hysteresis üben also diese stärkere Wirkung als jene, und die Nadel wird deshalb kräftig in ihrer Bewegung gehemmt. Messende Versuche von HIMSTEDT[2] haben diese Erklärung bestätigt. Natürlich erzeugt die Hysteresis auch bei im Magnetfeld sich bewegenden Eisenkörpern entsprechende starke Dämpfung.

Alle diese Induktionserscheinungen rufen in den Leitern JOULEsche Wärme hervor, die bei schneller Bewegung sehr bedeutend wird, wie von FOUCAULT[3] bemerkt wurde. Obgleich nicht FOUCAULT, sondern POGGENDORFF[4] die richtige Erklärung gab, ist doch neben der Bezeichnung „Wirbelströme“ für diese mit Wärmeentwicklung verbundenen Induktionsströme in körperlichen Leitern oft noch der Name „Foucaultsche Ströme“ üblich. Die JOULEsche Wärme in dem bewegten Leiter für die Zeiteinheit ist gegeben durch den Ausdruck:

$$W = \sigma \int \mathfrak{E}^2 \, d\tau \quad ,$$

sie ist bei den erwähnten gedämpften Bewegungen gleich der Änderung der kinetischen + elektromagnetischen Energie. Betrachten wir wieder die Rotation einer Kupferkugel vom Radius $R$ in einem homogenen, senkrecht zur Drehachse gerichteten Magnetfeld von der Stärke $H$, so wird nach den im letzten Beispiel gefundenen Werten von $\mathfrak{E}_x \ldots$ und bei der Rotationsgeschwindigkeit $u$:

$$W = \frac{2}{15} \pi \mu^2 \frac{\sigma}{c^2} H^2 R^5 u^2 \quad .$$

Vernachlässigen wir die elektromagnetische Energie gegen die kinetische (was aber durchaus nicht immer gestattet ist), so wird, wenn $k$ die Dichte der Kugel

$$k \frac{du}{dt} + \frac{\mu^2 \sigma H^2}{4 c^2} u = 0 \quad ,$$

also:

$$u = u_0 \, e^{-\frac{\mu^2 \sigma H^2}{4 c^2 k} \cdot t}$$ [5]

gibt die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t$, wenn sie $u_0$ zur Zeit $t = 0$ ist.

## 14. Induktionserscheinungen in ruhenden, geschlossenen Leitungen mit periodisch veränderlicher elektromotorischer Kraft. (Wechselströme.)

### a) Eine Leitung.

#### α) Die elektromotorische Kraft ist eine reine Sinusfunktion, die Leitung enthält OHMschen Widerstand und Selbstinduktion.

Jede periodische elektromotorische Kraft läßt sich nach dem FOURIERschen Satz in eine Summe von Sinus- und Kosinusgliedern auflösen, es genügt deshalb, die

[1] E. WARBURG, Wied. Ann. **13**. 159. 1881. — [2] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **14**. 483. 1881. — [3] L. FOUCAULT, C. R. **41**. 450. 1855; Pogg. Ann. **96**. 622. — [4] J. C. POGGENDORFF, Pogg. Ann. **96**. 624. — [5] H. HERTZ, l. c. 132 und R. GANS, l. c.

elektromotorische Kraft als einfache Sinusfunktion anzunehmen und zu setzen $\mathfrak{E} = A\sin(nt)$. Dann ist für eine einfach geschlossene Leitung:

$$iw + L\frac{di}{dt} = A\sin(nt) \quad , \tag{1}$$

wo

$$n = \frac{2\pi}{\tau} \quad , \tag{2}$$

$\tau$ ist die Schwingungsdauer, d. h. die Dauer einer ganzen Periode, und also $n$ die Anzahl der Schwingungen in $2\pi$ Sekunden; $n_1 = \frac{n}{2\pi}$, die Schwingungszahl in einer Sekunde, heißt oft die Frequenz und $\frac{n}{\pi}$ die Wechselzahl des Stromes.

Die Lösung von (1) ist:

$$i = \text{const} \cdot e^{-\frac{w}{L}t} + \frac{A(w\sin nt - nL\cos nt)}{\sqrt{w^2 + n^2L^2}} \quad ,$$

mit wachsender Zeit verschwindet der erste Posten und es wird

$$i = a\sin(nt - \varphi) \quad , \tag{3}$$

wo

$$a = \frac{A}{\sqrt{w^2 + n^2L^2}} \tag{4}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{nL}{w} \quad , \tag{5}$$

also

$$i = \frac{A\cos\varphi}{w}\sin(nt - \varphi) \quad .$$

Die Stromintensität und elektromotorische Kraft schwingen also in verschiedener Phase, jene bleibt hinter dieser in Phase zurück; die Phasenverschiebung ist um so größer, je größere Selbstinduktion und je kleineren Widerstand die Leitung hat.

$A$ ist die Amplitude der elektromotorischen Kraft, $a$ die der Intensität, die Gleichung (4) zeigt, daß $a$ kleiner ist, als dem Ohmschen Gesetz bei konstanter elektromotorischer Kraft entsprechen würde. Es hat eine scheinbare Widerstandsvermehrung stattgefunden; die an Stelle von $w$ hier auftretende Größe

$$\sqrt{w^2 + n^2L^2}$$

wird Impedanz genannt. $w$ heißt der Ohmsche Widerstand oder Resistanz, das zu $w$ hinzutretende Glied $nL$ Induktanz, induktiver Widerstand oder Reaktanz.

Der scheinbare Widerstand verhält sich zum Ohmschen wie $1 : \cos\varphi$. Für Spulen mit vielen Windungen und Eisenkern ist, auch bei nicht sehr großem $n$, oft $w$ gegen $nL$ klein, so daß $\varphi$ dem Wert $\frac{\pi}{2}$ nahe kommt. Streng genommen ist aber bei Verwendung eines Eisenkerns $L$ nicht mehr konstant, und es müßte in der Ausgangsgleichung (1) $\frac{d(Li)}{dt}$ an die Stelle von $L\frac{di}{dt}$ treten.

Während die Intensität von null bis wieder zu null schwankt, ist ihr mittlerer Wert:

$$(i)_m = \frac{2}{\tau}\int_{t=\frac{\varphi}{n}}^{t=\frac{\varphi}{n}+\frac{\tau}{2}} i\,dt = \frac{2a}{\pi} = \frac{2A}{\pi\sqrt{w^2 + n^2L^2}}$$

und der Mittelwert von $i^2$ während einer Periode $\tau$:

$$(i^2)_m = \frac{a^2}{2} = \frac{A^2}{2\,(w^2 + n^2 L^2)} \quad .$$

$I = \sqrt{(i^2)_m}$ heißt effektive Stromstärke, sie ist:

$$I = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad .$$

Analog definiert man als effektive Spannung $E$:

$$E = (\mathcal{E}^2)_m = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad ,$$

also:

$$I = \frac{E}{\sqrt{w^2 + n^2 L^2}} \quad .$$

Es läßt sich demnach $E$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $In$ und $ILn$ darstellen. Die Leistung $W$ des Apparates (Wechselstrommaschine) in der Zeiteinheit ist:

$$W = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{E}\, i\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A\, a \sin(n\,t) \sin(n\,t - \varphi)\, dt \quad ,$$

also:

$$W = \frac{A\,a}{2} \cos\varphi = I \cdot E \cdot \cos\varphi \quad ,$$

$\cos\varphi$ heißt der Leistungsfaktor, d. h. der Faktor, mit dem die Leistung, die ohne Phasenverschiebung bestehen würde, multipliziert werden muß, um die wirkliche Leistung zu ergeben. Würde die Phasenverschiebung zwischen Strom und elektromotorischer Kraft $\frac{\pi}{2}$ betragen, so wäre $W = 0$. Zerlegt man den Strom $i$ in zwei Komponente, mit den Amplituden $a \sin\varphi$ und $a \cos\varphi$, so hat die erste Komponente eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ gegen die elektromotorische Kraft, sie heißt deshalb der wattlose Strom, während die Komponente $i \cos\varphi$, die keine Phasendifferenz gegen die elektromotorische Kraft hat, Wattstrom genannt wird.

Damit $\varphi$ nahe $\frac{\pi}{2}$ sei, muß die Induktanz des Stromkreises sehr groß gegen dessen OHMschen Widerstand sein. In diesem Falle, wo die mittlere Leistung der Wechselstrommaschine während einer ganzen Periode nahe null ist, wird die Energie, die die Maschine zur Erzeugung des Stromes und des damit verbundenen Magnetfeldes in der ersten Hälfte der Periode aufwendet, ihr in der zweiten Hälfte wieder durch das Verschwinden des Feldes und den dadurch in der Leitung induzierten Strom zurückgegeben. Es findet also ein beständiger Energieaustausch zwischen Maschine und Stromkreis statt, während der Energieverbrauch sehr gering ist. Solche induktiven Widerstände mit möglichst geringem Energieverbrauch sind die oft verwendeten Drosselspulen, wenn sie aber, wie meist, über Eisen gewickelt sind, so tritt bei ihnen beträchtlicher Energieverlust durch Hysteresis ein.

Ist die Spannung des Wechselstromes nicht rein sinusförmig, so sind Korrektionen an den Werten von $I$ usw. nötig, wie solche z. B. H. F. WEBER[1] an-

[1] H. F. WEBER, Wied. Ann. **63**. 366. 1897.

gegeben hat. Die oben gezogenen Folgerungen über die Phasenverschiebung usw. wurden schon von LENZ[1] und später von KOOSEN[2] durch Messungen an einer in einem Magnetfeld rotierenden Spule bestätigt.

### β) Die Leitung enthalte noch eine Kapazität.

Die Leitung enthalte noch einen Kondensator von der Kapazität $C$, dessen Belegungen zur Potentialdifferenz $V$ geladen seien (oder der Stromkreis habe die Kapazität $C$). Es gilt dann:

$$i = -C\frac{dV}{dt}, \qquad i w + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = A\sin(n t),$$

die Lösung ist:

$$i = \frac{A\sin(n t - \varphi)}{\sqrt{w^2 + \left(nL - \frac{1}{Cn}\right)^2}},$$

wo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{w}\left(nL - \frac{1}{Cn}\right).$$

Die effektiven Werte stehen in der Beziehung

$$I = \frac{E}{\sqrt{w^2 + \left(nL - \frac{1}{Cn}\right)^2}}.$$

Den größten Wert erhalten $i$ und $V$, wenn $nL = \frac{1}{Cn}$, d. h.

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC},$$

dann ist die Phasendifferenz von $V$ und der elektromotorischen Kraft $= \frac{\pi}{2}$, die von $i$ und der elektromotorischen Kraft aber null. Wie wir später sehen werden, erfolgen die Entladungen eines Kondensators mit der Kapazität $C$ durch eine Leitung von der Selbstinduktion $L$ in Schwingungen, deren Dauer $2\pi\sqrt{LC}$ beträgt, man erhält also die höchsten Werte von $V$ und $i$, wenn die Eigenschwingungen des Systems erregt werden.

Diese Resultate prüfte A. OBERBECK[3], indem er die Wechselströme eines Induktoriums mit Stromunterbrecher von regulierbarer Schwingungszahl durch eine Leitung mit Kondensator hindurchschickte. Die Strommessung geschah mit dem Elektrodynamometer; die Kapazitäten der Kondensatoren und die Selbstinduktionskoeffizienten wurden variiert, und jedesmal ergab sich ein Maximum der Ablenkung etwa für den oben berechneten Wert von $\tau$, d. h. wenn Resonanz zwischen den Eigenschwingungen des Stromkreises und den Schwingungen des Unterbrechers stattfand. Später erhielt M. WIEN[4] mit der Wechselstromsirene und 3—5000 Perioden in der Sekunde eine sehr gute Bestätiguug der Beziehung zwischen $I$ und $E$.

Enthält die Leitung statt eines Kondensators eine durch Wechselstrom polarisierte Flüssigkeitszelle, so gilt auch die obige Ausgangsgleichung, da die Zelle als Kondensator aufgefaßt werden kann. Es tritt eine Phasenverschiebung ein, und der OHMsche Widerstand ändert sich in gleicher Weise, wie in dem behandelten Fall[5]. Mit der BRAUNschen Röhre läßt sich diese Phasenverschiebung leicht demonstrieren[6].

---

[1] E. LENZ, Pogg. Ann. **76**. 494. 1849; **92**. 128. 1854. — [2] J. H. KOOSEN, Pogg. Ann. **87**. 316. 1852. — [3] A. OBERBECK, Wied. Ann. **26**. 245. 1885. — [4] M. WIEN, Ann. d. Phys. **4**. 435. 1901. — [5] A. OBERBECK, Wied. Ann. **6**. 210. 1879; **19**. 213 u. 625. 1883; **21**. 139. 1884. — Siehe auch: F. KOHLRAUSCH, Pogg. Ann. Jubelband 290. 1874. — A. WINKELMANN, Wied. Ann. **20**. 91. 1883. — E. COHN, Wied. Ann. **21**. 650. 1884. — M. WIEN, Wied. Ann. **58**. 37 u. **59**. 267. 1896. — F. KOHLRAUSCH und L. HOLBORN, Das Leitvermögen der Elektrolyte. 65—68. Leipzig, Teubner 1898. — [6] F. BRAUN, Wied. Ann. **60**. 557. 1897.

γ) Die elektromotorische Kraft ändert sich wie eine gedämpfte Sinusschwingung.

Die äußere elektromotorische Kraft verhalte sich wie eine gedämpfte Sinusschwingung, d. h. sie folge dem Gesetz:

$$\mathfrak{E} = A e^{-\alpha t} \sin(n t) \quad .$$

Dann wird

$$i = \frac{A e^{-\alpha t} \sin(n t - \varphi)}{p} \quad ,$$

wo

$$p^2 = \left[w - \alpha L + \frac{\alpha}{(n^2 + \alpha^2) C}\right]^2 + \left[n L - \frac{n}{(n^2 + \alpha^2) C}\right]^2 = p_1^2 + p_2^2$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_2}{p_1}$$

die Stromamplitude:

$$a = \frac{A}{p} \quad .$$

Wäre die Dämpfung nicht sehr groß, d. h. $\alpha^2$ klein gegen $n^2$, so erhielte man:

$$p = \sqrt{\left[w - \frac{\alpha}{n}\left(n L - \frac{1}{n C}\right)\right]^2 + \left[n L - \frac{1}{n C}\right]^2} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n L - \frac{1}{n C}}{w - \frac{\alpha}{n}\left(n L - \frac{1}{n C}\right)} \quad .$$

Enthielte der Kreis keine Kapazität, so würden die Posten, die $C$ als Faktor enthalten, verschwinden.

δ) Die elektromotorische Kraft ist eine beliebige Funktion der Zeit.

Ist die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ eine beliebige Funktion der Zeit

$$\mathfrak{E} = f(t) \quad ,$$

so wird die Gleichung für den Strom:

$$\frac{d^2 i}{d t^2} + \frac{w}{L} \frac{d i}{d t} + \frac{i}{L C} = \frac{1}{L} f'(t) \quad ,$$

deren allgemeine Lösung ist[1]:

$$i = \frac{C}{\sqrt{w^2 C^2 - 4 L C}} \left\{ e^{-\frac{t}{\tau_1}} \int^t e^{\frac{t}{\tau_1}} f'(t)\, dt - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \int^t e^{\frac{t}{\tau_2}} f'(t)\, dt \right\} + c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad ,$$

wo $c_1$ und $c_2$ Integrationskonstanten sind und

$$\tau_1 = \frac{2 L C}{w C - \sqrt{w^2 C^2 - 4 L C}} \quad ; \qquad \tau_2 = \frac{2 L C}{w C + \sqrt{w^2 C^2 - 4 L C}} \quad .$$

[1] F. Bedell und A. C. Crehore, Am. Inst. El. Eng. Chicago 3. 303. 1872; Beibl. 17. 228. 1893.

### b) Stromverzweigung bei Wechselströmen[1].

Hat man rein periodische Größen, die mit ihren Differentialquotienten nur linear und mit reellen Koeffizienten in den Gleichungen auftreten und deren Schwingungsdauer nach der früheren Bezeichnung

$$\tau = \frac{2\pi}{n} \quad ,$$

so kann man sie, statt als Funktion eines Sinus oder Kosinus, durch

$$e^{\iota n t}$$

darstellen, wo $\iota = \sqrt{-1}$. Nach Rechnung mit dieser Größe hat man am Schluß das Resultat wieder in seine reellen und imaginären Bestandteile zu zerlegen.

Eine unverzweigte Leitung bestehe aus einem Kondensator von der Kapazität $C$, einem Leiter vom Widerstand $w$ und der Selbstinduktion $L$, sie werde von solchen periodischen Strömen $i$ durchflossen, dann ist die Potentialdifferenz $V$ an den Enden der Leitung:

$$V = i w + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \quad .$$

Hier $i = a \cdot e^{\iota n t}$ eingesetzt:

$$V = a e^{\iota n t}\left\{w + \iota\left(nL - \frac{1}{nC}\right)\right\} = (b' + \iota b'')i = b i \quad ,$$

d. h. zwischen $V$ und $i$ besteht formal ganz dieselbe Beziehung wie bei stationärem Gleichstrom, nur tritt an die Stelle des OHMschen Widerstandes jetzt der „Widerstandsoperator" $b = b' + \iota b''$, wo

$$b' = w \;; \qquad b'' = nL - \frac{1}{nC} \quad .$$

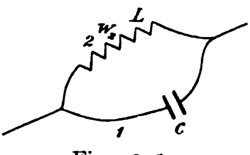
Wirkt auf die betrachtete Leitung (1) noch eine andere Leitung (2) induzierend ein, so gilt die Beziehung

$$V = i w + L_1\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + L_{12}\frac{di_2}{dt} \quad ,$$

wo $i_2 = a_2 e^{\iota n t}$, so wird

$$b'' = n\left(L_1 + \frac{L_{12}}{a'}\right) - \frac{1}{nC} \quad .$$

Dabei ist $a' = \pm\frac{a_1}{a_2}$ das Verhältnis der Amplituden der zwei Wechselströme.



Figur 245.

Hat ein Zweig neben der Selbstinduktion und dem OHMschen Widerstand noch die elektrostatische Kapazität $C$ (z. B. ein Kabel oder ein Kondensator mit Leitfähigkeit), so kann man das so auffassen, als ob der Strom sich verzweigte und ein Kondensator von der Kapazität $C$ parallel zu der Selbstinduktion und dem OHMschen Widerstand geschaltet wäre (s. Figur 245).

Besitzen die Zuleitungen zu $C$ keinen merklichen Widerstand und Selbstinduktion, so wird der Operator des Zweiges $C$:

$$b_1 = -\frac{\iota}{nC} \qquad \text{und} \qquad b_2 = w_2 + \iota n L_2 \quad ,$$

---

[1] Die folgenden Resultate sind zum größten Teil schon gegeben von A. OBERBECK, Wied. Ann. **17**. 820. 1882. Dann Lord RAYLEIGH, Proc. of the Roy. Soc. **49**. 203. 1891; auch Scient. Papers **3**. 452. Weitere Ausführung und Anwendung zur Messung von Induktionskoeffizienten und Kapazitäten: M. WIEN, Wied. Ann. **44**. 689. 1891. Wir folgen M. WIENS Entwicklungen.

also der Widerstandsoperator für die ganze Stromschleife:

$$b = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{w_2 + \iota n L_2}{1 + \iota n C(w_2 + \iota n L_2)} = \frac{(b)}{1 + \iota n C(b)} \quad ,$$

wo $(b)$ der Operator ohne Berücksichtigung der Kapazität ist.

### c) Messungen mit der Wheatstoneschen Brücke.

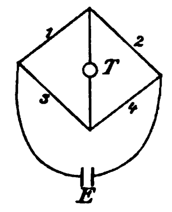
Bei der Stromverzweigung der Wheatstoneschen Brücke gilt als Bedingung für das Verschwinden des Brückenstromes (analog wie bei Gleichstrom):

$$b_1 b_4 - b_2 b_3 = 0 \quad ,$$

wo die Indices sich auf die vier Zweige beziehen (s. Figur 246). Da die $b$ komplexe Größen sind, so zerfällt die Gleichung durch Trennen des Reellen und Imaginären in zwei Teile. Indem man den reellen Teil für sich gleich null setzt, erhält man oft (aber durchaus nicht immer)[1] die für konstanten Strom bestehende Gleichung:

$$w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0 \quad ,$$

wo die $w$ (wie stets) die Ohmschen Widerstände sind. In diesem Fall kann im Brückenzweig jedes Meßinstrument benutzt werden, da dann die Periode $n$, welche die $b$ Größen enthalten, bei Entwicklung der Gleichung herausfällt. Tritt das nicht ein, bleibt nach Trennung des Reellen und Imaginären $n$ in den Gleichungen stehen, so kann man z. B. ein Hörtelephon in $T$ nur benutzen, wenn man rein sinusförmige Wechselströme durch die Brückenkombination sendet. Dient aber, wie meist, ein kleiner Induktionsapparat als Stromquelle, so erzeugt dieser Wechselströme sehr verschiedener Periode, auf die alle das Hörtelephon reagiert, während doch nur für eine bestimmte Periode die Bedingung der Nullstellung erfüllt ist. Man muß also jetzt ein Instrument zur Beobachtung wählen, das wesentlich nur auf eine Periode anspricht, z. B. das Vibrationsgalvanometer oder das optische Telephon.




Figur 246.

Als Stromquelle mit einer bestimmten Periode eignet sich besonders die Wechselstromsirene nach M. Wien (s. S. 583), ein mit Saitenunterbrecher betriebenes Induktorium, bei dem die Periode sich genau angeben läßt[2], oder der von Dolezalek[3] beschriebene Mikrophonsummer von Siemens & Halske. Dieser unterbricht den Primärkreis des Induktoriums nicht vollständig, sondern ruft in ihm Stromschwankungen hervor, die annähernd der Schwingungsamplitude des Unterbrechers proportional sind. Mit ihm lassen sich Wechselströme bis zu 1000 Schwingungen in der Sekunde erzeugen. Bis zu 6600 annähernd einfache Schwingungen liefert die von Dolezalek konstruierte Hochfrequenzmaschine von Siemens & Halske[3].

Beispiel: Vergleich der Kapazitäten zweier Kondensatoren: Man setzt $C_1$ resp. $C_2$ in die Zweige 1 resp. 2, deren Widerstände zu vernachlässigen seien, dann ist

$$b_1 = -\frac{\iota}{n C_1} \quad ; \qquad b_2 = -\frac{\iota}{n C_2} \quad ; \qquad b_3 = w_3 \quad ; \qquad b_4 = w_4 \quad ,$$

also:

$$C_1 : C_2 = w_4 : w_3 \quad .$$

Dieselbe Beziehung erhält man für die Vergleichung der Kapazität $C_1$ eines Kabels, dessen Widerstand $w_1$ (oder eines Kondensators, dessen Dielektrikum

[1] S. z. B. M. Wien, l. c., 699. — [2] S. z. B. E. Orlich, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 502. 1903 (Beschreibung der in der Physikalisch-technischen Reichsanstalt benutzten Methoden). — [3] F. Dolezalek, Zeitschr. f. Instrumentenk. **23**. 240. 1903.

Leitfähigkeit hat) mit einem in Zweig 2 gesetzten Kondensator $C_2$, dem parallel ein Widerstand $w_2$ geschaltet wird. Zugleich besteht dann noch die Bedingung für konstanten Strom $w_4 : w_3 = w_2 : w_1$.

Das Aufsuchen der Nullstellung geschieht praktisch so, daß man in jeden der vier Zweige einen Rheostaten nimmt und die Verzweigungspunkte zwischen 1 und 2 resp. 3 und 4 durch Schleifkontakte auf je einem Brückendraht bildet. Durch allmähliches Verändern der Rheostaten und Verschiebung der Schleifkontakte sucht man das Tonminimum zu erreichen.

### d) Die Stromverteilung geschieht so, daß die magnetische Energie ein Minimum.

Sind die Ströme, die ein beliebiges Leitersystem durchfließen, so schnell veränderlich (sehr schnelle elektrische Schwingungen), daß der OHMsche Widerstand gegen den Einfluß der Selbstinduktion vernachlässigt werden kann, so folgt die Stromverteilung dem Gesetz: Für eine gegebene Gesamtstromstärke muß die magnetische Energie ein Minimum sein.[1]

Hat man z. B. zwei Zweige, in denen dieselbe elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ wirkt, so gelten die Gleichungen:

$$\mathfrak{E} = i_1 w_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} + L_{12} \frac{d i_2}{d t} = i_2 w_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} + L_{12} \frac{d i_1}{d t} \quad ,$$

und sind die OHMschen Widerstände zu vernachlässigen, so folgt

$$L_1 \frac{d i_1}{d t} + L_{12} \frac{d i_2}{d t} = L_2 \frac{d i_2}{d t} + L_{12} \frac{d i_1}{d t} \quad ,$$

also:

$$L_1 i_1 + L_{12} i_2 = L_2 i_2 + L_{12} i_1 \quad .$$

Das ist aber die Bedingung dafür, daß der Ausdruck der magnetischen Energie

$$T = \tfrac{1}{2}(L_1 i_1^2 + 2 L_{12} i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

für vorgeschriebenen Wert von $i_1 + i_2$ ein Minimum wird.

Dieser Satz läßt sich auch auf die Verteilung des Stromes in einem Leiter anwenden, indem man den Strom als aus lauter Stromfäden zusammengesetzt ansieht, dann muß die Verteilung so stattfinden, daß die Selbstinduktion sich einem konstanten Grenzwert (dem Minimum) nähert. Die Strömung wird also das Innere des Leiters frei lassen und nur in einer sehr dünnen Schicht auf seiner Oberfläche verlaufen. Näheres und experimentelle Beweise siehe später.

### e) Zwei aufeinander induzierende Leitungen (Transformator).

Die primäre Leitung enthalte eine periodische elektromotorische Kraft, die sekundäre sei ohne Stromquelle, und beide wirken induzierend aufeinander, dann bestehen die Gleichungen:

$$i_1 w_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} + L_{12} \frac{d i_2}{d t} = A \sin(n t)$$

$$i_2 w_2 + L_{12} \frac{d i_1}{d t} + L_2 \frac{d i_2}{d t} = 0 \quad .$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$w_1' = w_1 + \frac{n^2 L_{12}^2 w_2}{w_2^2 + n^2 L_2^2}$$

$$L_1' = L_1 - \frac{n^2 L_{12}^2 L_2}{w_2^2 + n^2 L_2^2} \quad ,$$

---

[1] S. z. B. Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (4) **38**. 1. 1869 und Scient. Papers **1**. 1. und J. STEFAN, Wien. Sitzber. **99** (IIa) 319 und Wied. Ann. **41**. 400. 1890.

so sind die Lösungen:

$$i_1 = a_1 \sin(n t - \varphi_1)$$
$$i_2 = a_2 \sin(n t - \varphi_2) \quad .$$

Dabei ist:

$$a_1 = \frac{A}{\sqrt{w_1'^2 + n^2 L_1'^2}}$$

$$a_2 = \frac{-A n L_{12}}{\sqrt{(w_1'^2 + n^2 L_1'^2)(w_2^2 + n^2 L_2^2)}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{n L_1'}{w_1'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{w_1' w_2 - n^2 L_1' L_2}{n(L_2 w_1' + L_1' w_2)}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{w_2}{n L_2} \quad .$$

Vergleicht man den Wert von $a_1$ mit dem früher für eine Leitung gegebenen $a$ usw., so sieht man, daß die Anwesenheit des zweiten Stromkreises eine scheinbare Vergrößerung des Widerstandes von $w_1$ auf $w_1'$, eine scheinbare Abnahme der Selbstinduktion von $L_1$ auf $L_1'$ und eine Verminderung der Phasendifferenz zwischen elektromotorischer Kraft und Strom für die Leitung 1 bewirkt hat.

Die Phasendifferenz zwischen primärem und sekundärem Strom wird um so kleiner, je größer die Schwingungszahl $n$, d. h. die Frequenz der Stromwechsel, ist.

Ist diese Frequenz sehr groß, so verschwindet $w_2$ gegen $n L_2$, und es wird:

$$L_1' = L_1 - \frac{L_{12}^2}{L_2}\,, \qquad w_1' = w_1 + \frac{L_{12}^2}{L_2^2} w_2 \quad ,$$

$$a_2 = \frac{L_{12}}{L_2} a_1\,, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \pi$$

(da $a_1$ und $a_2$ entgegengesetzte Zeichen haben).

Die dem primären Kreis zugeführte, in der Zeiteinheit verbrauchte Energie, wenn die sekundäre Spule geschlossen ist, hat den Betrag:

$$= \frac{1}{2} \frac{A^2 w_1'}{n^2 L_1'^2 + w_1'^2} \quad ,$$

wäre der sekundäre Kreis offen ($w_2 = \infty$), so gingen $L_1'$ und $w_1'$ in $L_1$ und $w_1$ über. Die vom sekundären geschlossenen Kreis aufgenommene Energie ist proportional

$$\frac{n^2 L_{12}^2 w_2}{w_2^2 + n^2 L_2^2} \quad .$$

Sind die beiden Spulen etwa ähnlich wie bei einem Induktionsapparat über einen Eisenkern gewickelt, so stellt die Anordnung einen Transformator dar. Das Induktorium selbst kann, wie schon gesagt, als Transformator von niedrig gespannten Strömen in solche hoher Spannung (in der sekundären Spule) angesehen werden.

Die Maxima der Stromstärken (die Amplituden) im sekundären und primären Kreis verhalten sich, abgesehen vom Vorzeichen, zueinander:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{n L_{12}}{\sqrt{(w_2^2 + n^2 L_2^2)}} \quad ,$$

und ist $n L_2$ groß gegen $w_2$:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{L_{12}}{L_2} \quad .$$

Bedecken die primären Windungen, deren Zahl $z_1$, und die sekundären ($z_2$) eine gleiche Länge des Eisenkerns, so ist merklich

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{L_{12}}{L_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad ,$$

und für die Spannungsamplituden $V_1$ und $V_2$ der primären und sekundären Spule gilt:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad .$$

Man nennt dies das Transformations- oder Übersetzungs-Verhältnis des Apparates.

Nur wenn alle magnetischen Induktionslinien des primären und des sekundären Kreises durch alle Windungen jedes Kreises hindurchtreten, findet kein magnetischer Verlust (keine Streuung) statt; dann bestände die Bedingung:

$$L_{12}^2 = L_1 \cdot L_2 \quad .$$

Weiteres siehe unter „technischen Anwendungen“.

## 15. Erzeugung von Wechselströmen.

Die Wechselstrommaschinen, wie sie in der Technik gebaut werden, liefern meist Schwingungsformen, die nicht allzusehr von der Sinusform abweichen, und Wechselzahlen der Größenordnung 100 pro Sekunde; auf ihre Konstruktion ist an dieser Stelle nicht einzugehen.

Wir führen im folgenden nur einige Apparate an, die zu wissenschaftlichen Untersuchungen gedient haben und vorwiegend mit der Absicht konstruiert wurden, möglichst reine Sinusschwingungen zu erzeugen.

W. WEBER[1] erreichte diesen Zweck, indem er einen an der Achse einer Sirene befestigten Magneten im Innern einer Multiplikatorrolle rotieren ließ. Dadurch entstehen in der Rolle Ströme, deren elektromotorische Kraft genähert einer Sinusfunktion proportional ist. In ähnlicher Weise wirkt der Sinusinduktor von F. KOHLRAUSCH[2], bei dem der Magnet durch ein Räderwerk mit Treibgewicht in schnelle Rotation versetzt wird.

Um mit einer solchen Anordnung gleichzeitig Wechselströme von derselben Periode und bekannter Phasendifferenz zu erhalten, wandte OBERBECK[3] zwei Multiplikatoren an, deren Windungsebenen einen beliebigen Winkel miteinander bilden können, und in deren Innerem der Magnet (eine magnetisierte Stahlplatte) rotierte; der Winkel bestimmt die Phasendifferenz.

Mit solchen und ähnlichen Vorrichtungen lassen sich natürlich nur sehr kleine Schwingungszahlen erreichen. Um die Eigenschaften der Wechselströme auch für Frequenzen von einigen Tausend und mehr zu untersuchen, benutzte man nach dem Vorgang von TESLA[4] das Prinzip der Induktormaschinen, nach dem TESLA selbst schon eine große Hochfrequenzmaschine mit 30 000 Wechseln in der Sekunde gebaut und DUDDELL[5] in neuester Zeit sogar eine Maschine mit 240 000 Wechseln konstruiert hat. In kleinerem Maßstab sind derartige Apparate

---

[1] W. WEBER, Elektrodynam. Maßbestimmungen, Abhandl. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 6. 573. 1864. — [2] F. KOHLRAUSCH, Pogg. Ann. 138. 285. 1869; Jubelband 290. 1874. — [3] A. OBERBECK, Wied. Ann. 19. 213. 1883. — [4] N. TESLA, Untersuchungen über Mehrphasenströme, deutsch von MASER, Halle 1895. — [5] W. DUDDELL, Phil. Mag. (6) 9. 299. 1905.

zur Erzeugung reiner Sinusströme u. a. von M. WIEN[1], F. DOLEZALEK[2], K. E. F. SCHMIDT[3] konstruiert worden.

Wir beschreiben kurz die Wechselstromsirene von M. WIEN, die bis 17 000 genähert reine Sinusschwingungen in der Sekunde liefert: Am Rande einer Messingscheibe (40 cm Durchmesser, 1 cm Dicke) waren ringsherum 250 Zähne von 2 cm Länge ausgefräst und die Zwischenräume mit 0,3 mm dickem Transformatorenblech ausgefüllt. Die Scheibe mit diesen Eisenankern dreht sich so nahe wie möglich zwischen den keilförmig zugespitzten Polen eines Elektromagneten. Passiert ein Eisenanker die Pole, so wird in einer um die Pole gewickelten Spule ein Wechselstrom induziert, dessen Schwingungszahl gleich der Umdrehungszahl der Scheibe mal der Zahl der Eisenanker ist. Die Intensität dieser Ströme wird außerordentlich erhöht und so erst eine reine Sinusschwingung gewonnen, wenn die Eigenschwingung des durchströmten Systems in Resonanz mit der Periode des Wechselstromes ist. Dazu wird ein Kondensator in die Leitung eingeschaltet und Selbstinduktion und Widerstand, sowie die Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe passend reguliert. Dieses Instrument, wie die von DOLEZALEK konstruierte Maschine mit etwa 13 000 Wechseln, eignet sich besonders zur Messung mit der WHEATSTONEschen Brücke.

## 16. Apparate und Methoden zur Messung der Wechselströme.

### a) Messung der Intensität und Spannung.

Zur Beobachtung und Messung der Intensität und Spannung von Wechselströmen kann zwar in einigen Fällen das Galvanometer[4] verwandt werden, meist aber muß man andere Instrumente benutzen. Als solche sind u. a. zu nennen:

#### α) Elektrodynamometer und Stromwagen.[5]

Bei ihnen sind die Ausschläge dem Quadrat der Stromstärke proportional, man muß aber beachten, ob die Wechselströme in den zwei aufeinander wirkenden Spulen eine Phasendifferenz haben oder nicht. Wären die Ströme gegeben durch

$$i_1 = a_1 \sin(n\,t - \varphi_1) \qquad \text{und} \qquad i_2 = a_2 \sin(n\,t - \varphi_2) \quad ,$$

so würde der Ausschlag proportional sein:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i_1\, i_2\, dt = \frac{a_1\, a_2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ,$$

d. h. er hängt auch von der Phasendifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ab, die man danach finden kann, wenn die Amplituden $a_1$ und $a_2$ bekannt sind. Ist $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, so gibt das Elektrodynamometer gar keinen Ausschlag. Diese Erscheinung hat OBERBECK[6] elektrodynamische Interferenz genannt und sie u. a. zur Prüfung der von ihm abgeleiteten Gesetze der Verbreitung von Wechselströmen in verzweigten Leitungen und zur Bestimmung von Induktionskoeffizienten benutzt.

Diese Instrumente können große Empfindlichkeit haben, sind aber meist ihrer längeren Drahtspulen halber nur für Wechselströme geringer Frequenz zu brauchen.

Zur Messung schneller (Kondensator-) Schwingungen hat PAPALEXI[7] ein Dynamometer konstruiert.

---

[1] M. WIEN, Ann. d. Phys. **4**. 425. 1901. — [2] F. DOLEZALEK, Zeitschr. für Instrkde. **23**. 244. 1903. — [3] K. E. F. SCHMIDT, Ann. d. Phys. **14**. 22. 1904. — [4] S. z. B. H. RUBENS, Wied. Ann. **37**. 522. 1889. — [5] Ihre Besprechung s. Handbuch **4**. 295—304. 1903. — [6] A. OBERBECK, Sitzber. d. Berl. Akad. 1882, 125; Wied. Ann. **17**. 816. 1882; **19**. 213. 1883. — [7] A. PAPALEXI, Ann. d. Phys. **14**. 756. 1904.

β) Weicheiseninstrumente.

Hierher gehört das BELLATI-GILTAYsche Nadeldynamometer (s. Handbuch **4**. 298—300) und eine ähnliche Anordnung von Lord RAYLEIGH[1], die auch zur Bestimmung der Phasendifferenz zweier Wechselströme benutzt werden kann. Zu dem Zwecke hängt die Nadel aus weichem Eisen unter 45° geneigt gegen die gemeinsame Achse zweier Spulen, die sich zu beiden Seiten der Nadel befinden. Gehen durch die Spulen Wechselströme gleicher Frequenz, so ergibt sich ihre Phasendifferenz aus den Ablenkungen der Nadel, wenn jeder Strom allein und wenn beide zugleich auf sie wirken.

Über andere Weicheiseninstrumente (Federgalvanometer usw.), die in den verschiedensten Formen ihrer schnellen Einstellung und bequemen Ablesung wegen auch von der Technik benutzt werden s. Handbuch **4**. 307. Sie dienen zur Messung von Wechselströmen geringer Frequenz und müssen für Schwingungszahlen, die mehr als 50 pro Sekunde betragen, stets besonders geeicht werden.

γ) Hitzdrahtinstrumente.

Sie benutzen die durch die Stromwärme bewirkte Ausdehnung eines dünnen (z. B. 0,06 mm dicken) Drahtes aus Platin, Platinsilber oder dgl., die in verschiedener Weise auf einen Zeiger oder Spiegel übertragen wird. Innerhalb mäßiger Grenzen ist der Ausschlag dem Quadrat der Stromstärke proportional. Kurze Beschreibung solcher Instrumente s. Handbuch **4**. 312. Viele dieser Apparate können bei passender Konstruktion sehr geringe Kapazität und Selbstinduktion erhalten und deshalb auch zur Beobachtung sehr schneller Wechselströme (HERTZscher Schwingungen) benutzt werden.

Will man mit ihnen nach der Beziehung

$$E = I \cdot w$$

aus gemessenem $I$ und bekanntem $w$ die Spannung messen, so muß $w$ außer dem mit der Erwärmung veränderlichen Widerstand des Hitzdrahtes noch einen großen induktionsfreien Vorschaltewiderstand enthalten.

Speziell zur Messung schneller Schwingungen sind u. a. konstruiert: das HERTZsche Dynamometer[2], bei dem der Strom einen sehr dünnen Silberdraht erwärmt, dessen mittlerer Teil um einen Stahldraht geschlungen ist. Der Stahldraht wird tordiert, indem man den Silberdraht spannt; geht der Strom durch den letzteren und dehnt ihn durch Erwärmung aus, so wird der Stahldraht detordiert, und ein mit ihm verbundener Spiegel dreht sich.

Das Hitzdrahtamperemeter von J. A. FLEMING[3]: Zwei parallele dünne Silberdrähte sind nahe nebeneinander ausgespannt, in der Mitte sind sie durch einen kleinen Spiegel verbunden; geht der Wechselstrom durch einen der Drähte, so dreht sich der Spiegel; das Instrument wird mit Gleichstrom geeicht.[4]

Die in einem Teil der Strombahn entwickelte Wärmemenge und dadurch die effektive Stromstärke oder Spannung kann auch, wie z. B. von BATTELLI und MAGRI[5] und K. E. F. SCHMIDT[6], auf kalorimetrische Weise oder durch eine passende Form des RIESSschen Luftthermometers gemessen werden.

Die Angaben aller dieser Instrumente aber müssen mit Vorsicht benutzt werden,[7] wenn sie z. B. die Intensität von Kondensatorentladungen in einem Schließungskreis messen und zugleich untereinander vergleichbar sein sollen. Dabei

---

[1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **43**. 343. 1897. — [2] H. HERTZ, Zeitschr. f. Instrkde. **3**. 17. 1883 und Ges. Werke **1**. 227. — [3] J. A. FLEMING, Proc. Roy. Soc. **19**. 173 und Phil. Mag. (6) **7**. 595. 1904. — Ähnlich E. F. NORTHRUP, Proc. Am. Inst. El. Engin **24**. 375. 1905 und Beibl. **29**. 1173. 1905. — [4] Andere Instrumente und Anordnungen z. B. bei W. DUDDELL, Phil. Mag. (6) **8**. 91. 1904. — [5] A. BATTELLI und L. MAGRI, Phil. Mag. (6) **5**. 1 u. 620. 1903 und Phys. Zeitschr. **3**. 539. 1902. — [6] K. E. F. SCHMIDT, Zeitschr. für Instrumentenk. **25**. 10. 1905. — [7] J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen 424 ff.

ist fast stets eine Funkenstrecke in der Leitung, und die beiden Belegungen des Kondensators stehen etwa mit den Sekundärpolen eines Induktoriums in Verbindung, so daß der Kondensator bei jeder Schwingung des Unterbrechers neu geladen wird. Die Wärmewirkung ist der Zahl der Entladungen in der Sekunde proportional. Je nach der Entfernung der Elektroden der Funkenstrecke voneinander kann aber jede Entladung durch einen oder mehrere Funken geschehen. Die Entladungszahl braucht also nicht der Unterbrechungszahl gleich zu sein, man wird das durch Betrachten des Funkens im rotierenden Spiegel kontrollieren müssen, wenn die Angaben des Instruments miteinander verglichen werden sollen. Geschieht endlich die Entladung oszillatorisch, so hängt die Wärmewirkung (s. später) von der Dämpfung dieser Schwingungen ab und kann sogar als ein Maß für sie dienen.

δ) Instrumente, die sich besonders für Nullmethoden eignen.

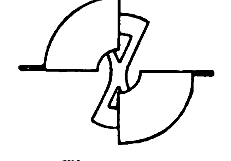
Die Anwendung des Hörtelephons in der WHEATSTONEschen Brücke begegnet bei Wechselströmen oft Schwierigkeiten (s. S. 579), deshalb benutzte M. WIEN bei seinen Messungen das von ihm konstruierte optische Telephon[1], das er aber für Schwingungen zwischen 256 bis einigen Tausend pro Sekunde besser durch eine Modifikation[2] des RUBENSschen Vibrationsgalvanometers[1] und für noch höhere Schwingungszahlen durch ein abgeändertes BELLATI-GILTAYsches Dynamometer ersetzte.

Zu Untersuchungen von HERTZschen Schwingungen dient u. a. die Bolometeranordnung von PAALZOW und RUBENS (s. Handbuch **4**. 311).

ε) Elektrometer.

Verbindet man z. B. einen Punkt der Stromleitung mit einem Quadrantenpaar, einen anderen Punkt mit dem zweiten Quadrantenpaar und der Nadel, so ist der Ausschlag dem Quadrat der effektiven Spannung proportional; kennt man den Widerstand zwischen den beiden Punkten, so folgt daraus die effektive Stromstärke.

Zur Untersuchung HERTZscher Schwingungen ist die von BJERKNES[3] zuerst benutzte Form des Elektrometers geeignet. Sie hat nur zwei kleine Quadranten und eine horizontale lemniskatenförmige Nadel, die in der Nullage zueinander stehen, wie es die Figur 247 zeigt. Die Quadranten werden mit den Punkten des Schwingungskreises verbunden, deren effektive Spannungsdifferenz gefunden werden soll, und ziehen die ungeladene Nadel in sich hinein. Der Drehungswinkel ist dem Quadrat der Spannungsdifferenz proportional. Die Nadel kann mit Flüssigkeitsdämpfung versehen sein. — Noch einfacher genügen oft als Elektrometerquadranten zwei vertikale, einander gegenüberstehende Kreisplatten, zwischen denen, unter 45° gegen ihre Mittellinie geneigt, ein dünnes, einige Millimeter hohes Aluminiumblech (an einem Quarzfaden) hängt, dessen Länge nur wenig größer wie der Abstand der Platten ist. Das ganze Instrument soll möglichst geringe Kapazität haben.



Figur 247.

## b) Messung der Periode und Sichtbarmachung der Stromkurve.

Bei einer Wechselstrommaschine bestimmt sich die Periode direkt aus der Polzahl und der Anzahl der Touren der Maschine.

α) Durch Messung der Impedanz einer vom Strom durchlaufenen Spule, deren OHMscher Widerstand $w$ und Selbstinduktionskoeffizient $L$ bekannt ist nach der früher gegebenen Formel:

$$\text{Impedanz} = \sqrt{w^2 + n^2 L^2}\,,$$

wo $\frac{2\pi}{n}$ die Periode.

---

[1] Beschreibung dieser Instrumente s. Handbuch **4**. 305. — [2] M. WIEN, Ann. d. Phys. **4**. 440. 1901. — [3] V. BJERKNES, Wied. Ann. **44**. 74. 1891.

$\beta$) Durch Mitschwingen: Schickt man den Wechselstrom durch einen Elektromagneten und stellt diesem eine Anzahl von verschieden langen Zungen aus Stahl gegenüber, deren Schwingungszahlen noch in bekannter Weise zu verändern sind, so gibt die am stärksten erregte Zunge die Periode des Stromes.[1]

K. E. F. SCHMIDT[2] setzt durch den Wechselstrom (Frequenz höherer Töne) eine Telephonmembran in kräftige Schwingungen, diese erregen akustische Wellen in der Luft einer einseitig durch einen verschiebbaren Stempel abgeschlossenen Glasröhre. Die Wellenlängen der Töne sind z. B. durch KUNDTsche Staubfiguren leicht zu bestimmen.

$\gamma$) Stroboskopische Methode: Speist der Wechselstrom eine Lichtquelle (Glühlampe, Bogenlampe) und scheint eine mit bekannter Geschwindigkeit gedrehte, mit weißen und schwarzen Sektoren besetzte Scheibe in dem Licht der Lampe still zu stehen, so ergibt sich daraus die Periode des Stromes.[3]

$\delta$) Aufzeichnung der Periode durch chemische und andere Wirkungen: Chemisch präpariertes Papier[4], das sich unter Wirkung des Stromes färbt, bewegt sich mit bekannter Geschwindigkeit (oder unter einer schreibenden Stimmgabel) an einem Stromkontakt vorbei. Die am stärksten gefärbten Stellen geben (je nach Anordnung) die Maxima des Stromes oder der Spannung. Daraus folgt die Periode oder, wenn Strom und Spannungskurven nebeneinander aufgenommen werden, auch die Phasenverschiebung.

Man kann auch das bewegte Papier durch eine ruhende Lackschicht ersetzen und die Ladungen des Wechselstromes von einem an der Stimmgabel befestigten Strohhalm oder Draht auf die Schicht übergehen lassen, indem man schnell mit der schwingenden Gabel über die Schicht hinwegfährt. Die Ladungen werden durch Bestäuben (wie bei LICHTENBERGschen Figuren) als gelbe oder rote Teile der Stimmgabelkurve sichtbar gemacht.[5]

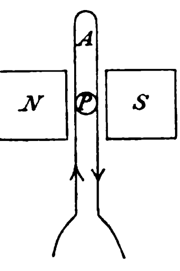
$\varepsilon$) Aufnahme der Strom- und Spannungskurven durch verstellbare Momentankontakte (mit der JOUBERTschen Scheibe). Auf der Achse der Maschine, deren Wechselstrom untersucht werden soll, sitzt die JOUBERTsche Scheibe, sie trägt einen schmalen Kontaktstreifen, der bei jeder Umdrehung einmal momentan eine verstellbare Metallbürste berührt. Dadurch wird eine Leitung geschlossen, die von zwei Punkten (z. B. den Polen) des Wechselstromkreises ausgeht und zu einem Galvanometer oder Elektrometer mit parallel geschaltetem Kondensator führt. Der Ausschlag des Meßinstrumentes gibt ein Maß für die Spannung zwischen den zwei Punkten des Stromkreises für den Moment der Periode, in dem der Kontakt stattfindet. Durch Verstellung der Bürste kann die Spannung für beliebig viele Zeitpunkte der Periode und so die ganze Spannungskurve ermittelt werden. Die Stromkurve erhält man durch Aufnahme der Spannungskurve für einen induktionsfreien bekannten Widerstand, der von dem Strom durchflossen wird.[6]

Auf Einzelheiten und Modifikationen dieser Methode können wir hier nicht eingehn. Man hat auch versucht, die langwierige, allmähliche Aufnahme der Kurve durch automatisches Verschieben der Bürste in den passenden Momenten kürzer und kontinuierlich zu machen; einen solchen Kurvenindikator hat z. B. FRANKE[7] konstruiert.

$\zeta$) Oszillographen: Die ersten Versuche, die Kurve eines Wechselstromes sichtbar zu machen, rühren von COLLEY[8] und O. FRÖLICH[9] her. Später hat

[1] S. z. B. R. KEMPF-HARTMANN, Elektrotechn. Zeitschr. **22**. 9. 1901 (dort auch weitere Literatur) und **25**. 44. 1904. — [2] K. E. F. SCHMIDT, Ann. d. Phys. **7**. 225. 1902. — [3] G. BENISCHKE, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 142. 1899. — A. SAMOJLOFF, Ann. d. Phys. **3**. 353. 1900 u. a. — [4] P. GRÜTZNER, Breslauer ärztl. Zeitschr. **23**. 1885; Elektrotechn. Zeitschr. **18**. 97. 1897; Ann. d. Phys. **1**. 738. 1900; JANET, C. R. **118**. 862. 1894 usw. — [5] W. KÖNIG, Wied. Ann. **67**. 535. 1899; Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 45. 1899; Ann. d. Phys. **2**. 860. 1900. — [6] J. JOUBERT, Ann. de l'école Norm. **10**. 131. 145. 1881. — [7] A. FRANKE, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 803. 1899. — [8] R. COLLEY, Wied. Ann. **26**. 432. 1885; **28**. 1. 1886; **44**. 102. 1891. — [9] O. FRÖLICH, Elektrotechn. Zeitschr. **8**. 210. 1887; **10**. 65. 1889.

BLONDEL[1] die Bedingungen für die Konstruktion solcher Instrumente eingehend untersucht und ihre Typen festgestellt. Ihre jetzige Form haben die Oszillographen wesentlich von ihm und von DUDDELL[2] erhalten. Das schwingende System, ein Stäbchen aus weichem Eisen oder dgl. mit sehr leichtem Spiegel, hat bei den empfindlichen Instrumenten von BLONDEL nur eine Schwingungsdauer von 0,0001—0,00002 Sekunden, folgt also den Schwankungen des auf das System wirkenden Wechselstromes, dessen Periode nicht kleiner als 0,001 Sekunde ist, ohne sie merklich zu deformieren. Bei anderen Instrumenten (DUDDELL, WEHNELT[3]) durchläuft der Wechselstrom eine sehr schmale, gestreckte Drahtschleife $A$ (s. Figur 248), an der das Spiegelchen $P$ befestigt ist, die sich in einem starken Magnetfeld $N$, $S$ befindet, so daß bei den Schwankungen des Wechselstromes drehende Schwingungen der Schleife entstehen (Eigenschwingung der Schleife 0,001—0,0001 Sekunde). Die Bewegungen eines von dem schwingenden Spiegel reflektierten Lichtbündels werden im rotierenden Spiegel betrachtet oder auf einer passend verschobenen photographischen Platte aufgezeichnet.



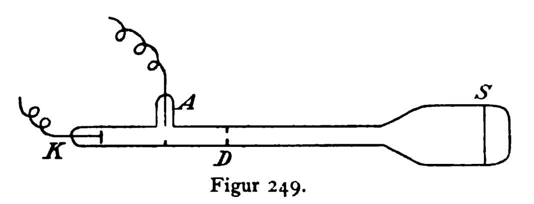
Figur 248.

Der Rheograph von ABRAHAM[4] benutzt ein schwingendes System mit einer Periode von etwa 0,1 Sekunde und sucht die Trägheit durch Induktion zu kompensieren.

Spannungs- wie Stromkurven und, bei einfacher Modifikation, auch Leistungskurven lassen sich mit dem Oszillographen untersuchen.

$\eta$) Die BRAUNsche Kathodenstrahlröhre[5] ist ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Untersuchung eines Wechselstromes, da die von dem magnetischen oder elektrischen Feld abgelenkten Kathodenstrahlen (Figur 249) der Änderung des Feldes ohne Trägheit folgen.

$K$ und $A$ sind Kathode und Anode der evakuierten Glasröhre; ein schmales Bündel der, am besten von einer Influenzmaschine erzeugten, Kathodenstrahlen geht durch das 1—2 mm weite Diaphragma $D$ (aus Glas, Glimmer, Aluminium oder dgl.) zu dem mit lumineszierender Substanz bestrichenen Schirm $S$ und erzeugt dort einen hellen Fleck. Wirkt ein Magnetfeld senkrecht zur Rohrachse, so wird der Fleck abgelenkt, legt man also neben $D$ eine Stromspule, durch die ein Wechselstrom fließt, oder besser zu beiden Seiten von $D$ je eine Stromspule, deren Achsen dieselbe zur Rohrachse senkrechte Richtung haben, so beschreibt der Fleck eine zur Richtung der Rohrachse senkrechte helle Linie. Betrachtet man diese im rotierenden Spiegel, dessen Drehungsachse parallel der hellen Linie ist, oder photographiert[6] sie mit passenden Hilfsapparaten auf bewegter Platte, so erhält man die Stromkurve. Schließt man $D$ durch ein zweites Spulenpaar ein, dessen Achse senkrecht zur Röhre und zur Achse des ersten Paares steht, und schickt man durch die neuen Spulen auch einen Wechselstrom, so kombinieren sich die beiden Ablenkungen des hellen Fleckes zu einer Kurve, deren Gestalt über die Perioden und Phasendifferenz der zwei Wechselströme Aufschluß gibt.



Figur 249.

[1] C. BLONDEL, C. R. **116**. 502. 1893; eine Übersicht über die Konstruktionen usw. s. BLONDEL, Rapp. pres. au Congrès intern. de Phys. **3**. 264. 1900; s. auch Nature **63**. 142. 1900/01. — [2] W. DUDDELL, Rep. of the Brit. Ass. Toronto 1897. 575; s. auch Nature, l. c. — [3] A. WEHNELT, Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. 1903. 178. — [4] H. ABRAHAM, C. R. **124**. 758. 1897. — [5] F. BRAUN, Wied. Ann. **60**. 552. 1897; Elektrotechn. Zeitschr. **19**. 204. 1898. — [6] J. ZENNECK, Wied. Ann. **69**. 838. 1899; Ann. d. Phys. **13**. 819. 1904. — A. WEHNELT und B. DONATH, Wied. Ann. **69**. 861. 1899. — A. WEINHOLD, Elektrotechn. Zeitschr. **22**. 409. 1901.

Auch die Spannung elektrischer Wechselfelder kann man messen, indem man sie durch zwei parallele Metallplatten auf die Kathodenstrahlen wirken läßt[1]. Diese Platten legt man entweder außerhalb der Röhre zu beiden Seiten von $D$, oder besser stellt man sie an in die Glaswand eingeschmolzenen Stielen hinter $D$ im Innern des Rohres einander gegenüber. Sind die Schwankungen des Feldes aber nur langsam, so wird der Ausschlag des Fleckes, außer bei sehr geringen Drucken[2], nicht mehr proportional der Spannung, da die Kathodenstrahlen beim Durchgang den Raum zwischen den Platten leitend machen. Dieser Übelstand wird vermieden[3], und man ist imstande, auch die Spannung elektrostatischer Felder bis zu 10000 Volt zu messen, wenn das Diaphragma (aus Metall) zur Anode gemacht wird und vor den Elektrodenplatten noch ein enges, hinter ihnen aber ein weiteres Diaphragma aus Glimmer angebracht wird. Die BRAUNsche Röhre kann, außer in der angegebenen Art, noch in sehr mannigfacher Weise benutzt werden, z. B. zur Demonstration der Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung, zur Kontrolle der Schwankung der Wechselzahl, zur Untersuchung der Dämpfung eines Wechselstromes usw.; sie ist auch noch für die schnellen Schwingungen einer Kondensatorentladung ein gutes Untersuchungsmittel[4]. —

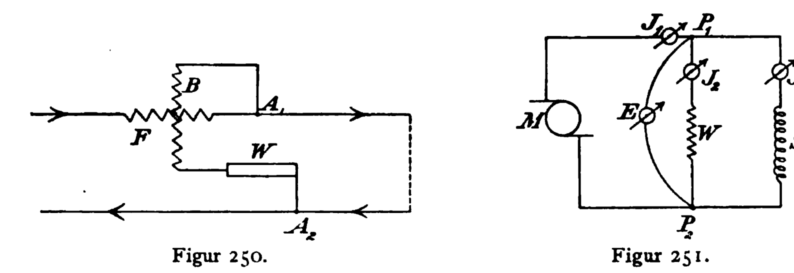
Endlich sei hier der Versuch von GEHRCKE[5] erwähnt, den Stromverlauf von Wechselströmen mit einem „Glimmlichtstrommesser" zu verfolgen.

### c) Messung der Leistung eines Wechselstromes.

Die Leistung eines Wechselstromes war

$$W = E \cdot I \cdot \cos\varphi \quad ,$$

und ihre Messung verlangt also neben der Kenntnis von $E$ und $I$ noch die der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Die Ermittelung dieser letzteren Größe umgehen z. B. die als Elektrodynamometer gebauten Leistungsmesser oder Wattmeter. Bei ihnen geht der Strom durch die feste Rolle $F$ (s. Figur 250) aus dickem Draht. Die Enden der beweglichen $B$, aus dünnem Draht, werden über einen großen induktionsfreien Widerstand $w$ an die Stellen $A_1$ und $A_2$ der Leitung gelegt, zwischen denen die Leistung gemessen werden soll.




Figur 250. Figur 251.

Die Leistung ist dem Ausschlag proportional. Korrektionen (meist klein) sind wegen der Leistung im Instrument selbst und wegen der Phasenverschiebung durch die Selbstinduktion der beweglichen Spule anzubringen; die letztere ist um so kleiner, je größer $w$ gegen den Wert der Selbstinduktion der Rolle $B$. Die Eichung des Instrumentes geschieht mit Gleichstrom.

Auf andere Konstruktionen der technischen direkt zeigenden Wattmeter können wir hier nicht eingehen.

[1] S. z. B. H. EBERT, Wied. Ann. **64**. 242 1898. — [2] J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **44**. 296. 1897. — [3] A. WEHNELT, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1903. 29. — [4] S. u. a. J. ZENNECK, Wied. Ann. **68**. 363. 1899; Ann. d. Phys. **7**. 802. 1902. — F. RICHARZ und W. ZIEGLER, Ann. d. Phys. **1**. 468. 1900. — H. TH. SIMON und M. REICH, Phys. Zeitschr. **2**. 284 u. 433. 1901, wo sich zahlreiche Literaturangaben und Beispiele der Verwendbarkeit finden.
[5] E. GEHRCKE, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1904. 176; 1905. 63.

Mit dem Elektrometer kann die Leistung bestimmt werden, wenn man die zwei Quadrantenpaare mit den zwei Punkten $A_1$ und $A_2$ der Stromleitung (Enden einer Spule oder dgl.) verbindet, zwischen denen die Leistung ermittelt werden soll. Die Nadel verbindet man einmal mit dem Anfang, das andere Mal mit dem Ende eines induktionsfreien Widerstandes, der nach der Strecke $A_1 A_2$ vom Strom durchflossen wird. Die Differenz der beiden Ausschläge ist dem Mittelwert des Produktes aus den Momentanwerten von Spannung und Stromstärke, also der Leistung proportional. Der Proportionalitätsfaktor kann wieder durch Benutzung von Gleichstrom gefunden werden.

Methode der drei Amperemeter. Der ungeteilte Wechselstrom der Maschine $M$ (s. Figur 251) fließt durch das Amperemeter $J_1$, verzweigt sich dann durch $J_2$ + einem induktionsfreien Widerstand $w$ und durch $J_3$ + Spule $S$, in der die Leistung gemessen werden soll. Die Spannung an den Punkten $P_1$ und $P_2$ ist merklich gleich der Spannung an den Enden der Spule: $\mathfrak{E} = w i_2$. Es ergibt sich dann für die Momentanwerte:

$$i_3 \mathfrak{E} = \frac{w}{2} (i_1^2 - i_2^2 - i_3^2) \quad ,$$

also für die Leistung:

$$W = \frac{w}{2} (I_1^2 - I_2^2 - I_3^2) = \frac{E}{2 I_2} (I_1^2 - I_2^2 - I_3^2) \quad .$$

Ist der Widerstand $w$ nicht bekannt, so mißt man die effektive Spannung $E$, wie in der Figur angedeutet, mit dem Spannungsmesser $E$.

In ähnlicher Weise kann $W$ durch drei Voltmeter gemessen werden.

Die Phasenverschiebung $\varphi$ oder der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ kann bestimmt werden, wenn man mit passenden Instrumenten die Größen $W$, $E$ und $I$ mißt. Einige spezielle Methoden, wie durch gleichzeitige Aufzeichnung von Strom und Spannungskurven oder durch Benutzung des RAYLEIGHschen Weicheisendynamometers usw., sind schon früher angeführt worden. Auf die technischen Konstruktionen von Phasenmessern kann nicht eingegangen werden.

Ist der Wechselstrom nicht von einfacher Sinusform, so kann man ihn durch eine FOURIERsche Reihe darstellen und die Amplituden und Phasen der einzelnen Reihenglieder mit dem Elektrodynamometer nach einer von DES COUDRES [1] angegebenen Methode bestimmen.

## 17. Abstoßung zwischen Leitern, die von Wechselströmen verschiedener Phase durchflossen werden. Schirmwirkung.

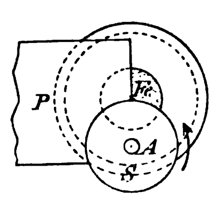
Befindet sich ein Leiter in einem periodischen (z. B. von Wechselströmen erzeugten) Magnetfeld, so hängt die ponderomotorische Kraft, die das Feld auf den von Induktionsströmen durchflossenen Leiter ausübt, von der Phasendifferenz zwischen dem Felde und den Strömen im Leiter ab. Das wird in frappanter Weise durch Versuche von EL. THOMSON [2] demonstriert. Nach früherem stellt sich ein beweglicher, geschlossener Stromleiter in einem Magnetfeld so ein, daß ein Maximum der Kraftströmung (Strömung der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$) durch seine Stromfläche hindurchtritt. Dabei war die ponderomotorische Kraft auf das von dem Strom mit der Dichte $\mathfrak{j}$ durchströmte Volumelement $d\tau$ [s. Artikel: Elektrodynamik, Gleichung (3b)]:

$$\mathfrak{F} = [\mathfrak{j}\mathfrak{B}]\, d\tau \quad .$$

---

[1] DES COUDRES, Verh. d. phys. Ges. 1898. 129; Elektrotechn. Zeitschr. **21**. 752, 771. 1900. — [2] EL. THOMSON, Lum. élect. **24**. 638. 1887 und Beibl. **11**. 735. 1887; Lum. élect. **48**. 35. 1893 und Beibl. **17**. 595. 1893; s. auch V. VON LANG, Wien. Ber. (IIa) **102**. 523. 1893; J. A. FLEMING, Electrician **26**. 601. 1893.

Wird das Magnetfeld durch einen Wechselstrom erzeugt, so ist $\mathfrak{B}$ periodisch wie dieser Strom. Die in dem beweglichen Leiter induzierte elektromotorische Kraft ist $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ proportional und hat also gegen $\mathfrak{B}$ eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$, der induzierte Strom folglich gegen $\mathfrak{B}$ eine Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}+\varphi$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$, und zwar, da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{nL}{w}$, um so näher an $\pi$, je größer die Selbstinduktion ($L$) und je kleiner der Widerstand ($w$) des Leiters ist. Für die beobachteten Wirkungen kommen statt der Momentanwerte von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{B}$ die zeitlichen Mittelwerte während einer Periode in Betracht, d. h. das Produkt der Effektivwerte von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{B}$ mit dem negativen Faktor $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ multipliziert. $\mathfrak{F}$ erhält also das negative Zeichen, d. h. der bewegliche Leiter stellt sich in dem Felde des Wechselstromes so ein, daß ein Minimum der Kraftströmung durch seine Stromfläche hindurchtritt. Aus diesem Prinzip erklären sich die erwähnten Versuche von EL. THOMSON und viele ähnliche. Z. B. auf der Stirnseite einer vertikal gestellten Spule mit oben herausragendem, unterteiltem Eisenkern liegt, über den Kern geschoben, ein Metallring. Schickt man einen kräftigen Wechselstrom durch die Spule so wird der Ring abgestoßen, fliegt über den Eisenkern in die Höhe und bleibt dort schweben, wenn eine passende Führung verhindert, daß er nach der Seite fortgeschleudert wird. Hält man den Ring auf der Spule fest, so erwärmt er sich stark, und ist er hohl und durch eine Öffnung mit Wasser gefüllt, so kann das Wasser zum Sieden gebracht werden.



Figur 252.

An einem Faden hängt ein vertikaler Metallring oder Scheibe im Innern einer Spule, deren Achse horizontal ist, seine Ebene macht einen Winkel von 45° mit dieser Achse. Geht ein Wechselstrom durch die Spule, so sucht er den Ring der Spulenachse parallel zu stellen. Der Drehungswinkel kann, wie in dem Wechselstromgalvanometer von J. A. FLEMING, als Maß der Intensität des Wechselstromes dienen.

In anderen Versuchen[1] bewirkt die Phasendifferenz zwischen induzierendem und induziertem Wechselstrom eine oft als S c h i r m w i r k u n g[2] bezeichnete Erscheinung. Stellt man z. B. exzentrisch über der Spule mit Eisenkern (*Fe* siehe Figur 252, alles von oben gesehen) eine Metallscheibe $S$ um die vertikale Achse $A$ drehbar auf und schiebt seitlich zwischen $S$ und Eisenkern die Metallplatte $P$ ein, so beginnt $S$ zu rotieren, da die Wirkung des Magnetfeldes auf $S$ zum Teil durch die Platte $P$ „abgeblendet" wird. Man kann das auch so ausdrücken, daß man sagt: die von induzierten Wechselströmen durchflossene Platte $P$ setzt dem Durchgang der magnetischen Induktionslinien einen größeren Widerstand entgegen.

Diese Auffassung hat besonders J. ZENNECK[3] entwickelt, indem er, in Analogie mit den gleichnamigen elektrischen Bezeichnungen, für den magnetischen Strom die Begriffe des m a g n e t i s c h e n i n d u k t i v e n W i d e r s t a n d e s, der magnetischen Impedanz usw. einführte. Es kann hier nur das Resultat angegeben werden: Geschlossene Spulen, metallene Röhren, Stäbe oder Scheiben verhalten sich im magnetischen Wechselfeld gegenüber der magnetischen Induktion in der Richtung ihrer Achse so, als ob ihr magnetischer Widerstand erhöht worden wäre. Die

[1] S. z. B. außer den zitierten Arbeiten von E. THOMSON usw. noch: E. THOMSON und J. WIGHTMAN, Lum. élect. **30**. 341. 1888 und Beibl. **13**. 243. 1889; BORGMANN, C. R. **110**. 233. 1890; R. EDLER, Vierteljahrsber. des Wiener Vereins zur Förder. des phys. u. chem. Unterrichts **6**. 96. 1901. — [2] Berechnung eines einfachen Falles von Schirmwirkung s. L. ARONS, Wied. Ann. **65**. 590. 1898. — [3] J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **9**. 497. 1902; **10**. 845. 1903; **11**. 1121, 1135. 1903; Elektromagnet. Schwingungen, Stuttgart, 1905. 180—219 u. a. O.

Erhöhung des magnetischen Widerstandes besteht bei kurz geschlossenen Spulen und Metallröhren vorwiegend darin, daß zu dem OHMschen magnetischen Widerstand noch ein induktiver magnetischer Widerstand hinzutritt. Bei massiven Stäben und Scheiben erfährt auch der OHMsche magnetische Widerstand eine scheinbare Vermehrung. Solche Körper verhalten sich also (wenn ihr Inneres nicht durch ferromagnetisches Material ausgefüllt ist) im magnetischen Wechselfeld qualitativ so, als ob ihr Innenraum diamagnetisch wäre. — Man kann bei solcher Betrachtungsweise manche Einzelheiten der Versuche leichter übersehen, als das sonst möglich ist.

Umgibt man einen Eisenkörper, in dem ein magnetisches Wechselfeld vorhanden, mit einer dünnen Metall (Cu)-röhre, so wird die Streuung der magnetischen Kraftlinien, die die Hülle viel schwerer als Luft durchdringen können, stark vermindert.

## 18. Induktionskoeffizienten.

Die Induktion eines Stromkreises auf einen anderen und auf sich selbst hängt, wie wir sahen, von dem Wert der Induktionskoeffizienten ab. Diese sind durch die Gestalt und Lage der Stromkreise und die magnetische Permeabilität bestimmt, die der Umgebung und der Leitungsbahn selbst zukommt. Nach dem früher Gesagten ergaben sich für stationäre und quasistationäre Ströme u. a. folgende Definitionen des wechselseitigen Induktionskoeffizienten $L_{12}$: $L_{12} = L_{21}$ ist die elektromotorische Kraft, die in einem der beiden Leiter induziert wird, wenn in dem andern Leiter pro Zeiteinheit die Stromstärke 1 entsteht oder vergeht; $L_{12}$ ist auch die Anzahl der Linien magnetischer Induktion ($\mathfrak{B}$), die der eine Leiter umschlingt, wenn der andere vom Strom 1 durchflossen wird; oder $L_{12}$ ist das Potential der beiden Stromkreise aufeinander, wenn beide Kreise vom Strom 1 durchflossen sind usw. Will man $L_{12}$ berechnen, so kann man, wenn $\mu$ konstant ist, die Ausdrücke benutzen:

$$L_{12} = -\mu \int dS_1 \frac{\partial P}{\partial n_1} \quad ,$$

wo $P$ das Potential des vom Strom mit der Intensität 1 durchflossenen Kreises (2) in einem Punkt der Stromfläche $S_1$ ist, oder

$$L_{12} = -\mu \int_1 \int_2 dS_1\, dS_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n_1\, \partial n_2} \quad ,$$

oder

$$L_{12} = \mu \int_1 \int_2 \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1\, ds_2) \quad .$$

Analog wird der Selbstinduktionskoeffizient (oft kurz Selbstpotential genannt) definiert als die elektromotorische Kraft des Extrastromes, der in der Leitung induziert wird, wenn in ihr pro Zeiteinheit der Strom 1 entsteht oder vergeht, oder als das Doppelte des elektrodynamischen Potentials des Leiters auf sich selbst oder, nach dem allgemeinen Ausdruck für die magnetische Energie von elektrischen Strömen, als das Doppelte der magnetischen Energie des die Leitung mit der Stärke 1 durchfließenden Stromes usw. Die Integrale wären zweimal über dieselbe Fläche oder Linie zu nehmen, sie verlieren aber dabei ihren Sinn, da $r$ für benachbarte Elemente unendlich klein wird. Man sucht diese Schwierigkeit zu umgehen, indem man den ja nie streng linearen Leiter in einzelne Stromfäden zerlegt, die zusammen von dem Strom 1 durchflossen werden und $L$ als die Anzahl Linien magnetischer Induktion auffaßt, die

alle Stromfäden zusammen durch die Fläche eines mittleren Fadens hindurchsenden.[1] — Auch die gegebene formale Definition der wechselseitigen Induktionskoeffizienten verlangt eigentlich streng lineare Leiter, d. h. solche von unendlich kleinem Querschnitt. Sind aber die Querschnitte der Leiter sehr klein gegenüber der kleinsten durch sie zu legenden Stromfläche, so ist es für die Berechnung des Koeffizienten der wechselseitigen Induktion gleichgültig wie man die Kontur der Stromfläche innerhalb der Substanz des Leiters wählt.

Besonders große Werte nehmen die Induktionskoeffizienten an, wenn man nicht eine einfache Leitung, sondern eine Drahtspule hat, die aus vielen nahe beieinander liegenden Windungen besteht. Bringt man in die Höhlung der Spule einen Kern von weichem Eisen, so wächst (wegen des größeren $\mu$) der Induktionskoeffizient sehr stark, doch ist er dann keine konstante Größe mehr, sondern hängt von der Stromstärke ab.

Die Dimension der Induktionskoeffizienten im elektromagnetischen Maßsystem ist, wie z. B. die Integralformel direkt zeigt, eine Länge (cm). Als praktische Einheit hat man die Länge des Erdquadranten, d. h. $10^9$ cm, gewählt und ihr den Namen Quadrant oder (nach dem amerikanischen Physiker) HENRY gegeben. Bei dieser Wahl wird in einem Leiter von der Selbstinduktion 1 Quadrant die elektromotorische Kraft 1 Volt induziert, wenn sich die Stromstärke in ihm um 1 Ampère in einer Sekunde ändert, denn die in der Zeiteinheit induzierte elektromotorische Kraft ist:

$$\mathfrak{E} = -L \frac{di}{dt} \quad .$$

## a) Berechnung.

Die Berechnung der Induktionskoeffizienten ist oft kompliziert und gibt meist nur angenäherte Resultate. Besonders einfach ist der Fall einer sehr langen Drahtspule von kreisförmigem Querschnitt, um deren Mitte, weit von den Enden, eine kurze Spule geschlungen ist; dann kann man von dem Einfluß der Spulenenden absehen, und der Wert der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ im Innern der vom Strom 1 durchflossenen langen Spule ist, wenn $n_1$ Windungen auf der Längeneinheit sich befinden und die Permeabilität $\mu$ konstant ist:

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mu n_1 \quad .$$

Ist $S$ der Querschnitt der inneren Spule, deren Mitte von $n'$ Windungen der äußeren Spule umschlungen ist, so wird die gesamte Strömung der magnetischen Induktion durch diese:

$$L_{12} = 4\pi\mu n_1 n' S \quad .$$

Ähnlich berechnet sich $L_{12}$ für eine zu einem geschlossenen Ring gebogene Spule. Liegen die Mittelpunkte der einzelnen Windungen auf einem Kreis vom Radius $R$, der den Abstand von der Drehungsachse des Ringes angibt, befindet sich jede Windung in einer durch die Drehungsachse gelegten Meridianebene des Ringes, deren Flächenelement $dS$ ist; heißt $\varrho$ der Abstand des $dS$ von der Drehungsachse, sind $n_1$ Windungen auf der Winkeleinheit aufgewickelt und umschlingen wieder $n'$ Windungen einer äußeren Spule den Ring, so ist bei konstantem $\mu$:

$$L_{12} = 4\pi\mu n_1 n' \int \frac{dS}{\varrho}$$

das Integral über einen Ringquerschnitt zu nehmen.

Ist der Querschnitt des Ringes ein Kreis vom Radius $a$, so wird

$$\int \frac{dS}{\varrho} = \pi\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right) \quad ,$$

[1] Vgl. z. B. E. COHN, Das elektromagnet. Feld 1900. 285.

ist der Querschnitt ein Rechteck mit der Seite $b$ parallel der Ringachse und $a$ senkrecht dazu:

$$\int \frac{dS}{\varrho} = b \log \frac{R + \frac{a}{2}}{R - \frac{a}{2}} \quad .$$

Den Koeffizient der Selbstinduktion einer solchen Ringspule von kreisförmigem Querschnitt findet man, indem man sich die äußere und innere Spule zusammenfallend und von gleicher Gesamtwindungszahl $n$ denkt:

$$L = 4 \pi \mu n^2 (R - \sqrt{R^2 - a^2}) \quad .$$

Bei Berechnung der Selbstinduktionskoeffizienten muß man meist auf den Ausdruck für die magnetische Energie des Systems zurückgehen, den man, wie schon früher angegeben, in der Form

$$T = \tfrac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 L_{12} i_1 i_2 + 2 L_{13} i_1 i_3 + \ldots + L_2 i_2^2 + 2 L_{23} i_2 i_3 + \ldots + L_n i_n^2)$$

schreiben kann, und der sich mit Hilfe der Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ (s. Artikel „Elektrodynamik") für räumliche Elektrizitätsströmung schreiben läßt:

$$T = \tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{j} \mathfrak{A}) \, d\tau \quad ,$$

wo $\mathfrak{j}$ die Stromdichte bedeutet und $(\mathfrak{j} \mathfrak{A})$ das skalare Produkt ist. $\mathfrak{A}$ wird definiert durch:

$$\mathfrak{A} = \mu \int \frac{\mathfrak{j} \, d\tau}{r} \quad .$$

Maxwell[1] hat bei der Berechnung von Induktionskoeffizienten den Begriff des „mittleren geometrischen Abstandes" benutzt. Sind $dS$ und $dS'$ zwei in derselben Ebene liegende Querschnittselemente zweier Leiter, ist $r$ der Abstand dieser Elemente, so treten bei der Rechnung Integrale der Form

$$\iint dS \, dS' \log r$$

auf.

Der mittlere geometrische Abstand $m$ der beiden Querschnitte $S$ und $S'$ ist nun definiert durch

$$\iint dS \, dS' \log r = S S' \log m \quad .$$

Max Wien[2] hat diese Methode erweitert und auf die Messung kleiner Selbstpotentiale angewandt. — Wir geben im folgenden unter der Annahme, daß $\mu$ überall $= 1$ sei, einige

### b) Rechnungsresultate[3].

(Für stationären Strom oder langsame Stromschwankungen.)

#### α) Wechselseitige Induktionskoeffizienten.

Im folgenden bedeutet log stets log nat.

1. Zwei gerade parallele Drähte von der Länge $l$ und dem Abstand $a$:

$$L_{12} = l \log \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{\sqrt{l^2 + a^2} - l} - 2 \sqrt{l^2 + a^2} + 2a \quad ,$$

ist $a$ klein gegen $l$, so wird:

$$L_{12} = 2 l \left( \log \frac{2l}{a} - 1 \right) \quad .$$

[1] Cl. Maxwell, Elektr. u. Magnetismus, deutsch v. Weinstein, 2. 398 und für das Folgende bis S. 434. — [2] Max Wien, Wied. Ann. 53. 928 ff. 1894. — [3] S. auch Wiedemann, Die Lehre v. d. Elektr., 2. Aufl., 4. 78—87 und Heydweiller, Hilfsbuch für die Ausführung elektr. Messungen, S. 179—184. 1892.

2. Zwei konaxiale Kreise mit den Radien $r_1$ und $r_2$, der Abstand ihrer Ebenen $= a$:

$$L_{12} = 4\pi\sqrt{r_1 r_2}\cdot f(\gamma) \quad ,$$

wo

$$\gamma = \arc\sin\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{(r_1+r_2)^2+a^2}} \quad ; \qquad f(\gamma) = \left(\frac{2}{\sin\gamma} - \sin\gamma\right)F(\gamma) - \frac{2}{\sin\gamma}E(\gamma) \quad .$$

$F(\gamma)$ und $E(\gamma)$ sind die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul $\sin\gamma$. Die Werte von $\log f(\gamma)$ für eine Reihe von Werten des $\gamma$ s. MAXWELL, l. c., S. 609—611 und HEYDWEILLER, l. c., S. 244.

Sind die Radien der beiden Kreise nur wenig voneinander verschieden:

$$r_1 = r \qquad \text{und} \qquad r_2 = r + b \quad ,$$

wo $b$ klein ist, und ist auch der Abstand $a$ der beiden Kreisebenen klein, so ist in erster Annäherung:

$$L_{12} = 4\pi r\left(\log\frac{8r}{\sqrt{a^2+b^2}} - 2\right) \quad .$$

3. Zwei gleiche konaxiale Rollen[1], in kleinem Abstand $a$ ihrer Mittelebenen, der aber größer ist als die Diagonale des Windungsquerschnitts.

$r =$ mittlerer Radius der Rollen, $n$ die Windungszahl jeder Rolle, $b$ und $c$ die Breite und Höhe des rechteckigen Ringquerschnitts, den die Windungen ausfüllen.

$$L_{12} = 4\pi r n^2\cdot z \,,$$

wo

$$z = \log\frac{8r}{a} - 2 + \frac{b^2-c^2}{12a^2} + \frac{2b^4+2c^4-5b^2c^2}{120a^4} + \frac{3b^6-7b^4c^2+7b^2c^4-3c^6}{504a^6}$$
$$+\left(\log\frac{8r}{a}-2\right)\left(\frac{3b^2+c^2+18a^2}{96r^2} - \frac{15a^4}{1024r^4}\right) + \frac{7b^2+23c^2+60a^2}{192r^2} - \frac{29a^4}{2048r^4}$$

bei Vernachlässigung von

$$\left(\frac{b}{a}\right)^8, \quad \left(\frac{c}{a}\right)^8, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^6, \quad \left(\frac{b}{r}\right)^4, \quad \left(\frac{c}{r}\right)^4 \quad .$$

### $\beta$) Selbstinduktionskoeffizienten.

1[2]. Gerader Leiter von der Länge $l$ und beliebigem, überall gleichem Querschnitt, bei dem $l$ groß gegen die Wurzel aus dem Querschnitt:

$$L = 2l\left(\log\frac{2l}{m} - 1\right) \quad ,$$

wo $m$ der mittlere geometrische Abstand des Querschnitts von sich selbst ist.

Ist der Querschnitt eine Kreisfläche vom Radius $\varrho$, so ist $m = 0{,}7788\,\varrho$

$$L = 2l\left(\log\frac{2l}{\varrho} - 0{,}75\right) \quad .$$

Für eine Kreislinie ist $m = \varrho$ und

$$L = 2l\left(\log\frac{2l}{\varrho} - 1\right) \quad .$$

---

[1] J. STEFAN, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **88**. (IIa) 1883; Wied. Ann. **22**. 107. 1884; Zur Berechnung der Induktionskoeffizienten von Rollen, s. auch B. WEINSTEIN, Wied. Ann. **21**. 329. 1884. — L. LORENZ, Wied. Ann. **25**. 1. 1885. — F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **26**. 547. 1885. — [2] M. WIEN, l. c.

2[1]. Rechteck von den Seiten $a$ und $b$:

$$L = 4\left\{a\log\frac{2ab}{m(a+\sqrt{a^2+b^2})} + b\log\frac{2ab}{m(b+\sqrt{a^2+b^2})} + 2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a-b\right)\right\}.$$

Ist der Querschnitt ein Kreis, so ist wieder $m = 0{,}7788\,\varrho$.

3[2]. Ring, dessen Mittellinie den Radius $r$ hat, bei Berücksichtigung der quadratischen Glieder:

$$L = 4\pi r\left\{\left(1+\frac{3m^2}{16r^2}\right)\log\frac{8r}{m} - 2 - \frac{m^2}{16r^2}\right\}.$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Radius $\varrho$, also $m = 0{,}7788\,\varrho$, so wird:

$$L = 4\pi r\left\{\left(1+\frac{0{,}91}{8}\frac{\varrho^2}{r^2}\right)\log\frac{8r}{\varrho} - 1{,}75 - 0{,}0095\frac{\varrho^2}{r^2}\right\},$$

was mit der genauen Berechnung $\left(\text{z. B. für } \frac{\varrho}{r} = \frac{1}{4}\right)$ bis auf weniger als $\frac{1}{10}$ Prozent übereinstimmt; diese liefert nämlich als Koeffizient von $\frac{\varrho^2}{r^2}$ in der Formel: $\frac{1}{8}$ resp. 0,0083 statt $\frac{0{,}91}{8}$ resp. 0,0095.

4[3]. Zwei parallele sehr lange Drähte, die demselben Stromkreis angehören, von kreisförmigen Querschnitten, deren Radien $\varrho_1$ und $\varrho_2$, Abstand der Drahtachsen $= a$, für die Längeneinheit in genügender Entfernung von den Enden:

$$L = 2\left(\log\frac{a^2}{\varrho_1\varrho_2} + 0{,}5\right).$$

5[4]. Kurze, weite Rolle, deren Windungen einen rechteckigen Raum von der Breite $b$ und Höhe $c$ erfüllen. $r$ mittlerer Radius der Rolle, $n$ Anzahl der Windungen:

$$L = 4\pi r n^2\left\{\log\frac{8r}{\sqrt{b^2+c^2}}\left(1+\frac{3b^2+c^2}{96r^2}\right) - y_1 + \frac{b^2}{16r^2}y_2\right\},$$

wo $y_1$ und $y_2$ Funktionen von $x = \frac{c}{b}$ sind, die in der folgenden von STEFAN berechneten Tabelle sich finden:

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ | $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,50000 | 0,1250 | 0,55 | 0,80815 | 0,3437 |
| 0,05 | 0,54899 | 0,1269 | 0,60 | 0,81823 | 0,3839 |
| 0,10 | 0,59243 | 0,1325 | 0,65 | 0,82648 | 0,4274 |
| 0,15 | 0,63102 | 0,1418 | 0,70 | 0,83311 | 0,4739 |
| 0,20 | 0,66520 | 0,1548 | 0,75 | 0,83831 | 0,5234 |
| 0,25 | 0,69532 | 0,1714 | 0,80 | 0,84225 | 0,5760 |
| 0,30 | 0,72172 | 0,1916 | 0,85 | 0,84509 | 0,6317 |
| 0,35 | 0,74469 | 0,2152 | 0,90 | 0,84697 | 0,6902 |
| 0,40 | 0,76454 | 0,2423 | 0,95 | 0,84801 | 0,7518 |
| 0,45 | 0,78155 | 0,2728 | 1,00 | 0,84834 | 0,8162 |
| 0,50 | 0,79600 | 0,3066 | | | |

[1] M. WIEN, l. c. — [2] M. WIEN, l. c. S. auch GARBASSO, N. C. (5) **2.** 97. 1901 und Beibl. **26.** 429. 1902. — [3] CL. MAXWELL, l. c., S. 391. — [4] J. STEFAN, l. c. S. auch F. KOLÁČEK, Ber. d. Böhm. Ges. d. Wiss., math.-naturw. Klasse **14.** 1. 1896 und Beibl. **21**, 1005. 1897.

Wenn der Draht nicht den ganzen Raum ausfüllt, sondern z. B. besponnen ist, so tritt eine Korrektion ein. Sind $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Radien des besponnenen und des blanken Drahtes, so muß $L$ noch vermehrt werden um:

$$4\pi r n\left(\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + 0{,}15498\right) .$$

6.[1] Draht von der Permeabilität $\mu$, der Länge $l$ und kreisförmigem Querschnitt (Radius $\varrho$) in Luft, deren $\mu = 1$ gesetzt ist:

$$L = 2l\left(\log\frac{2l}{\varrho} + \frac{\mu}{4} - 1\right) .$$

Bei allen diesen Angaben ist angenommen, daß der Strom über den ganzen Querschnitt des Leiters gleichmäßig verteilt sei. Das gilt aber nur, solange der Strom stationär ist oder seine Wechsel langsam sind. Für schnelle Schwingungen ändert sich die Stromverteilung und dadurch der Wert der Induktionskoeffizienten; darüber später.

### c) Experimentelle Bestimmung.[2]

Bei der experimentellen Bestimmung der Induktionskoeffizienten kann man sich manchmal als Stromquelle galvanischer Elemente mit einfachem Stromschlüssel bedienen, meist aber wird man Wechselstrom verwenden und dazu ein Induktorium mit geeignetem Unterbrecher oder eine Wechselstrommaschine benutzen. Zur Strommessung wird im ersten Fall ein ballistisches Galvanometer dienen können (dessen Theorie s. Handbuch **4**, S. 283), während die meist gebrauchten Nullmethoden ein Telephon oder dergleichen verlangen, wobei die S. 579 gemachten Bemerkungen zu berücksichtigen sind.

Bestimmt man die Induktionskoeffizienten durch Vergleichung mit Spulen von bekannter Selbstinduktion, so ist es wünschenswert, daß diese Vergleichs-Selbstinduktion kontinuierlich veränderlich sei. Ein diesem Zweck dienender Apparat ist von Ayrton und Perry[3] konstruiert und Secohmmeter[4] genannt worden, er ist aber nur in engen Grenzen variabel und dient wesentlich zu technischen Zwecken. In größerem Intervall veränderlich ist das von M. Wien[5] angegebene Instrument. Es besteht in einer festen Drahtrolle aus vier durch Stöpselung zu verbindenden Teilen, in deren Hohlraum, mit ihr in Reihe geschaltet, eine konzentrische zweite Rolle mit zwei Wicklungen so drehbar ist, daß die anfänglich parallelen Windungsebenen der zwei Rollen jede beliebige Neigung gegeneinander bekommen können. Die feste Rolle läßt je nach der Einschaltung von einer oder mehreren Abteilungen das Selbstpotential sprungweise ändern, die drehbare Rolle, deren Drehung an einer Teilung abgelesen werden kann, erlaubt die Sprünge in jener Veränderung der Selbstinduktion kontinuierlich auszufüllen. Benutzt man diesen Apparat als einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke, so lassen sich mit ihm Selbstpotentiale zwischen den Grenzen $5\cdot10^3$—$10^{10}$ cm messen. Noch kleinere Selbstinduktionen (wenige Windungen dicken Kupferdrahtes) bis $10^2$ cm bestimmt man mit der von Dolezalek[6] beschriebenen Meßbrücke und variabler Selbstinduktion.

---

[1] Cl. Maxwell, l. c.; Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **21**. 381. 1886 und Scient. Pap. **2**. 486. — [2] Wir müssen uns hier auf die Angabe nur weniger Methoden aus der großen Zahl der vorgeschlagenen beschränken. Andere Methoden und Literatur s. u. a. G. Wiedemann, Die Lehre v. d. Elektr. 2. Aufl. **4**. 88—110. 1898. — A. Heydweiller, Hilfsb. f. elektr. Messungen S. 184—199. 1892. — F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Phys. S. 477—488. 1901. — M. Wien, Wied. Ann. **44**. 689. 1891. — [3] W. E. Ayrton und J. Perry, Lum. él. **24**. 401. 1887 und Beibl. **12**. 73. 1888. — [4] S. auch O. Colard, L'éclair. él. **10**. 337 u. 393. 1897 und Beibl. **21**. 1006. 1897. — H. N. Allen, Electrician **39**. 379. 1897 und Beibl. **22**. 44. 1898. — [5] M. Wien, Wied. Ann. **57**. 249. 1896. — [6] F. Dolezalek, Zeitschr. für Instrumentenkunde **23**. 247. 1903.

Einheitsrollen der Selbstinduktion sind von M. WIEN[1] konstruiert worden. Es sind auf Serpentin gewickelte Rollen Kupferdrahtes, die in Paraffin ausgekocht wurden, sie sollen auf 1 pro Mille genau sein. Präzisionsnormalen der Selbstinduktion werden auch von Siemens & Halske[2] hergestellt.

Benutzt man zur Messung Wechselströme von über 300 Perioden in der Sekunde, so wächst der Widerstand der Spulen beträchtlich und man muß, statt massiver Drähte, Seile (Litzen) aus dünnen (0,1 mm starken) voneinander isolierten Drähten anwenden, die gedrillt sind, so daß die einzelnen Fasern nicht immer die gleiche Lage im Bündel haben. — Bei höheren Frequenzen ändert sich auch die Selbstinduktion, und es wird die Kapazität der Rolle von Einfluß.[3]

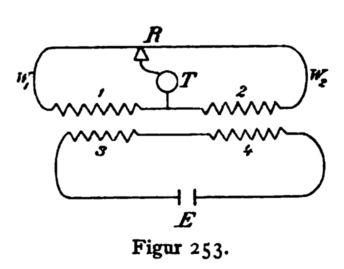
$\alpha$) Wechselseitiger Induktionskoeffizient.

1. Bestimmung von $L_{12}$ durch Widerstand und Zeit. Einen Leiter 1 durchfließe der Strom von der gemessenen Intensität $i$, der Leiter 2 sei durch ein ballistisches Galvanometer geschlossen und der Gesamtwiderstand des Kreises 2 sei $w_2$. Öffnet oder schließt man den Kreis 1 und fließt dabei die Elektrizitätsmenge $q$ durch Leitung 2, so ist

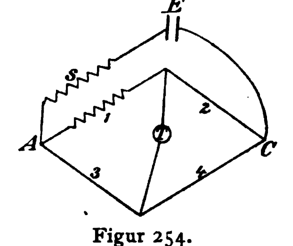
$$L_{12} = \frac{q\,w_2}{i} \quad .$$

$\frac{q}{i}$ hat die Dimension einer Zeit und läßt sich als Funktion der Zeit ausdrücken, wenn die Reduktionsfaktoren der beiden zur Messung von $q$ und $i$ benutzten Instrumente bekannt sind. — Eine Methode um $L_{12}$ mit der WHEATSTONEschen Brücke und dem optischen Telephon durch Widerstand und Zeit auszudrücken s. bei M. WIEN[4].

2. Vergleich zweier wechselseitiger Induktionskoeffizienten.[5] Die induzierenden Rollen 3 und 4 (s. Figur 253) bilden mit einer Stromquelle (und ev.



Figur 253.



Figur 254.

Stromschlüssel) einen Kreis, die induzierten 1 und 2 sind durch induktionsfreie Rheostatenwiderstände $R$, deren Verhältnisse sich verändern lassen, geschlossen. Bleibt der Stromanzeiger $T$ im Brückenzweig ruhig, so ist

$$L_{13} : L_{24} = w_1 : w_2 \quad ,$$

wo $w_1$ und $w_2$ die Gesamtwiderstände der beiden Teile des induzierten Kreises sind.

3. Vergleich eines wechselseitigen Induktionskoeffizienten mit einem Selbstinduktionskoeffizienten.[6] Man benutzt die WHEATSTONEsche Brückenanordnung (s. Figur 254). Die Spulen 1 und $s$ werden so eingeschaltet, daß sie der Strom in entgegengesetzter Richtung durchfließt ($w_2$, $w_3$, $w_4$ sind induktionsfrei) und die Widerstände in der Brücke mit konstantem Strom abgeglichen,

[1] M. WIEN, Wied. Ann. **58**. 553. 1896. — [2] F. DOLEZALEK, Ann. d. Phys. **12**. 1142. 1903. — [3] F. DOLEZALEK, l. c. S. darüber Abschnitt 20. — [4] M. WIEN, Wied. Ann. **44**. 708. 1891. — [5] CL. MAXWELL, l. c. **2**. 496. — [6] CL. MAXWELL, l. c. **2**. 498.

dann verschiebt man die Spulen 1 und $s$ gegeneinander, bis auch für Wechselstrom das Telephon schweigt. Es gilt dann die Beziehung:

$$\frac{L_1}{L_{1s}} = 1 + \frac{w_1}{w_3} = 1 + \frac{w_2}{w_4} \quad .$$

Statt die Lage von 1 und $s$ gegeneinander zu ändern, kann man eine Zweigleitung vom Widerstand $w$ zwischen $A$ und $C$ legen und sie so abgleichen, daß wieder die Intensität in $T$ zu null wird. Man erhält so:

$$\frac{L_1}{L_{1s}} = 1 + \frac{w_2}{w_4} + \frac{w_1 + w_2}{w} \quad .$$

4. Methoden um den wechselseitigen Induktionskoeffizienten durch Widerstand und Kapazität auszudrücken s. u. a. bei ROITI[1], CAREY FOSTER[2], HEYDWEILLER[3].

### $\beta$) Selbstinduktionskoeffizient.

1. Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten durch direkte Messung des Widerstandes und der effektiven Werte $I$ und $E$. Man schickt einen Wechselstrom, dessen Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{n}$ bekannt, durch den Leiter, dann ist

$$I = \frac{E}{\sqrt{w^2 + n^2 L^2}} \quad ,$$

also

$$L = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{E^2}{I^2} - w^2} \quad ,$$

mit dem Spannungsmesser wird $E$ (effektive Spannung), mit dem Elektrodynamometer $I$ (effektive Stromstärke) gemessen; $w$ mit Gleichstrom bestimmt.

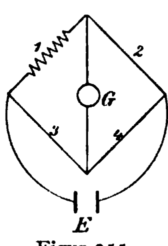
2. Methode von JOUBERT[4] durch Abzweigung. Der Leiter ($w$, $L$) und ein induktionsfreier Widerstand ($w_0$) werden hintereinander von dem Wechselstrom ($n$) durchflossen, abwechselnd werden die Spannungen ($E_1$, $E_0$) an den Enden beider Leiter mit einem Elektrometer in Doppelschaltung gemessen, also:

$$E_1 : E_0 = \sqrt{w^2 + n^2 L^2} : w_0 \quad ,$$

es ergibt sich

$$L = \frac{1}{n}\sqrt{w_0 \frac{E_1}{E_0} - w^2} \quad .$$

3. Mit dem ballistischen Galvanometer nach MAXWELL[5] in der WHEATSTONEschen Brücke. Die Selbstinduktion $L$ befindet sich im Zweige 1 (s. Figur 255), die anderen Zweige sind induktionsfrei. Nach Abgleichung der Widerstände für die Nullstellung bei konstantem Strom gibt der Ausschlag des ballistischen Galvanometers $G$ die Elektrizitätsmenge $q$, die bei Stromunterbrechung $G$ durchfließt. Dann fügt man nach RAYLEIGH[6] in Zweig 1 den kleinen Widerstand $w'$ ein und beobachtet bei konstantem Strom die Intensität $i'$ in $G$; es gilt die Gleichung



Figur 255.

$$L = \frac{w' q}{i'} \quad .$$

---

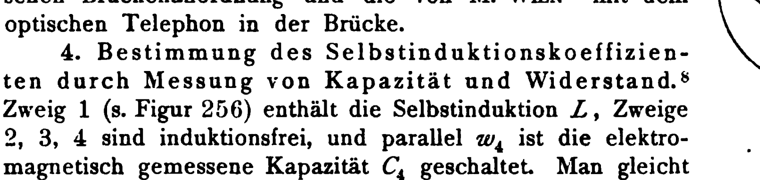
1 A. ROITI, N. Cimento (3) **16**. 175. 1884; Beibl. **8**. 867. 1884. — 2 CAREY FOSTER, Phil. Mag. (5) **23**. 121. 1887; Beibl. **11**. 554. 1887. — 3 A. HEYDWEILLER, Wied. Ann. **53**. 497. 1894. — 4 J. JOUBERT, C. R. **91**. 161. 1890. — 5 CL. MAXWELL, Phil. Trans. **155**. 475. 1865. — 6 Lord RAYLEIGH, Proc. Roy. Soc. **32**. 104. 1881; Phil. Trans. **173**. 661. 1882 oder Scient. Pap. **3**. 1 u. 38.

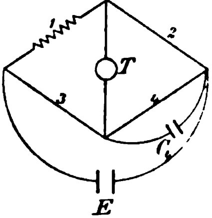
Statt $w'$ einzuschalten und $i'$ zu messen, kann man nach DORN[1] in den Batteriezweig einen Strommesser einschalten und mit ihm die Intensität $i$ des Hauptstromes beobachten. Ist der Widerstand des Brückenzweiges $w_b$, so wird

$$L = \frac{q}{i} \cdot \frac{1}{w_4} \{(w_1 + w_3)(w_2 + w_4) + w_b(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)\} \quad ,$$

$q$, $i'$ und $i$ werden durch die Galvanometerkonstanten in bekannter Weise ausgedrückt. —

Es mögen noch angeführt werden die Methode von OBERBECK[2], deren vollständige Formel TROJE[3] gegeben und die PATTERSON[4] diskutiert hat; PATTERSON findet sie für kleine Selbstpotentiale der MAXWELL-RAYLEIGHschen Methode überlegen. Bei ihr dient als Stromquelle ein reiner Sinusstrom, der durch eine Rolle eines Elektrodynamometers geht, während die andere Rolle des Instrumentes sich im Brückenzweig der WHEATSTONEschen Kombination befindet. Das Elektrodynamometer gibt keinen Ausschlag, wenn seine beiden Rollen von Wechselströmen mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ durchlaufen werden, diese Bedingung wird





Figur 256.

durch Abgleichung der Widerstände in der Anordnung der Figur 255 erfüllt.[5] Ferner die Methoden von F. KOHLRAUSCH[6] mit dem Differentialgalvanometer oder mit der WHEATSTONEschen Brückenanordnung und die von M. WIEN[7] mit dem optischen Telephon in der Brücke.

4. **Bestimmung des Selbstinduktionskoeffizienten durch Messung von Kapazität und Widerstand.**[8] Zweig 1 (s. Figur 256) enthält die Selbstinduktion $L$, Zweige 2, 3, 4 sind induktionsfrei, und parallel $w_4$ ist die elektromagnetisch gemessene Kapazität $C_4$ geschaltet. Man gleicht die Brücke so ab, daß für konstanten und Wechselstrom das Telephon schweigt, dann ist:

$$L = C_4 \cdot w_2 w_3 \quad .$$

Um die mühsame doppelte Abgleichung zu vermeiden, haben RIMINGTON[9], NIVEN[10] u. a. Modifikationen dieser Methode angegeben.

M. WIEN[11] benutzt das optische Telephon und setzt die Kapazität $C_1$ als Nebenschluß zu Zweig 1 statt 4, so erhält er:

$$L = C_1 \frac{w_1 w_2 w_3}{w_4} \quad .$$

5. **Vergleichung zweier Selbstpotentiale.**[12] Die beiden Selbstpotentiale werden in die Zweige 1 und 2 der Brücke gesetzt und die Widerstände so abgeglichen, daß für konstanten und für Wechselstrom das Telephon schweigt: dann ist:

$$L_1 : L_2 = w_1 : w_2 = w_3 : w_4 \quad .$$

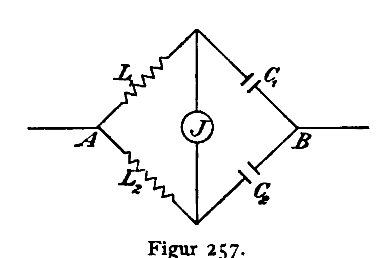
Die Methode, die große Genauigkeit zuläßt[13], ist nur zur Vergleichung größerer Selbstpotentiale geeignet, deshalb hat sie PRERAUER[14] nach Angaben von M. WIEN bei Benutzung des optischen Telephons modifiziert, so daß sie noch zur Bestimmung von kleinen Selbstpotentialen (gerader Drähte) bis zur unteren Grenze

[1] E. DORN, Wied. Ann. **17**. 783. 1882. — [2] A. OBERBECK, Wied. Ann. **17**. 816. 1882. — [3] O. TROJE, Wied. Ann. **47**. 501. 1892. — [4] G. W. PATTERSON, Wied. Ann. **69**. 54. 1899. — [5] S. auch J. B. WHITEHEAD und H. D. HILL, Am. J. of Sc. (4) **19**. 149. 1905. — [6] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **31**. 594. 1887. — [7] M. WIEN, l. c. S. 701. — [8] CL. MAXWELL, l. c. **2**. 528. — [9] E. C. RIMINGTON, Phil. Mag. (5) **24**. 54. 1887. — [10] C. NIVEN, Phil. Mag. (5) **24**. 225. 1887. — [11] M. WIEN, l. c. S. 702. — [12] CL. MAXWELL, l. c. S. 499. — [13] S. z. B. A. HEYDWEILLER, Festschrift für L. BOLTZMANN, Leipzig 1904. S. 4. — [14] O. PRERAUER, Wied. Ann. **53**. 722. 1894.

$L = 100$ cm dienen kann, indem diese mit bekannten 10—100mal größeren Selbstpotentialen von kleinen Rollen verglichen werden.

Nach derselben Methode hat M. WIEN[1] noch die Selbstinduktion von Röhren, Bändern, Rechtecken, Kreisen usw. bestimmt und den Einfluß verfolgt, den bei einem Wechselstrom von 256 Schwingungen in der Sekunde die Änderung der Stromstärke auf die von der Permeabilität abhängigen Werte der Selbstinduktion ferromagnetischer Drähte ausübt.

MARTIENSSEN[2] konstruierte einen Phasenindikator, bei dem aus der Phasenverschiebung des Wechselstromes durch die Selbstinduktion diese gemessen werden kann.



Figur 257.

Zur Vergleichung nur wenig verschiedener oder kleiner (nicht aus mehreren Lagen bestehender) Selbstinduktionen für schnelle Schwingungen benutzt NERNST[3] die Anordnung Figur 257. Die Kondensatorschwingungen oder dgl. werden in $A$ und $B$ zu- und abgeleitet; der Indikator in $J$ für die Nullstellung der Brücke ist ein Funken, der zwischen zwei senkrecht zueinander stehenden Platinschneiden überspringt, und die Brücke wird durch einen Transformator gebildet, dessen sekundärer Draht zu den Schneiden führt; noch einfacher dient ein Vakuumrohr (mit verdünnter Luft oder dgl.) als Indikator. Ist der Strom in der Brücke null, so gilt

$$L_1 \cdot C_1 = L_2 C_2 \quad .$$

Macht man $C_1 = C_2$, so gibt eine bekannte variable Selbstinduktion in 1 sogleich $L_2$.

Aus der Literatur seien noch angeführt:

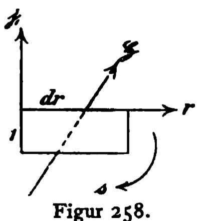
L. LORENZ, Wied. Ann. **7**. 167. 1879.
M. BRILLOUIN, C. R. **93**. 110. 1881 u. **94**. 435. 1882; Ann. de l'école norm. (2) **11**. 339. 1882.
P. CULLMANN, Dissertation Berlin 1884.
G. H. VON WYSS, Dissertation Zürich 1886.
M. BOSANQUET, Phil. Mag. (5) **23**. 412. 1887.
J. SWINBURNE, Phil. Mag. (5) **24**. 85. 1887.
K. STRECKER und A. FRANKE, Elektrotechn. Zeitschr. **10**. 289. 1889.
A. ANDERSON, Phil. Mag. (5) **31**. 329. 1891.
J. KLEMENČIČ, Wied. Ann. **46**. 315. 1892.
H. ABRAHAM, C. R. **117**. 624. 1893; **118**. 1251 u. 1326. 1894.
L. GRÄTZ, Wied. Ann. **50**. 766. 1893.
H. A. ROWLAND, Am. Jour. of Sc. (4) **4**. 429. 1897 oder Phil. Mag. (5) **45**. 66. 1898.
K. E. GUTHE, Am. Jour. of Sc. (4) **5**. 141. 1898.
H. A. ROWLAND und TH. D. PENNIMAN, Am. Jour. of Sc. (4) **8**. 35. 1899.
A. BLONDEL, L'éclair. él. **21**. 138. 1899; Beibl. **24**. 125. 1900.
V. CARPENTER, Phys. Rev. **10**. 52. 1900; Beibl. **24**. 538. 1900.
W. DUANE, Phys. Rev. **13**. 250. 1901; Beibl. **26**. 54. 1902.
A. HEYDWEILLER, Ann. d. Phys. **15**. 179. 1904.
J. A. FLEMING und W. C. CLINTON, Phil. Mag. (6) **5**. 493. 1903.
F. DOLEZALEK, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **23**. 240. 1903.
A. TROWBRIDGE, Phys. Rev. **18**. 184. 1903.
G. F. C. SEARLE, Cambr. Proc. **11**. 399. 1902.

## 19. Ungleichmäßige Stromverteilung im Querschnitt des Leiters bei Wechselströmen. Hautwirkung.

Die Berechnungen der Induktionskoeffizienten im vorigen Abschnitt sind, wie dort hervorgehoben, unter der Voraussetzung ausgeführt, daß die Stromdichte gleichmäßig über den ganzen Querschnitt des Leiters verteilt sei, das darf aber nur bei sehr langsamen Stromschwankungen angenommen werden, wie sie die für Messungen benutzten Wechselströme oft nicht mehr haben.

[1] M. WIEN, Wied. Ann. **53**. 937. 1894; s. auch J. KLEMENČIČ, Wied. Ann. **53**. 1053. 1894. — [2] H. MARTIENSSEN, Wied. Ann. **67**. 95. 1899. — [3] W. NERNST, Wied. Ann. **60**. 600. 1897.

Schon MAXWELL[1] hat den Einfluß von Stromschwankungen auf die Strömung in einem geraden, dicken Leiter untersucht, RAYLEIGH[2] hat diese Rechnungen erweitert und verbessert; STEFAN[3] behandelte die Frage, indem er von den Formeln F. NEUMANNs und W. WEBERs für das elektrodynamische Potential zweier Stromelemente ausging, und kam zu denselben Resultaten; W. THOMSON[4] hat eine Tabelle für die Änderung des Widerstandes gegeben. H. POINCARÉ[5] berücksichtigte bei der Fortpflanzung HERTZscher Drahtwellen zuerst die Dicke des Drahtes, besonders wichtig aber sind die Arbeiten von J. J. THOMSON[6] und A. SOMMERFELD[7] über solche Drahtwellen; der letztere gibt Beispiele über die Verteilung der Strömung für dünne und dicke Drähte verschiedenen Materials. J. ZENNFCK[8] hat Kurven berechnet, aus denen die Änderung des Widerstandes und der Selbstinduktion mit wachsender Schwingungszahl zu entnehmen ist.



Figur 258.

Aus den beiden Hauptgleichungen der MAXWELLschen Theorie ergibt sich, wie im folgenden angedeutet[9], die Beziehung, der die Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraft im von Wechselströmen durchsetzten Leiter gehorchen muß. Der Leiter sei ein Draht vom Radius $\varrho$, der entweder gerade ist oder dessen Krümmungsradius groß gegen $\varrho$ sei. $\sigma$ und $\mu$ seien Leitungsvermögen und Permeabilität des Drahtes.

Die zwei Ausgangsgleichungen lauten (s. Artikel „Elektrodynamik", S. 526, und diesen Artikel, S. 544) in elektromagnetischem Maß:

$$\text{(I)} \qquad \int\limits_s \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi \int\limits_S \mathfrak{i}_n\, dS$$

und

$$\text{(II)} \qquad \int\limits_s \mathfrak{E}_s\, ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mu\, \mathfrak{H}_n\, dS \quad .$$

Die Strömung soll quasistationär sein, d. h. überall parallel der Drahtachse verlaufen und in jedem Querschnitt die gleiche sein, dann werden $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nur von $r$ und $t$ abhängen, wo $r$ der Abstand von der Drahtachse ist. Die Magnetkraftlinien $\mathfrak{H}$ werden konzentrische Kreise um die Achse sein. Die Linie $s$ in (I) sei eine solche magnetische Kraftlinie, also:

$$2\pi r \mathfrak{H} = 4\pi \int\limits_0^r \mathfrak{i}\, 2\pi r\, dr$$

und differenziert:

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{H}) = 4\pi \mathfrak{i}\, r = 4\pi\sigma \mathfrak{E}\, r \quad .$$

In (II) sei die Fläche $S$ ein Rechteck (s. Figur 258) mit den Seiten 1 parallel und $dr$ senkrecht zur Drahtachse ($\mathfrak{i}$ oder $\mathfrak{E}$). Der Pfeil bei $s$ gibt in der Figur den positiven Umlaufssinn des Rechtecks, wenn der Pfeil $\mathfrak{H}$ die positive Richtung der magnetischen Kraft bezeichnet. Es ist also:

$$\int\limits_S \mu\, \mathfrak{H}_n\, dS = \mu\, \mathfrak{H}\, dr$$

$$\int\limits_s \mathfrak{E}_s\, ds = \mathfrak{E}_r - \mathfrak{E}_{r+dr} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r}\, dr \quad ,$$

---

[1] CL. MAXWELL, l. c. **2**. 393. — [2] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (3) **21**. 369 u. 381. 1886 u. Scient. Pap. **2**. 474 u. 486. S. auch O. HEAVISIDE, Phil. Mag. (3) **22**. 118 u. a.; **23**. 10 u. 173; **24**. 68. — [3] J. STEFAN, Wien. Sitz.-Ber. **95** (IIa). 917. 1887; **99** (IIa). 319, 534. 1890 u. Wied. Ann. **41**. 400. 1890. — [4] W. THOMSON, Math. and phys. Pap. **3**. 493. 1890. — [5] H. POINCARÉ, C. R. **120**. 1046 u. 1229. 1892. — [6] J. J. THOMSON, Renat researches etc. 262 etc. 1893. — [7] A. SOMMERFELD, Wied. Ann. **67**. 233. 1899. — [8] J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **11**. 1135. 1903. — [9] Vgl. E. COHN, Das elektromagn. Feld. 354. 1900.

folglich

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad . \tag{2}$$

Aus (1) folgt:

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r}\right) \quad ,$$

also

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} \quad . \tag{3}$$

$\mathfrak{E}$ sei eine rein periodische Funktion, dann kann man setzen:

$$\mathfrak{E} = f(r)\, e^{\iota n t} \quad ,$$

wo $n$ die Schwingungszahl in $2\pi$ Sekunden, $n = n_1 2\pi$, wenn $n_1$ die Schwingungszahl in einer Sekunde.

Aus (3) folgt:

$$4\pi\sigma\mu\iota n f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \quad .$$

Setzt man

$$\alpha = 4\pi\sigma\mu n = 8\pi^2\sigma\mu n_1 \tag{4}$$

und

$$y = r\sqrt{-\iota\alpha} \quad , \tag{5}$$

so geht die Gleichung über in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} + f = 0 \quad . \tag{6}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen der Ordnung 0. Für den Bereich $r = 0$ bis $r = \varrho$ muß $f(r)$ endlich sein, für uns ist also die allgemeinste Lösung:

$$f(r) = A \cdot J_0(y) \quad ,$$

wo $J_0(y)$ die Besselsche Funktion erster Art ist, also:

$$\mathfrak{E} = A J_0(y)\, e^{\iota n t} \quad . \tag{7}$$

Die Funktion $J_0(y)$ läßt sich u. a. in Form der unendlichen Reihe schreiben:

$$J_0(y) = 1 - \frac{1}{(1\,!)^2}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2\,!)^2}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3\,!)^2}\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^6 + \dots \tag{8}$$

Diese Reihe ist nur für kleine Werte von $y$ brauchbar, benutzt man für große $y$ einen von H. Weber abgeleiteten Näherungswert, so erhält man für große $y$:

$$J_0(y) = \frac{e^{\iota y}}{\sqrt{2\pi\iota y}} \quad . \tag{9}$$

Da nach (5) sich schreiben läßt

$$\iota y = (\iota + 1)\, r\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

so folgt: Die Amplitude der Strömung ist am größten in der Oberfläche (wo $r = \varrho$) und nimmt nach dem Innern stetig ab, ebenso findet eine stetige Phasenverschiebung der Strömung von der Oberfläche nach dem Innern statt.

Bildet man das Verhältnis der Stromamplituden für verschiedene Werte von $y$, so zeigt sich, daß es nur abhängt von einer Größe:

$$\varkappa = \varrho\cdot\pi\sqrt{\sigma\mu n_1} \quad . \tag{10}$$

Je nachdem $\varkappa$ klein ($\varkappa$ beträchtlich kleiner als 1) oder groß ($\varkappa$ groß gegen 1) ist, erhält man nach (4) und (5) die Näherungswerte für die Stromamplituden aus (8) oder (9).

Für kleine $\varkappa$ ist genähert für die Stromamplituden $a_r$ und $a_0$ im Abstand $r$ von der Achse und in der Achse:

$$\frac{a_r}{a_0} = 1 + \varkappa^4 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^4 \quad ,$$

also das Verhältnis der $a$ an der Drahtoberfläche und in der Achse:

$$\frac{a_\varrho}{a_0} = 1 + \varkappa^4 \quad . \tag{11}$$

Für große $\varkappa$ gibt:

$$\frac{a_{(\varrho-\beta)}}{a_\varrho} = e^{-2\varkappa\frac{\beta}{\varrho}} \tag{12}$$

das Verhältnis der Stromamplituden in der Tiefe $\beta$ unter der Oberfläche und in der Oberfläche. Von $\varkappa > 6$ an ist die Genauigkeit dieser Formel meist genügend, doch gibt sie nur die Stromverteilung in der Oberflächenschicht bis zur Tiefe von etwa $\frac{1}{10}$ des Radius. Es ist also in einer Tiefe $\beta$ unter der Oberfläche

$$\beta = \frac{\varrho}{2\varkappa} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma\mu n_1}}$$

die Stromamplitude auf $\frac{1}{e}$ ihres Wertes in der Oberfläche herabgesunken.

**Beispiele**[1]:

Kupferkabel von 1 cm Radius: $2n_1 = 100$, also $\varkappa = 0{,}54\, r$

$$\frac{a_\varrho}{a_0} = 1{,}085 \quad .$$

Für Drähte von 1 mm Radius wäre: $\frac{a_\varrho}{a_0} = 1{,}000\,008\,5$ ,

für denselben Draht bei $2n_1 = 10^6$: $\frac{a_{\frac{9}{10}\varrho}}{a_\varrho} = 0{,}37$ ,

d. h. schon $\frac{1}{10}$ mm unter der Oberfläche ist die Stromamplitude auf fast $\frac{1}{3}$ ihres Wertes an der Oberfläche gesunken.

Eisendraht: $2n_1 = 100$; $\varrho = 1$ cm; $\mu = 1000$: $\frac{a_{\frac{19}{20}\varrho}}{a_\varrho} = 0{,}52$ ,

d. h. schon 0,5 mm unter der Oberfläche ist die Stromamplitude nur noch halb so groß wie in der Oberfläche.

$2n_1 = 100$; $\varrho = 1$ mm; $\mu = 1000$: $\frac{a_\varrho}{a_0} = 1{,}18$ ,

$2n_1 = 10^6$; $\varrho = 1$ mm, wenn $\mu = 100$ angenommen wird:

$$\frac{a_{\frac{19}{20}\varrho}}{a_\varrho} = 0{,}12 \quad .$$

Bestleitende $H_2SO_4$: $2n_1 = 10^6$; $\varrho = 10$ cm: $\frac{a_\varrho}{a_0} = 1{,}13$ .

---

[1] S. J. Zenneck, Elektromagnet. Schwingungen. 404. S. auch E. Meritt, Phys. Rev. **5**. 47. 1897. — G. Mie, Ann. d. Phys. **2**. 235. 1900, wo diese Verhältnisse für zwei parallele Drähte behandelt werden.

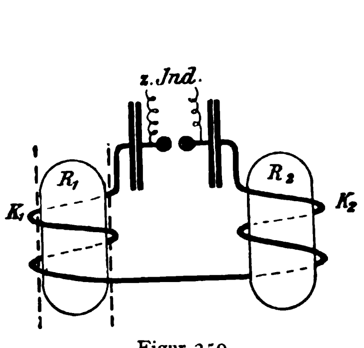
Bei Elektrolyten ist also die Strömung auch bei sehr dicken Zylindern fast gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verbreitet, selbst wenn eine halbe Million Schwingungen pro Sekunde stattfinden.

Versuche, die solche Schirmwirkungen für noch schnellere Schwingungen beweisen, als die Beispiele annehmen, haben H. HERTZ[1], J. STEEAN[2], V. BJERKNES[3] und viele andere angestellt (s. später).

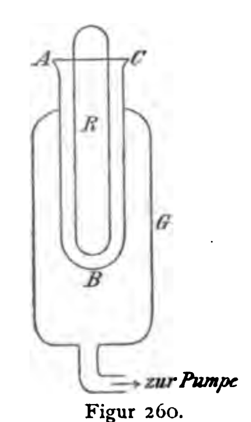
Die Übertragung[4] der vorstehenden Überlegungen auf den magnetischen Strom und die daraus ganz analog den Formeln (11) und (12) sich ergebenden Sätze über die Verteilung der magnetischen Induktion in dem Querschnitt von Metallzylindern kann hier nur erwähnt werden. Es ergibt sich, daß massive Eisenkerne in einer Spule bei schnellen Wechselströmen den magnetischen Induktionsfluß nur wenig erhöhen, da dieser das Innere des Kerns nicht beeinflußt, sondern nur in der Oberfläche verläuft. Bündel aus dünnen Eisendrähten und besonders Eisenpulver haben diesen Nachteil in geringerem Maße. Dafür ist aber in Bündeln aus dünnen Drähten der Energieverbrauch viel größer als für massive Zylinder. Versuche darüber sind von F. BRAUN[5] und J. ZENNECK angestellt worden. —

Es bleibt also bei sehr schnellen Schwingungen die Strömung nur auf eine dünne oberflächliche Schicht beschränkt, die um so dünner wird, je kleiner die Periode der Schwingungen ist. Man nennt diese Erscheinung „Hautwirkung" Skineffekt und sagt, die oberflächlichen Schichten des Leiters üben bei schnellen Schwingungen eine Schirmwirkung für die inneren Leiterteile aus.

**Demonstration der „Hautwirkung".** Eine schöne Demonstration der Schirmwirkung dünner Metallschichten bietet ein Versuch von J. J. THOMSON[6], dem ZENNECK[7] folgende Form gegeben hat. Ein Kondensatorkreis (s. Figur 259)*) enthält zwei Spulen $K_1$ und $K_2$ von wenigen Windungen, in die zwei Vakuumröhren ($^1/_{10}$ mm Hg Druck) $R_1$ und $R_2$ eingeschoben sind. Erzeugt man die Schwingungen im Kreis, so leuchten beide Röhren hell auf. Schiebt man zwischen $K_1$ und $R_1$ (in der Figur durch gestrichelte Linien angedeutet) eine Metallröhre, z. B. aus dünnem Staniol, so hört das Leuchten in $R_1$ auf, während es in $R_2$ fortbesteht.




Figur 259.



Figur 260.

Durch einen ähnlichen Versuch kann nach J. J. THOMSON auch die Schirmwirkung der Elektrolyte und Gase gezeigt werden: Eine der Spulen $K_1$ oder $K_2$ umgebe den Apparat (s. Figur 260), dessen äußeres Glasgefäß $G$ aus-

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **37**. 395. 1889 u. Ausbreit. d. elektr. Kraft. 2. Aufl. 1894. 171. — [2] J. STEFAN, Wied. Ann. **41**. 414. 1890. — [3] V. BJERKNES, Wied. Ann. **48**. 592. 1893. — [4] J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **9**. 497. 1902; **10**. 845. 1903; **11**. 1121 u. 1135. 1903. Elektromagn. Schwingungen 180 usw. — [5] F. BRAUN, Ann. d. Phys. **10**. 326. 1903. — J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **11**. 1131. 1903. — [6] J. J. THOMSON, Rec. Res. 101 u. 102; Phil. Mag. (5) **32**. 321. 445. 1894. — [7] J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen 476.

*) Figur entnommen aus J. ZENNECK, Elektromagn. Schwingungen.

gepumpt werden kann. In $G$ ist, ähnlich wie bei Bunsens Eiskalorimeter, das oben offene weite Glasrohr $ABC$ eingeschmolzen; in das letztere senkt man die Vakuumröhre $R$, so daß ein Zwischenraum zwischen $R$ und der Wand $ABC$ bleibt. Ist $G$ mit Luft gefüllt, so leuchtet $R$, füllt man nun $ABC$ mit bestleitender Schwefelsäure, so wird $R$ dunkel. Schüttet man die Säure aus und evakuiert $G$ etwa auf den Druck der Geißler-Röhren, so leuchtet $G$, während $R$ dunkel bleibt, bei weiterem starken Auspumpen von $G$ wird dann wieder $G$ dunkel und $R$ leuchtet hell.

Das Leitvermögen des verdünnten Gases in $G$ kann also groß genug werden, um die Schirmwirkung auszuüben.

## 20. Widerstand und Selbstinduktion bei Wechselströmen.

Da nach dem Vorigen bei von Wechselströmen durchflossenen Leitern die Strömung nicht mehr gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verbreitet ist und sich je schneller die Wechsel werden um so mehr auf eine dünne Oberflächenschicht beschränkt, so muß Widerstand und Selbstinduktion eines Leiters von ihren Werten bei stationärem Strom verschieden sein.

### a) Der Widerstand.

Der Widerstand des Leiters steigt mit der Anzahl der Stromwechsel über jede Grenze hinaus, verglichen mit seinem Ohmschen Widerstand, da der Querschnitt des durchströmten Raumes ständig abnimmt.

Bezeichnen $w$ den Ohmschen Widerstand, $w'$ und $L'$ Widerstand und Selbstinduktion für den Wechselstrom der Schwingungszahl $n$, $L_0$ den Wert, dem die Selbstinduktion mit steigendem $n$ zustrebt, und der von dem Magnetfeld außerhalb des Leiters herrührt, so ist[1]

$$\frac{w' + \iota n (L' - L_0)}{w} = 4 \iota \varkappa^2 \left\{ \frac{J_0(y)}{y J_0'(y)} \right\}_{y = \varkappa \sqrt{-8\iota}} , \tag{13}$$

wo $J_0'(y)$ den Differentialquotienten von $J_0(y)$ nach $y$ bedeutet.

Es ist also $\frac{w'}{w}$ der reelle und $\frac{n(L' - L_0)}{w}$ der imaginäre Teil der linken Seite von Gleichung (13).

Aus der Reihe für $J_0(y)$ findet sich, wenn man zur Abkürzung setzt

$$x = -\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\iota \alpha \varrho^2}{4} :$$

$$\frac{J_0(y)}{y J_0'(y)} = \frac{1}{24}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{48} - \dots\right) . \tag{14}$$

Dies eingesetzt und Reelles und Imaginäres getrennt, gibt, wenn $l$ die Länge des Drahtes ist:

$$(15) \begin{cases} w' = w\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{n l \mu}{w}\right)^2 - \frac{1}{180}\left(\frac{n l \mu}{w}\right)^4 + \dots\right\} \quad \text{oder:} \\ w' = w\left\{1 + \frac{1}{12}(2\varkappa^2)^2 - \frac{1}{180}(2\varkappa^2)^4 + \dots\right\} \end{cases}$$ [2].

[1] Siehe E. Cohn, l. c. 364. — [2] E. Cohn, l. c. und J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. 1137. 1905 und Elektromagnetische Schwingungen, S. 410 u. Tabelle VI,. S. 994, wo der Widerstand von Kupferdrähten mit Radien zwischen 0,1 und 4 mm für Wechselzahlen von $8.10^5$ bis $10^7$ angegeben ist.

Das ist im wesentlichen die von RAYLEIGH und STEFAN gefundene Formel. Sie ist für kleine Werte von $\varkappa^2$ brauchbar. Für große Werte von $y$ folgt aus (9) genähert

$$J_0'(y) = \iota J_0(y)$$

und also nach (13) für großes $\varkappa$ ($\varkappa$ etwa $> 5$):

$$w' = \varkappa w \quad ^1, \tag{16}$$

während für kleines $\varkappa$ ($\varkappa$ etwa $< 0{,}65$):

$$w' = w\left(1 + \frac{\varkappa^4}{3}\right) \quad . \tag{17}$$

Liegt der Wert von $\varkappa$ zwischen 1,5 und 10, so kann man die Näherungsformeln benutzen:

$$w' = w(0{,}977\,\varkappa + 0{,}277) \quad .$$

Da $\varkappa = \varrho\pi\sqrt{\sigma\mu n_1} = \varrho\sqrt{\frac{\pi n \sigma\mu}{2}}$, so wächst nach (16) $w'$ mit zunehmender Schwingungszahl $n$ beständig.

Der Widerstand $w'$ für Wechselstrom wird nach Lord KELVIN oft effektiver Widerstand genannt.

Der Widerstand eines Kupferdrahtes von 1 mm Radius ist für $10^7$ Stromwechsel in der Sekunde fast 18mal so groß als bei stationärem Strom, während Zylinder von bestleitender Schwefelsäure mit 1 cm Radius bei $10^8$ Stromwechsel nur $w' = 1{,}04\,w$ ergeben.

Bei schnellen Schwingungen kann man also, ohne den Widerstand zu ändern, Metallröhren statt massive Zylinder verwenden, oder den Widerstand eines schlecht leitenden Materials durch einen dünnen Überzug aus gut leitendem herabdrücken.

Der Einfluß, den die Dämpfung der Schwingungen im Leiter auf dessen effektiven Widerstand hat, ist von BARTON untersucht worden[2]; er findet, daß der Widerstand durch die Dämpfung vergrößert wird.

**Widerstand von Drahtspulen.** Hat man es nicht mit geraden oder nur schwach gekrümmten Drähten zu tun, sondern mit Solenoiden, Rollen u. dgl., bei denen, der Drahtachse nach gemessen, weit voneinander entfernte Teile der Leiterbahn im Raume nahe beieinander liegen, so sind die obigen Formeln nicht mehr anwendbar. Der Widerstand solcher Spulen steigt, wie DOLEZALEK fand (s. Seite 597), schon bei 300 Schwingungen in der Sekunde schneller und die Selbstinduktion fällt etwas schneller, als die RAYLEIGHschen Formeln ergeben. Die Ursache ist, daß die Stromlinien sich auf der Innenseite der Spule (nach der Achse zu) zusammendrängen und ihre symmetrische Verteilung um die Drahtachse, die bei den Rechnungen vorausgesetzt wurde, völlig zerstört ist, oder wie man auch sagen kann, darin, daß Wirbelströme in dem Draht entstehen. Wie dies praktisch nach DOLEZALEK vermieden werden kann, ist schon früher angegeben. M. WIEN[3] hat diese Änderung des Widerstandes für lange und flache Spulen und Schwingungszahlen bis zu einigen Tausend zu berechnen gesucht, indem er den Gesamtstrom in Elementarströme zerlegte; A. SOMMERFELD[4] hat bei Vernachlässigung der Verschiebungsströme und unter Voraussetzung eines rechteckigen statt eines kreisförmigen Drahtquerschnittes die Erscheinung nach den MAXWELLschen Gleichungen behandelt. Er findet für eine einfache Spule (eine Lage Draht)

$$w' = w\,\varphi(\alpha) \quad ,$$

---

[1] Diese Formel ist u. a. von P. CARDANI, N. Cim. (4) **7**. 23. 229. 1898, für Elektrolyte und feste Leiter durch Versuche bestätigt worden. — S. auch J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **11**. 1135. 1903. — [2] E. H. BARTON, Phil. Mag. (5) **47**. 483. 1899. — S. auch E. H. BARTON und B. MORTON, ibid. **48**. 143 u. 148. 1899. — [3] M. WIEN, Ann. d. Phys. **14**. 1. 1904. — [4] A. SOMMERFELD, Ann. d. Phys. **15**. 673. 1904.

wo

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha + \sin\alpha}{\mathfrak{Cos}\,\alpha - \cos\alpha} \quad (\mathfrak{Sin} \text{ resp. } \mathfrak{Cos} = \text{sinus resp. cosinus hyperbolicus}) \quad ,$$

$$\alpha = 2(r_2 - r_1)\sqrt{2\pi n \sigma} \;, \qquad r_2 - r_1 = \text{Dicke des Drahtes.}$$

Als Näherungsformeln ergeben sich

für kleines $\alpha$: $\quad w' = w\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^4}{5!}\right)$ ,

für großes $\alpha$: $\quad w' = w \cdot \frac{\alpha}{2}$ .

Um die Formeln auf einen runden Draht vom Radius $\varrho$ zu beziehen, wird gesetzt:

$$\alpha = 2\pi\varrho\sqrt{2 n \sigma}$$

und ein Koeffizient $\gamma$ eingeführt, der nach Vergleich mit Beobachtungen von M. WIEN und BATTELLI und MAGRI[1] zu $\gamma = 0{,}6$ angenommen wird, so daß

$$\frac{w' - w}{w} = \gamma\{\varphi(\alpha) - 1\} \quad .$$

Für mehrfach gewundene Rollen werden die Formeln etwas komplizierter.

### b) Die Selbstinduktion.

Die Selbstinduktion für einen vom Strom der Schwingungszahl $n$ (in $2\pi$ Sekunden) durchflossenen Leiter wurde [s. Gleichung (13)] mit Hilfe der Größe $L_0$ definiert. $L_0$ sollte die Selbstinduktion sein, die einer unendlich dünnen Stromschicht auf der Oberfläche des Leiters zukommt, denn diesem Zustand nähert sich die Strömung mit wachsendem $n$. Definiert man die Selbstinduktion wieder (wie für stationären Strom) durch den Ausdruck der magnetischen Energie des Stromes:

$$T = \tfrac{1}{2} L i^2 \quad ,$$

so ist $L_0$ für sehr schnelle Stromwechsel die dem äußeren Feld entsprechende Selbstinduktion, zu der bei konstantem Strom noch das dem inneren Feld des Leiters zukommende $L_i$ gehört. Es wird also für konstanten Strom

$$L = L_0 + L_i \quad ,$$

der Wert von $L_0$ für einen geraden zylindrischen Leiter (der Länge $l$) muß sich ergeben, wenn man den Querschnitt des Leiters als eine Kreislinie ansieht, deren Radius gleich dem Drahtradius $\varrho$ ist. Er ist also nach früherem in diesem Fall:

$$L_0 = 2l\left(\log\frac{2l}{\varrho} - 1\right) \quad ,$$

wenn die Permeabilität überall gleich 1.

Hat der Leiter selbst die Permeabilität $\mu$, so ist $L_i = \mu\frac{l}{2}$, und man hat für stationären Strom die früher angegebene Formel

$$L = L_0 + L_i = 2l\left(\log\frac{2l}{\varrho} + \frac{\mu}{4} - 1\right) \quad .$$

[1] A. BATTELLI und L. MAGRI verglichen die JOULEsche Wärme, die von Wechselströmen durchflossene gerade, und zu Spulen gewundene Drähte im Kalorimeter ergaben. Phys. Zeitschr. **3**. 539. 1902; **4**. 181. 1903; Phil. Mag. (6) **5**. 1. 1903. — Ähnlich K. E. F. SCHMIDT, Acta Ac. Leop. **27**. 119. 1905. — S. auch A. BROCA und TURCHINI, Soc. franc. de Phys. Nr. 230. S. 5. 1905 u. Beibl. **29**. 1172.

Der Unterschied der Selbstinduktionskoeffizienten für Drähte aus magnetischem und unmagnetischem Material ist bei schnellen Schwingungen sehr viel kleiner als bei konstantem Strom, da das magnetische Feld im Innern der magnetischen Drähte, das im wesentlichen diesen Unterschied bewirkt, mit zunehmender Schwingungszahl immer schwächer wird.

Setzt man die imaginären Teile der beiden Seiten von Gleichung (13) einander gleich und beachtet (14), so wird:

$$(18)\quad \begin{cases} L' = L_0 + l\mu\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{48}\left(\frac{n l \mu}{w}\right)^2 + \frac{13}{8640}\left(\frac{n l \mu}{w}\right)^4 - \dots\right\} \quad \text{oder:} \\ L' = L_0 + l\mu\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{48}(2\varkappa^2)^2 + \dots\right\} \quad , \end{cases}$$

eine Formel, die auch von RAYLEIGH schon gefunden ist.

Ebenso wie für die Widerstände erhält man:

für großes $\varkappa$ $(\varkappa > 5)$ $$(19)\quad L' = L_0 + \frac{w\varkappa}{n} \quad ,$$

für kleines $\varkappa$ $(\varkappa < 0{,}65)$ $$(20)\quad L' = L_0 + \frac{w\varkappa^2}{n}\left(1 - \frac{\varkappa^4}{6}\right) \quad ,$$

und für $1{,}5 < \varkappa < 10$ kann die Näherungsformel dienen:

$$L' = L_0 + \frac{w}{n}(1{,}007\,\varkappa - 0{,}040) \quad .$$

Für Spulen von höchstens zehn Windungen, die durch Wechselströme von Kondensatorentladungen durchflossen werden, hat DRUDE[1] experimentell eine Korrektion bestimmt, die zu der STEFANschen Formel (S. 595) für eine weite Rolle hinzuzufügen ist. STRASSER[2] berechnete den Selbstinduktionskoeffizienten von Solenoiden und erhielt einen Ausdruck, der, experimentell mit langsamen Schwingungen geprüft, die Beobachtungen gut darstellte, aber auch die DRUDEschen Resultate wiedergab. Dabei darf die Ganghöhe des Solenoids nicht mehr als etwa das 0,6fache und die Länge nicht mehr als etwa das 5fache des Solenoidradius betragen.

Der Einfluß der Dämpfung der Schwingungen im Leiter vergrößert nach BARTON[3] die Selbstinduktion, so daß diese größer werden kann als bei konstantem Strom.

## 21. Eigenschwingungen eines Leiterkreises mit Kondensator.

In den früheren Abschnitten war von Wechselströmen die Rede, die dadurch zustande kommen, daß eine periodische elektromotorische Kraft in einem Stromkreis wirkte und Wechselströme (Schwingungen) ihrer eigenen Periode in der Leitung erzeugte. Aber auch ohne solche dauernd wirkende, äußere elektromotorische Kraft können unter gewissen Bedingungen elektrische Schwingungen in einer Leitung und ihrem Felde erregt werden. Das typische Beispiel für diese Vorgänge bildet die Entladung eines Kondensators, dessen beide Belegungen durch eine Leitung verbunden werden, und deren oszillatorischer Charakter schon von HELMHOLTZ[4] erkannt wurde.

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. 9. 600. 1902. — [2] B. STRASSER, Ann. d. Phys. 17. 763. 1905. — [3] E. H. BARTON, l. c. — [4] H. HELMHOLTZ, Erhaltung der Kraft, S. 44. Berlin 1847; Ges. Abhandl., S. 46.

## a) Theorie.

### α) Einfache Leitung.

Eine Berechnung der Entladung eines Kondensators ist zuerst von W. THOMSON[1], dann von KIRCHHOFF[2] angestellt worden; sie beruht auf der Voraussetzung, daß auch für die ungeschlossene Leitung das Induktionsgesetz in der früher benutzten Form für Leitungsströme gültig sei. Man denkt sich an Stelle des Verschiebungsstromes im Dielektrikum die Leitung in dem kleinen Zwischenraum zwischen den Kondensatorbelegungen beliebig geschlossen und wendet auf die geschlossene Leitung das Induktionsgesetz an. Das ist, wie die Versuche zeigen, erlaubt, wenn die Kondensatorbelegungen sehr nahe einander gegenüberstehen. Unter dieser Annahme gilt also die frühere Gleichung

$$i w + L \frac{di}{dt} = V \quad ,$$

wo $V$ die Potentialdifferenz zwischen den zwei Belegungen. Bedeutet $C$ die Kapazität des Kondensators, so ist

$$i = -C \frac{dV}{dt} \quad ,$$

und es wird durch Differentiation:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \tag{1}$$

und für $V$:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{dV}{dt} + \frac{V}{LC} = 0 \quad . \tag{1a}$$

Setzt man $i = e^{\eta t}$, so ist:

$$\eta^2 + \frac{w}{L}\eta + \frac{1}{LC} = 0 \ , \qquad \eta = -\frac{w}{2L} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad . \tag{2}$$

Die Art der Entladung hängt von dem Vorzeichen des Ausdrucks unter der Wurzel ab.

1. Es sei $\frac{w^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, dann sind die zwei Werte von $\eta$ reell und negativ: $-\eta_1$ und $-\eta_2$, also

$$i = a_1 e^{-\eta_1 t} + a_2 e^{-\eta_2 t} \quad , \tag{3}$$

d. h. der Strom $i$ und also auch $V$ nähern sich aperiodisch der Null. Dieser Fall tritt ein, wenn der Widerstand groß ist, so daß $w^2 > \frac{4L}{C}$ wird.

2. Es sei $w^2 < \frac{4L}{C}$. Setzt man

$$\delta = \frac{w}{2L} \ , \qquad n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \ , \qquad \iota = \sqrt{-1} \quad , \tag{4}$$

so ist

$$\eta_1 = -\delta + \iota n \ , \qquad \eta_2 = -\delta - \iota n \quad ,$$

also:

$$i = e^{-\delta t}(a_1 e^{\iota n t} + a_2 e^{-\iota n t}) = a e^{-\delta t} \sin(n t + \varphi) \quad , \tag{5}$$

---

[1] W. THOMSON, Phil. Mag. (4) **5**. 393. 1853. — [2] G. KIRCHHOFF, Pogg. Ann. **121**. 551. 1864: Ges. Abhandl., S. 168.

d. h. die Strömung geschieht in Schwingungen mit abnehmender Amplitude, und $\delta$ heißt der Dämpfungsfaktor. Die Schwingungsdauer $\tau$ ist:

(6) $$\tau = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{w^2 C}{4L}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2}} \quad ,$$

das logarithmische Dekrement:

(7) $$\gamma = \delta\tau \quad ,$$

also

(8) $$\frac{w}{2L} = \frac{\gamma}{\tau} \quad ,$$

(9) $$\frac{1}{4CL} = \frac{4\pi^2 + \gamma^2}{\tau^2} \quad .$$

Ist $\frac{w^2 C}{4L}$ klein gegen 1, d. h. die Dämpfung nicht sehr groß, so wird

(10) $$\tau = 2\pi\sqrt{LC} \qquad \text{oder} \qquad n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad .$$

Das ist die sogenannte THOMSONsche Formel.

Beginnt die Strömung zur Zeit $t = 0$, und ist der Kondensator auf die Potentialdifferenz $A$ geladen, so hat man die Grenzbedingungen für $t = 0$:

$$V = A \qquad \text{und} \qquad i = -C\frac{dV}{dt} = 0 \quad ,$$

also:

(11) $$i = a\,e^{-\delta t}\sin(n\,t) \quad .$$

Aus der Gleichung für $V$ folgt:

(12) $$V = A\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{n^2}} \cdot e^{-\delta t}\cos(n\,t - \chi) \quad ,$$

wo

(13) $$\operatorname{tg}\chi = \frac{\delta}{n}$$

und

(14) $$a = C n A\left(1 + \frac{\delta^2}{n^2}\right) \quad .$$

Ist die Dämpfung nicht sehr stark, so daß $\delta$ gegen $n$ klein, so wird einfacher:

(15) $$V = A\,e^{-\delta t}\cos n\,t \qquad \text{und} \qquad (16) \quad a = C n A = A\sqrt{\frac{C}{L}} \quad ,$$

d. h. die Stromamplitude wächst mit wachsender Kapazität und abnehmender Selbstinduktion.

Ist die Wärmeentwicklung in der Leitung der einzige Energieverbrauch, so muß sein:

$$w\int_0^\infty i^2\,dt = C\frac{V^2}{2} \quad .$$

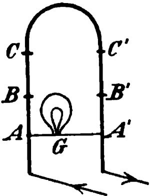
Beispiel: Es sei $C = \frac{1}{1000}$ Mikrofarad $= 10^{-18}$
$w = 1$ Ohm $= 10^9$
$L = 10^{-5}$ Henry $= 10^4$ ,

so wird $\frac{w^2 C}{4 L} = \frac{1}{40000}$, d. h. die Schwingungsdauer darf nach (10) berechnet werden, und sie wird

$$\tau = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ Sekunden.}$$

Wie das Beispiel und die Formel (10) zeigen, bieten Kondensatorentladungen ein Mittel, sehr viel schnellere Schwingungen zu erzeugen, als das durch Maschinen möglich ist; freilich sind diese Schwingungen gedämpft und um so stärker gedämpft, je schneller sie verlaufen, denn der Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{w}{2L}$ wächst mit zunehmendem $w$ und abnehmendem $L$. Bei schnelleren Schwingungen wird aber $w$ immer größer (die Strömung reduziert sich auf die Oberflächenschicht) und $L$ kleiner. Suchte man, um dies zu vermeiden, die Zunahme der Schwingungszahl $n$ durch Abnahme von $C$ zu erreichen, so würde die verfügbare Energie, die ja durch die Anfangsladung ($CV$) des Kondensators bestimmt ist, immer kleiner. Übrigens sind für so schnelle Schwingungen, daß ihre Wellenlängen nicht mehr groß gegen die Dimensionen der Strombahn sind, die Bedingungen des quasistationären Zustandes nicht mehr erfüllt und die obige Ableitung nicht mehr gültig. Wäre keine Dämpfung vorhanden, so fände eine vollständige Verwandlung der Energie $U$ der Kondensatorladung in magnetische Energie $T$ der Strömung in der Leitungsbahn und umgekehrt statt, da die Gesamtenergie $W$ des Systems:

$$W = U + T = \tfrac{1}{2} C V^2 + \tfrac{1}{2} L i^2 \quad .$$



Figur 261.

Im Momente, wo die Strömung ($T$) ein Maximum, ist die Kondensatorenergie $U = 0$, nach $\frac{\tau}{4}$ hat sich das Verhältnis umgekehrt usw. Die Dämpfung aber, die nicht nur durch JOULEsche Wärme bedingt ist (s. später), läßt die Schwingungen nach kurzer Zeit erlöschen.

Bei diesen schnellen Schwingungen, wenn sie nicht sehr stark gedämpt sind, verschwindet der OHMsche Widerstand gegen die Induktanz, und Strom- und Spannungsamplituden hängen nach Gleichung (16) zusammen. Es können deshalb in kurzen Leitungsbahnen schon große Werte der Strom- und Spannungsamplituden auftreten. Wäre in dem vorigen Beispiel der Kondensator nur auf 10000 Volt geladen, d. h. $A = 10^{12}$, so würde die Stromamplitude $a = 100$ Amp. werden. Umgekehrt werden bei solcher Stromstärke die Spannungsamplituden bis 10000 Volt ansteigen und in der kurzen Zeit einer halben Periode zwischen ihrem positiven und negativen Maximalwert hin und her schwanken, wodurch eine sehr große induzierende Wirkung auf benachbarte Leitungen ausgeübt wird.

Diese Verhältnisse veranschaulicht folgender Versuch: Schickt man durch den dicken Kupferdraht $ACC'A'$ (s. Figur 261), der in $AGA'$ eine Glühlampe als Nebenschluß enthält, Gleichstrom oder langsamen Wechselstrom, so bleibt die Glühlampe dunkel; entlädt man aber eine Leydner Flasche durch den Apparat, so glüht $G$ hell auf. Die Induktanz der Drahtschleife $ACC'A'$ setzte dem Durchgang des Stromes größeren Widerstand entgegen als der Kohlenfaden der Lampe, und die Spannung zwischen $A$ und $A'$ war groß genug, die Lampe zum Leuchten zu bringen. Wären zwischen $AA'$, $BB'$, $CC'$ GEISSLERsche Röhren eingeschaltet, so würden sie beim Durchgang des oszillierenden Flaschenstromes aufleuchten und zwar zwischen $AA'$ am hellsten und bei $CC'$ am wenigsten hell.

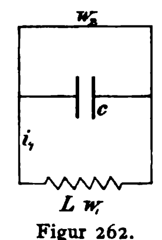
β) Mehrere parallel geschaltete Leitungen[1].

Schaltet man mehrere Leitungen einander parallel, durch die sich der Kondensator entladen kann, so bestehen für die einzelnen Umgänge, die den Kondensator enthalten, die Gleichungen:

$$i_1 w_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + \ldots + L_{1s} \frac{di_s}{dt} = V \quad ,$$

$$i_2 w_2 + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \ldots + L_{2s} \frac{di_s}{dt} = V \quad \text{usw.}$$

Dieser allgemeine Fall ist von GARBASSO[2] behandelt. Praktisch wichtig werden im allgemeinen nur die Fälle mit zwei oder drei Parallelzweigen sein, und die Lösung wird sich oft durch die Versuchsbedingungen sehr vereinfachen, so z. B. wenn, wie es MIZUNO[3] tut, nur zwei Parallelzweige (s. Figur 262) angenommen werden, deren einer (Zweig 2) noch frei von Selbstinduktion sein und den Widerstand $w_2$ haben soll. Widerstand und Selbstinduktion des anderen Zweiges seien $w_1$ und $L$, dann wird die Gleichung für Zweig 1:



Figur 262.

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{L}\left(w_1 + \frac{L}{w_2 C}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{LC\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2}\right)} = 0 \quad .$$

Behandelt man diese Gleichung genau wie die frühere für den einfachen Schließungskreis, so ergibt sich, daß die oszillatorische Entladung in 1 in die aperiodische übergeht, wenn $w_2$ unter einem bestimmten Wert liegt, und daß die Nebenschaltung von $w_2$ ein einfaches Mittel ist, die Periode der Schwingungen zu ändern, wobei freilich auch die Dämpfung vermehrt wird; ein Maximum der Schwingungszahl wird erreicht für

$$w_2 = \frac{L}{C w_1} \quad .$$

Kompliziertere Fälle, wo zwei resp. drei Zweige mit Selbstinduktion vorhanden und die Schwingungen gedämpft waren, sind u. a. von MANDELSTAM[4] und E. MARX[5] als Grundlagen für ihre Versuche (s. später) behandelt worden.

Ein hydrodynamisches Modell zur Demonstration der Entladung eines Kondensators auf zwei Wegen gibt GARBASSO in der zitierten Arbeit[6].

## b) Methoden zur Demonstration und Untersuchung der Kondensatorschwingungen; Prüfung der THOMSONschen Formel[7].

α) Daß die Entladung von Kondensatoren (Leydner Flaschen) oszillatorisch erfolgen könne, wurde experimentell zuerst sicher von W. FEDDERSEN[8] erwiesen, der die Entladungsfunken der Kondensatoren mit dem rotierenden Spiegel untersuchte und photographierte. Seine Beobachtungen, die schon Handbuch **4**, S. 43 beschrieben sind, waren ganz unabhängig von der Theorie angestellt und wurden erst von KIRCHHOFF (l. c.) mit dieser verglichen. Dabei ergab sich im ganzen Übereinstimmung, beträchtliche Abweichungen zeigten nur die berechneten und

[1] Literatur s. auch G. WIEDEMANN, Lehre v. d. Elektr. 2. Aufl. **4**. 312 usw. — [2] A. GARBASSO, Ann. d. Phys. **8**. 890. 1902; für einfachere Fälle: N. Cim. (4) **7**. 382. 1898; ibid. (5) **3**. 372. 1902; Phys. Zeitschr. **2**. 384. 1900. — [3] T. MIZUNO, Ann. d. Phys. **4**. 811. 1901 und Electrician **47**. 169. 1901; s. auch A. RUSSELL, Electrician, ibid. 228. — [4] L. MANDELSTAM, Ann. d. Phys. **8**. 123. 1902. — [5] E. MARX, Ann. d. Phys. **12**. 491. 1903. — [6] A. GARBASSO, N. Cim. (4) **6**. 15. 1897. — [7] Literatur s. auch G. WIEDEMANN, Lehre v. d. Elektr. 2. Aufl. 288 usw. u. 361 usw. — [8] W. FEDDERSEN, Pogg. Ann. **108**. 497. 1859; **112**. 451. 1861; **113**. 43. 1861; **116**. 132. 1862; **130**. 439. 1867.

beobachteten Werte der Schwingungsdauer. LORENZ[1] nahm die Versuche wieder auf, erhielt gute Übereinstimmung und bemerkte, daß KIRCHHOFFS Resultat sich aus den zu kleinen Werten der Kapazität der Flaschen erklärte, die dieser angenommen habe. FEDDERSENS Methode ist noch vielfach benutzt und verfeinert worden[2] und hat in den sorgfältigen Versuchen von BATTELLI und MAGRI[3] noch für $10^6$ Schwingungen in der Sekunde gute Werte und Bestätigung der THOMSONschen Formel geliefert. BATTELLI und MAGRI ließen den Funken, den sie photographierten, zwischen Kadmiumelektroden überspringen, da dann die einzelnen Fünkchen viel gleichmäßiger zwischen denselben Stellen der Elektroden sich bildeten als bei Benutzung von Platiniridium. Als Kondensator diente ein Luftkondensator. Die Selbstinduktion der Drahtspulen bestimmten sie nach der NERNSTschen Brückenmethode (s. S. 600), da die RAYLEIGHschen Formeln für Wechselströme nicht auf sie anwendbar waren. Der Widerstand des metallischen Teils der Leitung und der sogenannte „Funkenwiderstand" (s. später) wurden einzeln durch kalorimetrische Messung der in ihnen erzeugten Wärmemengen ermittelt, so ergab sich der mittlere Widerstand des Funkens von 1—5 mm Länge stets kleiner als 1 Ohm, viel langsamer wachsend als die Funkenlänge und für Kadmium und Platiniridiumelektroden annähernd gleich. Endlich stimmte die Summe der Wärmeenergie, die im Funken und im metallischen Teil der Leitung entwickelt wurde, genügend mit der Ladungsenergie des Kondensators überein, so daß die Genauigkeit der Einzelmessungen dadurch bestätigt wurde.

$\beta$) Die Schwingungskurve von Kondensatorladungen oder -Entladungen wird gefunden, indem man ihre einzelnen Elemente bestimmt. Dabei wird z. B. ein Kontakt der Kondensatorleitung durch den HELMHOLTZschen Pendelunterbrecher[4], den HIECKEschen Fallapparat oder dgl. in einem Moment geschlossen und nach sehr kurzer, genau bestimmbarer Zeit ein anderer Kontakt geöffnet; die Entfernung der zwei Kontakte voneinander ist in meßbarer Weise veränderlich, so daß die elektrische Schwingung in verschiedener Phase unterbrochen werden kann. Die dann im Kondensator vorhandene Ladung wird etwa mit einem Galvanometer bestimmt. Versuche nach dieser Methode gelangen für $10^4$ bis $10^5$ Schwingungen und gaben gute Bestätigung der Formel[5].

Ist der Widerstand der Leitung nicht klein, so tritt an Stelle der Formel (10) die Gleichung (6). TALLQVIST[6] hat den Einfluß zunehmenden Widerstandes bis zum Eintritt aperiodischer Entladung auf die Schwingungsdauer (von einigen Tausendstel Sekunden) untersucht und Bestätigung von (6) gefunden, wenn statt des einfachen Widerstandes $w$ ein Ausdruck benutzt wurde, der neben $w$ noch ein Korrektionsglied enthält.

$\gamma$) Um die Schwingungsdauer der Kondensatorentladung zu bestimmen, hat zuerst RUTHERFORD[7] folgende Methode vorgeschlagen, die dann von MANDELSTAM[8] ausgeführt wurde. Der Entladungsstrom gabelt sich durch eine Selbstinduktion ($w_1$ und $L$) und einen möglichst induktionslosen ($w_2$) (elektrolytischen) Widerstand; in jedem der Zweige befindet sich einer der beiden gleichen Drähte eines Dif-

[1] L. LORENZ, Wied. Ann. **7**. 161. 1879. — [2] S. u. a. J. MIESLER, Wien. Sitzber. **99** (IIa). 579. 1890. — J. TROWBRIDGE und W. C. SABINE, Phil. Mag. (5) **30**. 323. 1890. — J. TROWBRIDGE und W. DUANE, Phil. Mag. (5) **40**. 211. 1895. — O. LODGE und R. GLAZEBROOK, Cambr. Phil. Trans. **18**. 136. 1899. — [3] A. BATTELLI und L. MAGRI, Phil. Mag. (6) **5**. 1 u. 620. 1903 und Phys. Zeitschr. **3**. 539. 1902 u. **4**. 181. 1903. — [4] H. HELMHOLTZ, Verh. d. nat.-med. Vereins zu Heidelberg **5**. 27. 1869 und Ges. Abhandl. **1**. 531, wo Schwingungen in geöffneten Induktionsspulen untersucht wurden. — [5] R. HIECKE, Wien. Sitzber. **96** (IIa). 134. 1887. — TH. WULF, ibid. **105** (IIa). 667. 1896. — HJ. TALLQVIST, Wied. Ann. **60**. 248. 1897; Acta Soc. Sc. Fennicae **26**. Nr. 3. 1899; ibid. **28**. 694. 1902; Ann. d. Phys. **9**. 1083. 1902. — A. F. SUNDELL, Acta Soc. Sc. Fennicae **24**. Nr. 11. 1899. — U. SEILER, Wied. Ann. **61**. 30. 1897; Mitt. d. Phys. Ges. Zürich **3**. 12. 1902. — A. G. WEBSTER, Phys. Rev. **6**. 297. 1898. — [6] HJ. TALLQVIST, Ann. d. Phys. **9**. 1092. 1902. — [7] E. RUTHERFORD, Phil. Trans. **189** A. 1. 1897; s. auch F. BRAUN, Drahtlose Telegraphie, Veit & Comp. Leipzig 1901. 66 und E. MARX, Ber. d. sächs. Akad. 1901. 437. — [8] L. MANDELSTAM, Ann. d. Phys. **8**. 123. 1902.

ferentialluftthermometers. $w_2$ wird so abgeglichen, daß die JOULEsche Wärme in beiden Thermometerdrähten, also die Stromstärke in beiden Zweigen, gleich groß ist. Es ist dann die Impedanz des Zweiges 1 gleich dem OHMschen Widerstand von 2:

$$\sqrt{w_1^2 + (n L)^2} = w_2$$

und bei Vernachlässigung von $w_1$:

$$\tau = 2\pi \frac{L}{w_2} \quad .$$

Benutzt man statt der Selbstinduktion eine Kapazität $C$, so wird $\tau = 2\pi C w_2$. Die Versuche erstrecken sich auf Schwingungsdauern zwischen etwa $(3 \text{ bis } 90) \cdot 10^{-7}$ Sek.

$\delta$) Einfache Demonstration und Messung der Schwingungszahl für Kondensatorentladungen erlaubt die BRAUNsche Röhre, die zu diesem Zweck zuerst RICHARZ und ZIEGLER[1] benutzt haben, dabei kann die Wirkung des magnetischen oder elektrischen Feldes der Leitungsbahn verwandt werden[2].

$\varepsilon$) Unter der großen Zahl anderer Demonstrationsmethoden des oszillatorischen Charakters der Kondensatorentladungen seien noch angeführt[3]: PAALZOWS Benutzung von GEISSLERschen Röhren[4], durch die die Entladungen geleitet wurden. Bei Betrachtung der Röhren im rotierenden Spiegel erschien das negative Glimmlicht abwechselnd an beiden Elektroden; ohne Trennung durch den rotierenden Spiegel oder bei zu schnellen Schwingungen zeigt sich das negative Glimmlicht gleichzeitig an beiden Elektroden. Der Einfluß eines Magneten teilt die Lichtlinie in der Röhre in zwei, entsprechend den entgegengesetzten Ablenkungen der hin- und hergehenden Schwingungen.

VON OETTINGEN[5] untersuchte die Rückstände von Leydner Batterien, die sich bald als positiv bald als negativ erwiesen.

Auch mit dem Oszillographen läßt sich die Periode der Entladungsschwingung bestimmen[6].

Erzeugt man zwischen zwei Homogenkohlen einen Gleichstromflammenbogen und legt im Nebenschluß zu ihm eine Leitung, die einen Kondensator von großer Kapazität (1—5 Mikrofarad) und eine Selbstinduktion enthält, so lagern sich die Kondensatorschwingungen dieses Kreises über den Gleichstrom des Lichtbogens, verstärken und schwächen ihn abwechselnd; der Lichtbogen wird so bei passender Periode der Kondensatorschwingungen zu Tönen angeregt, deren Höhe sich nach der THOMSONschen Formel ergibt[7].

Andere Methoden zur Bestimmung sehr kurzer Perioden von Kondensatorentladungen, bei denen die Wellenlänge gemessen wird, s. später.

### c) Dämpfung der Schwingungen.

Hat man in einer Leitung gedämpfte Schwingungen, die nach dem Gesetz ablaufen:

$$a e^{-\delta t} \sin n t \quad ,$$

so lassen Instrumente, die das mittlere Quadrat dieser Größe angeben, den Dämpfungsfaktor $\delta$ bestimmen.[8] Als solche Apparate können die früher (S. 583 ff.)

[1] F. RICHARZ und W. ZIEGLER, Ann. d. Phys. **1**. 468. 1900; Phys. Zeitschr. **2**. 432. 1901. — [2] S. auch H. TH. SIMON und M. REICH, Phys. Zeitschr. **2**. 290. 1901. — J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **13**. 819. 1903. — H. SCHUH, Zeitschr. f. phys. und chem. Unterr. **17**. 6. 1904. — [3] S. auch L. ZEHNDER, Ann. d. Phys. **9**. 899. 1902. — [4] A. PAALZOW, Pogg. Ann. **112**. 567. 1861; **118**. 178. 1863. S. auch A. WINKELMANN, Zeitschr. f. Instrumentenk. **23**. 149. 1903. — [5] A. J. VON OETTINGEN, Pogg. Ann. **115**. 513. 1862; Jubelband 269. 1874; Wied. Ann. **2**. 305. 1877; Wied. Ann. **40**. 83. 1890. — [6] S. z. B. F. WITTMANN, Ann. d. Phy. **12**. 373 u. 803. 1903. — [7] W. DUDDELL, The Electrician **46**. 269. u. 310. 1900 und Phys. Zeitschr. **2**. 425 u. 440. 1901. S. auch H. TH. SIMON und M. REICH, Phys. Zeitschr. **3**. 278. 1902; **4**. 364. 1903. — H. TH. SIMON, ibid. **4**. 737. — S. MAISEL, Phys. Zeitschr. **6**. 38. 1905. — [8] S. J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen S. 430; s. auch F. BRAUN, Ann. d. Phys. **8**. 205. 1902.

beschriebenen Elektrometer, Hitzdrahtinstrumente, Dynamometer dienen. Natürlich darf ihr Einschalten oder Anlegen an den Stromkreis die Schwingungen selbst nicht merklich verändern; es sind also BJERKNESsche Elektrometer mit kleiner Kapazität oder Hitzdrahtinstrumente mit nicht zu großem Widerstand besonders geeignet. Gehen z. B. die Schwingungen einer Kondensatorentladung durch ein RIESSsches Luftthermometer, so ist dessen Angabe $s$ proportional $\int_0^\infty i^2\,dt$, d. h.:

$$s = \text{const} \int_0^\infty i^2\,dt = \text{const} \cdot a^2 \int_0^\infty e^{-2\delta t} \sin^2(nt)\,dt \quad ,$$

also

$$s = \text{const} \cdot a^2 \frac{1}{4\,\delta\left[1 + \left(\frac{\delta}{n}\right)\right]^2} \quad .$$

Ist die Schwingung nicht sehr stark gedämpft, so wird

$$s = \frac{\text{const}}{4\,\delta} \cdot a^2 \quad ,$$

und findet nicht nur eine, sondern $m$ Entladungen in der Sekunde statt, so wird

$$s' = m\frac{\text{const}}{4\,\delta} \cdot a^2 \quad ,$$

d. h. umgekehrt proportional dem Dämpfungsfaktor. Wäre die Dämpfung bekannt, so ließe sich umgekehrt die Stromamplitude $a$ bestimmen.

Bei langsameren Schwingungen, bei denen die Schwingungskurve (durch Oszillographen, BRAUNsche Röhre usw.) sichtbar gemacht oder photographiert werden kann, ist natürlich die Dämpfung durch Ausmessung dieser Kurve zu bestimmen, bei höheren Schwingungszahlen von der Ordnung $10^4$—$10^5$ und mehr werden diese Kurven zu lichtschwach. Trotzdem konnte ZENNECK[1] die BRAUNsche Röhre auch noch für Schwingungen der angeführten Größenordnung verwenden, indem er sich begnügte, die Kathodenstrahlen unter Einwirkung der zu untersuchenden Kondensatorschwingung in einer Geraden hin- und herpendeln zu lassen. An den Umkehrpunkten dieser Bewegung, wo die Strahlen am längsten den Schirm treffen, zeigt die Gerade helle Punkte, die die Amplitude jeder einzelnen Schwingung begrenzen und so die Abnahme der aufeinanderfolgenden Schwingungsamplituden sichtbar und meßbar machen.

$\alpha$) Kondensatorkreis ohne Funkenstrecke. — (Dämpfung durch JOULEsche Wärme.)

Die Abnahme der Schwingungen ist nach der THOMSONschen Theorie durch die Exponentialfunktion $e^{-\delta t}$ gegeben, wo $\delta = \frac{w}{2L}$. Eine Bestätigung dieser Theorie haben, nach dem Vorgange von SCHILLER[2], die Beobachtungen TALLQVISTS[3] für den Fall geliefert, daß keine Funkenstrecke in der Leitung vorhanden war und die Dämpfung also hauptsächlich durch Erzeugung JOULEscher Wärme bewirkt wurde. SCHILLER und TALLQVIST nahmen die Schwingungskurve mit dem HELMHOLTZschen Pendelunterbrecher auf, und TALLQVIST veränderte den Widerstand der Leitung von kleinen Werten bis zu solchen, bei denen die oszillierende Entladung in die aperiodische überging. Sollten die Versuche in

[1] J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **13**. 822. 1904; s. auch Ann. d. Phys. **7**. 801. 1902. — [2] N. SCHILLER, Pogg. Ann. **152**, 535. 1874; andere Literatur s. G. WIEDEMANN, Lehre v. d. Elektr. **4**. — [3] HJ. TALLQVIST, Ann. d. Phys. **9**. 1092. 1902; A. F. SUNDELL und HJ. TALLQVIST, ibid. **4**. 72. 1901.

Übereinstimmung mit der Theorie sein, so mußten beide Beobachter statt des Widerstandes $w$, wohl wegen dielektrischer Hysteresis im Kondensator und dem Isoliermaterial der Induktionsspule, eine andere Größe $w_0$ einführen:

$$w_0 = w + \frac{L}{C}\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right) ,$$

wo $w_1$ und $w_2$ als Leitungswiderstand des Dielektrikums im Kondensator und der isolierenden Schicht in der Induktionsspule bezeichnet werden. In diesem Falle ließ sich dann die Dämpfung als Exponentialfunktion darstellen.

### β) Kondensatorkreis mit Funkenstrecke. — (Dämpfung durch Energieverbrauch im Funken.)

Enthält der Schließungskreis eines Kondensators (wie meist) eine Funkenstrecke (oder ein verdünntes Gas), so wird in ihr eine beträchtliche Energiemenge verbraucht, also die Dämpfung sehr vergrößert. Die gesamte Dämpfung eines solchen Kreises hat ZENNECK nach der oben angegebenen Methode mit der BRAUNschen Röhre bestimmt und gefunden, daß die Amplitudenkurve nicht eine Exponentialkurve ist, sondern, in dem untersuchten Intervall, mehr einer Geraden gleicht, so daß von einem konstanten Dämpfungsfaktor eigentlich nicht mehr gesprochen werden kann. Wenn wir im folgenden doch bei der Darstellung der gedämpften Schwingungen durch Gleichung (5) usw. bleiben, auch wenn eine Funkenstrecke im Kreise ist, so geschieht es, weil die notwendige Korrektion nicht bekannt ist und weil es für viele Fälle nützlich und genügend ist, statt der wirklich vorhandenen Schwingung eine ideale mit einem mittleren Dekrement anzunehmen, deren Wirkung die der vorhandenen ersetzen kann.

Um den Energieverbrauch im Funken (Dämpfung durch den Funken) zu bestimmen, kann man die in ihm erzeugte Wärme $Q_f$ messen. Das hat W. KAUFMANN [1] mit einem Luftthermometer getan, während BATTELLI und MAGRI [2] wie MARESCA [3] (dieser für Entladung in verdünntem Gas) die Wärme kalorimetrisch maßen und LINDEMANN [4] auf bolometrische Weise die „Funkenenergie" $E_f$ als Differenz der gesamten Entladungsenergie und der JOULEschen Wärme in den Leitungsdrähten zu ermitteln suchte.

Es ergab sich, daß ein „Funkenwiderstand" im Sinne eines metallischen Widerstandes nicht existiert; die im Funken verbrauchte Engerie erwies sich als von sehr vielen Größen abhängig, und teilweise widersprechen sich die Beobachtungen.

Ist $w$ der Widerstand der metallischen Leitungsbahn, so fand KAUFMANN:

$$Q_f = A + \frac{B}{w} ,$$

wo $A$ und $B$ für dieselbe Funkenstrecke konstant sind und mit der Kapazität ($C$) etwa wie $\sqrt{C}$ wachsen; das ergibt sich nach ZENNECK [5] auch aus den Versuchen von BATTELLI und MAGRI, und die gleiche Darstellung von $Q_f$ findet MARESCA bei konstanter Kapazität, während LINDEMANN für $E_f$ einen anderen Ausdruck, aber auch Proportionalität mit $\sqrt{C}$ erhielt. Dann sind die untersuchten Größen noch vom Entladungspotential, dem Material der Elektroden der Funkenstrecke usw. abhängig. [6]

---

[1] W. KAUFMANN, Wied. Ann. **60**. 651. 1897, wo auch ältere Literatur. — [2] A. BATTELLI und MAGRI, l. c. — [3] A. MARESCA, Phys. Zeitschr. **4**. 9. 1903; s. auch W. KAUFMANN, Phys. Zeitschr. **4**. 161. 1903. — [4] R. LINDEMANN, Ann. d. Phys. **12**. 1012. 1904. — [5] J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen S. 379. — [6] S. auch P. BEAULARD, Journ. de Phys. (4) **1**. 498. 1902. — K. SIMONS, Ann. d. Phys. **13**. 1044. 1904. — A. SLABY, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 915. 1904.

Da die Dämpfung eines Kondensatorkreises für die drahtlose Telegraphie von Wichtigkeit ist, haben DRUDE[1] u. REMPP[2] das mittlere Dekrement $\gamma$ zu bestimmen gesucht.

Bezeichnet $w$ den Gesamtwiderstand des Kreises, der, da die metallischen Teile der Schließung kurz und dick waren, merklich gleich dem Funkenwiderstand ist, so wird also $\gamma$ definiert durch:

$$\gamma = \tau \frac{w}{2L} = \pi w \sqrt{\frac{C}{L}} \quad ,$$

$w$ wäre also der „Funkenwiderstand" für diesen idealen Fall.

Die Bestimmungen von $\gamma$ geschahen nach der Resonanzmethode von BJERKNES[3] (s. später) für Schwingungszahlen von der Ordnung $10^6$ bei REMPP und (meist) $10^7$ bei DRUDE. Übereinstimmend fanden sie: Es gibt einen Bereich der Funkenlänge $l$, für den $\gamma$ ein Minimum wird, auf dessen Wert (nach DRUDE) $\gamma$ für alle Schwingungskreise annähernd gebracht werden kann; nach REMPP tritt dies Minimum für kleine Kapazitäten ein, wenn $l = 3$ mm, für Kapazitäten zwischen 0,001—0,008 Mikrofarad, wenn $l = 6$ mm ist. — Mit wachsender Kapazität nimmt $\gamma$ ab, um von 0,003 Mikrofarad an wieder langsam anzusteigen (REMPP). — Bei abnehmendem $L$ findet DRUDE Abnahme von $\gamma$, während REMPP keine merkliche Änderung erhält. Der kleinste Wert von $\gamma$ war bei REMPP 0,06, bei DRUDE für Funkenlängen von 1—2 mm : $\gamma$ = 0,05—0,08. Um so kleine Dekremente zu erhalten, muß die Stromzuleitung möglichst nahe an den Funken (in die Elektroden) gelegt werden. — Der „Funkenwiderstand" lag bei DRUDES Versuchen zwischen ca. 0,2—2,1 Ohm. — Zum Teil ähnliche, teils auch widersprechende Resultate für die Dämpfung hatte schon HARRIET BROOKS[4] bei Benutzung einer von RUTHERFORD[5] angegebenen Methode erhalten. Dabei läßt man die gedämpften Kondensatorschwingungen auf ein maximal magnetisiertes Bündel von dünnem Stahldraht wirken. Ist die erste Halbschwingung so gerichtet, daß sie die Drähte in demselben Sinn magnetisieren würde, in dem sie schon magnetisiert sind, so hat sie keinen Einfluß, und die entmagnetisierende Wirkung beginnt mit der zweiten schon schwächeren Halbschwingung. Läßt man die Kondensatorschwingung in entgegengesetzter Richtung verlaufen, so beginnt die Entmagnetisierung mit der ersten und stärksten Halbschwingung; aus dem Unterschied dieser Entmagnetisierungen, der mit einem Magnetometer bestimmt wird, läßt sich auf die Dämpfung schließen.

### $\gamma$) Andere Ursachen der Dämpfung.

Neben der Wärmeerzeugung in den Leitern und im Funken bestehen noch andere Ursachen des Energieverbrauchs bei den Kondensatorschwingungen:

Dämpfung durch Ausstrahlung von elektromagnetischer Energie. Sie wird später behandelt werden und ist um so kleiner, je vollständiger der Stromkreis geschlossen ist. Bei den hier behandelten Fällen spielt sie eine geringe Rolle, wie die zitierten Versuche von BATTELLI und MAGRI zeigen, bei denen die Ladungsenergie des Kondensators sich fast völlig in der gemessenen Wärmeenergie der gesamten Leitung wiederfand.

Dämpfung durch dielektrische Hysteresis kann eintreten, wenn der Kondensator ein festes oder flüssiges Dielektrikum enthält oder, wie die Versuche von SCHILLER und TALLQVIST zu zeigen scheinen, in dem Isolationsmaterial einer Spule (s. Handbuch **4**, S. 159.

Dämpfung durch magnetische Hysteresis, wenn die Spulen Eisenkerne enthalten, kann einen großen Energieverlust bewirken.

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **15**. 709. 1904. — [2] G. REMPP, Ann. d. Phys. **17**. 627. 1905. — [3] V. BJERKNES, Wied. Ann. **55**. 121. 1895. — [4] H. BROOKS, Canada Trans. (2) **5**. 13. 1899 und Beibl. **25**. 148. 1901; Phil. Mag. (6) **2**. 92. 1901. — [5] E. RUTHERFORD, Phil. Trans. **189**. 1. 1897, wo auch einige Beobachtungen über die Zunahme der Dämpfung mit der Funkenlänge und mit der Kapazität angeführt sind.

## 22. Einwirkung zweier Schwingungen aufeinander. (Gekoppelte Schwingungskreise.)

### a) Ungedämpfte Schwingungen.

Befindet sich in der Nähe eines Kondensatorkreises, in dem Schwingungen erzeugt werden, ein anderer ähnlicher Leiterkreis, so können in diesem durch Induktion Schwingungen angeregt werden, die wieder auf die Schwingungen des ersten zurückwirken. Man sagt, die beiden Kreise sind magnetisch oder induktiv gekoppelt, wenn sie keinen Teil ihrer Bahn gemeinsam haben und ein Teil der magnetischen Induktionslinien des einen Kreises auch Strombahnen des anderen mit umschlingen. Je mehr solcher Induktionslinien beide Kreise umschlingen, um so enger ist die Koppelung. Haben die beiden Strombahnen einen gemeinsamen Teil, so sagt man, sie seien galvanisch oder direkt gekoppelt. Die Theorie der gegenseitigen Beeinflussung zweier Schwingungen ist in allgemeiner Weise von RAYLEIGH[1] in seiner Lehre vom Schall gegeben; für zwei elektromagnetische Schwingungskreise, wie sie besonders im Tesla-Transformator auftreten, haben sie gleichzeitig OBERBECK[2], DOMALIP und KOLÁČEK[3], Fürst B. GALITZIN[4], J. VON GEITLER[5] und andere entwickelt. Dann ist die Theorie umfassender und mit eingehender Berücksichtigung der Dämpfung von M. WIEN[6] ausgeführt worden, der sie auch auf die drahtlose Telegraphie anwandte; in neuester Zeit hat P. DRUDE[7] zahlreiche Folgerungen aus ihr für die Konstruktion der Tesla-Apparate und Zwecke der drahtlosen Telegraphie gezogen.

Nimmt man die Strömung in den beiden Kreisen als quasistationär an, was für Tesla-Schwingungen erlaubt ist, während es für HERTZsche Schwingungen eigentlich nicht gestattet ist, so lauten nach früherem die Ausgangsgleichungen für die beiden Schwingungskreise, die wir als primäre (1) und sekundäre (2) bezeichnen und die für schnelle Schwingungen oft Oszillator und Resonator genannt werden[8]:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + w_1 i_1 = V_1$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} + w_2 i_2 = V_2 \quad .$$

Die Größen $L$, $w$ und $V$ haben dabei die alten Bedeutungen. Geht man etwas näher auf die Abweichung der Strömung vom quasistationären Zustand ein, so wird die Bedeutung dieser Koeffizienten modifiziert, und es wäre nicht, wie wir annehmen, $L_{12} = L_{21}$ (s. DRUDE l. c.).

$V_1$ und $V_2$ sind die Potentialdifferenzen an den beiden Belegungen des primären und sekundären Kondensators, oder besteht die Leitung (2) nur aus einer Spule mit Endklemmen, so ist $V_2$ die Potentialdifferenz an diesen Klemmen. Da

$$i_1 = -C_1 \frac{dV_1}{dt}, \qquad i_2 = -C_2 \frac{dV_2}{dt} \quad ,$$

so werden die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} L_1 C_1 \dfrac{d^2 V_1}{dt^2} + L_{12} C_2 \dfrac{d^2 V_2}{dt^2} + w_1 C_1 \dfrac{dV_1}{dt} + V_1 = 0 \\[2ex] L_2 C_2 \dfrac{d^2 V_2}{dt^2} + L_{12} C_1 \dfrac{d^2 V_1}{dt^2} + w_2 C_2 \dfrac{dV_2}{dt} + V_2 = 0 \end{cases}$$

[1] Lord RAYLEIGH, Theorie des Schalles, übersetzt von NEESEN, S. 93—173. Braunschw. 1886. — [2] A. OBERBECK, Wied. Ann. **55**. 623. 1895. — [3] K. DOMALIP u. F. KOLÁČEK, Verhandl. d. böhm. Ak. Prag, Jahrg. 4, Nr. 18, S. 1. 1895 und Wied. Ann. **57**. 730. 1896. — [4] Fürst B. GALITZIN, Petersb. Ber. Mai u. Juni 1895. — [5] J. v. GEITLER, Wiener Ber. **104** (IIa). 169 u. 994. 1895. S. auch W. P. BOYNTON, Phys. Rev. **7**. 35. 1898. — [6] M. WIEN, Wied. Ann. **61**. 151. 1897 und Ann. d. Phys. **8**. 686. 1902. — [7] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **13**. 512. 1904. — [8] Vgl. für das Folgende: M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität **1**. 296 usw.

oder

$$(2)\quad \begin{cases} L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + w_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} = 0 \\ L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + w_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C_2} = 0 \quad . \end{cases}$$

Sind $n_1$ resp. $n_2$ die Schwingungszahlen (in $2\pi$ Sekunden) und $\delta_1$ resp. $\delta_2$ die Dämpfungsfaktoren des primären resp. sekundären Kreises und setzt man

$$\frac{L_{12} C_2}{L_1 C_1} = p_1 \;, \qquad \frac{L_{12} C_1}{L_2 C_2} = p_2 \quad ,$$

so lauten die Gleichungen (1):

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2\,\delta_1 \frac{dV_1}{dt} + (n_1^2 + \delta_1^2) V_1 + p_1 \frac{d^2 V_2}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2\,\delta_2 \frac{dV_2}{dt} + (n_2^2 + \delta_2^2) V_2 + p_2 \frac{d^2 V_1}{dt^2} = 0 \quad . \end{cases}$$

Setzt man:

$$V_1 = A_1 e^{\beta t} \;, \qquad V_2 = A_2 e^{\beta t} \quad ,$$

wo

$$\beta = -\delta + \iota n \quad ,$$

so erhält man

$$(4)\quad \begin{cases} A_1(\beta^2 + 2\,\delta_1 \beta + n_1^2 + \delta_1^2) + A_2 p_1 \beta^2 = 0 \\ A_2(\beta^2 + 2\,\delta_2 \beta + n_2^2 + \delta_2^2) + A_1 p_2 \beta^2 = 0 \quad , \end{cases}$$

woraus durch Elimination von $\frac{A_1}{A_2}$ für $\beta$ die Gleichung vierten Grades resultiert:

$$(5)\quad \begin{cases} \beta^4(1 - p_1 p_2) + \beta^3(2\,\delta_1 + 2\,\delta_2) + \beta^2(n_1^2 + \delta_1^2 + n_2^2 + \delta_2^2 + 4\,\delta_1 \delta_2) \\ \qquad + \beta[2\,\delta_1(n_2^2 + \delta_2^2) + 2\,\delta_2(n_1^2 + \delta_1^2)] + (n_1^2 + \delta_1^2)(n_2^2 + \delta_2^2) = 0 \quad . \end{cases}$$

Die Schwingungen seien ungedämpft, d. h. vernachlässigen wir die Widerstände $w$, so wird (5) einfacher:

$$(6)\quad n^4(1 - p_1 p_2) - n^2(n_1^2 + n_2^2) + n_1^2 n_2^2 = 0 \quad .$$

Hier die Schwingungsdauer $\tau$ nach den Beziehungen $\tau = \frac{2\pi}{n}$ usw. eingeführt und gesetzt:

$$(7)\quad p_1 p_2 = k^2 = \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \quad ,$$

so wird:

$$(8)\quad \tau^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\tau_1^2 + \tau_2^2 \pm \sqrt{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 + 4\,k^2 \tau_1^2 \tau_2^2}\right\} \quad .$$

Das gekoppelte System besitzt also zwei Eigenschwingungen, deren Schwingungsdauern $\tau$ und $\tau'$ aus (8) sich ergeben. Wäre $k^2 = 0$, so würden dies die Eigenschwingungen $\tau_1$ und $\tau_2$ der Einzelkreise sein, je größer $k^2$ wird, um so mehr weichen $\tau$ und $\tau'$ von $\tau_1$ und $\tau_2$ ab; es heißt deshalb $k$ die Koppelung (Koppelungskoeffizient) des Systems.

Es sei $\tau_1 > \tau_2$ und $\tau > \tau'$, dann folgt aus (8):

$$(9)\quad \tau > \tau_1 > \tau_2 > \tau' \quad ,$$

d. h. die langsame resp. schnellere Schwingung der beiden Kreise ist durch die Koppelung noch langsamer resp. schneller geworden. Es gilt aber stets die Beziehung:

$$\tau^2 + \tau'^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 \quad ,$$

Wären die Eigenschwingungen der beiden Kreise ursprünglich gleich gewesen, d. h. hätte zwischen ihnen Resonanz bestanden:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_0 \quad \text{oder} \quad n_1 = n_2 = n_0 \quad ,$$

so würde die Koppelung dem System doch zwei voneinander verschiedene Eigenschwingungen erteilen; es wäre:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1+k} \qquad \tau' = \tau_0 \sqrt{1-k} \quad , \tag{10}$$

und daraus ergibt sich die Koppelung

$$k = \frac{\tau^2 - \tau'^2}{\tau^2 + \tau'^2} \quad , \tag{11}$$

die man also durch Messung der $\tau$ oder leichter der zu ihnen gehörigen Wellenlängen experimentell bestimmen kann.

Für den Fall der Resonanz $\tau_1 = \tau_2$ erhält man bei ungedämpften Schwingungen aus den Gleichungen (3), in denen die Glieder mit $\delta$ wegzulassen sind, die allgemeinen Lösungen, wenn man beachtet, daß

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

und also

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{L_2}{L_1} \quad ,$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= A\cos(nt+\varphi) + A'\cos(n't+\varphi') \\ V_2 &= \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \{A\cos(nt+\varphi) + A'\cos(n't+\varphi')\} \quad . \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Wäre der Primärkreis zur Zeit $t = 0$ auf die Potentialdifferenz $V_0$ geladen und begänne in diesem Moment seine Entladung, so wären die Anfangsbedingungen:

$$V_1 = V_0 \ , \qquad V_2 = 0 \ , \qquad i_1 = -C_1 \frac{dV_1}{dt} = 0 \ , \qquad i_2 = -C_2 \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad ,$$

also wird:

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= \frac{V_0}{2}(\cos nt + \cos n't) = V_0 \cos\left(\frac{n'+n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n'-n}{2}t\right) \\ V_2 &= \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}(\cos nt - \cos n't) = V_0 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sin\left(\frac{n'+n}{2}t\right)\sin\left(\frac{n'-n}{2}t\right) \quad . \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Die im sekundären Kreis auftretende Potentialdifferenz ist also um so größer, je größer die Kapazität des Primärkreises und je kleiner die des Sekundärkreises gemacht wird. Das gilt auch für gedämpfte Schwingungen und ist ein wesentliches Konstruktionsgesetz für einen gut wirkenden Tesla-Transformator.

Ist die Koppelung nicht stark, d. h. $k^2$ klein, so kann nach (10) geschrieben werden:

$$\tau = \tau_0(1 + \tfrac{1}{2}k) \ , \qquad \tau' = \tau_0(1 - \tfrac{1}{2}k) \quad ,$$

d. h. die gleiche gemeinsame Schwingung $\tau_0$ der beiden Kreise wird durch die Koppelung in zwei Schwingungen des Systems umgewandelt, von denen die eine ebensoviel höher als die andere tiefer ist wie die Ausgangsschwingung.

Führt man die Schwingungszahlen statt der Schwingungsdauer ein, so ergibt sich:

$$n' + n = 2n_0 \ , \qquad n' - n = k n_0 \quad , \tag{14}$$

also lassen sich (13) schreiben:

$$(15)\quad \begin{cases} V_1 = V_0 \cos\left(\frac{n'-n}{2} t\right) \cos(n_0 t) \\ V_2 = V_0 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sin\left(\frac{n'-n}{2} t\right) \sin(n_0 t) \quad . \end{cases}$$

Das sind Schwingungen der Schwingungszahl $n_0$ mit periodisch veränderlichen Amplituden, d. h. das System zeigt Schwebungen. Während zur Zeit $t = 0$: $V_2 = 0$ und $V_1 = 0$ ist, wird nach einer halben Schwebung, d. h. zur Zeit $t = \frac{\pi}{n'-n}$: $V_1 = 0$ und die Amplitude der Schwingung 2 wird $V_0 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$; nach einer ganzen Schwebung ist wieder die Schwingung 1 im negativen Maximum, dagegen $V_2 = 0$ usw.

Die Energie des ersten Kreises $\frac{1}{2} C_1 V_0^2$ findet sich nach einer halben Schwebung im zweiten Kreise wieder usw., es findet fortwährend eine Art Reflexion der Energie von einem Kreise zu dem andern statt.

Wird die Koppelung sehr schwach, so daß $\sin\left(\frac{n'-n}{2} t\right)$ mit dem Bogen vertauscht werden darf und sehr nahe $n' = n$ ist, so geht (15) über in:

$$V_1 = V_0 \cos(n_0 t)$$

$$V_2 = V_0 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{k n_0}{2} t \sin(n_0 t) = V_0 \frac{n_0}{2} \frac{L_{12}}{L_1} t \sin(n_0 t) \quad .$$

### b) Gedämpfte Schwingungen.

Berücksichtigt man die Dämpfung, so ist die Gleichung (5) vom vierten Grad für $\beta$ aufzulösen, man erhält als allgemeine Lösung:

$$(16)\quad \begin{cases} V_1 = A_1 e^{-\delta t} \sin(n t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta' t} \sin(n' t + \varphi_1') \\ V_2 = A_2 e^{-\delta t} \sin(n t + \varphi_2) + B_2 e^{-\delta' t} \sin(n' t + \varphi_2') \quad , \end{cases}$$

d. h. es entstehen, auch wenn vor der Koppelung Resonanz bestand, zwei Schwingungen von verschiedener Periode und Dämpfung.

Die Größen $n$, $n'$, $\delta$, $\delta'$, $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{B_2}{B_1}$ hängen dabei von den Konstanten der ungekoppelten Kreise: $n_1$, $n_2$, $\delta_1$, $\delta_2$, $p_1$ und $p_2$ ab, während $A_1$, $B_1$ und die $\varphi$ Größen auch noch durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind.

Bei schwacher Koppelung findet DRUDE[1], ähnlich wie schon BJERKNES[2], wenn Resonanz ($n_0$) vorhanden war:

$$(17)\quad \frac{(V_2)_{\max}}{(V_1)_0} = \frac{L_{12} C_1}{L_2 C_2} \frac{n_0}{8 \delta_2} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2}} ,$$

wo $(V_1)_0$ die Potentialdifferenz bedeutet, zu der der primäre Kondensator geladen war.

Für die Dämpfung ergibt sich, wenn $k n_0 < \delta_1 - \delta_2$ nach M. WIEN[3] genähert:

$$n' = n = n_0 \quad ,$$

$$(18)\quad \delta' = \delta_1 + \frac{k^2 n_0^2}{4(\delta_2 - \delta_1)} \; ; \qquad (19)\quad \delta = \delta_2 - \frac{k^2 n_0^2}{4(\delta_2 - \delta_1)} \quad .$$

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **13**. 524. 1904. — [2] V. BJERKNES, Wied. Ann. **55**. 134. 1895. — [3] M. WIEN, Ann. d. Phys. **8**. 695. 1902 u. **14**. 626. 1904.

Ist $kn_0$ klein und $\delta_2$ groß gegen $\delta_1$, so wird eine Schwingung mit der kleinen Dämpfung $\delta' = \delta_1$ übrig bleiben. Man kann also die Dämpfung durch diese Anordnung sehr herabdrücken.

Dabei wird, was schon hier bemerkt sei, bei Verhältnissen, wie sie die drahtlose Telegraphie benutzt, der Quotient (17) kleiner als 1 sein.

Bei starker Koppelung findet sich der Maximalwert von $V_2$, wenn Resonanz ($n_0$) eintritt, und zwar ist:

$$\frac{(V_2)_{\max}}{(V_1)_0} = \tfrac{1}{4} f \cdot \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \cdot \sqrt{\frac{L_{21}}{L_{12}}} \quad (20)$$ [1].

$f$ bedeutet einen Zahlenfaktor, der stets kleiner als 1 ist und der von dem mittleren logarithmischen Dekrement $\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ und der Koppelung der beiden Schwingungen abhängt. Diese Abhängigkeit stellt DRUDE[1] durch Kurven dar. $\sqrt{\frac{L_{21}}{L_{12}}}$ ist ein Koeffizient, der etwas größer als 1 ist. Für die Dämpfung wird, wenn $kn_0 > \delta_1 - \delta_2$,

$$\delta' = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \left(\frac{n'}{n_0}\right)^2 \quad (21), \qquad \delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \quad (22)$$ [2],

sind die beiden neuen Schwingungen $n$ und $n'$ nur wenig voneinander verschieden, so wird

$$\delta' = \delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} .$$

Ferner ist:

$$\left\{\begin{aligned} n' &= n_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{k^2 n_0^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2} \\ n &= n_0 - \tfrac{1}{2}\sqrt{k^2 n_0^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2} \end{aligned}\right. \quad (23)$$ [3],

also entstehen zwei Schwingungen mit verschiedenen Schwingungszahlen und etwa gleicher Dämpfung und, bei passend groß gewähltem $\frac{C_1}{C_2}$, großem Wert von $\frac{(V_2)_{\max}}{(V_1)_0}$.

## 23. Untersuchungsmethoden und Anwendung der Resonanzerscheinungen.

Wachsen die Schwingungszahlen eines Kreises beträchtlich über $10^5$ hinaus, so reichen die bisher benutzten Hilfsmittel (BRAUNsche Röhre usw.) der Untersuchung nicht mehr aus, man bestimmt dann die Konstanten einer Schwingung durch ihre Einwirkung auf eine zweite Schwingung (oder umgekehrt), deren Eigenschaften (Schwingungszahl, Dämpfung usw.) man kennt und in meßbarer Weise variieren kann. Man ändert den variabeln Schwingungskreis (seine Kapazität oder Selbstinduktion) so lange ab, bis er in Resonanz mit dem zu untersuchenden Kreis ist, dabei darf natürlich der letztere durch Rückwirkung nur möglichst wenig verändert werden, d. h. die Koppelung zwischen den beiden Schwingungen muß sehr lose sein.

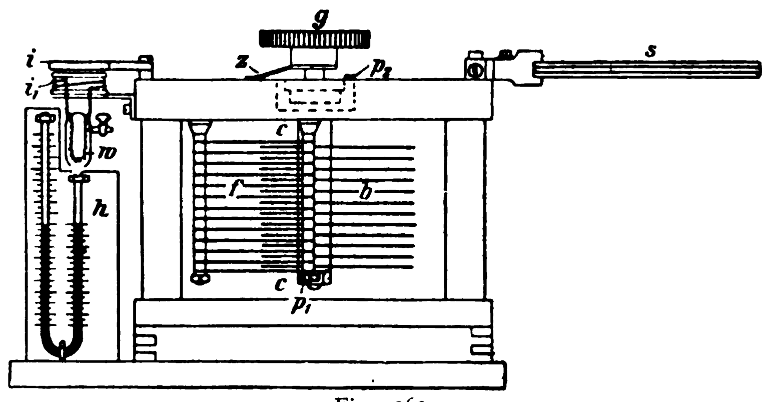
Diese Methode ist nach dem Vorgang von HERTZ[4] zuerst von V. BJERKNES[5] ausgebildet und zur Untersuchung sehr schneller (HERTZscher) Schwingungen benutzt worden und hat im Gebiet dieser kurzen Wellen eine sehr ausgedehnte

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **13**. 541. 1904 u. **16**. 116. 1905. S. auch A. OBERBECK, l. c., S. 629. — [2] J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwing., S. 662, nach P. DRUDE, l. c., S. 545. — [3] M. WIEN, Ann. d. Phys. **8**. 695. — [4] H. HERTZ, Wied. Ann. **31**. 421. 1887; Ges. Werke **2**. 32. u. a. O. — [5] V. BJERKNES, Wied. Ann. **44**. 74. 1891 und **55**. 121. 1895.

Verwendung gefunden[1]. Für größere Wellen hat die „Gesellschaft für drahtlose Telegraphie“ eigene Wellenmesser konstruiert[2], bei denen die Strombahn, der variable Kondensator und das den Effekt messende Hitzdrahtinstrument in einen Apparat zusammen gebaut sind.

Diesen Wellenmesser[3] zeigt in vertikalem Durchschnitt die Figur 263*). Dabei ist $S$ die Strombahn, ein Drahtkreis, der mit anderen vertauscht werden kann. Mit ihm verbunden ist der Kondensator, dessen bewegliche Belegungen $b$ durch die in dem drehbaren Knopf $g$ endigende Achse mehr oder weniger tief zwischen die festen Belegungen $f$ eingeschoben werden können. Der Zeiger $z$, der die Drehung mitmacht, spielt über einer Teilung, auf der man die bei einer bestimmten Strombahn der Zeigerstellung zugehörige Schwingungszahl ablesen kann. An den Kondensator ist eine kleine Spule ($i$) angeschlossen, die auf eine andere, mit dem Hitzdraht $w$ verbundene ($i_1$) induziert. $w$ bildet einen Teil des Luftthermometers $h$; $i$ und $i_1$ können in verschiedene Abstände voneinander gebracht werden.




Figur 263.

Bei Messungen mit diesem und allen zu ähnlichen Zwecken dienenden Anordnungen müssen der Schwingungskreis (1), dessen Periode bestimmt werden soll und der Kreis (2), hier $S$, auf den er induziert, sehr lose gekoppelt sein, damit die Rückwirkung von 2 auf 1 in erster Näherung vernachlässigt werden darf.

Natürlich kann man, statt die Kapazität variabel zu machen, auch die Selbstinduktion von (2) verändern, wie das später vor allem bei Benutzung des Paralleldrahtsystems geschehen wird; dann sind Gestalt und Dimensionen des Kreises 2 möglichst so zu wählen, daß seine Schwingungsdauer usw. berechnet werden kann, sonst muß der Einfluß der vorgenommenen Veränderungen durch Vorversuche bestimmt werden.

Die Einwirkung der beiden Kreise aufeinander kann durch Beobachtung der Integraleffekte des Stromes oder der Spannung in einem von ihnen geschehen.

Den Stromeffekt $\overline{I} = \int_0^\infty i^2\,dt$ beobachtet man mit Bolometer oder Thermoelement, das mit einem dritten kleinen Stromkreis (kleine Spule) verbunden ist, auf den 2 in sehr loser Koppelung wirkt; weniger genau, aber sehr bequem wird ein Hitzdrahtthermometer statt der angeführten Instrumente benutzt. Oft kann man vorteilhaft das Thermoelement in den zu untersuchenden Kreis direkt einführen.

[1] Für Wellen von etwa 1 m bis ca. 445 m und mehr s. P. DRUDE, Ann. d. Phys. **9**. 611. 1902. — [2] J. DÖNITZ, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 920 u. 1024. 1903. — S. auch J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwing. 606 u. 611. — J. E. IVES, Electrician **53**. 705. 1904. — [3] G. EICHHORN, Die drahtlose Telegraphie, Leipzig 1904. 79.

*) Figur entnommen aus J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwing.



Der Spannungseffekt $\bar{V} = \int_0^\infty V^2 dt$ wird durch ein BJERKNESsches Elektrometer (s. früher) von möglichst kleiner Kapazität gemessen. Die Zuleitungen zu den Quadranten können, je nach Umständen, direkt oder passend isoliert an zwei Punkte (Kondensatorplatten) des Kreises angelegt werden.

Auf solchen Integraleffekten beruhen auch die (weniger ausgebildeten) Methoden, bei denen ponderomotorische Wirkungen der elektromagnetischen Kräfte benutzt werden.

Verschieden hiervon ist die Beobachtung der Maximalamplitude der Spannung $(V_2)_{max}$, die z. B. durch die Schlagweite mit Funkenmikrometer, durch Leuchten von Vakuumröhren oder, bei nicht zu schnellen Schwingungen, durch die Ablenkung in der BRAUNschen Röhre gemessen werden kann.

## a) Die Resonanzkurve.

Ändert man systematisch die Schwingungszahl $n_2$ des Kreises 2 und beobachtet dabei eine der genannten Größen, die man als Ordinaten zu den Abszissen $n_2$ aufträgt, so erhält man die Resonanzkurve, die jedesmal ein sehr starkes Ansteigen zeigt, wenn die beiden Kreise sich der Resonanz nähern. Die Schwingungszahl des variablen Kreises, die dem Maximum der Resonanzkurve entspricht, ist dann nahe (nicht genau) auch die Schwingungszahl der untersuchten Schwingung. Durch Diskussion der Kurven lassen sich ferner die Dämpfungen der beiden Kreise u. a. bestimmen.

BJERKNES setzt die Gleichung für die Schwingung im Kreis 2, bei Vernachlässigung der Rückwirkung von 2 auf 1:

$$\frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dV_2}{dt} + (n_2^2 + \delta_2^2) V_2 = A e^{-\delta_1 t} \sin(n_1 t + \varphi_1) \quad . \tag{1}$$

Die rechte Seite stellt die erregende Schwingung 1 dar. Bezeichnet $(V_1)_0$ die Potentialamplitude dieser Schwingung, so ergibt sich aus der Betrachtung des Resonanzfalles $n_0$ im Vergleich mit früherem

$$A = (V_1)_0 \, n_0^2 \frac{L_{12}}{L_1} \quad . \tag{2}$$

Die Anfangsbedingungen sind für $t = 0$: $V_2 = 0$ und $\frac{dV_2}{dt} = 0$.
Die allgemeine Lösung:

$$V_2 = A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(n_1 t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2 t} \sin(n_2 t + \varphi_2) \, . \tag{3}$$

Der erste Teil stellt die erzwungene, der zweite die Eigenschwingung dar. Aus $i_2 = -C_2 \frac{dV_2}{dt}$ findet sich für den Resonanzfall der Stromeffekt:

$$\bar{I} = \left\{ \frac{(V_1)_0}{4} \frac{L_{12}}{L_1 L_2} \right\}^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \, \frac{1}{[(n_1 - n_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2]} \quad , \tag{4}$$

d. h. $\bar{I}$ wird bei Resonanz (wo $\bar{I} = \bar{I}_0$ und $n_1 = n_2 = n_0$) um so größer, je kleiner die Dämpfung der beiden Schwingungen ist.

Nimmt man als Ordinaten der Resonanzkurve $\frac{\bar{I}}{\bar{I}_0} = y$, d. h. macht man im Resonanzpunkt die Ordinate gleich 1, wählt man als Abszissen $\frac{n_2}{n_0} = x$ und setzt $z = 1 - x$, führt man endlich statt der Dämpfungsfaktoren $\delta$ die Dekremente $\gamma$ ein nach der Beziehung:

$$\gamma = \frac{2\pi\delta}{n} \quad ,$$

so findet sich in der Nähe des Resonanzpunktes

$$y = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi}\right)^2}} \,, \tag{5}$$

d. h. der Unterschied der Ordinate im Resonanzpunkt ($y = 1$) und einer benachbarten, zu einem bestimmten $z$ gehörenden Ordinate ($y$), die Schärfe der Resonanz hängt nur von $\gamma_1 + \gamma_2$ ab; die Resonanzkurve ist in der Nähe des Resonanzpunktes um so flacher, je größer $\gamma_1 + \gamma_2$ ist.

Den Wert von $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ findet man aus der Kurve (s. Figur 264)

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \pi z \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \,. \tag{6}$$ [1]

Dabei ist $B$ der Resonanzpunkt; $z = AD$; $y = DC$; $AB = 1$.

Ändert man die Schwingungszahl des Kreises 2 nur durch Änderung der Kapazität des Kondensators, so ist

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \pi\left(1 - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\right)\sqrt{\frac{y}{1 - y}} \,.$$

Figur 264.

Man kann die beiden Dekremente einzeln bestimmen, wenn man neben Formel (6) noch Gleichung (4) benutzt, nach der bei Resonanz:

$$\bar{I}_0 = \text{const} \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2)} \quad \text{oder} \quad \bar{I}_0 \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2) = \text{const} \,.$$

Ändert man das Dekrement $\gamma_2$ auf $\gamma_2 + \eta$, indem man in den Kreis, ohne die Induktionskoeffizienten zu ändern, einen Widerstand $w$ einschaltet, für den [nach Gleichung (8), Abschnitt 21]:

$$\eta = \frac{\pi w}{L_2 n_0}$$

ist, so hat man die Gleichung

$$\bar{I}_0 \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2) = \bar{I}_0' \gamma_1 (\gamma_2 + \eta)(\gamma_1 + \gamma_2 + \eta) \,,$$

wo $\bar{I}_0$ und $\bar{I}_0'$ die Ausschläge im Resonanzpunkte bezeichnen, also:

$$\gamma_2 = \frac{\bar{I}_0' \eta (\gamma_1 + \gamma_2 + \eta)}{(\bar{I}_0 - \bar{I}_0')(\gamma_1 + \gamma_2) - \bar{I}_0' \eta} \,, \tag{7}$$

da $\gamma_1 + \gamma_2$ bekannt, so ergibt sich auch $\gamma_1$.

Eine andere Methode, um die Dekremente einzeln zu bestimmen, würde eine Kombination der Beobachtungen des Integraleffektes, die $\gamma_1 + \gamma_2$ liefert, und der Maximalamplitude sein, die durch Formel (17), Abschnitt 21 gegeben ist[2] und welche eine andere Kombination von $\gamma_1$ und $\gamma_2$ enthält.

Die Resonanzkurve des Spannungseffektes, die etwas von der des Stromeffektes abweicht, kann hier nicht näher besprochen werden.

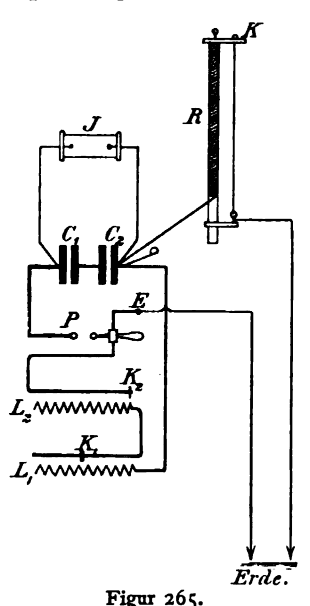
Der Nachweis, daß ein Kreis $B$, der mit einem Kreise $A$ gekoppelt ist, zwei Schwingungen enthält, und daß deren Schwingungszahlen usw. der Theorie entsprechen, läßt sich durch Aufnahme der Resonanzkurve von $B$ durch einen variablen Kreis $C$ experimentell führen.

---

[1] S. z. B. J. Zenneck, Elektromagnet. Schwing. 595 und G. Rempp, Ann. d. Phys. 17. 636. 1905. — [2] P. Drude, Ann. d. Phys. 13. 533. 1904.

### b) Demonstration der Resonanzerscheinungen.

Anordnungen, um die Resonanzerscheinungen zu demonstrieren, haben u. a. LODGE[1] und SHAW[2] angegeben; SEIBT[3] hat ein Instrumentarium zusammengestellt, das von ERNECKE in Berlin ausgeführt wird, mit dem bequem sehr zahlreiche instruktive Versuche über Abstimmung eines Kondensatorkreises auf die Schwingungen von Spulen, über Teslaeffekte, über drahtlose Telegraphie usw. ausgeführt werden können. Der Schwingungskreis (s. Figur 265) wird gebildet aus den zwei Kondensatoren $C_1$ und $C_2$, den beiden Spulen mit den Selbstinduktionen $L_1$ und $L_2$, deren eingeschaltete Länge durch die Schleifkontakte (Rollen) $K_1$ und $K_2$ variiert werden können, und die Funkenstrecke $P$, deren Elektrode $E$ zur Erde abgeleitet ist. Schließt man an die eine Belegung von $C_2$ die Spule $R$ an, so entstehen in $R$ durch Reflexion am oberen Ende stehende Schwingungen, die bei Resonanz mit der Schwingung des Kondensatorkreises sehr intensiv werden, so daß eine leuchtende Büschelentladung aus $K$ hervorschießt. Die Grundschwingung der Spule entspricht $\frac{1}{4}$ der Wellenlänge, bei $K$ ist ein Maximum der Potentialschwankung, ein Spannungsbauch; leitet man $K$ zur Erde ab, so ist in $K$ ein Knoten der Spannung, die Grundschwingung entspricht $\frac{1}{2}\lambda$ usw. Spannt man parallel zur Spule einen Draht, der unten geerdet ist, so entsteht im ersten Fall ein helles Lichtband am Spannungsbauch zwischen den oberen Enden von Draht und Spule, im zweiten Fall aber, wo der Bauch in der Mitte der Spule liegt, erscheint das obere und untere Ende dunkel und die Mitte des Streifens zwischen Spule und Draht leuchtet hell.



Figur 265.

Über die Größe der Spannungsamplitude geben Funken, die man aus der Spule ziehen kann, oder das Leuchten einer senkrecht zur Spule gehaltenen und an ihr entlang bewegten Geißlerröhre einen Überblick.

Auch als Modell für die Schaltung der drahtlosen Telegraphie kann die Anordnung dienen, dabei entspricht die Spule $R$ dem Senderdraht (s. später).

### c) Anwendung der Resonanz zur Bestimmung der Selbstinduktion.

Enthält von zwei in Resonanz ($n_0$) befindlichen, schwach gedämpften Kreisen der eine (2) eine meßbar veränderliche Kapazität $C_2$, so können nach der Beziehung:

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

d. h.

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

kleine Veränderungen von $L_2$ und dadurch kleine Selbstinduktionen bestimmt werden, indem man sie durch Änderung von $C_2$ kompensiert und wieder Resonanz herstellt.

Für sehr schnelle Schwingungen läßt sich der Selbstinduktionskoeffizient mit Hilfe der Resonanz z. B. in folgender Weise nach TAYLOR[4] bestimmen:

---

[1] O. LODGE, Nature. **41**. 368. 1890. — [2] PH. E. SHAW, Proc. Phys. Soc. **17**. 312. 1901; Beibl. **25**. 147. 1901. — [3] G. SEIBT, Diss. Rostock 1902 und Elektrotechn. Zeitschr. 315, 341, 365, 386, 409. 1902; Phys. Zeitschr. **4**. 99 u. 817. 1902. — [4] A. H. TAYLOR, Phys. Rev. **19**. 273. 1904; **20**. 151.

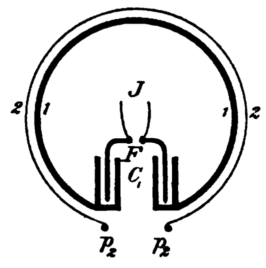
Ein Primärkreis wirkt auf einen sekundären, in dem sich (außer einer Kapazität) die zu bestimmende Selbstinduktion $L$ und zwei Paralleldrähte befinden, auf denen ein Querbügel (Brücke) $b$ verschoben werden kann. Durch passende Stellung von $b$ wird Resonanz hergestellt, dann $L$ entfernt und nun $b$ so weit verschoben, bis wieder Resonanz mit der Primärschwingung erreicht ist. Dies neu eingeschaltete Stück der Paralleldrähte hat dann die Selbstinduktion $L$, und da man den Wert von $L$ für die Paralleldrähte berechnen kann, ist die Aufgabe gelöst.

Auch auf Beobachtung der Resonanz beruht das Kymometer von FLEMING[1], das hier nur erwähnt sei. Es gestattet, kleine Selbstinduktionen und Kapazitäten zu messen und die Wellenlänge elektrischer, nicht zu schneller Schwingungen zu bestimmen.

Zahlreiche andere Anwendungen der Resonanzerscheinungen finden sich später bei den HERTZschen Schwingungen.

### d) Der Tesla-Transformator.

Eine Anwendung der Sätze über gekoppelte Schwingungskreise kann man auf die Versuche machen, die man meist mit dem Namen von TESLA[2] bezeichnet, da er zuerst die teilweise sehr glänzenden Erscheinungen erzeugte. Der Effekt beruht auf der Koppelung zweier Schwingungskreise, die in Resonanz gebracht sind und bei denen die Potentialamplitude des sekundären Kreises um so größer wird, je größer man $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ macht. Der Einfluß der Dämpfung ist dann im wesentlichen nach (20) S. 622 durch den Faktor $f$ gegeben.



Figur 266.

Sieht man von der Dämpfung ab, so ist die Bedingung der Resonanz:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 \quad .$$

Macht man $C_1$ möglichst groß und $C_2$ möglichst klein, so muß für die gegebene Schwingungszahl $L_1$ klein und $L_2$ groß sein, d. h. eine oder wenige Windungen dicken (2—4 mm) Drahtes bilden den primären Kreis, während der sekundäre aus dünnem ($\frac{1}{2}$ mm) Draht besteht[3].

Schematisch ist die Konstruktion in Figur 266 dargestellt. $C_1$ ist der primäre Kondensator: Zwei Leydener Flaschen, deren innere Belegungen zu der Funkenstrecke $F$ führen, die mit dem Induktorium $J$ verbunden ist. Die äußeren Belegungen der Flaschen sind durch die Primärleitung 1 verbunden (in der Figur nur ein stark ausgezogener Kreis); die Sekundärleitung 2 (in der Figur schwach gezeichneter Kreis) befindet sich mit ihren einzelnen Windungen möglichst nahe der primären, aber sehr gut gegen diese isoliert, ebenso müssen die Windungen von 2 gut gegeneinander isoliert sein, deshalb werden oft beide Schwingungskreise in ein Gefäß mit Öl eingesenkt. $p_2$ sind die Pole dieses sogenannten Tesla-Transformators und die Kapazität $C_2$ ist die der Spule und der an $p_2$ etwa angeschlossenen Apparate.

Der Funken springt vorteilhaft zwischen Zinkelektroden[4] über, und die Flaschen werden oft zweckmäßiger durch einen Wechselstromtransformator als durch das Induktorium geladen.

Endigen die Pole frei in der Luft, so sieht man bei Gang des Apparates helle Büschel von ihnen ausstrahlen.

---

[1] J. A. FLEMING, Proc. Roy. Soc. **74**. 488; Phil. Mag. (6) **9**. 758. 1905. — [2] DE FODOR, Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl von v. N. TESLA. Wien, Hartleben, 1894; N. TESLA, Untersuchungen über Mehrphasenströme usw., deutsch von MASER. Halle, Leipzig 1895. — [3] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **9**. 610. 1902. — [4] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **52**. 475. 1894.

Läßt man zwei parallele Drähte von den Polen $p_2$ ausgehen, so findet Büschelentladung zwischen ihnen statt, und bei kleinerem Abstand der Drähte scheinen diese durch ein helles Band, das aus der Ferne sichtbar ist, miteinander verbunden.

Leitet man einen Pol zur Erde ab und endigt der andere in einem isolierten Leiter (Kugel), so leuchten in dem dadurch gebildeten Feld GEISSLERsche Röhren noch in beträchtlicher Entfernung von dem Leiter auf. Berührt man diesen mit einer Hand und hält in der anderen eine GEISSLERsche Röhre, so leuchtet sie hell; dasselbe geschieht, wenn eine ganze Reihe von Personen zwischen den Leiter und die Röhre eingeschaltet wird.

Trotz der sehr hohen Spannungen, die an den Polen $p_2$ zustande kommen, sind doch die physiologischen Wirkungen gering und ein Berühren der Pole, wie oben angegeben, ungefährlich, wohl hauptsächlich weil die Ströme nur sehr kurze Zeit andauern und die Stromstärken nur klein sind. Denn bildet man nach den Gleichungen (13) Abschnitt 22 aus $i_1 = -C_1 \frac{dV_1}{dt}$ usw. die Ausdrücke für $i_1$ und $i_2$, so findet sich, daß

$$\frac{(i_2)_{\max}}{(i_1)_0} \quad \text{proportional} \quad \sqrt{\frac{C_2}{C_1}},$$

d. h. klein ist.

Über die beste Konstruktion von Tesla-Transformatoren hat P. DRUDE[1] ausführliche Untersuchungen gemacht. Er findet, daß der größte Wert für die Potentialdifferenz an den Polen $p_2$ proportional der dritten Wurzel aus $C_1/g$ ist, wenn $g$ die Ganghöhe der Sekundärspule bezeichnet, und gibt Formeln[2] für die Dimensionen der Spule bei vorgeschriebenem $C_1$ und $g$.

Bei vielen Versuchen ist es besser, den primären Kreis die Sekundärspule umschließen zu lassen, statt der in der Figur 266 angedeuteten umgekehrten Anordnung.

## 24. Ausbreitung elektromagnetischer Schwingungen.

Die bisher betrachteten Schwingungen wurden in fast geschlossenen Leitungen erzeugt, dadurch war eine Wirkung nach außen nur in sehr beschränktem Maße möglich, und zwar nur dann, wenn in der Nähe der Schwingungskreise andere Leitungen sich befanden und dadurch eine merkliche magnetische Koppelung stattfand. Die Dämpfung war dabei wesentlich durch die Wärmeentwicklung in dem Kreise bewirkt und Strahlung fast nicht vorhanden. Eine freie Ausbreitung elektromagnetischer Wirkungen in den Raum wird demnach auf diese Weise nicht zu beobachten sein; das gelang erst H. HERTZ[3], der zuerst schnellere Schwingungen, als die bisher meist von uns vorausgesetzten, in ungeschlossenen (metallisch nicht geschlossenen) geradlinigen Bahnen erzeugte und in einer Reihe genialer Untersuchungen ihre wesentlichen Eigenschaften erforschte.

Durch die Wirkung solcher „ungeschlossener" Ströme aufeinander, die ja im Sinne der MAXWELLschen Theorie stets durch das Dielektrikum geschlossen sind, wurde von HERTZ auch die Unzulänglichkeit der älteren Theorien und die Überlegenheit der MAXWELLschen Theorie dargetan.

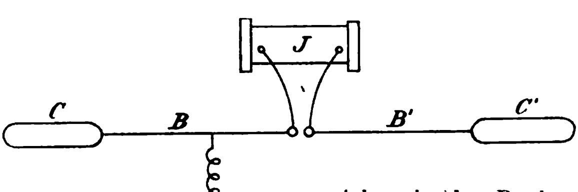
Ihrer Wichtigkeit wegen möge ein kurzer Überblick über HERTZ' hierher gehörige Untersuchungen folgen.

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **9**. 293 u. 590. 1902; **16**. 116. 1905. — [2] L. c. **16**. 128. — [3] H. HERTZ, Wied. Ann. **31**. 421. 1887 und folgende Bände, die letzte Arbeit ibid. **42**. 407. 1891; Wiederabdruck aller Abhandlungen in „Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft", Ges. Werke **2**, Leipzig, A. Barth, 1894; mit Einleitung und Anmerkungen und einem teilweisen Abdruck einer Abhandlung von W. VON BEZOLD: Pogg. Ann. **140**. 541. 1870, in der sich schon Beobachtungen über elektrische Schwingungen finden.

## a) Die Hertzschen Versuche.

1. Der induzierende Strom wurde von den sekundären Polen eines Induktoriums $J$ (s. Figur 267) zwei in einer Geraden liegenden dicken Kupferdrähten $B$ und $B'$ zugeführt, die an ihren gegenüberliegenden Enden kleine Kugeln trugen, zwischen denen der Funke übersprang, während die abgewandten Enden der Drähte mit größeren Konduktoren $C$, $C'$ verbunden waren. Verband man einen Punkt dieser primären Schwingungsbahn, des Oszillators, leitend mit einem Punkt einer fast geschlossenen metallischen Leitung, etwa eines Drahtrechtecks, dessen eine Seite eine kleine, zwischen zwei Kugeln liegende Lücke $M$ zeigte, so sprangen bei $M$ im allgemeinen Funken über. Der Abstand der Kugeln $M$ konnte geändert werden und so fand sich, daß die Funken um so größer waren, je näher der Zuleitungspunkt $e$ bei $M$ sich befand; lag $e$ dagegen symmetrisch zu $M$, so daß gleiche Drahtstrecken $e$ von jeder der Kugeln trennten, so zeigten sich keine Funken. Die von $e$ ausgehende Welle kam in gleicher Phase bei beiden Kugeln an und erzeugte dort keine merkliche Spannungsdifferenz.



Figur 267.

Auch wenn die Zuleitung aufgehoben wurde, ging in $M$ noch ein Funkenstrom über, ebenso in einer Leitung, die nicht wie das Rechteck $abcd$ fast ganz geschlossen war, sondern eine gerade Bahn von ähnlichen Dimensionen wie der Oszillator darstellte und bis zu 3 m Entfernung von diesem verschoben werden durfte.

Die wahrscheinliche Ansicht, es seien Schwingungen im Oszillator, die die Wirkungen im sekundären Kreis hervorbrachten, wurde dadurch bewiesen, daß es gelang, Resonanzerscheinungen zwischen beiden Kreisen zu erzeugen. Zu dem Zwecke waren statt der Endkonduktoren $C$, $C'$ zwei Zinkkugeln, die stets die Strombahn im elektrischen Sinne begrenzten, von 30 cm Durchmesser verschiebbar auf dem geradlinigen Kupferdraht (2,6 m lang, 5 mm dick) $BB'$ angebracht. Der sekundäre, vom primären isolierte Kreis war ein Quadrat von 75 cm Seitenlänge (Kupferdraht, 2 mm dick). Durch Anhängen von Kupferdraht in der Nähe der Kugeln $M$ konnte die Kapazität so geändert werden, daß ein Maximum der Funkenlänge bei $M$ eintrat. Wurde neue Kapazität bei $M$ zugefügt, so sank die Funkenlänge, konnte aber auf die alte Größe gebracht werden, indem man die primäre Schwingung durch Verschieben der Zinkkugeln nach außen verlängerte. Das konnte in demselben Sinn nochmals wiederholt werden.

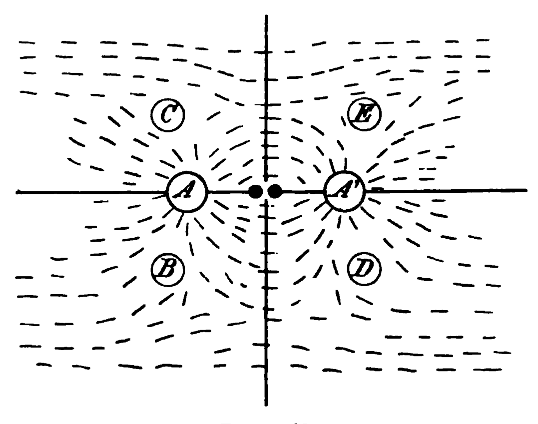
Ebenso konnte, wenn man den primären Kreis unverändert ließ, durch Veränderung der Selbstinduktion des sekundären ein Maximum der Funkenlänge, d. h. Resonanz, hergestellt werden, indem man zwischen die Drähte $ab$ und $cd$ solche von anderer Länge einschaltete. Es zeigte sich ein ausgesprochenes Maximum der Funkenlänge für eine Länge des Rechtecks von 1,8 m. Trug Hertz diese Drahtlängen als Abszissen, die Funkenlängen als Ordinaten auf, so erhielt er eine gut ausgebildete Resonanzkurve, der sekundäre, meist abgestimmte Leiter heißt deshalb oft „Resonator“.

Endlich gelang es nachzuweisen, daß in $e$ ein Schwingungsknoten, in $M$ ein Schwingungsbauch sich befand, da eine Berührung, ja selbst Ableitung zur Erde in $e$ den Funkenstrom, bei $M$ fast nicht änderte, während Berührung jeder anderen Stelle des Rechtecks die Funken erlöschen ließ.

Zum Nachweis der Schwingungen benutzte HERTZ fast immer die Funken an den Enden des Resonators, deren Länge als Maß für die Intensität der Schwingungen (Potentialschwankungen) dienen konnte und deren Auftreten, wenn auch nur mit der Lupe zu beobachten, ein sicherer Beweis für die Existenz der schnellen Schwingungen war. Die Schwingungsdauer bestimmte HERTZ nach der THOMSONschen Formel und erhielt etwa $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Sekunden, seine Anordnung gab also etwa 100mal schnellere Schwingungen, als sie FEDDERSEN beobachtet hatte.

2. **Das elektromagnetische Feld eines Oszillators** konnte HERTZ in verhältnismäßig großen Entfernungen (über 10 m) mit Hilfe eines passenden Resonators ausmessen. Der primäre Leiter bestand wieder aus zwei Zinkkugeln von 30 cm Durchmesser, deren Zentren, 1 m voneinander entfernt, durch einen 5 mm dicken Kupferdraht verbunden waren, in dessen Mitte sich eine $^3/_4$ cm lange Funkenstrecke befand.

Als sekundärer Leiter diente ein Drahtkreis von 35 cm Radius mit einer kurzen, durch eine Mikrometerschraube regulierbaren Funkenstrecke. Dieser Kreis ist an einer Achse befestigt, welche durch seinen Mittelpunkt geht und auf seiner Ebene senkrecht steht, so daß er um dieselbe in seiner Ebene gedreht werden kann.



Figur 268.

Der Kreis wurde dann in die verschiedensten Lagen gegen den primären Leiter gebracht, die eben beschriebene Drehung wurde ausgeführt und dabei das Verhalten des sekundären Funkens, besonders das Verschwinden desselben beobachtet.

Aus der großen Mannigfaltigkeit der Beobachtungsresultate wollen wir hier nur den wichtigsten Fall besprechen.

Der Mittelpunkt des sekundären Kreises liege in der Horizontalebene des primären Leiters. Die Ebene des ersteren sei vertikal. Befindet sich dann die Unterbrechungsstelle in der Horizontalebene, so gehen keine Funken über. Dieselben erreichen ein Maximum, wenn die Funkenstrecke am höchsten oder tiefsten liegt. Wird dann der Kreis um seinen vertikalen Durchmesser gedreht, so findet man eine Stellung, für welche die Funken verschwinden, eine dazu senkrechte, bei welcher die Funkenstrecke am größten ist. Im ersten Fall liegt die wirksame elektrische Kraft senkrecht zur Kreisebene, im zweiten fällt sie in dieselbe. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, die Richtung der elektrischen Kraft in dem ganzen, den Erreger umgebenden Raum festzustellen.

Die Figur 268 gibt ein Bild der beobachteten Kraftrichtungen. In der Nähe des Erregers $AA'$ stimmen dieselben nahezu mit den elektrostatischen Kraftlinien überein, wobei man sich $A$ und $A'$ durch gleiche Elektrizitätsmengen von entgegengesetztem Vorzeichen geladen zu denken hätte.

In größeren Entfernungen von dem Erreger sind die Richtungen demselben parallel.

Endlich gibt es zwei Gebiete, in denen die Kraftrichtung schwer zu bestimmen ist. Es sind dies zwei Ringe, deren Durchschnitte mit der Ebene der Zeichnung $B$ und $C$ sowie in $D$ und $E$ liegen.

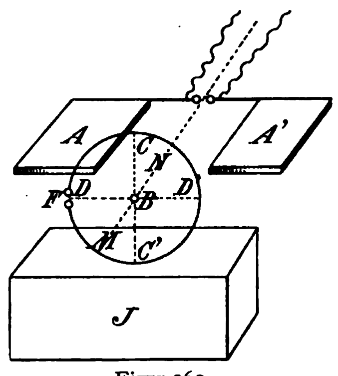
Die Hauptresultate dieser Versuche hat HERTZ[1] selbst aus der MAXWELLschen Theorie abgeleitet.

---

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **36**. 1. 1888.

3. Eine der Grundannahmen der MAXWELLschen Theorie, daß die Verschiebungsströme in den Dielektrizis dieselbe Wirkung wie die Leitungsströme der Leiter ausüben, die schon von RÖNTGEN[1] experimentell wahrscheinlich gemacht worden war, gelang es HERTZ durch Versuche zu beweisen.[2]

Der oben erwähnte kreisförmige Resonator war auf einen Oszillator abgestimmt, der aus den quadratischen Messingplatten $A$, $A'$ von 40 cm Seitenlänge bestand, die ein 70 cm langer Kupferdraht mit Funkenstrecke verband. Der Resonator konnte in seiner Ebene um die Achse $MN$ (s. Figur 269) gedreht werden und stand dem primären Leiter vertikal gegenüber; lag die Funkenstrecke $F$ in der Horizontalebene von $AA'$, so erschienen keine Funken. Bei einer Drehung um die Achse, durch die $F$ in eine höhere oder tiefere Lage gebracht wird, treten wieder Funken auf und erreichen ein Maximum an den Enden des vertikalen Durchmessers $CC'$. Funken entstehen aber auch in der neutralen Lage $D$, wenn dem Oszillator z. B. von oben ein Leiter genähert wird; dann werden in dem genäherten Leiter Schwingungen erregt, die auf den Resonator wirken und in ihm auch in der Lage $D$ wieder Funken erzeugen. Will man sie wieder zum Verschwinden bringen, so muß $F$ von $D$ nach $C$ hin gedreht werden. Entstehen nun in einem Dielektrikum, wie es die MAXWELLsche Theorie verlangt, durch Einwirkung eines Wechselfeldes Verschiebungsströme, die gleiche Wirkungen wie Leitungsströme ausüben, so muß die Annäherung von Isolatoren an den Oszillator ähnliche Erscheinungen, wie die eben beschriebenen, hervorrufen. Das fand sich denn durchaus bestätigt[3].



Figur 269.

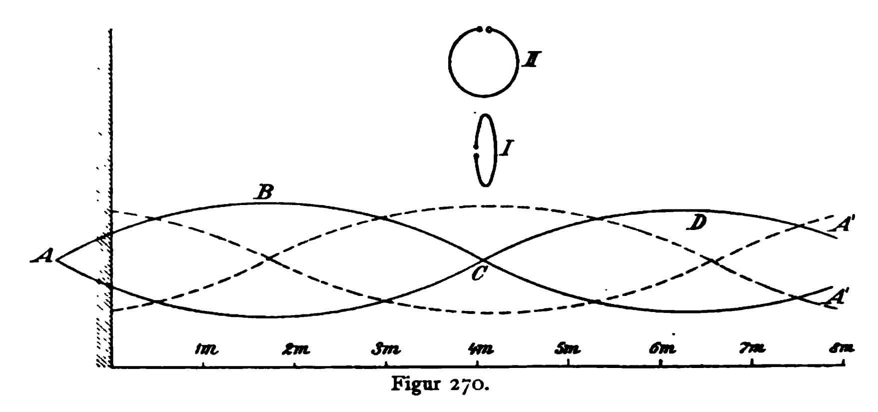
Als größere Blöcke (zunächst von Papier, dann von Asphalt) in $J$ unmittelbar unter dem sekundären Kreis aufgestellt wurden, erschienen die Funken bei $D$ und verschwanden oder erreichten wenigstens ein ausgesprochenes Maximum, wenn $F$ um 23° nach $C'$ hingedreht wurde. Analoge Wirkungen übten Pech, Holz, Sandstein, Schwefel, Paraffin, Petroleum aus.

4. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Luftraum suchte HERTZ[4] zu bestimmen, indem er die von seinem Oszillator ausgehenden Schwingungen interferieren ließ mit von demselben Oszillator in einer Drahtleitung erregten stehenden Wellen. Er kam zu dem Resultat, daß die Wellen in Luft sich mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen, die aber verschieden sei von ihrer Geschwindigkeit längs des Drahtes. Sein Resultat ist wohl durch die zu kleinen Dimensionen des Versuchsraumes und andere nicht leicht erkennbare Nebenumstände gefälscht. Später haben SARASIN und DE LA RIVE unter günstigeren äußeren Verhältnissen die Gleichheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft und längs Drähten nachgewiesen.

5. Die Bildung von stehenden Wellen im Luftraum durch Interferenz der direkt vom Erreger ausgesandten Schwingungen mit den an einer Metallwand reflektierten Wellen wies HERTZ bald darauf[5] mit seinem Resonator nach, wodurch zum erstenmal experimentelle Beweise für die Gleichartigkeit der elektromag-

[1] W. C. RÖNTGEN, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. 195; s. Artikel Elektrodynamik: „Versuche über die magnetischen Wirkungen der Verschiebungsströme". — [2] H. HERTZ, Sitzber. d. Berl. Akad. 10. Nov. 1887; Wied. Ann. **34**. 273. 1888. — [3] Dieselben Erscheinungen und somit weitere direkte Bestätigung dieser Grundannahme hat A. RIGHI bei den mannigfachen Versuchen erhalten, die er anstellte, um die von einem Dielektrikum erzeugten „sekundären" Wellen und ihren Einfluß auf Resonatoren zu untersuchen. S. z. B. A. RIGHI, Die Optik elektr. Schwingungen S. 56 usw. — [4] H. HERTZ, Sitzber. d. Berl. Akad. 2. Febr. 1888 und Wied. Ann. **34**. 551. 1888. — [5] H. HERTZ, Wied. Ann. **34**. 610. 1888.

netischen und optischen Erscheinungen geliefert wurden und so die MAXWELLsche Lichttheorie eine sichere Stütze erhielt. — Die eine Steinwand eines 15 m langen, 8,5 m breiten und 6 m hohen Raumes, die schon viele Gasröhren enthielt, wurde durch ein an ihr befestigtes, zur Erde abgeleitetes Zinkblech von 4 m Höhe und 2 m Breite zur reflektierenden, leitenden Fläche gemacht. In 13 m Entfernung stand ihr der Oszillator gegenüber (zwei quadratische Messingplatten von 40 cm Seitenlänge, die durch einen 60 cm langen Kupferdraht mit Funkenstrecke verbunden waren): seine Achse war vertikal. Zwischen Erreger und Wand wurde der kreisförmige Resonator von 35 cm Radius gebracht. In größerer Entfernung sind die elektrischen Induktionslinien des Erregers diesem merklich parallel, d. h. also vertikal; die magnetischen Induktionslinien, die in der Nähe den Erreger kreisförmig umschlingen, verlaufen in weiterer Entfernung horizontal und senkrecht zu dem „Einfallslot", das von der Funkenstrecke des Oszillators auf die reflektierende Wand gefällt wird. Eine Ebene senkrecht zum Einfallslot heiße Wellenebene. Untersucht man die Erscheinung nur in der Nähe des Einfallslotes und stellt die Resonatorebene in eine Wellenebene, so wirkt auf den Resonator nur die elektrische Kraft, diese hat ihre größte Wirkung, wenn die Funkenstrecke in



Figur 270.

der Horizontalebene des Einfallslotes liegt. In solcher Lage (I) bringen wir den Resonator nahe der Wand und entfernen uns allmählich von ihr. Wir bemerken: Unmittelbar an der leitenden Fläche sind keine Funken vorhanden, sie wachsen jedoch schnell und haben bei $B$ (s. Figur 270) eine beträchtliche Stärke, dann nehmen sie wieder ab, sind bei $C$ äußerst schwach und wachsen wieder bei weiterem Vorschreiten; wegen der jetzt schon beträchtlichen Nähe des Oszillators findet ein nochmaliges Abnehmen nicht statt. Tragen wir die Funkenstärke als positive und negative[1] Ordinaten zu den Entfernungen von der Wand (Abszissen) auf, so ergibt sich etwa die Kurve $ACA'$. $A$ liegt etwas hinter der nicht völlig leitenden Wand und zeigt wie $C$ einen Knotenpunkt der stehenden Welle an, während $B$ und $D$ den Schwingungsbäuchen entsprechen. — Bringt man die Resonatorebene in die Schwingungsebene (senkrecht zur Wellenebene), die Funkenstrecke in den höchsten Punkt (II), so wirkt die elektrische Kraft in seinen beiden Hälften merklich gleich groß und entgegengesetzt, d. h. ihre Gesamtwirkung verschwindet, die magnetische Kraft aber kommt stark zur Geltung. Man findet die Schwingung der magnetischen Kraft durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Ein Knoten elektrischer Kraft fällt auf einen Bauch magnetischer Kraft usw., beide Wellen sind, wie die Theorie verlangt, um $1/4$ Wellenlänge gegeneinander verschoben, und die Wellenlänge läßt sich angenähert aus den Versuchen zu 9,6 m bestimmen. Endlich ist die elektromagnetische Welle eine transversale

[1] Der Wechsel des Vorzeichens wird durch andere, hier nicht angeführte Beobachtungen von H. HERTZ nötig.

und die elektrischen und magnetischen Schwingungen stehen senkrecht zueinander.

6. Die Gleichartigkeit der elektromagnetischen und optischen Wellen wurde von HERTZ[1] noch weiter bewiesen, indem er „Strahlen elektrischer Kraft“ herstellte und zeigte, wie diese die Eigenschaften von Lichtstrahlen haben.

Zu dem Zwecke mußten noch schnellere als die bisher benutzten Schwingungen erzeugt werden. Der Oszillator war ein Messingzylinder: 26 cm lang, 3 cm dick. Er wurde in der Mitte zerschnitten und die beiden einander zugekehrten Enden mit Kugelflächen von 2 cm Radius versehen, zwischen denen der Funke übersprang; die halbe Wellenlänge der Erregerschwingung war etwa 33 cm, die Schwingungsdauer $2{,}2 \cdot 10^{-9}$ Sekunden. Als sekundärer Leiter dienten zwei in einer Geraden liegende Drähte von 50 cm Länge und 5 mm Dicke; die einander zugekehrten Enden standen 5 cm voneinander ab, und senkrecht zu ihnen führten zwei kürzere Drähte zu einer Funkenstrecke, deren Elektroden eine kleine Messingkugel und ein zugespitztes Stück Draht bildeten, das durch eine isolierte Schraube auf sehr kleine Abstände von der Kugel eingestellt werden konnte. Die zu beobachtenden Fünkchen waren nur einige Hundertel Millimeter lang. Erreger wie Empfänger wurden in der Brennlinie je eines parabolischen Zylinders aus Zinkblech angebracht, deren Brennweite $12^1/_2$ cm (etwas weniger als ein viertel Wellenlänge), Höhe 2 m, Öffnung 1,2 m und Tiefe 0,7 m betrug. Die Funkenstrecke des Empfängers befand sich auf der Rückseite des Spiegels, den die senkrechten Verbindungsdrähte von Funkenstrecke und Schwingungsdrähten isoliert durchsetzten. Ebenso stand das Induktorium auf der Rückseite des anderen Spiegels. Diese Spiegel verstärkten die Wirkung sehr, standen sie mit ihren Öffnungen einander zugekehrt, so traten noch in Entfernung von 16 m und mehr Fünkchen im Empfänger auf. In Richtung der optischen Achse des Spiegels ging vom Erreger ein „Strahl elektrischer Kraft“ aus.

An diesen Strahlen elektrischer Kraft kann man die wichtigsten Eigenschaften der Lichtstrahlen nachweisen.

$\alpha$) Geradlinige Ausbreitung. Mit Metallblechen, die für elektrische Schwingungen undurchlässig sind, kann man die Strahlen des Erregers ablenken, während diese durch isolierende Wände, Türen hindurchgehen. Zwei von beiden Seiten der Achse genäherte Metallschirme lassen den Strahl unverändert, solange ihre Entfernung größer als 1,2 m ist; sinkt aber die Spaltbreite unter 0,5 m, so wird die Strahlwirkung aufgehoben.

$\beta$) Polarisation. Steht der eine Spiegel vertikal, und dreht man den andern mit seinem Leiter um den Strahl als Achse, bis er horizontal liegt, so nimmt man keine Wirkung mehr wahr. — Ein Drahtgitter von 2 m Höhe und Breite, bei dem die 1 mm dicken Drähte 3 cm voneinander abstanden, läßt elektrische Schwingungen hindurch, die senkrecht zur Drahtrichtung erfolgen, während es für den Drähten parallele Schwingungen undurchlässig ist. Stellt man die Drähte vertikal zwischen die zwei vertikalen Spiegel, so übt der Erreger keine Wirkung auf den Empfänger; dreht man das Gitter um den Strahl als Achse, so treten wieder Fünkchen im Empfänger auf, die bei horizontaler Lage der Drähte ein Maximum erreichen. Sind die Spiegel gekreuzt, so daß keine Wirkung zwischen ihnen stattfindet, so läßt das Gitter, dessen Drähte um 45° gegen die Brennlinien geneigt sind, die Funken wieder auftreten, sobald es zwischen die Spiegel geschoben wird. Die Schwingungen der elektrischen Kraft sind hiernach geradlinig polarisiert und geschehen parallel der Längsrichtung des Erregers.

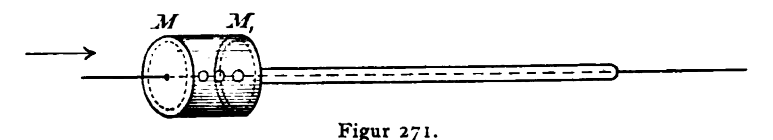
$\gamma$) Reflexion. Läßt man die Achsen der beiden Spiegel gegen einen Punkt konvergieren und findet keine Wirkung statt, so tritt diese sofort wieder auf,

[1] H. HERTZ, Sitzber. d. Berl. Akad. v. 3. Dezbr. 1888 und Wied. Ann. **36**. 769. 1889.

wenn eine Metallplatte so aufgestellt wird, daß sie für die Achsenstrahlen auch im optischen Sinne als Spiegel dienen würde. Die Reflexion erweist sich als eine regelmäßige. Auch das Gitter kann als Spiegel wirken, wenn seine Drähte parallel den Brennlinien der beiden Hohlspiegel sind.

$\delta$) Brechung. Ein großes Prisma aus Hartpech, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck von 1,2 m Schenkellänge war, das 1,5 m Höhe und einen brechenden Winkel von 30° hatte, lenkte den auf die Vorderfläche unter 65° Einfallswinkel auffallenden Achsenstrahl des Erregerspiegels um im Mittel 22° ab. Das würde einem Brechungsexponenten von etwa 1,69 entsprechen.

7. Die Auffassung der MAXWELLschen Theorie, daß die elektrische Kraft, die einen Strom bedingt, sich im Dielektrikum fortpflanzt und nur langsam, bei schnellen Schwingungen gar nicht, in das Innere von Metallen eindringt, bewies HERTZ[1] für die von ihm erzeugten Wellen u. a. in folgender Weise. Der einen Platte des oft erwähnten Oszillators wurde eine andere parallel gegenübergestellt und von dieser aus ein langer Draht geradlinig fortgeführt, so daß, wie man zu sagen pflegt, die Welle in dem Draht fortgeleitet wurde. Durchschnitt man den Draht und ließ die beiden Schnittflächen, auf die kleine Kugeln aufgesetzt waren, in kleinem Abstand einander gegenüberstehen, so ging ein Funkenstrom zwischen den Kugeln über. Setzte man dann zu beiden Seiten der Kugeln (s. Figur 271) kreisförmige Metallplatten $M$ und $M_1$ auf den Draht, die an ihrer Peripherie in




Figur 271.

gleichen Abständen 24 Löcher hatten, so änderte sich nichts an der Funkenbildung, sobald aber durch zwei entsprechende Löcher der Platten ein Draht parallel der Funkenstrecke gezogen wurde, sank die Funkenlänge fast auf die Hälfte. Wurde ein zweiter Draht dem ersten gegenüber eingezogen, so trat weitere Abnahme der Funkenlänge ein, und als alle 24 Drähte, die den Käfig bilden konnten, gespannt waren, zeigte sich keine Spur des Funkens mehr. Der Widerstand der Funkenstrecke konnte nicht die Ursache der Erscheinung sein, denn führte man neben dem Drahtkäfig als Nebenschluß eine Leitung her, die der im Innern des Käfigs ganz gleich war, so hatte man in ersterer lebhafte Funken, in letzterer durchaus keine. Die Drahtröhre schützte völlig ihr Inneres vor der elektrischen Kraft, und so schirmen auch (wie früher besprochen) die Oberflächenschichten des Drahtes das Drahtinnere vor dem Eindringen der elektrischen Wellen. Diese pflanzen sich also nicht im Draht fort, sondern gleiten längs des Drahtes dahin.

Durch alle die angeführten und viele andere schöne Versuche von HERTZ sind mannigfache Voraussagungen und Folgerungen der MAXWELLschen Theorie bewiesen und ihr Übergewicht über die früheren Fernwirkungstheorien entschieden. Besonders wichtig aber und folgereich, worauf wir jedoch nicht näher einzugehen haben, sind diese experimentellen Untersuchungen dadurch, daß sie die Identität der Gesetze der elektromagnetischen und der optischen Wellen zeigten und so der elektromagnetischen Lichttheorie von MAXWELL eine gesicherte Basis schufen.

## b) Theorie.[2]

Um die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen nach der MAXWELLschen Theorie zu bestimmen, haben wir von den allgemeinen Feldgleichungen für

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **37**. 395. 1889. — [2] Wir folgen hier: M. ABRAHAM, Theorie d. Elektr. **1**. 303 usw. u. E. COHN, Das elektromagnet. Feld. 407 usw.

ruhende Körper auszugehen. Sie lauten im GAUSSschen Maßsystem nach (Ia) Artikel „Elektrodynamik“ und (IIa) dieses Artikels, wenn das Medium homogen und isotrop, d. h. $\sigma$, $\mu$, $\varepsilon$ überall konstant sind:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \quad ,$$

oder nach der Bedeutung von $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$:

$$(1) \qquad c \cdot \mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi\sigma\mathfrak{E} + \varepsilon\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \quad \text{und} \quad (2) \qquad c \cdot \mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad ,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(1\mathrm{b}) \quad \begin{cases} c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_x + \varepsilon\dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} \\ c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_y + \varepsilon\dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} \\ c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_z + \varepsilon\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} \end{cases}$$

und

$$(2\mathrm{b}) \quad \begin{cases} -c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = \mu\dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} \\ -c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) = \mu\dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} \\ -c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) = \mu\dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} \end{cases}$$

Differenziert man die erste Gleichung von (1b) nach $t$:

$$c\mu\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}\right)\right\} = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} \quad ,$$

das wird nach (2b):

$$(3) \qquad c^2\left[\Delta\mathfrak{E}_x - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,\mathfrak{E})\right] = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} \quad .$$

Analog erhält man aus der ersten Gleichung von (2b):

$$(4) \qquad c^2\left[\Delta\mathfrak{H}_x - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,\mathfrak{H})\right] = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} \quad .$$

Aus (2b) folgt: $\mathrm{div}\,\mathfrak{H}$ ist von der Zeit unabhängig; nach (1b) wird:

$$4\pi\sigma\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\mathfrak{E}) = 0 \quad ,$$

also:

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \mathrm{const}\,e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\cdot t} \quad .$$

Für Nichtleiter ist also $\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \mathrm{const}$, hat das Medium auch Leitungsvermögen, so sinkt $\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$ gleichmäßig auf null herab, und zwar um so schneller, je kleiner

$$(5) \qquad \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = T_0 \quad ,$$

wo $T_0$ die Relaxationszeit heißt; für einen vollkommenen Leiter wird $T_0$ null. Bei den periodischen Veränderungen, die wir betrachten, kann demnach gesetzt werden:

$$\text{(5a)} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \end{cases} .$$

Die Gleichungen lauten also:

$$\text{(6)} \quad \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} + 4\pi\sigma\mu \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = c^2 \Delta \mathfrak{E}_x \quad \text{und} \quad \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} + 4\pi\sigma\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = c^2 \Delta \mathfrak{H}_x$$

und analoge Gleichungen für die $y$- und $z$-Komponenten.

Es wäre also die allgemeine Lösung einer Gleichung von der Form:

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \Delta \mathfrak{A}$$

zu suchen; wenn in einem bestimmten Moment (Erregungsmoment) die Werte der Feldgrößen vorgeschrieben sind, dann wäre die Ausbreitung der Erregung im homogenen Medium bestimmt. Diese Lösung ist von BIRKELAND gegeben[1].

Wir beschränken uns auf den speziellen Fall von ebenen Wellen.

Nehmen wir an, die Größe $\mathfrak{A}$ (d. h. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$) hänge nur von der $x$-Koordinate ab, dann geht Gleichung (7) über in die sogenannte Telegraphengleichung:

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_2} ,$$

wo $v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$ gesetzt ist.

### α) Freie Wellen in Isolatoren.

Das Medium sei ein Isolator, d. h. $T_0 = \infty$, so haben wir die bekannte Gleichung

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} ,$$

deren allgemeine Lösung:

$$\mathfrak{A} = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) ,$$

$f_1(x - vt)$ resp. $f_2(x + vt)$ stellt eine Welle dar, die in der Richtung der positiven resp. negativen $x$-Achse fortschreitet. Die $yz$-Ebene ist die Schwingungsebene, und

$$\text{(10)} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, die im freien Äther ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) zu $c$ wird. $c$ aber ist das Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Stromeinheit und durch Versuche gleich der Lichtgeschwindigkeit gefunden worden, d. h.

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} .$$

Die elektromagnetischen Wellen pflanzen sich im freien Äther mit Lichtgeschwindigkeit fort.

Da $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ und nach (1b) und (2b): $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0$, so sind $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{E}_x$ von $x$ und $t$ unabhängig, d. h. die $\mathfrak{E}$- und $\mathfrak{H}$-Größen

[1] KR. BIRKELAND, Arch. de Gen. **34**. 1. 1895. S. auch E. COHN, Das elektromagn. Feld. 413.

haben keine Komponente in Richtung ($x$) der Fortpflanzung: Die Wellen sind transversal.

Nach (1b) und (2b) ist $\mathfrak{H}_z$ nur mit $\mathfrak{E}_y$ resp. $\mathfrak{H}_y$ nur mit $\mathfrak{E}_z$ durch Gleichungen verbunden, z. B. gelten:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad -c \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} \quad .$$

Ist also:

$$\mathfrak{E}_y = f_1(x - v\,t) + f_2(x + v\,t) \quad , \tag{11}$$

so wird

$$\mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[f_1(x - v\,t) - f_2(x + v\,t)] \quad , \tag{11}$$

d. h. die beiden gleichzeitig auftretenden elektrischen und magnetischen Schwingungen ($\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$) stehen senkrecht aufeinander; analog für $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_y$.

Wir haben, nach der Sprache der Optik, in $\mathfrak{E}_y$ resp. $\mathfrak{H}_z$ eine geradlinig polarisierte elektrische resp. magnetische Welle. Definieren wir den Brechungsquotienten $\nu$ des Mediums wie in der Optik, so ist

$$\nu = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\,\mu} \quad .$$

Da für die meisten Medien (außer den ferromagnetischen) merklich $\mu = 1$, so ergibt sich die MAXWELLsche Beziehung:

$$\nu^2 = \varepsilon \quad ,$$

die früher nur bei einigen Stoffen gültig zu sein schien, jetzt aber als allgemein richtig erkannt wurde, wenn man nur etwa vorhandene Dispersion dadurch berücksichtigt, daß man $\nu$ und $\varepsilon$ beide für dieselbe Schwingungszahl bestimmt. —

Betrachten wir nur die in Richtung der positiven $x$ fortschreitenden Wellen und nehmen wir die Schwingung als einfach periodisch, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{E}_y = \frac{a}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\{n(t - m\,x) + \psi\} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sin\{n(t - m\,x) + \psi\} \quad . \tag{12}$$

Analog ergibt sich für die beiden andern zusammenhängenden Komponenten

$$\mathfrak{E}_z = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \sin\{n(t - m\,x) + \psi'\} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{H}_y = \frac{b}{\sqrt{\mu}} \sin\{n(t - m\,x) + \psi'\} \quad . \tag{13}$$

Jede der beiden voneinander unabhängigen elektromagnetischen Wellen (12) und (13) ist geradlinig polarisiert; sind beide Wellen zugleich vorhanden, so setzen sie sich im allgemeinen zu einer elliptisch polarisierten zusammen.

Die Fortpflanzungsrichtung ($x$), die elektrische Kraft ($\mathfrak{E}_y$) und die magnetische Kraft ($\mathfrak{H}_z$) bilden zusammen ein Rechtssystem. Ist nun neben der in der positiven $x$-Richtung fortschreitenden Welle auch die zweite in negativer $x$-Richtung laufende Welle vorhanden, etwa durch Reflexion an einem Spiegel, so bilden sich stehende Wellen aus. Da auch für die nach $-x$ verlaufenden Wellen die obige Regel gilt, so sind an den Stellen, wo die elektrischen Kräfte für direkte und reflektierte Wellen gleiche Richtung haben, die magnetischen Kräfte einander entgegengesetzt gerichtet usw., d. h. die Knotenstellen der magnetischen Kraft fallen in stehenden Wellen mit den Bauchstellen der elektrischen Kraft zusammen usw., während in fortschreitenden Wellen elektrische und magnetische Schwingungen gleichphasig sind.

Wenn von einem Erreger solche Wellen in den Raum ausgesandt werden, verliert er diese Energie, er strahlt aus. Nach der MAXWELLschen Theorie

befindet sich im Volumelement $d\tau$ des Dielektrikums, wo $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ elektrische und magnetische Feldstärke sind, die Energie:

$$W = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 + \mu\,\mathfrak{H}^2)\,d\tau \quad .$$

Da in unserem Fall $\varepsilon\,\mathfrak{E}^2 = \mu\,\mathfrak{H}^2$, so sind im Volumelement gleiche Anteile elektrischer und magnetischer Energie vorhanden.

Man definiert als Strahlung die Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchtritt, sie ist nach Gleichung (1), Abschnitt 7, gegeben durch den POYNTINGschen Vektor:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\cdot[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}] \quad .$$

### β) Freie Wellen in Leitern.

Für sie galt die Gleichung

$$\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{T_0}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2} \quad , \tag{8}$$

und für die zusammengehörigen $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ ist nach (3b):

$$-c\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} = \mu\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial t} \quad . \tag{14}$$

Wir suchen (8) zu genügen durch:

$$\mathfrak{A} = A e^{\iota n(t-mx)} \quad , \qquad \text{wo } \iota = \sqrt{-1} \tag{15}$$

wo $n$ die Schwingungszahl in $2\pi$ Sekunden $n = \frac{2\pi}{\tau}$.

Also ist:

$$-n^2 + \frac{\iota n}{T_0} = -v^2 n^2 m^2 \quad ,$$

d. h.

$$m^2 = \frac{1}{v^2} - \frac{\iota}{n T_0 v^2} \quad . \tag{16}$$

Setzt man

$$m = \frac{1-\iota\alpha}{v'} \quad , \tag{17}$$

so wird $\mathfrak{A}$, oder was wir jetzt dafür wählen:

$$\mathfrak{E}_y = A e^{-\frac{n\alpha}{v'}x}\cdot e^{\iota n\left(t-\frac{x}{v'}\right)} \quad ,$$

d. h. $v'$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Leiter, also die Wellenlänge $\lambda = \tau\cdot v'$.

$$\mathfrak{E}_y = A e^{-\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}}\cdot e^{\iota 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)} \quad , \tag{18}$$

d. h. die Amplitude der Welle nimmt beim Fortschreiten ab, und nach Durchlaufen einer Wellenlänge $(x = \lambda)$ ist sie auf den $e^{-2\pi\alpha}$fachen Betrag ihres Anfangswertes gesunken. $\alpha$ ist der Absorptionskoeffizient.

Aus (16) und (17) folgt, wenn man bedenkt, daß der Brechungsquotient

$$\nu = \frac{c}{v'} \quad :$$

$$\nu^2(1-\alpha^2) = \varepsilon\mu \quad , \tag{19}$$

$$\nu^2\alpha = \sigma\mu\tau \quad , \tag{20}$$

daraus:

(21) $$\nu^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right\} \quad \text{und} \quad \nu^2\alpha^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} - \varepsilon\right\} ,$$

wo die Wurzeln positiv zu nehmen und $(v')^2 = \frac{c}{\nu^2}$ ist.

Ebenso erhielte man

(22) $$\mathfrak{H}_z = B\, e^{\iota n (t - m x)} .$$

Gleichung (14) liefert eine Beziehung zwischen den beiden Größen $A$ und $B$, deren Verhältnis komplex ist

(23) $$B = \frac{A}{\mu}\nu(1 - \iota\alpha) .$$

Sind $a$ und $b$ die Moduln von $A$ und $B$, so wird

$$\frac{b}{a} e^{-\iota\varphi} = \frac{\nu}{\mu}(1 - \iota\alpha) ,$$

also

(24) $$\operatorname{tg}\varphi = \alpha$$

und

(25) $$b = a\sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}} .$$

Nehmen wir endlich die imaginären Teile von (18) und (22) als unsere Lösungen, so ist:

(26) $$\begin{cases} \mathfrak{E}_y = a \cdot e^{-\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}} \cdot \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} \\ \mathfrak{H}_z = a\sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}} \cdot e^{-\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}} \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) - \varphi\right\} \end{cases} .$$

Die Welle ist auch hier transversal, ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach (19) aber stets kleiner als in Nichtleitern, und die zusammen auftretenden elektrischen und magnetischen Schwingungen ($\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$) haben eine Phasendifferenz $\varphi$. Da die Amplitude der elektrischen und magnetischen Schwingung verschieden, so verteilt sich auch die Energie nicht mehr gleichmäßig auf beide; die elektrische Energie ist vielmehr kleiner als die magnetische, und wegen der in Leitern entstehenden JOULEschen Wärme tritt Absorption ein.

Es müßten also Leiter für elektrische Schwingungen wenig durchlässig sein, während Isolatoren, wenn keine dielektrische Hysteresis vorhanden, die Schwingungen ungehindert durchließen. Das haben schon früher angegebene Versuche bestätigt, und HERTZ[1] fand z. B., daß eine Silberschicht von weniger als $\frac{1}{100}$ mm Dicke für seine Wellen undurchlässig war.

Fiele z. B. eine Welle, deren Wellenlänge ($\lambda_0$) in Luft 3 cm betrüge, auf eine Kupferplatte, so wäre $\tau = 10^{-10}$, und $\sigma$ würde, da wir das GAUSSsche Maßsystem in unsern Gleichungen benutzten, in elektrostatischem Maß sein: $\sigma = 5{,}6 \cdot 10^{17}$, also $2\sigma\tau = 11{,}2 \cdot 10^7$. Eine Zahl, gegen die das freilich nicht bekannte $\varepsilon$ des Kupfers sicher zu vernachlässigen wäre. Setzen wir noch $\mu = 1$, so könnten wir schreiben

$$\nu\alpha = \sqrt{\sigma\tau} .$$

In der Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}}$$

ist $\lambda$ die Wellenlänge im Metall, also $\lambda = \frac{\lambda_0}{\nu}$, d. h. die Funktion ist zu schreiben

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **37**. 402. 1889.

$e^{-\frac{2\pi\nu\alpha\cdot x}{\lambda_0}}$. Also würde auf der Strecke $x = \frac{\lambda_0}{\nu\alpha}$ die Amplitude der Welle auf den $e^{-2\pi}$ fachen Betrag herabsinken, d. h. in einer Tiefe von $4,8 \cdot 10^{-4}$ cm unter der Oberfläche der Platte wäre die Intensität der Welle fast vernichtet.

Ein anderer Grund, warum schnelle Schwingungen fast nicht in das Innere von guten Leitern dringen, ist die Reflexion.

### $\gamma$) Reflexion und Brechung.

#### 1. Nichtleiter.

Gelangt eine elektromagnetische Welle an die Grenzfläche $x = 0$ zweier verschiedener Dielektrika (1 und 2), so sind dort die Grenzbedingungen der MAXWELLschen Theorie zu berücksichtigen, die aussagen: Die der Grenzfläche parallelen Komponenten $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ bleiben stetig beim Durchgang durch die Fläche, dagegen erleiden die Normalkomponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_x$ einen Sprung, denn an der Fläche müssen die Produkte $\varepsilon\mathfrak{E}_x$ und $\mu\mathfrak{H}_x$ stetig bleiben. Bei Einführung dieser Bedingungen in die Feldgleichungen erhält man (s. z. B. DRUDE, Lehrbuch der Optik, Leipzig, Hirzel, 1900, S. 258 usw.) die aus der Optik bekannten Reflexions- und Brechungsgesetze, das BREWSTERsche Gesetz für den Polarisationswinkel, die FRESNELschen Intensitätsformeln usw.

Die letztern ergeben, daß bei Reflexion die elektrische Schwingung ihr Zeichen umkehrt, während die magnetische das nicht tut. Bilden also reflektierte und einfallende Schwingungen zusammen stehende Wellen, so muß in der reflektierenden Wand ein Schwingungsknoten für die elektrische, ein Schwingungsbauch für die magnetische Kraft liegen. Dabei wird aber z. B. der Knoten um so vollständiger ausgebildet sein, die elektrische Kraft um so mehr null in der Grenzfläche sein, je genauer die reflektierte Intensität der einfallenden gleich, je vollständiger die Reflexion ist.

#### 2. Leiter.

Ist das Medium 2 ein Leiter, so findet, wie wir sahen, in ihm Absorption statt, dadurch erhalten die beiden reflektierten Komponenten einer einfallenden linear polarisierten Welle, die in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr schwingen, eine Phasendifferenz, und die reflektierte Welle ist elliptisch polarisiert (s. z. B. DRUDE, l. c., S. 333 usw.).

Fällt die Welle senkrecht auf die Grenzfläche, so heißt der Quotient aus der Größe der reflektierten Strahlung zu der Größe der einfallenden das Reflexionsvermögen $R$ des Leiters, man erhält es aus der Modifikation der FRESNELschen Intensitätsformeln, die für absorbierende Medien gilt; wir leiten es hier kurz ab[1], indem wir voraussetzen, daß das Medium (1) etwa Luft sei, wo $\varepsilon$ und $\mu = 1$ sind. Dann kann für die einfallende Welle geschrieben werden:

$$\mathfrak{E}_y' = \mathfrak{H}_z = A' e^{\iota n(t - mx)}$$

und für die reflektierte:

$$-\mathfrak{E}_y = \mathfrak{H}_z = A'' e^{\iota n(t - mx)} \quad ,$$

also

$$R = \frac{(A'')^2}{(A')^2} \quad . \tag{27}$$

Die in das Metall eindringende Welle ist nach (15), (22) und (23):

$$\mathfrak{E}_y = A e^{\iota n(t - mx)} \quad , \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{A}{\mu} \nu(1 - \iota\alpha) e^{\iota n(t - mx)} \quad .$$

---

[1] Vgl. z. B. M. ABRAHAM, Theorie der Elektr. 1. 320 usw.

Die Grenzfläche war die $yz$-Ebene und nach den Grenzbedingungen müssen die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Medium 1 und 2 einander gleich sein. Es bestehen also die Bedingungsgleichungen:

$$A' - A'' = A \quad ,$$

$$A' + A'' = A \frac{\nu(1 - \iota\alpha)}{\mu} \quad ,$$

also:

$$A' = \frac{A}{2}\left\{ \quad 1 + \frac{\nu(1 - \iota\alpha)}{\mu}\right\} \quad ,$$

$$A'' = \frac{A}{2}\left\{ -1 + \frac{\nu(1 - \iota\alpha)}{\mu}\right\} \quad ,$$

woraus folgt:

$$R = \frac{(\nu - \mu)^2 + \nu^2\alpha^2}{(\nu + \mu)^2 + \nu^2\alpha^2} \quad . \tag{28}$$

Wäre nun $\sigma\tau$, wie in dem früheren Beispiel, so groß, daß $\varepsilon$ neben ihm vernachlässigt werden kann, so gäben die Gleichungen (21):

$$\nu = \sqrt{\mu\sigma\tau} \quad \text{und} \quad \alpha = 1 \quad ,$$

und ist das Metall nicht ferromagnetisch, so daß $\mu = 1$ gesetzt werden darf, so wird

$$R = \frac{(\sqrt{\sigma\tau} - 1)^2 + \sigma\tau}{(\sqrt{\sigma\tau} + 1)^2 + \sigma\tau} = \frac{2\sigma\tau - 2\sqrt{\sigma\tau} + 1}{2\sigma\tau + 2\sqrt{\sigma\tau} + 1} \quad ,$$

endlich bei Vernachlässigung von 1 gegen $\sigma\tau$ wird:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}} \quad . \tag{29}$$

Diese Beziehung findet sich schon in der ersten Auflage des Handbuchs **3**, 2. Abt., S. 472, Formel (86), von Oberbeck aus einer Arbeit Boltzmanns, Wied. Ann. **48**, 63, 1893 angeführt, in der Form (29) ist sie wohl zuerst von Drude[1] abgeleitet. Hagen und Rubens[2] haben sie unabhängig von der Theorie für Wellen im Ultrarot bei allen untersuchten Metallen außer Wismut bestätigt gefunden. Für ihre Versuche war $\lambda$ von der Ordnung $10^{-4}$, und es darf $\varepsilon$ unbedenklich gegen $\sigma\tau$ vernachlässigt werden.

Durch diese Versuche ist eine neue Bestätigung einer der Grundannahmen der Maxwellschen Theorie gewonnen, daß der Leitungsstrom gleich $\sigma\mathfrak{E}$ gesetzt werden kann, wo $\sigma$ die Leitungsfähigkeit für stationären Strom bedeutet. Da dies für die Schwingungszahlen im Ultrarot gilt, wird es sicher auch für die Schwingungszahlen aller der Wellen gelten, die im engeren Sinne elektromagnetische sind. Bemerkenswert ist ferner, daß die Gleichung (29) auch für ferromagnetische Metalle sich als gültig erwies. Da wir $\mu = 1$ gesetzt hatten, folgt: für so kleine Schwingungszahlen, wie sie den angegeben Wellenlängen entspricht, muß $\mu$ auch für Eisen und Nickel einen nicht weit von 1 verschiedenen Wert haben, was nicht unwahrscheinlich ist, da die Permeabilität schon bei viel geringeren Schwingungszahlen eine beträchtliche Abnahme gegen ihren Wert im konstanten Feld zeigt.

---

[1] P. Drude, Physik des Äthers, Stuttgart 1894, S. 574. S. auch Ber. d. deutsch. phys. Ges. 1903, S. 142 und M. Plank, Ber. d. Berl. Akad. 1903, S. 278 u. 558 und E. Cohn, ibid., S. 538 u. 619. — [2] E. Hagen und H. Rubens, Ber. d. Berl. Akad. 1903, S. 269 und Ann. d. Phys. **11**. 873. 1903.

Da für die von HERTZ erzeugten Schwingungen $\sigma\tau$ bei Metallen etwa von der Größenordnung $10^8$ ist, so wird $R$ merklich $= 1$, d. h. Metalle reflektieren senkrecht auf sie fallende HERTZsche Wellen fast vollständig. Gäbe es einen vollkommenen Leiter, so würde er ($\sigma = \infty$) Wellen jeder Schwingungsdauer vollständig reflektieren.

Die Differentialgleichungen für die Metalle vereinfachen sich, wenn die Vernachlässigung der $\varepsilon$ neben $\sigma\tau$ erlaubt ist, so daß statt (6) geschrieben werden darf:

$$4\pi\sigma\mu\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial t} = c^2\Delta\mathfrak{E}_x \qquad \text{und} \qquad 4\pi\sigma\mu\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial t} = c^2\Delta\mathfrak{H}_x \quad \text{usw.}$$

Es ist in vielen Fällen erlaubt, diese Gleichungen statt der vollständigen zu benutzen, d. h. man darf den Leiter als vollkommen ansehen. Dann zeigt die Analogie von (30) mit den Gleichungen der Wärmeleitung, daß die Ausbreitung der elektromagnetischen Schwingungen in den Metallen geschieht, wie die Verbreitung von Temperaturschwankungen durch Leitung.

### δ) Das Feld des HERTZschen Oszillators.

HERTZ behandelte das Problem der ungedämpften Schwingung nach der MAXWELLschen Theorie[1], um deren Ergebnisse mit seinen früher angeführten Beobachtungen[2] zu vergleichen und fand dabei in den großen Zügen Übereinstimmung. Er machte die vereinfachende Annahme, daß die Ladung $q_0$ in linearer Bahn ($z$-Achse) hin und her oszilliere, so daß alles symmetrisch um die Schwingung sei; er untersuchte also das elektromagnetische Feld einer geradlinig bewegten Punktladung.

Der Koordinatenanfang liege im Mittelpunkt der Schwingung; es sei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2 \quad ,$$
$$z = r\cos\vartheta \quad , \qquad \varrho = r\sin\vartheta \quad ,$$

dann lassen sich die Gleichungen (1b) und (2b), wo $\sigma = 0$ und $\varepsilon = \mu = 1$ ist, befriedigen durch die Werte:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z} \quad , \qquad c\,\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial t} \quad ,$$
$$\mathfrak{E}_y = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z} \quad , \qquad c\,\mathfrak{H}_y = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial t} \quad ,$$
$$\mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} \quad , \qquad \mathfrak{H}_z = 0 \quad ,$$

wo $\Pi$ der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = c^2\Delta\Pi \quad .$$

Da $\Pi$ nur von $t$, $z$ und $\varrho$ abhängt, so kann man die elektrischen Kräfte $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ zu einer Kraft $S$ senkrecht zur $z$-Achse und die magnetischen Kräfte zu einer Kraft $P$ senkrecht zur Meridian ($\varrho$, $z$)-Ebene zusammenfassen. Es ist

$$S = \mathfrak{E}_x\cdot\frac{x}{\varrho} + \mathfrak{E}_y\cdot\frac{y}{\varrho} \;; \qquad P = \mathfrak{H}_y\frac{x}{\varrho} - \mathfrak{H}_x\frac{y}{\varrho} \quad .$$

Setzt man:

$$Q = \varrho\frac{\partial\Pi}{\partial\varrho} \quad ,$$

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. 36. 1. 1888. — [2] S. S. 630.

so wird:

$$S = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial z}\ ; \qquad c \cdot P = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial t}\ ; \qquad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial \varrho}\quad .$$

Um den Bedingungen des Problems zu genügen, nimmt HERTZ

$$\Pi = \frac{q_0\, l \sin(m r - n t)}{r}\quad ,$$

was die Differentialgleichung für $\Pi$ befriedigt, wo

$$m = \frac{2\pi}{\lambda}\quad , \qquad n = \frac{2\pi}{\tau}\quad , \qquad \text{also} \qquad \frac{n}{m} = c$$

gesetzt wird und $l$ eine Länge bedeutet. $\Pi$ stellt dann Kugelwellen dar, die mit Lichtgeschwindigkeit ($c$) sich ausbreiten. Es ergibt sich:

$$Q = q_0\, l\, m \left\{\cos(m r - n t) - \frac{\sin(m r - n t)}{m r}\right\} \sin^2\vartheta \quad .$$

Für kleine Werte von $r$, für Orte, die dem Zentrum des Erregers nahe liegen, folgt:

$$\Pi = -\frac{q_0\, l \sin(n t)}{r}$$

und

$$S = -\frac{\partial V}{\partial \varrho}\ ; \qquad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{wenn} \qquad V = -q_0\, l \sin(n t) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

gesetzt wird. $V$ erscheint hier als das Potential eines elektrischen Doppelpunktes, dessen Ladung $\pm q_0$ längs der $z$-Achse auf der sehr kleinen Strecke $l$ hin und her schwankt.

Die magnetische Kraft ist hier

$$P = -\frac{q_0\, l\, n \cos(n t) \sin\vartheta}{c\, r^2}$$

und entspricht nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz einem Strom, der in dem Leiterelement $l$ periodisch hin und her fließt und dessen Intensität zwischen $\pm \frac{q_0 n}{c}$ schwankt.

Für sehr große Werte von $r$ ist

$$Q = q_0\, l\, m \cos(m r - n t) \sin^2\vartheta\ ;$$

$$S = F \cdot \cos\vartheta\ ; \qquad \mathfrak{E}_z = -F \sin\vartheta\ ; \qquad P = -F\quad ,$$

wo

$$F = \frac{q_0\, l\, m^2 \sin(m r - n t) \sin\vartheta}{r}\quad .$$

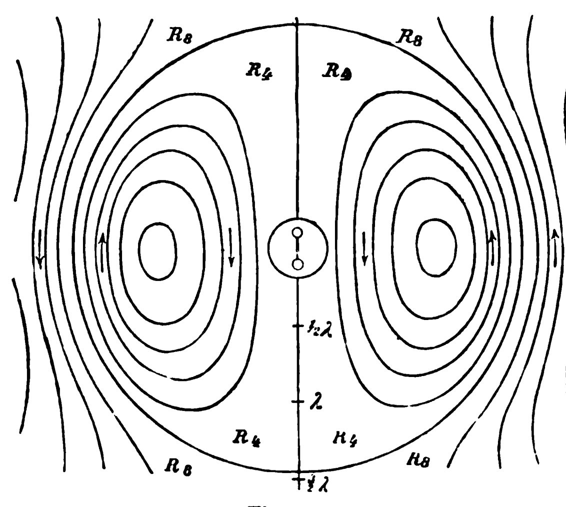
Da

$$S \sin\vartheta + \mathfrak{E}_z \cos\vartheta = 0\quad ,$$

so steht die Richtung der Kraft überall senkrecht auf $r$, der Verbindungslinie zum Zentrum, die Ausbreitung erfolgt als reine Transversalwelle. Die Größe der Kraft nimmt auf der Kugelfläche $r = \text{const}$ von der Äquatorebene $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ beständig nach den Polen zu ab.

Für den übrigen Teil des Raumes stellte HERTZ die Verteilung der elektrischen Kraft graphisch dar, indem er die Schnittlinien der Rotationsflächen $Q = \text{const}$, für gleichviel sich unterscheidende Werte von $Q$, mit den Meridianebenen kon-

struierte. Die Figuren 272—275 geben die elektrischen Kraftlinien und zwar Figur 271 zu der Zeit $t = 0$, wo der Strom im Maximum seiner Entwicklung, also die Pole (Kugeln) des Oszillators nicht geladen waren; die folgenden Figuren aber zu den Zeiten: $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ der Schwingungsdauer. In dem engen Kreis, der nur den Oszillator einschließt, lassen sich die Kraftlinien nicht aus der Rechnung entnehmen. Die Figuren zeigen, wie nach $t = 0$ die Kraftlinien aus den Polen des Erregers hervorbrechen, sich erweitern, zu den Zeiten $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ mal $\tau$ die Räume $R_1$, $R_2$, $R_3$ erfüllen, dann sich einschnüren und endlich abschnüren würden, wie das letztere die Figur 273 für $t = 0$ darstellt. Das $\lambda$ der Figur bedeutet eine halbe Wellenlänge. Die magnetischen Kraftlinien sind Kreise, deren Zentren im Erreger liegen und deren Ebenen senkrecht zum Erreger stehen.

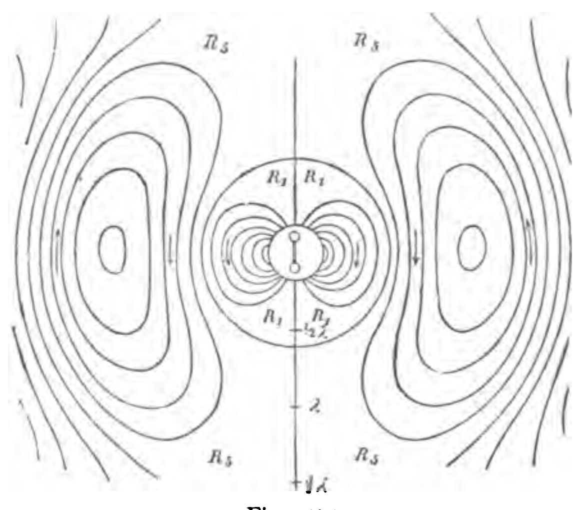


Figur 272.

Den Energieverlust durch Ausstrahlung erhält man nach Gleichung (13), wenn man für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Werte einsetzt, die für große $r$ gelten und über die Kugel vom Radius $r$ integriert. Hertz findet die Ausstrahlung während einer halben Periode:

$$\frac{8\pi^4 q_0^2 l^2}{3\lambda^3},$$

was bei seinen Versuchen, wo der Radius der Oszillatorkugeln = 15 cm, $l = 100$ cm, $\lambda = 960$ cm und die Schlagweite = 1 cm war, einer Leistung von etwa 22 Pferdekräften in 1,5 Hundertmillion　tel Sekunde entspricht. Es wäre also nach 11 halben Schwingungen die Hälfte der Energie durch Ausstrahlung verbraucht, d. h. die Schwingungen wären durch Strahlung stark gedämpft.



Figur 273.

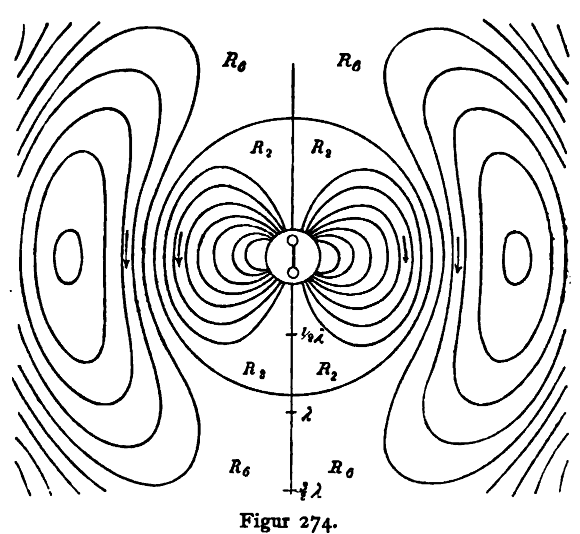
Über die Dämpfung einer linearen Schwingung (Resonator) s. auch M. Plank [1], der für das logarithmische Dekrement ($\gamma$) der Schwingungsamplituden den Ausdruck findet:

$$\gamma = \frac{16\pi^4 n^2}{3c^3 \cdot K},$$

[1] M. Plank, Sitzber. d. Berl. Akad. 21. März 1895 u. Wied. Ann. 57. 1. 1876; Sitzber. d. Berl. Akad. 20. Febr. 1896 und Wied. Ann. 60. 577; Phys. Zeitschr. 2. 530. 1901.

wo $n$ die Schwingungszahl der ungedämpften Schwingung und $K$ eine Konstante, die sich z. B. dadurch definiert, daß, wenn $U_0$ die gesamte Schwingungsenergie des Resonators, das Quadrat der Schwingungsamplitude der ungedämpften Schwingung ist:

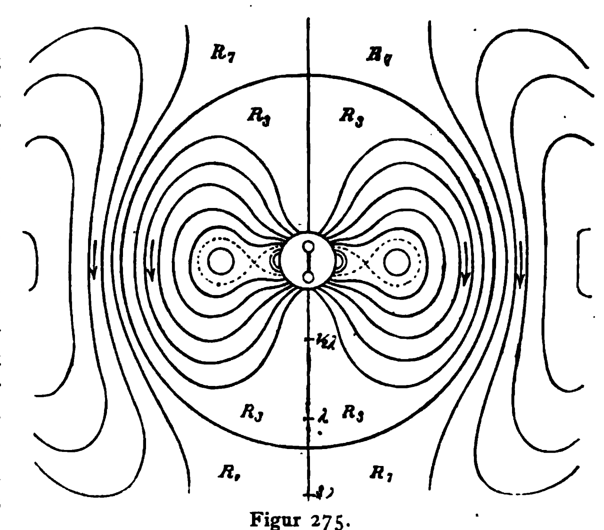
$$\frac{2\,U_0}{K}\ .$$



Figur 274.

Graphische Darstellungen des Feldes eines ungedämpft[1] und gedämpft[2] schwingenden linearen Oszillators hat Hack (nach der Theorie von Abraham[3]) gegeben. Für gedämpfte Schwingungen haben das auch Pearson und Lee[4] getan; den Zustand bei Beginn der Schwingung berücksichtigt besonders Love[5].

**Einfluß des umgebenden Mittels auf die Periode usw. des Oszillators.**[6]
Wäre der Oszillator nicht in Luft, sondern in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ ist, gelegen, so folgt schon aus dem Bau der Grundgleichungen, daß dann seine Periode sich im Verhältnis $\sqrt{\varepsilon}$ vermehrt. Würde man die Wellenlänge ($\lambda$) der in Luft resp. im Medium ($\varepsilon$) erzeugten Schwingungen beide in Luft messen, so verhielten sie sich wie die Perioden. Mißt man $\lambda$ aber jedesmal in dem Dielektrikum, in dem die Schwingung hervorgerufen worden, so ist sie von der Natur dieses Mediums unabhängig, denn $\lambda = v\tau$, und während $\tau$ proportional $\sqrt{\varepsilon}$, ist $v$ umgekehrt proportional $\sqrt{\varepsilon}$. Analoges gilt für die Abhängigkeit der Perioden usw. von der Permeabilltät $\mu$. — Die logarithmischen Dekremente sind unabhängig von dem $\varepsilon$ des umgebenden Mediums.



Figur 275.

Endlich folgt auch aus dem Bau der Grundgleichungen: Die Periode der Eigenschwingungen geometrisch ähnlicher Erreger sind der Länge entsprechender Strecken proportional; und geometrisch ähnliche Erreger besitzen das gleiche Dekrement.

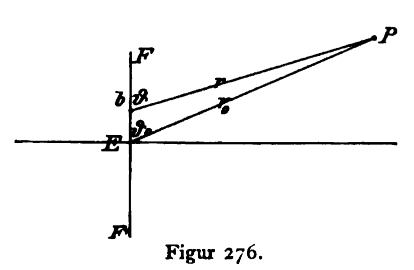
Experimentell hat einen Teil dieser Sätze schon Blondlot bewiesen.[7]

---

[1] F. Hack, Ann. d. Phys. **14**. 539. 1904. — [2] F. Hack, ibid. **18**. 634. 1905. — [3] M. Abraham, Wied. Ann. **66**. 435. 1898. — [4] K. Pearson und A. Lee, Phil. Trans. **193**. 159. 1900. — [5] A. Love, Proc. Roy. Soc. **74**. 73. 1904. — [6] M. Abraham, l. c. 441 u. 442. — [7] R. Blondlot, C. R. **115**. 225. 1892; **119**. 595. 1894. — S. auch C. Gutton, C. R. **132**. 543. 1901.

### ε) Ausstrahlung einer Senderantenne.[1]

Dem eben behandelten Problem läßt sich die Frage anschließen nach der Ausstrahlung eines vertikalen ($z$) Drahtes, in dem stehende Wellen erzeugt werden, wie man solche Drähte (Antennen) bei der drahtlosen Telegraphie benutzt. Bei der Erzeugung stehender Schwingungen kann, wie ABRAHAM[2], indem er den Erreger als verlängertes Rotationsellipsoid betrachtet, gezeigt hat, angenähert an den freien Enden vollständige Reflexion angenommen werden, so daß sich dort ein Stromknoten ausbildet. Das untere Ende des Drahtes stehe auf der Erde ($E$) (s. Figur 276), die Erde darf, wegen des sehr geringen Eindringens der Schwingungen, für elektrische Wellen als vollständiger Spiegel betrachtet werden, es liegt also in $E$ ein Strombauch. Verlängert man den Draht um sich selbst nach unten bis $F'$, so ist $FF'$ als ein oben und unten freier Draht anzusehen. Die doppelte Länge von $FF' = 2\,l$ muß demnach ein ganzzahliges und zwar ungerades Vielfaches seiner Eigenschwingungen sein.



Figur 276.

Die Stromverteilung der stehenden Schwingung ist bestimmt durch:

$$i = a \cos\left(\frac{\pi p z}{2\,l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi p c t}{2\,l}\right), \qquad -l \leqq z \leqq +l \quad ,$$

$z$ gibt dabei die Höhe des betrachteten Querschnittes $b$ über dem Mittelpunkt $E$ des Drahtes an, $p$ ist eine ungerade ganze Zahl, die Ordnungszahl der Schwingung.[3]

Auf das Feld eines Stromelementes $i\,dz$ können wir die HERTZschen Resultate für sehr große Entfernungen von seinem Oszillator anwenden. Betrachten wir das Feld des Drahtes nur in Punkten ($P$), deren Entfernung ($r$) von dem Stromelement groß gegen $\lambda$ ist, und schreiben wir allgemeiner als HERTZ $\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$, statt der Sinusfunktion, so ist die Größe der elektrischen und magnetischen Kraft des Stromelementes, die zur Zeit $t$ in $P$ eintrifft und also zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ von $b$ ausgeht:

$$|\mathfrak{E}'| = |\mathfrak{H}'| = -\frac{d}{dr}\left[\frac{i\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right] dz \sin\vartheta = a\,\frac{\pi p}{2\,l} \cos\left(\frac{\pi p z}{2\,l}\right) \frac{\cos\frac{\pi p}{2\,l}(c t - r)}{r} \sin\vartheta\,dz \quad .$$

Integriert man über alle Stromelemente, so erhält man das Feld der Schwingung im ganzen Draht:

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = 2\,a \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\pi p}{2\,l}\left(c t - r_0\right)}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi p}{2} \cos\vartheta_0\right)}{\sin\vartheta_0} \quad .$$

Dies Feld ist analog dem des HERTZschen Oszillators: auf einer Kugel vom Radius $r_0$, deren Pole sich auf der $z$-Achse befinden, liegen die elektrischen resp. magnetischen Kräfte in Richtung der Meridiane resp. Breitekreise. Die Grundschwingung hat ihre Maxima im Äquator, im Pol ist ihre Intensität $= 0$; die Oberschwingungen haben noch andere Maxima und Minima, die letzteren liegen in den durch $\cos\vartheta_0 = \pm \frac{s}{p}$ ($s$ ungerade) bestimmten Breitenkreisen.

---

[1] M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **2**. 329. 1901. — S. auch Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (6) **8**. 105. 1904 und H. M. MACDONALD, ibid. S. 276. — [2] S. M. ABRAHAM, Wied. Ann. **66**. 435. 1898; Ann. d. Phys. **2**. 32. 1900. — [3] Über den experimentellen Nachweis solcher Oberschwingungen bei einem HERTZschen Oszillator s. u. a. F. KIEBITZ, Ann. d. Phys. **5**. 872. 1901.

Die Größe der Ausstrahlung ergibt sich für die Flächeneinheit nach (13): $\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}|$, d. h. für die ganze Kugel vom Radius $r_0$:

$$|\mathfrak{S}| = 2\,c a^2 \cos^2 \frac{\pi p}{2l}(ct - r_0) \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\vartheta_0 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi p \cos\vartheta_0}{2}\right)}{\sin\vartheta_0}$$

und bei Berechnung dieses Integrals findet ABRAHAM die während einer Periode durch die Grundschwingung ($p = 1$) abgegebene Energie

$$2{,}44 \cdot a^2 \cdot 2l \quad .$$

Die Dämpfung findet man, wenn die elektromagnetische Energie der Schwingungen bekannt ist. Wäre der Strom gleichmäßig, so hätte man die magnetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} L i^2 \quad .$$

Im Moment der maximalen Strömung ist nur diese Energie vorhanden und

$$i = a \cos\left(\frac{\pi p z}{2l}\right) \quad .$$

Bildet man daraus einen Mittelwert für den ganzen Draht, so wird

$$T = \tfrac{1}{4} L a^2 \quad ,$$

wo (s. früher)

$$L = 4l\left\{\log\left(\frac{4l}{\varrho}\right) - 1\right\} \quad ,$$

$\varrho$ = Drahtradius. Also wird das logarithmische Dekrement der Schwingungsamplituden für die Grundschwingung:

$$\gamma = \frac{2{,}44}{\log\left(\frac{4l}{\varrho}\right) - 1} \quad ,$$

der strenge Wert würde 0,7 statt 1 im Nenner haben, d. h. es wäre streng:

$$\gamma = \frac{2{,}44}{\log\left(\frac{2l}{\varrho}\right)} \quad .$$

Wäre der Draht 50 m lang und $\varrho = 0{,}5$ mm, so erhielte man $\gamma = 0{,}2$. Die Dämpfung durch JOULEsche Wärme würde, wenn der Draht aus Kupfer bestände $\gamma' = 0{,}013$ sein, d. h. die Strahlungsdämpfung überwiegt sehr.

### ζ) Fortpflanzung längs Drähten.

Zur Untersuchung der Eigenschaften elektrischer Wellen ist es wünschenswert, die Wellen zusammenzuhalten und ihre Schwächung durch allseitige Ausstrahlung zu vermeiden. Das tat schon HERTZ[1], indem er die Wellen an einem Draht fortführte und die beobachteten Erscheinungen aus der MAXWELLschen Theorie abzuleiten suchte, er nahm aber dabei den Draht als unendlich dünn an, so daß die Bedingungen für die Oberfläche des Drahtes aus der Betrachtung herausfielen. POINCARÉ[2] berücksichtigte zwar die Dicke des Drahtes, setzte aber

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. 36. 17. 1888; Ausbr. d. elektr. Kraft 165. — [2] H. POINCARÉ, C. R. 120. 1046 u. 1229. 1892.

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen direkt gleich der Lichtgeschwindigkeit. Dann hat J. J. THOMSON[1] die Theorie der Wellen längs eines Drahtes, der von einer konzentrischen leitenden Hülle umgeben ist, behandelt; A. SOMMERFELD[2] diskutierte in eingehender Weise das Fortschreiten der Wellen längs eines Drahtes von verschiedener Dicke und Material und kam zu bemerkenswerten Resultaten für die Geschwindigkeit, Dämpfung usw.; G. MIE[3] behandelte den Fall von zwei parallelen Drähten, der meist bei Versuchen verwirklicht wird[4].

Vom Standpunkt der älteren Theorien, nach dem KIRCHHOFFschen Vorbild[5], sind besonders die Erscheinungen längs der Paralleldrähte verfolgt worden, in ausgedehntem Maß und mit Berücksichtigung aller bei den Versuchen auftretenden Umstände von DRUDE[6]. Diese Behandlung hat darin ihre Rechtfertigung, daß bei den Experimenten der Widerstand der Drähte fast stets vernachlässigt werden kann, diese als vollkommene Leiter angesehen werden dürfen.

### Ein unendlich langer gerader Draht[7].

Die $z$-Achse sei die Richtung der Drahtachse, $r$ und $\varphi$ seien Polarkoordinaten, die elektrische Kraft liege stets in der durch den Draht gelegten Meridianebene. Da alles um den Draht symmetrisch ist, bleiben wie beim HERTZschen Oszillator nur noch die zwei elektrischen Komponenten $Z$ und $S$ und die magnetische $P$ senkrecht zur Meridianebene übrig. Diese drei Komponenten lassen sich wieder aus einer einzigen skalaren Funktion $\Pi$ herleiten, die durch die Differentialgleichung bestimmt ist:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\Pi}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} \quad . \tag{30}$$

Dann finden sich:

$$P = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\,\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\Pi}{\partial r}\,; \qquad Z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right); \qquad S = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\,\partial z} \quad . \tag{31}$$

Als Lösung von (30) kann der reelle Teil von:

$$\Pi = e^{\frac{2\pi\iota t}{\tau} + \iota b z}\cdot u \qquad \iota = \sqrt{-1} \tag{32}$$

genommen werden, wo $u$ eine nur von $r$ abhängige Funktion und

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} - \iota\beta \quad . \tag{33}$$

Dabei mißt $\beta$ die örtliche Dämpfung beim Fortschreiten der Welle längs des Drahtes und $\lambda$ ist die Wellenlänge der Schwingung.

Aus 1. ergibt sich für $u$ die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + (k^2 - b^2)\,u = 0 \quad , \tag{34}$$

wo

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\,\frac{2\pi\iota}{\tau} \quad . \tag{35}$$

$k$ hat in dem umgebenden Dielektrikum, das Luft sei, den Wert $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$; für

---

[1] J. J. THOMSON, Rec. Res. 262 usw. u. 451 usw. 1893. — S. auch Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. **43**. 125; **44**. 199. 1897. — [2] A. SOMMERFELD, Wied. Ann. **67**. 232. 1899. — [3] G. MIE, Ann. d. Phys. **2**. 200. 1900. — [4] S. auch die oben zitierten Arbeiten von M. ABRAHAM; u. E. COHN, Elektromagnet. Feld 449 usw. 1900. — [5] G. KIRCHHOFF, Ges. Abhandl. 131, 154, 182. — [6] P. DRUDE, Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. **23**. 1896; Wied. Ann. **60**. 1. 1897 u. a. O.; s. auch Phys. d. Äthers 441 usw. 1894. — [7] A. SOMMERFELD, l. c.

den Draht diene der Index 2. An der Oberfläche des Drahtes $r = \varrho$ muß $Z_1 = Z_2$ und $P_1 = P_2$ sein. Man erhält demnach als Grenzbedingungen:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} (k_1^2 - b^2)\, u_1 &= (k_2^2 - b^2)\, u_2 \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{du_1}{dr} &= \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{du_2}{dr} \end{aligned} \right\} \text{ für } r = \varrho \quad .$$

Die Gleichung (34) läßt sich leicht auf die Form bringen:

$$(37) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + u = 0 \quad ,$$

deren Lösungen die BESSELschen Funktionen erster und zweiter Art $J(x)$ und $K(x)$ sind. Schließt man eine Fortpflanzung ohne Dämpfung aus, so nimmt die Lösung von (37) die Form an:

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= A_1 K\left(\sqrt{k_1^2 - b^2} \cdot r\right) \\ u_2 &= A_2 J\left(\sqrt{k_2^2 - b^2} \cdot r\right) \end{aligned} \right. \quad .$$

und die Grenzbedingungen lauten:

$$(39) \left\{ \begin{aligned} & A_1 (k_1^2 - b^2) K\left(\sqrt{k_1^2 - b^2} \cdot \varrho\right) = A_2 (k_2^2 - b^2) J\left(\sqrt{k_2^2 - b^2} \cdot \varrho\right) \\ & A_1 \frac{k_1^2}{\mu_1} \sqrt{k_1^2 - b^2} \cdot K'\left(\sqrt{k_1^2 - b^2} \cdot \varrho\right) = A_2 \frac{k_2^2}{\mu_2} \sqrt{k_2^2 - b^2} \cdot J'\left(\sqrt{k_2^2 - b^2} \cdot \varrho\right) , \end{aligned} \right.$$

wo $J'$ und $K'$ die Differentialquotienten von $J$ und $K$ nach dem Argument sind. Setzt man zur Abkürzung:

$$(40) \qquad x_1 = \sqrt{k_1^2 - b^2} \cdot \varrho \ , \qquad x_2 = \sqrt{k_2^2 - b^2} \cdot \varrho \quad ,$$

so geben (39) die Bedingung:

$$(41) \qquad x_1 \frac{K(x_1)}{K'(x_1)} = \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} x_2 \frac{J(x_2)}{J'(x_2)} \quad .$$

Diese transzendente Gleichung ist zur Bestimmung der Größe $b$ zu lösen. Ist die Lösung gefunden, so ergibt eine der Gleichungen (39) den Quotienten $\frac{A_1}{A_2}$, oder wenn $f$ einen $A_1$ und $A_2$ gemeinsamen willkürlichen Faktor bedeutet, kann man setzen:

$$A_1 = \frac{f}{b^2 - k_1^2} \cdot \frac{1}{K(x_1)} \ ; \qquad A_2 = \frac{f}{b^2 - k_2^2} \cdot \frac{1}{J(x_2)} \quad .$$

Bei Diskussion der transzendenten Gleichung (41) unterscheidet SOMMERFELD zwei Grenzfälle; sie sind durch den Wert der Größe

$$\varkappa = \varrho \pi \sqrt{\sigma \mu n_1}$$

charakterisiert, die wir früher schon benutzt haben [s. Formel (10), S. 602]. In dem Ausdruck für $\varkappa$ ist aber $\sigma$ in elektromagnetischem Maß gemessen, während in der vorstehenden Rechnung das GAUSSsche Maß benutzt wird.

Ist $\varkappa$ groß, so drangen, wie wir damals sahen, die schnellen Schwingungen nicht in den Draht ein, wir haben den Fall eines fast vollkommenen Leiters. Die Abweichung der Fortpflanzung der Wellen von der Lichtgeschwindigkeit und die Dämpfung ist nur sehr gering. Z. B. bei einem Kupferdraht von 4 mm Dicke und einer Schwingungszahl von $n_1 = 10^9$ in der Sekunde bleiben die Drahtwellen nur um 8 km hinter der Lichtgeschwindigkeit zurück und werden erst nach 1,5 km Weges auf den $e$-ten Teil ihres Wertes gedämpft. Ist $\varkappa$ klein, so ändern sich die Verhältnisse sehr, z. B. für einen Platindraht von 0,004 mm

Durchmesser und $n_1 = 3 \cdot 10^8$ wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwa $^3/_4$ der Lichtgeschwindigkeit und die Dämpfung so stark, daß sie die Schwingungsamplitude schon nach einem Weg von 17 cm auf den $e$-ten Teil reduziert. Die Kraftlinien verlaufen hier nicht, wie in dem ersten Fall, nach außen merklich senkrecht zur Drahtoberfläche.

## Zwei parallele Drähte[1].

### Unendlich lange Drähte.

Während ein Draht, an dem die Wellen entlang fortschreiten, sehr stark elektromagnetische Energie ausstrahlt und, wie in der Senderantenne, gerade zu diesem Zweck oft benutzt wird, halten zwei Paralleldrähte, die von den entgegengesetzten Polen des schwingenden Systems beeinflußt wurden, so daß die Welle zwischen den beiden Drähten sich fortbewegt, die Energie fast vollständig zusammen. Deshalb ist eine solche Anordnung sehr häufig benutzt worden, um den Einfluß verschiedener Medien (zwischen den zwei Drähten) auf die Wellen zu untersuchen.

Kann man die Drähte als vollkommene Leiter ansehen, was meist erlaubt ist, so führt, wie schon früher gesagt, die Maxwellsche Theorie zu den Ausgangsgleichungen, die Kirchhoff bereits entwickelt hatte.

Die zwei Drähte mögen in Richtung der $x$-Ache verlaufen, da sie vollkommene Leiter sind, steht die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ stets senkrecht zu ihrer Oberfläche, d. h. $\mathfrak{E}_x = 0$, während die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ tangential zur Oberfläche verläuft; sind die Wellen transversal, so muß $\mathfrak{H}_x = 0$ sein. Für das die Drähte umgebende Dielektrikum gelten also nach (1b), (2b) und (5a) die Gleichungen:

$$(42) \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 0 \;; \qquad -c\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} \;; \qquad c\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} \;;$$

$$(43) \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = 0 \;; \qquad c\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} \;; \qquad -c\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} \;;$$

$$(44) \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0 \;; \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0 \;.$$

Behandelt man diese Gleichungen wie die Gleichungen (1b) usw., so erhält man wie dort für die $y$ und $z$-Komponenten der $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ Integrale der Form:

$$\mathfrak{A} = f(x - vt, y, z) \,, \qquad \text{wo} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \,,$$

die Wellen in Richtung der $x$-Achse darstellen.

Betrachten wir nur die Verhältnisse in einer zur $x$-Achse senkrechten Wellenebene, so sieht man, daß nach (44) $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ sich darstellen lassen durch:

$$(45) \qquad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \;; \qquad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \,,$$

wo $V$ ein Skalar, der der Gleichung genügt:

$$(46) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \;.$$

$V$ ist durchaus analog dem elektrischen Potential, wenn die zwei Drähte auf der Längeneinheit mit den Elektrizitätsmengen $+q$ und $-q$ geladen sind. Die Zahl der hierbei senkrecht von der Längeneinheit der Oberfläche des Drahtes (1) ausgehenden Kraftlinien ist gegeben durch:

$$q = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \mathfrak{E}_n \, ds_1 \quad ,$$

[1] Wir folgen hier M. Abraham, Th. d. El. 1. 331 usw.

wo $ds_1$ ein Element des Querschnittumfanges des Drahtes (1) ist, d. h.

$$q = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n_1} ds_1 \quad . \tag{47}$$

Diese Kraftlinen münden auf der gegenüber liegenden Längeneinheit des Drahtes (2), wodurch sie die Ladung $-q$ erhält, also $q = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n_2} ds_2$. $V$ hat auf den in derselben Wellenebene gelegenen Kurven $s_1$ resp. $s_2$ den konstanten Wert $V_1$ resp. $V_2$, und das Linienintegral der elektrischen Kraft von einem Punkt der Kurve $s_1$ zu einem Punkt von $s_2$ ist

$$\int_1^2 \mathfrak{E}_s\, ds = V_1 - V_2$$

und kann als „Spannung" bezeichnet werden. Analog der Elektrostatik definieren wir die Kapazität $C$ der Längeneinheit des Systems durch:

$$q = C(V_1 - V_2) \tag{48}$$

und die elektrische Energie pro Längeneinheit:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad .$$

Für das magnetische Feld genügt man der ersten Gleichung (42) durch:

$$\mu\mathfrak{H}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,, \qquad \mu\mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \tag{49}$$

also:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad .$$

Für eine geschlossene Kurve in einer Wellenebene ist stets $\int \mathfrak{B}_n\, ds = 0$, also hat dies Integral, genommen in der Wellenebene zwischen zwei Punkten 1 und 2 auf den beiden Leitern, immer denselben Wert; man kann also den gesamten magnetischen Induktionsfluß für die Längeneinheit der Leitung definieren durch:

$$\int_1^2 \mathfrak{B}_n\, ds = \int_1^2 [\mu\mathfrak{H}_y \cos(n\,,\, y) + \mu\mathfrak{H}_z \cos(n\,,\, z)]\, ds = -\int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi_1 - \varphi_2 \quad .$$

Wir definieren in Analogie mit früherem die Selbstinduktion $L$ der Längeneinheit des Systems durch:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{c} L \cdot i \quad , \tag{50}$$

wo $i$ der Strom im Drahte (1).

$\varphi$ muß nach dem Obigen auf den Kurven $s_1$ und $s_2$ konstant sein, ferner ist

$$\int \mathfrak{H}_{s_1} ds_1 = \frac{4\pi i}{c} \quad ,$$

und wenn die Richtung von $i$, $n_1$ und $s_1$ ein Rechtssystem bildet, so wird:

$$\mathfrak{H}_{s_1} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial n_1}\,, \qquad \text{also:} \qquad i = -\frac{c}{4\pi\mu}\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} ds_1 \quad .$$

Auch hier muß, da es in der MAXWELLschen Theorie nur geschlossene Ströme gibt, dem Strom $i$ im Draht (1) ein Strom $-i$ im Draht (2) entsprechen. Da die Bedingungen für die Funktionen $V$ und $\varphi$ formal ganz dieselben sind,

so gehen die für $\varphi$ geltenden Gleichungen aus denen für $V$ geltenden hervor, wenn man in diese $i\frac{\varepsilon\mu}{c}$ statt $q$ einsetzt. Demnach folgt aus den Gleichungen, die $C$ und $L$ jetzt definieren:

$$CL = \varepsilon\mu \quad .$$

Die magnetische Energie (im GAUSSschen Maßsystem, das wir hier immer benutzten) ist pro Längeneinheit:

$$T = \frac{1}{2c^2} L i^2 \quad . \tag{51}$$

Setzen wir $V$ und $\varphi$ in die zweite und dritte der Gleichungen (42) und (43) ein und schreiben wir

$$V = q V_0(y, z) \quad ,$$

wo $V_0$ das elektrostatische Potential der beiden Drähte ist, wenn diese pro Längeneinheit die Ladungen $+1$ und $-1$ haben, so erhalten wir endlich die Gleichungen:

$$\begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{C}\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{L}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t} \quad . \end{cases} \tag{52}$$

Das sind aber die beiden Gleichungen, die den KIRCHHOFFschen Ansatz darstellen, wenn der Widerstand der Drähte vernachlässigt wird. Man erhält aus ihnen:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad , \tag{53}$$

d. h. dieselbe Gleichung wie (9). Die allgemeine Lösung ergibt zwei Ladungs- und zwei Stromwellen, die in positiver und negativer Richtung mit der Geschwindigkeit $v$ fortschreiten:

$$\begin{cases} q = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad , \\ i = v[f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] \quad . \end{cases} \tag{54}$$

Es ergibt sich

$$T = U \quad ,$$

die magnetische und elektrische Energie sind einander gleich.

Die in der Sekunde durch eine Wellenebene hindurchgehende Energie ist $v(U + T)$, d. h.

$$i(V_1 - V_2)$$

ist der Energiestrom längs der Leitung.

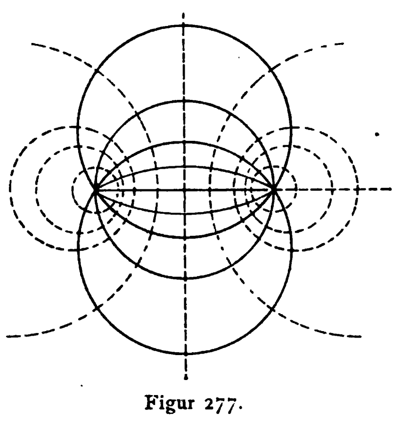
Die elektrischen und magnetischen Kraftlinien stehen senkrecht aufeinander und entsprechen in ihrem Verlauf den elektrischen Kraftlinien und den Linien konstanten Potentials, wenn der eine Draht mit $+q$, der andere mit $-q$ pro Längeneinheit statisch geladen ist. Die elektrischen Kraftlinien sind also Kreise in der Wellenebene, die durch (1) und (2) hindurchgehen, die magnetischen Kraftlinien sind auch Kreise in der Wellenebene und teilen die Verbindungslinie (1, 2) harmonisch (s. Figur 277, wo die stark ausgezogenen Linien die elektrischen, die gestrichelten Linien die magnetischen Kraftlinien darstellen).

Das elektrostatische Problem liefert sofort für einen Punkt, der die Abstände $r_1$ und $r_2$ von (1) und (2) hat:

$$V_1 = -V_2 = \frac{2q}{\varepsilon}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2q}{\varepsilon}\log\left\{\frac{d + \sqrt{d^2 - 4\varrho^2}}{d - \sqrt{d^2 - 4\varrho^2}}\right\} \quad , \tag{55}$$

wo $d$ der Abstand der zwei Drahtachsen und $\varrho$ der Radius eines der Drähte; also die Kapazität der Längeneinheit des Systems:

$$\frac{1}{C} = \frac{4}{\varepsilon} \log\left\{\frac{d + \sqrt{d^2 - 4\varrho^2}}{d - \sqrt{d^2 - 4\varrho^2}}\right\}$$



Figur 277.

und die Selbstinduktion der Längeneinheit:

$$L = 4\mu \log\left\{\frac{d + \sqrt{d^2 - 4\varrho^2}}{d - \sqrt{d^2 - 4\varrho^2}}\right\} .$$

Ist der Radius der Drähte klein gegen ihren Abstand, so wird:

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{4}{\varepsilon} \log\left(\frac{d}{\varrho}\right) \qquad \text{und} \\ L &= 4\mu \log\left(\frac{d}{\varrho}\right) . \end{aligned} \right.$$

**Begrenzte Paralleldrähte.**

Die bisher als unendlich ausgedehnt angenommenen Drähte mögen bei $x = 0$ in einem Kondensator von der Kapazität $C_0$ endigen, dann bilden sich durch Reflexion an den Enden stehende Schwingungen aus, die wir nach (48) und (54) schreiben können:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\left\{a e^{\iota n\left(t - \frac{x}{v}\right)} + a_r e^{\iota n\left(t + \frac{x}{v}\right)}\right\} ,$$

$$i = v\left\{a e^{\iota n\left(t - \frac{x}{v}\right)} - a_r e^{\iota n\left(t + \frac{x}{v}\right)}\right\} .$$

Wenn die Ladung einer Kondensatorplatte $q_0$ und seine Kapazität $C_0$ heißt, so muß am Ende der Leitung für $x = 0$:

$$V_1 - V_2 = \frac{q_0}{C_0} \qquad \text{und} \qquad i = \frac{dq_0}{dt}$$

sein. Daraus ergibt sich:

$$\frac{a_r}{a} = \frac{1 - \frac{\iota n}{v}\frac{C_0}{C}}{1 + \frac{\iota n}{v}\frac{C_0}{C}} ,$$

also sind die absoluten Werte $|a|$ von $a_r$ und $a$ einander gleich. Man kann setzen

$$a_r = |a| e^{-\psi\iota} \qquad \text{und} \qquad a = |a| e^{+\psi\iota} ,$$

wo

$$(57) \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{n}{v}\frac{C_0}{C}$$

und $2\psi$ die Phasendifferenz zwischen einfallender und reflektierter Welle ist.

Bei Trennung vom Reellen und Imaginären, unter Berücksichtigung nur des reellen Teiles, wird die stehende Spannungswelle:

$$(58) \qquad V_1 - V_2 = \frac{2|a|}{C} \cos\left(\frac{n x}{v} - \psi\right) \cos(n t) ,$$

die Stromwelle:

$$(59) \qquad i_1 = -i_2 = v\, 2|a| \sin\left(\frac{n x}{v} - \psi\right) \sin(n t) .$$

Wäre die Kapazität $C_0 = 0$, d. h. endigten die Drähte frei, so würde $\psi = 0$: Am Ende der Leitung befände sich ein Spannungsbauch und ein Stromknoten.

Wäre $C_0$ sehr groß gegen die Kapazität der Leitung, oder wären die Drähte am Ende leitend verbunden, so würde nahe $\psi = \frac{\pi}{2}$: Am Ende der Leitung läge ein Spannungsknoten und ein Strombauch.

Auf der Leitung, d. h. auf der negativen Seite der $x$ in $x'$, möge ein Spannungsknoten hergestellt sein, indem dort eine große Kapazität eingeschaltet oder eine kurze Brücke aufgelegt ist, dann wird dort merklich $V_1 - V_2 = 0$, d. h.

$$-\frac{n x'}{v} - \psi = -(2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{wo} \quad m = 0, 1, 2 \ldots \tag{60}$$

Die hieraus folgenden Werte von $x'$ geben den Abstand der Spannungsknoten vom Ende der Leitung.

Hat die Leitung die Länge $l$ und am Anfang eine große Kapazität, so finden sich aus (60) die Schwingungszahlen ihrer Eigenschwingungen, wenn man $x' = l$ in die Gleichung einsetzt. Es wird nach (57):

$$\operatorname{ctg}\frac{n l}{v} = \frac{n}{v}\frac{C_0}{C},$$

$$\frac{n l}{v} \cdot \operatorname{tg}\frac{n l}{v} = \frac{l C}{C_0}. \tag{61}$$

Diese Formel wurde aus der Fernwirkungstheorie zuerst von KIRCHHOFF für eine beliebige Form des Schließungskreises abgeleitet, sie gilt nach der MAXWELLschen Theorie für den speziell behandelten Fall der Paralleldrähte, da bei ihnen die Strahlung fast völlig wegfällt.

$lC$, die Kapazität der Leitung, sei sehr klein gegen die Kapazität des Kondensators, dann ist die kleinste Wurzel von (61):

$$\frac{n l}{v} = \sqrt{\frac{l C}{C_0}} \quad \text{oder, da} \quad v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} = \frac{c^2}{LC},$$

$$\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{C_0 l L},$$

das ist die THOMSONsche Formel, die bei Vernachlässigung der Kapazität des Schließungskreises des Kondensators gilt, sie wird vervollständigt durch (61), bei der die Kapazität der Drahtleitung berücksichtigt ist. Die andern Wurzeln ergeben sich aus

$$\frac{n l}{v} = m\pi + \beta, \quad \text{also} \quad (m\pi + \beta)\beta = \frac{l C}{C_0},$$

wo $\beta$ eine kleine Größe und $m$ eine ganze Zahl. Es wird für $m \neq 0$ genähert

$$m\pi\left(\frac{n l}{v} - m\pi\right) = \frac{l C}{C_0}$$

und mit steigendem $m$ wird immer genauer $\frac{n l}{v} = m\pi$, d. h. $\frac{2\pi l}{\lambda} = m\pi$, die Drahtlänge wird ein Vielfaches der halben Wellenlänge.

Ist $lC$ sehr groß gegen $C_0$, so wird genähert

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2m+1}{2}\pi,$$

die Drahtlänge wird ein ungerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge.

Nach (58) und (59) bewirkt eine Kapazität $C_0$ (an der Stelle $x = 0$), oder eine leitende Überbrückung der Drähte, daß die an dieser Stelle reflektierte Welle um $\psi$ in Phase hinter der einfallenden zurückbleibt. Dasselbe würde erreicht, wenn man die Leitung um $\psi \frac{v}{n} = \psi \frac{\lambda}{2\pi} = \delta b$ verlängert hätte, diese Strecke müßte dann die reflektierte Welle zweimal durchlaufen haben, ehe sie bei $x = 0$ mit der einfallenden interferierte. Bestimmt man die Wellenlänge an einem Paralleldrahtsystem, indem man die Knotenabstände der stehenden Wellen mißt, so wird also eine in solchen Knotenstellen aufgelegte Brücke diese Wellenlängen scheinbar verkleinern, und es muß diese von DRUDE[1] als „Bügel- oder Brückenverkürzung" bezeichnete Größe in Rechnung gezogen werden. Ist die Brücke klein, so daß $\psi$ mit $\operatorname{tg}\psi$ vertauscht werden kann, dann ist die Verkürzung proportional der Länge der Brücke (des die beiden Drähte verbindenden Metallbügels). Für Wellen in Luft ist genähert die Verkürzung gleich der halben Brückenlänge, wenn der Bügel aus demselben Draht wie die Leitung gewählt wird.

Bisher wurden die zwischen den Drähten fortschreitenden Wellen als ungedämpft und die Reflexion an einer Brücke als vollständig angenommen, beides ist in Wirklichkeit nicht so[2]. Die zeitliche Dämpfung kann man berücksichtigen, indem man z. B. die einfallende Welle, statt wie bisher

$$a e^{i n\left(t - \frac{x}{v}\right)} = a e^{i 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)} \quad ,$$

jetzt

$$a e^{(-\gamma + 2\pi i)\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)}$$

schreibt, und natürlich analog für die reflektierte und über die Brücke fortschreitende Welle. Die Tatsache, daß nur ein Teil der einfallenden Welle reflektiert wird, ergibt eine verschiedene Größe der Amplitude der einfallenden und reflektierten Schwingung, die letztere $|a_r|$ kann man durch Multiplikation der ersteren $|a|$ mit einem Reflexionsfaktor gewinnen.

Die Grenzbedingungen an der Brücke sind (bei Vernachlässigung des Drahtwiderstandes und wenn $\varepsilon = \mu = 1$)

$$L_b \cdot l_b \cdot \frac{d i'}{d t} = V_1 - V_2 = \frac{q}{C} = 4 q \log\left(\frac{d}{\varrho}\right) \quad ,$$

wo $L_b$ die Selbstinduktion der Längeneinheit der Brücke, die eine Länge $l_b$ hat. $i'$ ist der Strom in der Brücke. Bezeichnet $i''$ den Strom hinter der Brücke und $q''$ die Ladung der Längeneinheit der Drähte hinter der Brücke, so kommen an der Brücke noch die zwei Bedingungen hinzu:

$$i = i' + i'' \,, \qquad q = q'' \quad .$$

Unter Einführung dieser Grenzbedingungen und des Ausdrucks für die Brückenverkürzung

$$\delta b = \psi \frac{\lambda}{2\pi} \tag{62}$$

fand DRUDE[3], daß die Amplitude der reflektierten (die Brücke überschreitenden Welle) um so kleiner (größer) ist, je kürzer die Brücke ist.

Die Amplitudenschwächung durch Reflexion $\left|\frac{a_r}{a}\right|$ kann für kleine $C$ durch $\delta b$ ausgedrückt werden:

$$\left|\frac{a_r}{a}\right|^2 = \frac{1}{1 + \left(4\pi \frac{\delta b}{\lambda}\right)^2} \quad .$$

---

[1] P. DRUDE, Wied. Ann. **54**. 360. 1895; Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. Mai 1895, S. 333; Wied. Ann. **55**. 637. 1895. — [2] Theorie d. elektr. Drahtwellen s. u. a. P. DRUDE, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. **23**. 1896; Wied. Ann. **60**. 1. 1897. — [3] P. DRUDE, Wied. Ann. **60**. 11. 1897.

Die Berücksichtigung des (effektiven) Widerstandes der Drähte liefert neben der zeitlichen noch eine örtliche Dämpfung (Absorption), die Wellenlänge $\lambda$ bleibt unverändert, nur wenn der Widerstand groß, wird $\lambda$ verkleinert.

**Das umgebende Medium hat Leitfähigkeit.**

In diesem Falle treten an die Stelle der beiden Gleichungen (52) des KIRCHHOFFschen Ansatzes vollständigere. Jetzt ist auch der Widerstand $w$ der Längeneinheit der Leitung zu berücksichtigen, so daß die zweite der beiden Gleichungen lautet, wenn für das Medium $\mu = 1$ und $\varepsilon$ seine Dielektrizitätskonstante ist:

$$(63\text{a}) \qquad i w = -\frac{L}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{C}\frac{\partial q}{\partial x} = -4\log\left(\frac{d}{\varrho}\right)\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial q}{\partial x}\right\},$$

und die erste der Gleichungen (52) wird, wenn $i_a$ der aus der Längeneinheit der Leitung in das umgebende Medium abgeleitete Strom ist:

$$(63\text{b}) \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t} + i_a = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{V_1 - V_2}{w_a} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma q}{\varepsilon},$$

wenn $w_a$ der Widerstand der Ableitung pro Längeneinheit des Systems und $\sigma$ die Leitfähigkeit des Mediums ist. Aus den beiden Gleichungen (63) ergibt sich:

$$(64) \qquad \frac{c^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma q}{\varepsilon}\right) + \frac{c^2 \cdot w}{4\log\frac{d}{\varrho}}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma q}{\varepsilon}\right),$$

welche Gleichung dieselbe Form hat wie (8), nur tritt an die Stelle von $\frac{\partial}{\partial t}$ hier $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_0}$.

Behandelt man (64) analog (8), führt auch hier den durch die Leitfähigkeit des Mediums bedingten Absorptionskoeffizienten $\alpha$ ein und bedenkt, daß $\sigma$ stets klein, was auch noch für Elektrolyte gilt, und die Leitfähigkeit der Drähte groß sein soll, so erhält man wieder die Beziehungen (19), (20) und (21), in denen $\mu = 1$ zu setzen. Wir setzen sie nochmals hierher:

$$(65) \qquad \nu^2 = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}\right); \qquad (66) \qquad \alpha = \frac{2\sigma\tau}{\varepsilon\left\{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\sigma\tau}{\varepsilon}\right)^2}\right\}}$$

und die Wellenlänge

$$(67) \qquad \lambda^2 = \frac{c^2\tau^2}{\varepsilon} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\sigma\tau}{\varepsilon}\right)^2}}.$$

Berechnet man in einem absorbierenden Medium die Brückenverkürzung $\delta b$, so wird sie kleiner als früher, da $\psi$ sich im allgemeinen weniger ändert, als sich $\lambda$ verkleinert.

Reflexion und Brechung der Drahtwellen an der Grenze zweier verschiedener Medien führen zu denselben Formeln, die für freie ebene Wellen, die senkrecht einfallen, gelten, wie schon die formale Übereinstimmung der Gleichungen (8) und (64) zeigt, und wie sich auch aus dem sehr geringen, meist zu vernachlässigenden Einfluß der Drähte auf die Fortpflanzung ergibt. Man erhält somit für das Verhältnis $R$ resp. $D$ der reflektierten resp. durchgehenden zur einfallenden Intensität [s. Formel (28)], wenn $\mu = 1$:

$$R = \frac{(\nu - 1)^2 + \nu^2\alpha^2}{(\nu + 1)^2 + \nu^2\alpha^2}, \qquad D = \frac{4}{(\nu + 1)^2 + \nu^2\alpha^2}$$

und für die Phasenänderung der einfallenden Welle bei Reflexion $\psi$ resp. Durchgang $\psi'$:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\,\nu\,\alpha}{\nu^2 + \nu^2\alpha^2 - 1}\,, \qquad \operatorname{tg}\psi' = \frac{\nu\,\alpha}{\nu + 1}\,,$$

wo $\psi$ und $\psi'$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Weitere Literatur über Theorie der Drahtwellen und Ähnliches:

H. C. Pocklington, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. **9**. 324. 1897.
A. Ekström, Öfvers. af kgl. Vet. Akad. Förhdl. **53**. 377. 1896.
B. G. Morton, Phil. Mag. (5) **50**. 605. 1900; (6) **4**. 302. 1902; (6) **5**. 643. 1903.
M. Abraham, Ann. d. Phys. **6**. 217. 1901.

### $\eta$) Wellen in Metallröhren.

Die Theorie hat viele Ähnlichkeit mit der für Wellen längs Drähten, wie sie von J. J. Thomson und Sommerfeld (s. früher) gegeben ist; während aber bei einem Drahte alles symmetrisch zur Achse angenommen werden kann, ist das für die Prüfung durch Versuche in unserem Fall nicht mehr möglich. Bei Einführung von Zylinderkoordinaten ($z$, $r$, $\varphi$) in die Maxwellschen Gleichungen, wie sie die von Rudolf H. Weber[1] gegebene Theorie vornimmt, muß also auch das Azimut $\varphi$ berücksichtigt werden. Im Verlauf der Rechnung und bei den Anwendungen wird dann die Schwingung von $z$ unabhängig angenommen (d. h. stehende Wellen vorausgesetzt), das Metall wird als unendlich guter Leiter und zeitliche und örtliche Dämpfung als verschwindend behandelt. Ist der Radius der Röhre $r = a$, so findet Weber die möglichen Eigenschwingungen ($\tau$ = Schwingungsdauer) aus der Gleichung:

$$J_n(x) = \text{Extremwert}\,,$$

wo

$$x = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{2\,\pi}{c\cdot\tau}\cdot a$$

und $J_n$ die Besselsche Funktion erster Art von der $n$-ten Ordnung bezeichnet.

Nennt man $l_n^{(m)}$ den Wert von $x$ für den $m$-ten Extremwert von $J_n(x)$, so ist

$$\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{2\,\pi}{c\,\tau}\cdot a = l_n^{(m)}\,.$$

Da $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Dielektrikum ($\varepsilon$, $\mu$) ist, so kann man $\frac{c\,\tau}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \lambda$ als Wellenlänge der Schwingung $\tau$ auffassen und erhält:

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{l_n^{(m)}}\cdot a\,,$$

wo $n$ und $m$ alle ganzen positiven Zahlen bedeuten können.

---

Die Theorie der elektrischen Schwingungen einer Kugel s. J. J. Thomson, Rec. Res. S. 361 usw. 1893; A. Lampa, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **112** (IIa). 37. 1903.

Theorie der Wirkung (Reflexion) eines unendlich langen Metallzylinders auf Hertzsche Wellen s. W. Seitz, Ann. d. Phys. **16**. 746. 1904; W. von Ignatowski, Ann. d. Phys. **18**. 495. 1078. 1905.

Theorie der Schwingungen eines Rotationsellipsoides s. M. Abraham, Wied. Ann. **66**. 435. 1898; M. Brillouin, Propagation de l'électricité, Paris 1904. 326.

---

[1] Rudolf H. Weber, Ann. d. Phys. **8**. 721. 1902. S. auch J. Larmor, Proc. Lond. Math. Soc. **26**. 119. 1894; A. Kalähne, Ann. d. Phys. **18**. 92. 1905, wo die Theorie auf ringförmige Röhren ausgedehnt wird.

## 25. Erzeugung schneller Schwingungen.

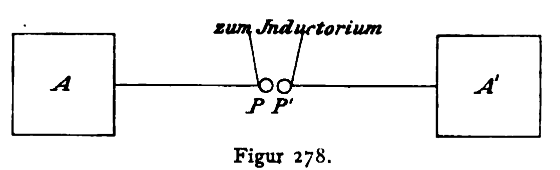
Die Oszillatoren kann man ihrer Form und Wirkung nach in offene und geschlossene einteilen.

### a) Offene Oszillatoren.

Sie bestehen nach dem Vorgang von HERTZ, wenn nicht möglichst kurze Wellen erzeugt werden sollen, aus einer linearen Strombahn mit anschließenden Endkapazitäten.

Je nach der Länge des linearen Drahtes (dem Wert der Selbstinduktion) und der Größe der anschließenden Metallplatten oder Kugeln (dem Wert der Kapazität) bestimmt sich die Schwingungsdauer genähert aus der THOMSONschen Formel.

Bei Berechnung der Schwingungsdauer nach der THOMSONschen Formel $\tau = 2\pi\sqrt{LC}$ hat man, worauf POINCARÉ[1] zuerst aufmerksam machte, darauf zu achten, daß die Kapazität $C$ der Anordnung sich ergibt als die Ladung einer der beiden Endplatten (Kugeln), wenn diese die Potentialdifferenz 1 gegen einander, also $\frac{1}{2}$ gegen den umgebenden Raum haben. In einem Beispiel bei HERTZ waren statt der Platten $A$ und $A'$ zwei große Kugeln von je 15 cm Radius als Endkapazitäten benutzt; es wäre also für $C$ in die Formel zu setzen: $C = \frac{15}{2}$ cm.



Figur 278.

Sehr oft benutzt ist ein Oszillator der nebenstehenden Form (Figur 278). $P, P'$ sind zwei Kugeln (etwa 2 cm Durchmesser), am besten aus Zink oder einem anderen Metall mit aufgenieteten, einander gegenüberstehenden Zinkkappen, zwischen denen der Funken überspringt. Direkt neben ihnen, oder in ihnen, münden die vom Induktorium (oder in manchen Fällen Influenzmaschine) kommenden Drähte. Will man besonders reine Wellen erzeugen, so schaltet man zwischen eine (oder beide) der Kugeln und die Zuleitungsdrähte eine kleine Funkenstrecke, wodurch der Einfluß der elektrischen Vorgänge im Induktorium (die langsamen Schwingungen der Sekundärspule) auf die Schwingungen des Oszillators vermindert wird. Die Funkenstrecke muß oft frisch poliert werden (bei Zink seltener), um die „wirksamen" Funken zu liefern. Je größer die Funkenstrecke, um so stärker ist die Dämpfung, bei zu großer Entfernung von $P$ und $P'$ sind keine Schwingungen mehr möglich. Besser als in Luft läßt man den Funken in einer isolierenden Flüssigkeit (Petroleum, Vaselinöl usw.) überschlagen, dabei ist auch das häufige Polieren nicht mehr nötig. — Für kleinere Wellenlängen hat schon HERTZ die Endkapazitäten ($A$, $A'$) ganz fortgelassen und die lineare Strombahn aus zwei kurzen Messingzylindern gebildet, an denen die Entladungskugeln saßen. Die kleinsten Oszillatoren benutzte bisher LEBEDEW[2]: Zwei Platinzylinder, jeder 1,33 mm lang und 0,5 mm dick, zwischen denen in Petroleum ein 0,02 mm langer Funke übersprang, dadurch erzeugte er Wellen, deren Länge = 0,6 cm und Schwingungszahl = $0{,}5 \cdot 10^{-11}$ Sek. RIGHI[3] ließ den ganzen Oszillator, um kleine Wellen zu erhalten, nur aus den zwei Kugeln bestehen und führte zu jeder den Strom durch eine Zuleitungsfunkenstrecke. Nach HULL[4] soll die Wellenlänge dieser Oszillatoren

---

[1] H. POINCARÉ, C. R. **111**. 322. 1891. — [2] P. LEBEDEW, Wied. Ann. **56**. 1. 1895. — [3] A. RIGHI, Rend. Ac. dei Lincei (5) **2**. 1 sem. S. 505. 1893; Nuov. Cim. (4) **1**. 25. 1895 u. a.; s. auch A. RIGHI, Die Optik der elektr. Schwingungen. Deutsch von DESSAU. Leipzig, 1898. — [4] G. H. HULL, Phys. Rev. **5**. 231. 1897; s. auch H. R. WILLARD und L. E. WOODMAN, Phys. Rev. **18**. 1. 1904.

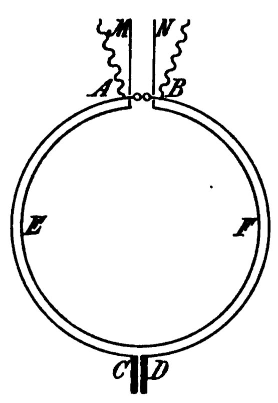
etwa gleich dem fünffachen Durchmesser einer Kugel sein. — LODGE[1] hat als Erreger eine einzige Kugel verwandt, der von beiden Seiten durch Zuleitungsfunkenstrecken Elektrizität mitgeteilt wird. Die Berechnung der Wellenlänge der von einer Kugel mit dem Radius $a$ erzeugten Schwingungen ergab J. J. THOMSON[2]

$$\lambda = \frac{4\pi a}{\sqrt{3}} .$$

Alle offenen Erreger erleiden sehr starke Dämpfung durch Ausstrahlung und eignen sich deshalb besonders zum Studium der elektrischen Strahlen; sollen sie auch zur Erzeugung von Drahtwellen benutzt werden, so verwendet man meist die Anordnung mit zwei Paralleldrähten und aufgelegten Brücken, wie sie zuerst von LECHER[3] hergestellt und studiert wurde und die deshalb oft das LECHERsche Drahtsystem heißt (s. später).

## b) Geschlossene Oszillatoren.

Ihr Typus ist der früher oft erwähnte fast geschlossene Kondensatorkreis, bei dem durch Nähern oder Entfernen der parallelen Kondensatorplatten die Kapazität, also die Schwingungsdauer, geändert werden kann. Eine solche Anordnung $ACDB$ für hohe Schwingungszahlen hat BLONDLOT[4] (s. Figur 279) sehr eng mit einer Drahtschleife $EF$ gekoppelt, von der aus dann die Paralleldrähte $M$, $N$ gespannt waren. Für noch schnellere Schwingungen wird ein dicker Draht zu einem Kreis gebogen, an den Enden eines Durchmessers zerschnitten, die Flächen des einen Schnittes eben gefeilt, so daß sie als Kondensatorplatten einander parallel gegenüberstehen, auf die Enden des anderen Schnittes werden kleine Entladungskugeln aufgesetzt. — Solche und ähnliche Anordnungen taucht man meist in Petroleum oder Öl ein und versieht sie mit Zuleitungsfunkenstrecken; sie heißen oft Blondlot-Erreger.



Figur 279.

---

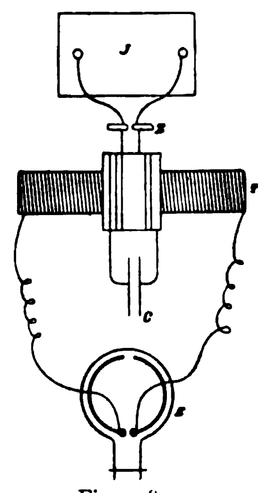
Beide Arten von Oszillatoren schwingen so, daß in der Funkenstrecke ein Strombauch (Spannungsknoten) sich befindet, während bei den linearen Erregern an den Enden ein Stromknoten liegt. Das kann man durch die Größe der Fünkchen, die ein genäherter kleiner Leiter aus den verschiedenen Teilen des Oszillators zieht, oder durch Hitzdrahtinstrumente, die man an verschiedenen Stellen einfügt, durch angehängte GEISSLERsche Röhren u. dgl. nachweisen.[5] Die Grundschwingung des Stromes bei einem linearen Erreger ist also völlig analog der Schwingung des Grundtones einer an den Enden fest gehaltenen Seite, und ihre Wellenlänge ist gleich der doppelten Länge des Erregers; das gilt auch noch annähernd, wenn der Oszillator von erheblicher Dicke ist. Über die Bestimmung der Wellenlänge für die Grundschwingung eines Erregers s. unter „Paralleldrahtsystem".

Neben dieser Grundschwingung treten die Oberschwingungen sehr an Intensität zurück, doch sind sie für den stabförmigen Erreger durch Aufsuchen der Resonanz mit einem veränderlichen Schwingungskreis von KIEBITZ[6] nachgewiesen worden.

---

[1] O. LODGE, Nature **41**. 462. 1890. Über die Schwingungszahl s. G. H. HULL, l. c. und J. C. BOSE, Proc. Roy. Soc. **60**. 167. 1896. — [2] J. J. THOMSON, Rec. Res. S. 370. — [3] E. LECHER, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **99** (IIa). 24. April 1890 und Wied. Ann. **41**. 850. 1890. — [4] R. BLONDLOT, C. R. **114**. 283. 1892. — [5] S. z. B. J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen, S. 502 usw. — [6] F. KIEBITZ, Ann. d. Phys. **5**. 872. 1901.

**Die Dämpfung der Oszillatorschwingungen** durch Ausstrahlung ist u. a. von ABRAHAM für einen linearen offenen Erreger berechnet, s. S. 647; KIEBITZ (l. c.) hat die Gesamtdämpfung experimentell zu bestimmen gesucht, doch ist die Übereinstimmung seiner Beobachtungen mit der Theorie nur gering. Für einen linearen offenen Oszillator mit Endkapazitäten ermittelte BJERKNES [1] nach der früher entwickelten Resonanzmethode das logarithmische Dekrement $\gamma = 0{,}26$. Mit steigender Funkenlänge wächst das Dekrement beträchtlich, z. B. nach BJERKNES von 0,27 auf 0,39, wenn der Funke von 1 mm auf 5 mm Länge gesteigert wird. — Die Angaben von Werten des $\gamma = 0{,}5$ oder 0,6, die sich vielfach finden, lassen sich nicht kontrollieren. — Für geschlossene Erreger ist die Strahlungsdämpfung sehr klein und deshalb auch die Gesamtdämpfung viel geringer als für offene Oszillatoren.



Figur 280. $J$ = Induktorium; $Z$ = Zinkfunkenstrecke; $C$ = Kondensator (Leydner Flasche); $T$ = Tesla-Transformator; $E$ = Blondlot-Erreger.

**Die Erregung der Schwingungen** im Oszillator geschieht, wie angegeben, gewöhnlich durch Verbindung der Pole der Funkenstrecke mit der Elektrizitätsquelle, oft hat es sich aber als vorteilhaft erwiesen, zwischen diese (Induktorium) und den Oszillator einen Tesla-Transformator mit Funkenstrecke einzuschalten, so daß das Schema der Anordnung für einen Blondlot-Erreger wie in der Figur 280 [2] ist.

## 26. Instrumente zur Beobachtung sehr schneller Schwingungen.

Über die außerordentlich zahlreichen Mittel, die nach HERTZs Versuchen benutzt wurden, um sehr schnelle Schwingungen zu entdecken und zu beobachten, kann im folgenden nur eine kurze, auswählende Übersicht gegeben werden. Die ältere Literatur findet sich bei G. WIEDEMANN, Die Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl., Bd. 4, S. 383 usw.

### a) Resonatoren mit Funkenstrecke.

#### α) Der geschlossene Resonator.

Der geschlossene Resonator von HERTZ [3] zeigt elektrische Schwingungen durch **Funkenbildung** an seiner (mit Mikrometerschraube versehenen) Unterbrechungsstelle an, er gibt also den Integraleffekt der Spannung, d. h. stets einen mittleren Wert der an seinem Ort bestehenden Feldgrößen. Seine vorherrschende Grundschwingung hat an der Funkenstrecke einen Spannungsbauch, ihr gegenüber (bei symmetrischer Gestalt) einen Spannungsknoten, also Strombauch. Er spricht um so besser an, je mehr magnetische Kraftlinien seine Fläche durchsetzen und je genauer die der Funkenstrecke gegenüberliegende Stelle (und die benachbarten Teile) in Richtung der elektrischen Kraft fallen. Durch geeignete Zerlegung der elektrischen und magnetischen Kraft in Komponenten findet man jedesmal, welcher Teil der Feldstärke gerade zur Wirksamkeit kommt; durch passende Lage des Resonators kann man auch nur die elektrische oder nur die magnetische Kraft die Schwingung erregen lassen.

---

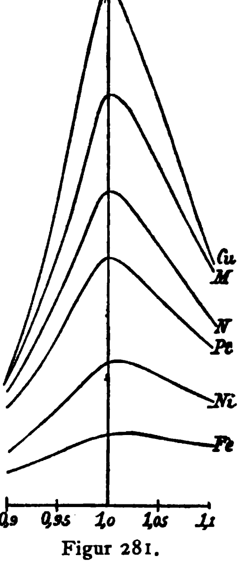
[1] V. BJERKNES, Wied. Ann. **44**. 85. 1891. — [2] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **8**. 337. 1902. — [3] H. HERTZ, Wied. Ann. **34**. 155. 1888. Eine Theorie des Resonators und bestätigende Versuche gibt P. DRUDE, Wied. Ann. **53**. 721. 1894; s. auch H. POINCARÉ, Les oscillations électriques, Paris 1894. S. 220.

Die Form des Resonators wählte HERTZ rechteckig oder kreisförmig; BLONDLOT[1] benutzte ein Rechteck, dessen Unterbrechungsstelle in kleinen parallelen Kondensatorplatten endete, die erst mit der Funkenstrecke versehen waren. Andere Formen sind noch vielfach benutzt worden, so z. B. hat TURPAIN[2] u. a. unsymmetrische Erreger angewandt, oder solche, die außer der Funkenstrecke eine zweite Unterbrechung besaßen usw.

Die Grundschwingung eines rechteckigen oder kreisförmigen Resonators würde nach dem obigen einer Wellenlänge ($\lambda$) entsprechen, die doppelt so groß wäre wie die Drahtlänge ($l$). Bei den Versuchen aber vermehren die einander zugekehrten und meist noch mit Kugeln versehenen Enden der Funkenstrecke die Kapazität, und deshalb (und aus anderen Gründen) findet sich im allgemeinen $\lambda$ größer als angegeben. Nach SARASIN und DE LA RIVES Versuchen[3] ist sie gleich dem achtfachen Durchmesser des Kreises oder etwa = 2,5 bis 2,6 mal der Drahtlänge. MACDONALD[4] berechnet $\lambda = 2{,}53\, l$ [5].

Die Dämpfung geschlossener Resonatoren ohne Funkenstrecke wurde von BJERKNES[6] nach der Resonanzmethode bestimmt. Dabei nahm er geometrisch genau gleiche Kreise (133 cm Durchmesser, 0,5 mm Drahtdicke) aus verschiedenen Metallen als Resonatoren, statt in einer Funkenstrecke endeten die Kreise in den kleinen Metallplatten eines Elektrometers. Die Schwingungen erregte ein Oszillator, dessen Länge durch Ausziehen und Ineinanderschieben von Messingröhren geändert werden konnte, an deren Enden sich kreisförmige Messingscheiben von 30 cm Durchmesser befanden. Die Elektrometerausschläge wurden für sechs Sekundärleiter aus Kupfer, Messing (M), Neusilber (N), Platin, Nickel und Eisen für fünf verschiedene Längen des Erregers beobachtet, denen relative Schwingungsdauern 0,9; 0,95; 1,00; 1,05; 1,10 zukamen. Die Widerstände der Drähte waren:

| | Cu | M | Ni | Fe | N | Pt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstand: | 0,12 | 0,53 | 0,83 | 0,85 | 1,4 | 4,0 Ohm. |



Figur 281.

Die Figur 281 gibt als Abszissen die Schwingungsdauer, als Ordinaten die Elektrometerausschläge. Man ersieht aus ihr direkt, wie größerer Leitungswiderstand und Permeabilität die Dämpfung vergrößert. Aus diesem Einfluß der Magnetisierbarkeit folgt, daß es möglich ist, den Magnetismus von Eisen und Nickel 100 Millionen mal in der Sekunde umzukehren, was noch HERTZ nach seinen Versuchen für unwahrscheinlich gehalten hatte. Der Wert des Dekrementes für den Kupferkreis betrug nach BJERKNES $\gamma = 0{,}034$, wovon 0,027 auf Strahlung und nur 0,007 auf JOULEsche Wärme kamen; bei den magnetischen Metallen war $\gamma = 0{,}27$ und davon rührte 0,24 aus JOULEscher Dämpfung her. Nach derselben Methode und für Schwingungsdauern von der Ordnung 3 bis $5 \cdot 10^{-8}$ maß LAGERGREEN[7] die Dämpfung kreisförmiger und quadratischer Resonatoren, die am Ende kleine Kondensatorplatten (ohne Funkenstrecke) trugen und deren Drahtlängen zwischen 2 und 3,5 m lagen. Er fand das Gesamtdekrement, dessen Hauptteil von Strahlung herrührte, von der Ordnung 0,03 bis 0,08, und die Dämpfung (also wesentlich die Ausstrahlung) nahm mit wachsender Kapazität ab.

[1] R. BLONDLOT, C. R. **113**. 628 und Journ. de phys. (2) **10**. 549. 1891. — [2] S. z. B. A. TURPAIN, Rech. exp. sur les. osc. él. Paris 1899, wo eine Anzahl Untersuchungen des Verfassers zusammengefaßt sind. — [3] E. SARASIN u. L. DE LA RIVE, C. R. **110**. 72. 1890; **112** u. **115** l. c. — [4] K. M. MACDONALD, El. Waves. Cambridge 1902. 111. — [5] Andere Werte s. A. TURPAIN, Journ. de phys. (3) **10**. 424. 1901. — J. A. POLLOCK, Phil. Mag. (6) **7**. 635. 1904. — J. C. CLOSE, ibid. 652. — [6] V. BJERKNES, Wied. Ann. **47**. 69. 1892; **48**. 592. 1893; **55**. 121. 1895. — [7] S. LAGERGREEN, Wied. Ann. **64**. 290. 1898.

### Multiple Resonanz.

SARASIN und DE LA RIVE[1] fanden bei ihren Versuchen (s. später), daß die Knotenabstände der stehenden Welle sowohl in freier Luft, wie längs Drähten gemessen, sich mit dem angewandten Resonator änderten und also die gemessene Wellenlänge von diesem und nicht von dem Erreger bestimmt war; eine Beobachtung, die vielfach bestätigt wurde[2]. Sie schlossen daraus, der Erreger sende Wellen der verschiedensten Schwingungsdauern aus, deren Existenz durch das Ansprechen der Resonatoren konstatiert werde. Diese Annahme ist durch die Versuche und Rechnungen von BJERKNES[3] widerlegt, nach denen die „multiple Resonanz" sich durch die Tatsache erklärt, daß die Schwingungen des HERTZschen Erregers sehr stark gedämpft sind ($\gamma = 0{,}26$), während der geschlossene Resonator eine viel geringere Dämpfung ($\gamma = 0{,}034$) besitzt. Bei der sehr schwachen Koppelung des Erregers und Resonators ergibt sich nach der allgemeinen Theorie (s. diese), daß von den beiden Schwingungen des Systems (die merklich die Eigenschwingungen von Erreger und Resonator sind) nur die schwach gedämpfte des Resonators zur Geltung kommt. Der Einfluß des Oszillators beschränkt sich im ganzen auf die Anregung des Resonators zu Schwingungen, die um so stärker werden, je näher die Eigenschwingungen beider Teile übereinstimmen.

Diese Erklärung ist durch Versuche bestätigt. Die Aufnahme der Schwingungsform von Drahtwellen zeigt den Verlauf einer einfachen gedämpften Sinusschwingung[4], es ist also keine Summe von Gliedern in der ausgesandten Schwingung anzunehmen.

Macht man die Dämpfung der Resonatoren größer, so muß das Phänomen der multiplen Resonanz aufhören und verschiedene Resonatoren müssen alle dieselbe Wellenlänge bei Messungen geben, die ähnlich denen von SARASIN und DE LA RIVE angestellt werden. Deshalb benutzten STRINDBERG[5], DÉCOMBE[6] u. a. Resonatoren aus Eisendraht (für den BJERKNES viel größere Dämpfung als für Kupferdraht nachgewiesen hatte) und fanden diese Forderung der BJERKNESschen Theorie bestätigt. DÉCOMBE[7] untersuchte auch die Funkenentladung des Oszillators mit dem rotierenden Spiegel, es ergab sich dabei nur eine einzige Schwingung von bestimmter Periode. Dasselbe findet HULL[8] bei Verwendung eines Kohärers statt des Resonators und TISSOT[9] für einen Sender der drahtlosen Telegraphie.

### β) Der offene Resonator.

Der offene geradlinige Resonator reagiert auf die elektrische Kraft und zwar natürlich am stärksten, wenn er in deren Richtung gestellt wird. Seine Dämpfung ist sehr stark im Vergleich mit der des geschlossenen Empfängers; es gilt hier Analoges wie bei den Oszillatoren. Er befindet sich mit einem geraden Erreger in Resonanz, wenn jede seiner gleichen Hälften etwa die Länge des ganzen Erregers hat[10]. Die Schlagweite des Funkens kann als Maß für die Intensität der Schwingung dienen.

Righi-Resonatoren[11] bestehen aus Längsstreifen von versilbertem Glas, deren Breite einige Millimeter beträgt. Die Länge wird nach der Oszillatorschwingung bestimmt, mit der Resonanz erzielt werden soll. In der Mitte

---

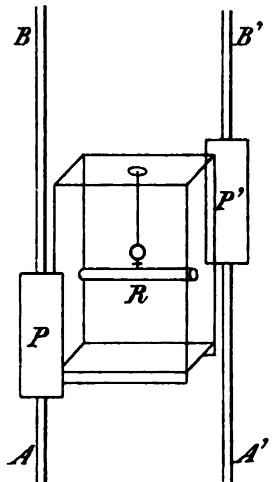
[1] E. SARASIN u. L. DE LA RIVE, Arch. de Genève. (3) **22**. 283. 1889; **23**. 113, 557. 1890. — [2] S. z. B. K. WAITZ, Wied. Ann. **41**. 435. 1890. — D. MAZOTTO, Att. di Torino. **28**. 417. 1892; **29**. 22, 369. 1893. — A. GARBASSO, ibid. **28**. 246. 1892. — R. BLONDLOT u. H. DUFOUR. C. R. 347. 1892. — A. GARBASSO u. E. ASCHKINASS, Wied. Ann. **53**. 534. 1894. — [3] V. BJERKNES, Wied. Ann. **44**. 74, 92, 513. 1891; **54**. 58. 1895; **55**. 121. 1895. — H. POINCARÉ. Arch. de Genève. (3) **25**. 609. 1891. — [4] S. später unter „Paralleldrahtsystem". — [5] N. STRINDBERG, Oefvers. K. Vetensk., Acad. Förhdlgn. **51**. 235. 1894 u. C. R. **122**. 1403. 1896. — [6] L. DÉCOMBE, C. R. **124**. 1016. 1897. — [7] L. DÉCOMBE, Ann. de Chim. et de phys. (7) **15**. 156. 1898. — [8] G. F. HULL, Phys. Rev. **5**. 231. 1897. — [9] C. TISSOT, C. R. **132**. 763. 1901. — [10] S. z. B. A. TÖPLER, Wied. Ann. **40**. 665. 1892. — [11] A. RIGHI, Die Optik elektrischer Schwingungen. 16.

macht man senkrecht zur Längsrichtung einen feinen Schnitt durch die Silberbelegung; zwischen den Rändern des Schnittes gehen dann beim Ansprechen des Resonators Fünkchen über. Je feiner die Unterbrechung, um so empfindlicher ist der Apparat, doch sinkt die Empfindlichkeit schnell durch den Gebrauch. Die Gesamtlänge des Resonators ist auch hier etwa gleich einer halben Wellenlänge seiner Grundschwingung; die Resonanz zeigt zich nicht stark ausgeprägt, die Empfindlichkeit aber viel größer als bei den bisher genannten Resonatoren. —

Die entstehenden Funken bei den angeführten Apparaten sind oft sehr klein und müssen dann im Dunkeln und mit der Lupe beobachtet werden, man kann sie aber auch zur Auslösung anderer leichter wahrnehmbarer Vorgänge verwenden und so das Vorhandensein elektrischer Schwingungen konstatieren. Z. B. kann man[1] durch einen solchen Funken auf einen Moment eine Leitungsbahn schließen lassen, die einen Hochspannungsakkumulator oder eine Trockensäule mit einem Elektrometer verbindet, dann zeigt dies jedesmal einen Ausschlag, wenn ein Funke zustande kommt. Oder man führt die, vor statischen Einflüssen geschützte, Leitung über ein Funkenmikrometer zu einem auf einer Seite geerdeten Telephon, das jedesmal ein Geräusch gibt, wenn ein Funke übergeht[2] u. dgl. m.

### b) Mechanische Wirkungen.

Auch mechanische Wirkungen der Wellen konnte Hertz[3] benutzen, um die Form der längs Drähten fortschreitenden Schwingungen zu bestimmen. Er verband in der Lecherschen Anordnung die vom Oszillator abgelegenen Enden der Drahtleitung miteinander, wodurch dort ein Spannungsknoten entstand, die Stelle eines zweiten Spannungsknotens der stehenden Wellen wurde überbrückt und zwischen die Paralleldrähte, wie es die Figur (s. Figur 282) andeutet, der kleine Apparat gebracht. Dieser bestand aus einem mit Drahtnetz umgebenen Gehäuse, in dem eine leichte Rolle von Goldpapier $R$ aufgehängt war. Das Netz war leitend mit den Knoten verbunden. Die Rolle wird durch einen sehr kleinen, an dem System befestigten Magneten im Gleichgewicht gehalten, die Ablenkung mit Spiegel und Skala bestimmt. Die Leitung schiebt man allmählich von einer Knotenstelle zur folgenden an dem Apparate vorbei und bestimmt jedesmal nach Verschiebung von je 10 cm den ersten Ausschlag des Instrumentes. Die Drähte waren in der Nähe des Prüfungskörpers $R$ verstärkt (s. Figur bei $P$ und $P'$) und einander näher gebracht; die Ausschläge ergeben die Form der Schwingung als einfache Sinusschwingung und zwar (bei dieser Art des Versuches) der elektrischen Kraft.



Figur 282.

Die magnetische Kraft untersuchte Hertz, indem er an Stelle von $R$ einen Aluminiumring aufhing. An der Stelle des Spannungsknotens befindet sich ein Strombauch, also ein Maximum der magnetischen Kraft, so zeigte der Ring in der Tat am Ende der geschlossenen Leitung eine größte Abstoßung, er suchte seine Ebene senkrecht zur Ebene der Paralleldrähte zu stellen, die natürlich bei diesen Versuchen keine Verstärkungsbleche trugen. Verschob man den Apparat mehr nach dem Orte eines Stromknotens, so wurde die Abstoßung kleiner usw. Alles geschieht, wie es die Theorie erwarten läßt.

Mechanische Wirkungen der Schwingungen im freien (nichr durch Drähte begrenzten) Felde des Luftraums gelang es nicht, nachzuweisen.

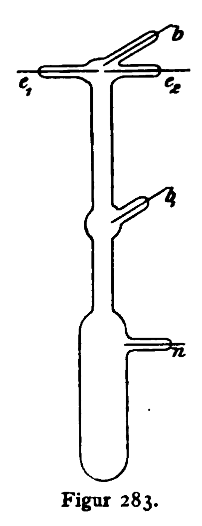
[1] L. Boltzmann, Wied. Ann. **40**. 399. 1890. — E. Wiechert, ibid. 640. — [2] Kr. Birkeland, Wied. Ann. **47**. 583. 1892. — [3] H. Hertz, Wied. Ann. **42**. 407. 1891. S. auch C. V. Boys, A. E. Briscoe und W. Watson, Phil. Mag. (5) **31**. 44. 1891.

### c) Elektrometer.

Die Spannung an den Enden eines Resonators kann man durch kleine Elektrometer messen, wie sie BJERKNES eingeführt hat (s. S. 585), oder bei Drahtwellen ist auch das Quadrantelektrometer zu benutzen. Dann werden die Quadranten in ähnlicher Weise mit den Drähten verbunden, wie RUBENS[1] das zuerst bei dem Bolometer getan hat. Über zwei einander gegenüberliegende Stellen der Paralleldrähte werden isolierende Röhrchen (Glas, Kautschuk) geschoben und diese mit wenigen Windungen von dünnen Drähten umschlungen, die zu dem Meßinstrument führen[2].

### d) Röhren mit verdünntem Gas.

An die Stelle der Funkenstrecke im Resonator kann häufig eine passende GEISSLERsche Röhre[3] treten, deren Aufleuchten, wenn Schwingungen durch sie hindurchgehen, besser zu beobachten ist. Oft leuchtet die Röhre schon ohne Resonator im Schwingungsfelde auf, besonders wenn an ihre Elektroden noch Kapazitäten angeschlossen werden. Bei Beobachtungen mit Paralleldrähten (s. später) genügen elektrodenlose Röhren, die man über die Drähte legt, wie das zuerst LECHER[4] getan hat. Als Füllung der Röhre werden für möglichst große Empfindlichkeit Luft mit etwas elektrolytisch eingeführtem Natrium oder Heliumfüllung[5] (auch Neon) empfohlen.



Figur 283.

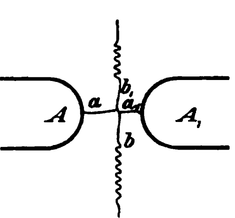
Wie oben einen kleinen Funken kann man auch eine Gasentladung zwischen zwei sehr nahe einander gegenüberstehenden Elektroden benutzen, eine Entladung eines Hochspannungsakkumulators auszulösen. Das geschieht in der ZEHNDERschen Röhre[6] (s. Figur 282). Die beiden einander sehr nahe gegenüber stehenden Elektroden $e_1$ und $e_2$ sind mit Kapazitäten oder Resonatoren verbunden, die zur Untersuchung des Feldes dienen sollen; sobald eine Schwingung in ihnen stattfindet, wird das Gas in der Röhre leitend und die Entladung der Batterie, die zwischen $b$ und $b_1$ eingeschaltet ist, setzt ein. $n$ ist eine Elektrode, durch die elektrolytisch Natrium eingeführt wird.

### e) Apparate, die Wärmewirkungen anzeigen.

Außer dem Bolometer in der PAALZOW-RUBENSschen Form[7] benutzt ein von FESSENDEN[8] konstruierter Apparat die durch Wärmewirkung hervorgerufene Widerstandsänderung zum Nachweis von Schwingungen. Ein sehr dünner Wollastondraht (0,015 mm dicker Platindraht) im Vakuum ist an die Drähte angelötet, die die Schwingung aufnehmen sollen, die Widerstandsänderung wird durch das Telephon angezeigt. Auch Thermoelemente sind oft verwandt worden, besonders hat sich die zuerst von KLEMENČIČ[9] benutzte Form bewährt (s. Fig. 284): $AA_1$ sind

[1] H. RUBENS, Wied. Ann. **42**. 154. 1891. — [2] A. FRANKE, Wied. Ann. **44**. 713. 1891. — [3] E. J. DRAGOUMIS, Nature. **39**. 548. 1899 hat solche Röhren zuerst benutzt. — [4] E. LECHER, Sitzungsber. d. Wiener Akad. **99**. (IIa.) 1. 1890. — [5] S. z. B. P. DRUDE, Ann. d. Phys. **9**. 293. 1902. — E. DORN, Ann. d. Phys. **16**. 784. 1905. — [6] L. ZEHNDER, Wied. Ann. **47**. 77. 1892; **49**. 549, 742. 1893; **52**. 34. 1894; **53**. 162. 1894; Ann. d. Phys. **9**. 899. 1902; gibt Versuche über Strahlen elektrischer Kraft und ihre objektive Darstellung. S. auch P. DRUDE, Wied. Ann. **52**. 499 u. **53**. 753. 1894. — Vakuumröhre zu ähnlichem Zwecke s. A. RIHGI, Rend. R. Ac. dei Lincei. (5) **6**. 245. 1897. — [7] H. RUBENS u. R. RITTER, Wied. Ann. **40**. 57. 1890. — H. RUBENS, Wied. Ann. **42**. 154. 1891. S. auch M. TISSOT, Journ. de Phys. (4) **3**. 524. 1904 und Zentralztg. für Optik u. Mech. **25**. 64. 1904. — [8] J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen. 776. — [9] J. KLEMENČIČ, Wied. Ann. **42**. 416. 1891 und **45**. 62. 1892.

die Enden eines Resonators, $ab$ und $a_1 b_1$ zwei an $A$ und $A_1$ gelötete, umeinander geschlungene dünne Drähte (etwa Platin und Konstantan), die durch Spiralen schwach gespannt gehalten werden, von denen die Leitung zum Galvanometer führt.




Figur 284.

Die Empfindlichkeit wird sehr erhöht, wenn sich das Thermoelement im Vakuum befindet[1]. PIERCE[2] benutzte in seinem Radiomikrometer eine ähnliche Anordnung.

Weniger empfindlich, aber oft bequem ist eine passende Form des RIESSschen Luftthermometers.

## f) Magnetische Instrumente.

RUTHERFORDS Magnetdetektor[3] besteht aus einem kleinen Bündel voneinander isolierter Stahlnadeln, die maximal magnetisiert sind. Legt man das Bündel in eine kleine Drahtspule, oft genügt eine Windung, durch die die elektrische Schwingung hindurchgeht, so werden die Nadeln teilweise entmagnetisiert, und diese Abnahme des magnetischen Momentes, gemessen etwa an einem Magnetometer, ist der Amplitude der Schwingung nahe proportional. Verbindet man die Drahtspule mit einem Resonator, so zeigt der Apparat Wellen eines HERTZschen Erregers auf eine englische Meile Entfernung an. Man konnte mit ihm auch die Form der Schwingungen in einem Paralleldrahtsystem bestimmen und die Dämpfung der Oszillationen in einem Schwingungskreise messen (s. S. 617). Für große Entfernungen, wie sie bei der drahtlosen Telegraphie auftreten, hat MARCONI[4] das Instrument in folgender Weise geändert:

Ein in sich zurücklaufendes, über Räder geführtes Drahtseil aus hart gezogenen Eisendrähten wird durch einen Motor in Umdrehung versetzt. An einer Stelle ihrer Bahn passieren die Teile des Seiles das Feld eines sehr nahen Hufeisenmagneten und werden so einer zyklischen Magnetisierung unterworfen, dann, oder vorher gehen sie durch das Innere einer Spule, deren Windungen die Wellen aufnehmen sollen. Wird die Spule gerade durch Schwingungen durchlaufen, so erleidet die Magnetisierung (durch Verminderung der Hysteresis) eine ruckweise Änderung. Diese bewirkt in einem Telephon, das mit einer zweiten, die erste umgebenden, Spule verbunden ist, ein Knacken, wodurch das Vorhandensein von Wellen festgestellt wird. Die Empfindlichkeit des Detektors (der Sprung in der Stärke der Magnetisierung) ist besonders groß, wenn das langsam sich ändernde Feld im Zunehmen ist, das erklärt sich nach MADELUNG[5] aus dem Zusammenwirken dieses Feldes mit dem schnell wechselnden Felde der Schwingungen. Der Apparat soll nach MARCONI empfindlicher und zuverlässiger sein als jeder Kohärer[6].

## g) Der Kohärer.

Ein sehr empfindliches und bequemes Instrument zum Nachweis elektrischer Wellen ist der Kohärer (Fritter), der besonders in der Telegraphie ohne Draht eine ausgedehnte Verwendung gefunden hat. Nach Vorarbeiten von MUNK AF

---

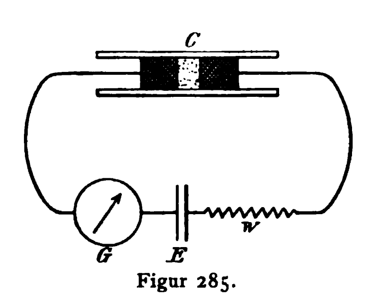
[1] P. LEBEDEW, Ann. d. Phys. **9**. 209. 1902. S. auch CL. SCHÄFER, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. **25**. 133. 1905. — [2] G. W. PIERCE, Am. Journ. of Science. **9**. 252. 1900; Phys. Zeitschr. **1**. 509. 1900. — [3] E. RUTHERFORD, Phil. Trans. **89**. 1. 1897. — [4] G. MARCONI, Proc. Roy. Soc. **70**. 341. 1902; J. A. FLEMING, ibid. **71**. 398. 1903. — S. auch J. ZENNECK, l. c. 778. — [5] E. MADELUNG, Ann. d. Phys. **17**. 861. 1905. S. auch A. L. FOLEY, Phys. Rev. **18**. 349. 1904. — [6] Andere hierher gehörige Apparate, z. B. von J. A. EWING u. L. H. WALTER, Proc. Roy. Soc. **73**. 120. 1904; Phys. Zeitschr. **5**. 269. 1904. — R. ARNÒ, Rend. R. Ac. dei Lincei. **13**. 272. 1904. — A. SELLA, ibid. **12**. 340. 1903, der die Eisendrähte zyklischen elastischen, statt magnetischen Änderungen unterwerfen will. S. auch E. F. HUTH, Phys. Zeitschr. **4**. 640. 1903; Diss. Rostock 1904.

ROSENSCHÖLD[1], VARLEY[2], HUGHES[3], CALZECCHI-ONESTI[4] entdeckte BRANLY[5] wieder, daß Metallpulver oder -feilicht zwischen Metallplatten seinen Leitungswiderstand änderte, wenn ein elektrischer Strom durch dasselbe hindurch geleitet wurde, oder ein Funke in seiner Nähe überschlug. Er untersuchte die Erscheinung eingehend; gleichzeitig forschte LODGE[6] nach Mitteln, um elektrische Wellen aufzufinden, und erkannte ein solches in der Widerstandsänderung einfacher Kontakte und nach BRANLYs Beobachtung in dem von diesem entdeckten Phänomen. Von LODGE stammt der Name Kohärer, den man oft in Deutschland durch Fritter (Frittröhre) ersetzt hat, während BRANLY die Bezeichnung Radiokonduktor wählte.

Das Phänomen des Kohärers, soweit es hierher gehört und wie es durch die sehr zahlreichen Arbeiten festgestellt wurde, ist das folgende: Wenn zwei oder mehr Leiter sich nur in wenigen Punkten berühren oder durch dünne Schichten eines schlecht leitenden Materials getrennt sind, so bewirkt ein zwischen den Leitern erregter elektrischer Strom (konstanter oder Wechselstrom) eine Widerstandsänderung des Systems, die in vielen Fällen außerordentlich groß sein und so zu einem Nachweis auch schwacher elektrischer Kräfte dienen kann.

### α) Kohärer mit Widerstandsverminderung.

Der häufigste und wichtigste Fall ist, daß eine große Widerstandsverminderung im Kohärer eintritt, wenn er durch elektrische Wellen getroffen wird; dieser Effekt wird häufig als positiv bezeichnet. Die Grunderscheinung wird durch die Anordnung der Figur 285 verwirklicht. Der Kohärer (*C*) besteht aus Metallfeilicht, das in einer Glasröhre zwischen zwei Metallplatten eingepreßt ist, von den Platten führt eine Leitung zu dem die Widerstandsänderung anzeigenden Instrument (*G*) (Galvanometer, Telephon), dann zu einem konstanten Elemente (*E*) und durch einen Widerstand (*w*) zum Kohärer zurück. Vor der elektrischen Bestrahlung hat der Kohärer einen sehr großen Widerstand,



Figur 285.

so daß kein Strom durch *G* hindurchgeht; sobald ihn aber elektrische Wellen getroffen haben, gibt *G* einen Ausschlag, der Widerstand ist vielleicht von vielen tausend Ohm auf wenige Ohm gesunken und kann erst durch Erschütterung (Klopfen oder dgl.) des Kohärers auf ungefähr seinen alten Wert gebracht werden.

Eine solche Widerstandsabnahme kann auch durch mannigfache andere Einwirkungen (mechanische, akustische usw.), auf die wir nicht einzugehen haben, hervorgebracht werden; für die elektrische Beeinflussung des Kohärers ist nach allen Untersuchungen offenbar die Potentialdifferenz an seinen Enden maßgebend. Diese Potentialdifferenz kann ebensogut durch konstanten Strom (was schon BRANLY fand), als durch Wechselstrom (elektrische Schwingungen) hervorgerufen werden. Ist das letztere der Fall, so ist über ihre Größe meist nur wenig Sicheres zu sagen, und so haben erst die Versuche mit konstantem Strom den Zusammenhang zwischen der Widerstandsänderung und der wirkenden Potentialdifferenz ergeben.

[1] MUNK AF ROSENSCHÖLD, Pogg. Ann. **34**. 199. 1835; **43**. 193. 1838. — [2] VARLEY, Brit. Ass. Meeting Liverpool, Anhang 28. 1870. — [3] HUGHES, Proc. Roy. Soc. **27**. 361. 1878; Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 386. 1899. — [4] CALZECCHI-ONESTI, N. Cim. (3) **16**. 61. 1884; **17**. 38. 1885. — [5] E. BRANLY, C. R. **111**. 785. 1890; **112**. 90. 1891; **118**. 384. 1894; **120**. 869. 1895; **125**. 939, 1163. 1897; **127**. 219. 1206. 1898; **124**. 939. 1897; **125**. 1163, 1206. 1898; **130**. 1068. 1900; **134**. 347, 1197. 1902 u. a. O. Zusammenfassende Darstellung in Rapport au Congrès Intern. de Physique, Paris 1900. — [6] O. LODGE, The Work of Hertz etc., London 1894; Phil. Mag. (1) **37**. 94. 1894; Electrician **40**. 87. 1897.

Bei diesen Untersuchungen hat man oft statt eines Kohärers mit vielen kleinen Körperchen, wie Metallfeilicht, kleinen Schrauben u. dgl., einen einzigen oder wenige gleichartige Kontakte gewählt, wo man die Verhältnisse genauer übersehen und bestimmen kann.

Ließ man die auf den Kohärer wirkende Potentialdifferenz (z. B. durch Abzweigen von einem konstanten Element) systematisch von null an anwachsen, so zeigte sich bei geringer elektromotorischer Kraft ($E$) nur eine sehr geringe Abnahme des Widerstandes, von einem bestimmten Wert des $E$ an aber erfolgte eine sehr große Widerstandsverminderung, die bei weiterem Steigen des $E$ nur noch wenig zunahm. Dieser ausgezeichnete Wert ($E_k$) heißt die kritische Spannung[1]; sie hängt außer von dem Material auch von dem Druck usw. der Kohärerteile gegeneinander ab und ist nicht ganz scharf definiert, da, wie besonders die Versuche von ECCLES[2] und BOSE[3] zeigen, auch schon ehe sie erreicht ist, eine merkliche Abnahme des Widerstandes mit steigendem $E$ erfolgt; das gilt für Feilichtkohärer und Einzelkontakte.

Ließ BOSE $E$ sich zyklisch ändern, so bildete die Kurve der Widerstandsänderung, eigentlich die Kurve der durch die Widerstandsänderung geänderten Stromintensitäten, eine Schleife, wie die Hysteresisschleife der magnetischen Änderungen im zyklischen Feld, die eine um so größere Fläche einschloß, je größer der Druck gewählt wurde, unter dem die zwei Kontakte aneinander lagen. Auch zeigte sich ein Zurückbleiben der Wirkung hinter der elektromotorischen Kraft, d. h. das Maximum der Stromintensität (Widerstandsabnahme) trat erst ein, als das Maximum von $E$ schon passiert war[4].

Hat die elektromotorische Kraft den Wert $E_k$ erreicht, so sinkt der Widerstand schnell auf einen solchen Wert, daß die Spannung an den Elektroden des Kohärers, wenn er z. B. von einem konstanten Strom durchflossen wird, einen bestimmten Wert (die Gleichgewichtsspannung $E_g$) erreicht. Die Gleichgewichtsspannung bleibt dieselbe, wenn dann auch ein $E$, das größer als $E_k$ ist, angelegt wird; sie ist nach ROBINSON[5] charakteristisch für jedes Metall und bei mehreren Kontaktstellen hintereinander der Anzahl dieser Stellen proportional. Dieses $E_g$ findet ROBINSON für Eisen = 0,2 Volt, für Kupfer $< 0{,}14$ Volt. Ähnliche Zahlen erhalten GUTHE und TROWBRIDGE für das, was sie kritische Spannung nannten, z. B. gibt GUTHE[6] für Kohärer aus zwei Metallkalotten, die mit leichtem Druck aneinander gelegt waren:

| | Ag | Cu | Zn | Al | Cd | Sn | Fe | Neu-Silb. | Ni | Bi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_g$ in Volt: | 0,062 | 0,094 | 0,096 | 0,236 | 0,109 | 0,095 | 0,222 | 0,139 | 0,204 | 0,183 |

Werden größere Spannungen als die kritischen an die Kohärerenden angelegt, so findet die Widerstandsabnahme fast momentan statt, während bei Anlegen von $E_k$ einige Zeit vergeht, bis die Wirkung vollständig eingetreten ist.

Wird der Kohärer durch elektrische Wellen erregt, so hat man in sehr vielen Fällen[7] durch das Mikroskop kleine Fünkchen beobachten können, die zwischen den einzelnen Teilchen überspringen. Am empfindlichsten sind die Kohärer, wenn zwischen ihren Teilchen eine schlechter leitende dünne Schicht (Metalloxyd, isolierende Flüssigkeit oder dgl.) sich befindet; auch die Natur des (feuchten oder trockenen) Gases, in dem die Kohärerteilchen sich befinden, kann etwas von Einfluß sein.

[1] E. ASCHKINASS, Wied. Ann. **66**. 284. 1898. — [2] W. H. ECCLES, Electrician **47**. 682, 715. 1901. — [3] J. CH. BOSE, ibid. 830, 877. 1901. — [4] S. auch A. KETTERER, Journ. de Phys. (4) **1**. 589. 1902; Arch. de Genève **14**. 617. 1903. — [5] P. E. ROBINSON, Ann. d. Phys. **11**. 754. 1903; s. auch K. E. GUTHE und A. TROWBRIDGE, Phys. Rev. **11**. 22. 1900 und K. E. GUTHE, Ann. d. Phys. **4**. 762. 1901, die vor ROBINSON zu ähnlichen Resultaten kamen, aber $E_g$, wie es scheint, als kritische Spannung bezeichneten. — [6] K. E. GUTHE, l. c. 768. — [7] S. z. B. L. ARONS, Wied. Ann. **65**. 567. 1898. — D. VAN GULIK, ibid. **66**. 136. 1898. — TH. TOMMASINA, C. R. **127**. 1014. 1898; **129**. 40. 1899.



Aus diesen und anderen Beobachtungen ergibt sich die Ansicht von Lodge, wie sie von Ferrié[1] und anderen modifiziert wurde, zur Erklärung des Phänomens als die wahrscheinlichste. Nach ihr wird die schlechter leitende Schicht zwischen den Kohärerteilchen bei Anlegen einer Potentialdifferenz durch die Anziehung der Teilchen aufeinander etwas zusammengepreßt; bei größerer Elektrodenspannung wird sie von einem Funken durchbrochen. Dabei bilden sich zwischen den leitenden Elektroden metallische Brücken, wie es z. B. vielfach, neuerdings z. B. von Sundorph[2], mikroskopisch beobachtet wurde, und der Widerstand des Kohärers wird sehr vermindert. Durch Klopfen zerstört man die Brücken und bringt den Apparat ungefähr in den alten Zustand.

**β) Kohärer mit Widerstandszunahme.**

Schon Branly beobachtete auch den „negativen Effekt" der Widerstandsvermehrung eines Kohärers unter Einfluß elektrischer Kräfte, z. B. beim Bleisuperoxyd, bei platiniertem Glas usw. Ähnliche Erscheinungen fand Bose[3] in sehr großer Zahl bei den verschiedensten Metallen, und ebenso beobachtete er in vielen Fällen bei denselben Stoffen wechselndes, bald positives, bald negatives Verhalten. Viele seiner Resultate sind freilich von anderen Beobachtern nicht bestätigt worden oder lassen sich teilweise durch chemische Änderungen der Stoffe und Erscheinungen, wie z. B. die von Arons[4] beobachtete, erklären. Dieser trennte auf Glas geklebtes Stanniol durch einen Schnitt, den er mit feinem Metallpulver bestreute, er sah dann im Mikroskop bei Einwirkung elektrischer Schwingungen die Fünkchen und Brücken zwischen den zwei Stanniolstreifen entstehen, bei stärkerer Wirkung der Schwingungen aber, wie die Brücken durch größere Funken wieder zerstört wurden und so eine Widerstandszunahme eintrat.

Ein Antikohärer (Kohärer mit Widerstandszunahme) ist auch die Schäfersche Platte, die noch den Vorzug hat, von selbst wieder in ihren Anfangszustand zurückzukehren, nachdem die elektrische Einwirkung aufgehört hat. Die Platte ist ein Silberspiegel auf Glas mit einem feinen durch einen Diamanten gezogenen Riß, der mit in Äther gelöstem Celluloid überzogen wird; das Ganze bringt man in eine Vakuumröhre. Der Diamant läßt stets einige Metallbrücken zwischen den beiden Spiegelseiten stehen, so daß die Platte keinen sehr großen Widerstand vor dem Gebrauch hat. Wird sie von elektrischen Wellen getroffen, so zerstören diese die Brücken, der Widerstand erhöht sich: nach der Abkühlung schlägt sich das verdampfte Silber wieder nieder und bringt den Widerstand auf etwa den Anfangswert. Brücken, die nicht zerstört werden, vergrößern auch (wie Bolometer) ihren Widerstand, solange sie ein Strom durchfließt, beträchtlich[5].

Ein anderer Antikohärer, dessen Wirkung auf Elektrolyse beruht, ist von Neugschwender[6] hergestellt worden. In einem auf Glas niedergeschlagenen Metall-(Ag) Spiegel wird ein etwa $\frac{1}{3}$ mm breiter Riß gemacht und dieser behaucht; die Vorrichtung befindet sich in dem Schließungskreis einer konstanten Batterie und eines Galvanometers; wird sie durch elektrische Wellen getroffen, so steigt ihr Widerstand sehr und nimmt nach Aufhören der Bestrahlung von selbst wieder den alten Wert an. Die Ursache sind die durch Elektrolyse gebildeten Metallfäden, die Brücken bilden und durch die Bestrahlung zerstört werden.

---

Andere Kohärer, die von selbst wieder in den Anfangszustand zurückgehen, sind:

[1] Ferrié, L'éclairage él **24**. 499. 1901. — [2] Th. Sundorph, Ann. d. Phys. **10**. 198. 1903. — [3] J. Ch. Bose, Proc. Roy. Soc. **65**. 166. 1899; ibid. **66**. 452. 1900. — [4] L. Arons, Wied. Ann. **65**. 567. 1898. — [5] E. Marx, Phys. Zeitschr. **2**. 249, 574. 1901. — [6] A. Neugschwender, Wied. Ann. **67**. 430; **68**. 92. 1899.



die mit Kohle oder Graphitkontakten[1] (Mikrophonkontakt);

der Quecksilberkohärer von CASTELLI[2]: zwei reine Quecksilbertropfen, durch einen Eisenzylinder voneinander getrennt, in einer Glasröhre zwischen Kohleelektroden geben bei Bestrahlung Widerstandszunahme;

der rotierende Quecksilberkohärer von LODGE[3]: ein scharfrandiges, um eine horizontale Achse rotierendes Stahlrad taucht mit einem Teil seines Randes ein wenig in von einer Ölschicht bedecktes Quecksilber; ist das Rad mit dem positiven, das Quecksilber mit dem negativen Pol einer schwachen Stromquelle verbunden, so fließt kein Strom vom Rad zum Quecksilber. Treffen elektrische Wellen den Apparat, so wird die Ölhaut zerrissen und der Strom hergestellt, der nach Aufhören der Bestrahlung wieder unterbrochen ist[4].

Die meisten Erscheinungen, auch der Kohärer mit Widerstandszunahme, fügen sich der oben kurz angedeuteten Erklärung und bestätigen sie z. B. durch den Nachweis einer Brückenbildung usw. Freilich finden sich in der großen Literatur auch eine Anzahl Beobachtungen, für die dieser Erklärungsversuch nicht so einfach genügt.

Bei oft wiederholter Bestrahlung wurde von vielen Beobachtern eine Abnahme der Empfindlichkeit (eine Ermüdung[5]) des Kohärers konstatiert.

Die Empfindlichkeit des Kohärers hängt von dem Schmelzpunkt und der Leitfähigkeit des Materials ab und wächst in vielen Fällen mit der letzteren und mit abnehmendem Schmelzpunkt[6]. Auch Zunahme der Elektrodengröße und Abnahme des Pulvervolumens zwischen den Elektroden steigert im allgemeinen die Empfindlichkeit[7]. Einschließen des Feilichtkohärers in evakuierte Glasröhren bewirkt unter anderem, daß der Kohärer gut getrocknet und trocken gehalten riwd, was für dauernd gute Wirkung wesentlich ist[8].

Die Kohärer für drahtlose Telegraphie, wie sie MARCONI und ähnlich die Gesellschaft für drahtlose Telegraphie benutzt, sind in evakuierte Glasröhren (von etwa 4 mm Durchmesser) eingeschlossen, haben Silberelektroden (leicht amalgamiert), die etwas abgeschrägt sind, damit die Füllung aus Nickelfeilicht (mit wenig Silberfeilicht gemischt) sich nicht klemmt; der Elektrodenabstand ist etwa $\frac{1}{2}$ mm[9].

Will man den Kohärer mit Widerstandsabnahme, wie es geschieht, benutzen, um mit ihm die Resonanz zweier schwingender Systeme nachzuweisen, so ist nicht klar, ob er als Leiter (d. h. unendliche Kapazität) oder als großer Widerstand anzusehen ist, und an welcher Stelle des Resonators man ihn also anbringen muß. Die Versuche von KIEBITZ[10] mit einem Nickelfeilichtkohärer haben nun gezeigt, daß, wenn z. B. der Kohärer im linearen Resonator an der Stelle der Funkenstrecke (in der Mitte) sich befindet, der Resonator mit einem gleichlangen linearen Oszillator in Resonanz ist und sein Widerstand auf ein Minimum herabgeht. Da in diesem Falle der Kohärer an der Stelle eines Spannungsknotens liegt, spielt er hier die Rolle eines Leiters.

Ähnliche Resultate erhielt ROBINSON[11], selbst wenn der Kohärer nur aus einer Nadelspitze bestand, die eine metallische Kugelkalotte berührte, so daß die Leitung mit Kohärer eine bestimmte Eigenschwingung hatte.

HODSON[12] findet das bestätigt, wenn der Widerstand des Kohärers durch die auffallenden Wellen ($\lambda = 20 - 250$ m) bis auf etwa ein Ohm herab-

---

[1] S. z. B. F. J. JERVIS-SMITH, Electrician **40**. 84. 1897. — TH. TOMMASINA, C. R. **128**. 666. 1899. — L. BLEEKRODE, Nature **66**. 343. 1902. — [2] Electrician **49**. 387. 1902. — [3] O. LODGE, Proc. Roy. Soc. **71**. 402. 1903. — [4] Andere von selbst zurückgehende Kohärer s. z. B. TH. TOMMASINA, C. R. **132**. 627. 1901. — [5] S. z. B. P. E. ROBINSON, l. c. — [6] T. MIZUNO, Phil. Mag. (5) **50**. 445. 1900. — T. GNESOTTO und P. FRASSON, Atti. Real. Int. Veneto **63**. 703. 1904. — [7] S. z. B. H. MURAOKA und T. TAMARU, Mem. coll. of science Kyoto **1**. 20. 1903; Beibl. **29**. 97. — [8] J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwing., S. 796. — [9] J. ZENNECK, l. c. — [10] F. KIEBITZ, Ann. d. Phys. **6**. 741. 1901. — [11] P. E. ROBINSON, l. c. [12] F. HODSON, Ann. d. Phys. **14**. 973. 1904.

gesetzt wurde; blieb dagegen der Endwiderstand 10—15 Ohm, so zeigte der Kohärer eine endliche Kapazität[1].

Das Letztere ergab sich auch EICHHORN bei seinen Versuchen über Abstimmung in der drahtlosen Telegraphie[1].

Aus der Literatur seien noch angeführt:


G. SCHLABACH, Phys. Zeitschr. **2**. 374, 383. 1901, wo sich ein vollständiges Verzeichnis der bis Ende 1900 erschienenen Literatur findet.

A. RIGHI und B. DESSAU, Die Telegraphie ohne Draht, Braunschweig 1903, S. 199, auch mit zahlreichen Literaturangaben.

R. APPLEYARD, Phil. Mag. (5) **43**. 374. 1897.
F. AUERBACH, Wied. Ann. **64**. 611; **66**. 760 (Versuche von AD. MEYER) 1898.
O. LEPPIN, Wied. Ann. **65**. 885. 1898.
E. DORN, Wied. Ann. **66**. 146. 1898.
O. BEHRENDSEN, Wied. Ann. **66**. 1024. 1898.
R. MALAGOLI, N. Cim. (4) **8**. 109. 1898; **10**. 279. 1899.
TH. SUNDORPH, Wied. Ann. **68**. 594. 1898.
A. BLONDEL und G. DOBKOVITCH, C. R. **130**. 1123. 1900.
J. HÄRDÉN, Elektrotechn. Zeitschr. **21**. 272. 1900; Phys. Zeitschr. **5**. 626. 1904.
A. TROWBRIDGE, Am. Journ. of Sc. (4) **8**. 199. 1899; Nature **63**. 156. 1900.
C. TISSOT, C. R. **130**. 902. 1900.
O. KINSLEY, Phys. Rev. **12**. 177. 1901.
A. TURPAIN, L'éclairage él. **27**. 56. 1901; C. R. **137**. 562. 1903.
PH. E. SHAW, Phil. Mag. (6) **1**. 265. 1901.
TH. TOMMASINA, Arch. de Genève **11**. 557. 1901.
H. MURAOKA und T. TAMARU, Ann. d. Phys. **7**. 554. 1902.
FR. W. MÜLLER, Dissert., Straßburg 1901.
J. FENYI, C. R. **134**. 227. 1902; **135**. 30. 1902.
E. R. WOLLCOTT, Bull. of the Univ. of Wisconsin **3**. 1. 1901; Beibl. **27**. 197.
E. DRAGO, N. Cim. (5) **2**. 319. 1901; **6**. 197. 1903.
J. C. BOSE, Proc. Roy. Soc. **70**. 154, 174, 185. 1902.
P. E. ROBINSON, Phys. Rev. **17**. 286. 1904.
M. HORNEMANN, Ann. d. Phys. **14**. 129. 1904.
R. THÖLDTE, Ann. d. Phys. **17**. 694. 1905.
A. FISCH, Mitt. d. Phys. Ges. Zürich **7**. 1. 1904.
P. E. SHAW und C. A. B. GARETT, Phil. Mag. (6) **8**. 165. 1904.
P. LOHBERG, Ann. d. Phys. **18**. 850. 1905.


## h) Elektrolytische Apparate.

Der NEUGSCHWENDERsche Antikohärer, der elektrolytisch wirkt, ist schon unter Kohärer beschrieben. — Der SCHLÖMILCHsche Wellendetektor[2] besteht aus einer Schwefelsäurezelle mit Platinelektroden, deren eine durch einen Wollastondraht gebildet (0,001 mm dick) und 0,01 mm aus dem einschließenden Glasrohr hervorragt. Man läßt einen ganz schwachen konstanten Strom durch die Zelle und ein Galvanometer gehen. Treffen dann elektrische Wellen den Apparat, so verstärkt sich plötzlich der Strom, und das Galvanometer gibt einen kräftigen Ausschlag, der wieder zurückgeht, wenn die Wellen nicht mehr auf die Zelle wirken. Die Ursache ist offenbar Depolarisation der sehr kleinen Elektrode durch die Schwingungen, wie REICH, DIECKMANN[3] u. a. gezeigt haben. Die Empfindlichkeit und Bequemlichkeit des Instrumentes um die Existenz von elektrischen Wellen nachzuweisen, ist sehr groß, wenn z. B. ein Telephon statt des Galvanometers benutzt wird. Einen ähnlichen Apparat hat FESSENDEN[4] konstruiert und Barretter genannt.

Ein Instrument, bei dem auffallende Wellen eine Widerstandsvermehrung bewirken, ist von DE FOREST[5] konstruiert worden und in seiner Wirkungsweise ähnlich dem NEUGSCHWENDERschen Antikohärer. —

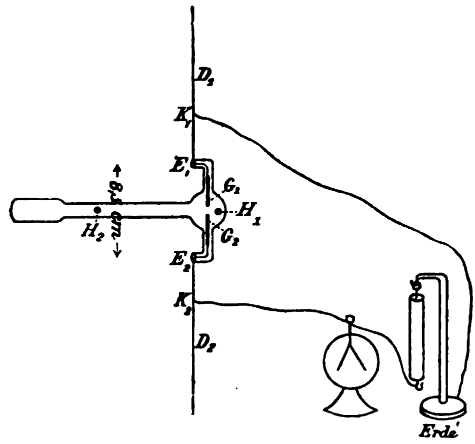
[1] G. EICHHORN, Die drahtlose Telegr., S. 136. 144. — [2] W. SCHLÖMILCH, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 959. 1903. — [3] M. REICH, Phys. Zeitschr. **5**. 338. 1904. — W. DIECKMANN, ibid. **5**. 529. 1904. — B. MAOKU, ibid. **6**. 292. 1905. — V. ROTHMUND und A. LESSING, Ann. d. Phys. **15**. 193. 1904. — G. FERRIÉ, C. R. 315. 1905. — [4] R. A. FESSENDEN, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 586 u. 1015. 1903; Electrician **51**. 1024. 1903. [5] DE FOREST, Electrician **52**. 171. 1903.

i) Die Versuche physiologische Wirkungen[1], Gasexplosionen[2] durch den Funken zur Auffindung elektrischer Wellen zu benutzen, mögen noch erwähnt werden.

## 27. Anordnungen zur Demonstration sehr schneller Schwingungen.

Die HERTZschen Grundversuche sind sehr vielfach wiederholt und ergänzt worden, einige der hierbei verwandten Anordnungen sollen kurz beschrieben oder erwähnt werden.

Bei den HERTZschen Hohlspiegeln war die Funkenstrecke des Resonators nur schwer zu beobachten, man hat sie deshalb bald durch andere der oben angeführten Hilfsmittel ersetzt. Als praktisch und weit sichtbar erwies sich DRUDE[3] die Verwendung der ZEHNDERschen Röhre in Verbindung (nach dem Vorgang von BOLTZMANN) mit einem Elektroskop und einer Trockensäule, wie es die Figur 286 zeigt. Der Resonator in der Brennlinie des sekundären Hohlspiegels ist gebildet aus den Glimmelektroden $G_1$ und $G_2$ und den an sie angesetzten Drähten $D_1$ und $D_2$, deren Länge so gewählt wird, daß das ganze System auf den Erreger abgestimmt ist. Von $K_1$ geht eine Ableitung zur Erde, von $K_2$ zum Elektroskop und der Trockensäule ($K_1$ und $K_2$ sollen Spannungsknoten sein). Sobald der Resonator anspricht, ein Strom zwischen $E_1$ und $E_2$ übergeht, fallen die Blättchen des Elektroskops zusammen, um beim Aufhören der Entladung wieder auseinanderzuspreizen. Mit dieser Anordnung kann man die Hohlspiegelversuche gut demonstrieren. Die Reflexion an einer ebenen Metallwand, Gitter usw. zeigt die wie angegeben montierte Röhre, aber ohne empfangenden Hohlspiegel. — Will man auch die magnetische Kraft untersuchen, so entfernt man $D_1$ und $D_2$ und verbindet statt dessen die Glimmelektroden durch einen kreisförmig gebogenen Draht von passender Länge, so daß man jetzt einen geschlossenen Resonator hat. Die Elektrode $H_1$, die noch im Bereich des Glimmstroms liegt, verbindet man mit Elektroskop und Trockensäule, die Stelle des Resonators gegenüber dem Glimmlicht mit der Erde. Mit dieser Vorrichtung lassen sich die HERTZschen Versuche über die Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraft um eine geradlinige Schwingung, die Wirkung der längs Drähten fortgepflanzten Wellen usw. gut demonstrieren.



Figur 286.

Besonders bequem werden die Versuche über Strahlen elektrischer Kraft, wenn man im Resonator des sekundären Spiegels statt der Funkenstrecke den Kohärer benutzt und durch ihn etwa die Leitung einer Klingel schließen läßt, die bei jeder Bestrahlung ertönt.

Die Demonstration der Knoten und Bäuche bei Drahtwellen hat ARONS[4] in der Weise ausgeführt, daß er das Paralleldrahtsystem auf eine genügende Länge (2,5 m) durch eine Glasröhre gehen ließ, die ausgepumpt wurde.

[1] R. RITTER, Wied. Ann. **40**. 53. 1890. — [2] Schon von LECHER angegeben (l. c. S. 856), s. auch LUCAS und GARRET, Phil. Mag. (5) **33**. 299. 1892. — [3] P. DRUDE, Wied. Ann. **52**. 499. 1894. — [4] L. ARONS, Wied. Ann. **45**. 553. 1892. S. auch J. J. Bergmann, Phys. Zeitschr. **4**. 266. 1903.

Legte man dann auf den nicht im Rohr befindlichen Teil der Drähte an passenden Stellen eine Brücke auf, so bewirkte die erregte Schwingung im Rohre, daß dort zwischen den Drähten an den Bauchstellen das verdünnte Gas leuchtete, während es an den Knotenstellen dunkel blieb. — Nimmt man die Drähte sehr dünn (0,1 mm), so leuchten die Bauchstellen, bei kräftiger Erregung der Schwingungen, im verdunkelten Zimmer schon in freier Luft, wie COOLIDGE[1] fand; das gelingt noch mit Wellen von nur 12 cm Wellenlänge. Spannt man die beiden dünnen Drähte in einer vertikalen Ebene auf und legt an ihre Rückseite einen Schirm von Baryumplatincyanür oder dgl., so leuchtet er an den Bauchstellen[2].

Sehr unbequem waren die großen Dimensionen der HERTZschen Apparate, deshalb hat man sich bald mit Erfolg bemüht, kleinere Wellenlängen zu benutzen. Am weitesten sind darin LEBEDEW[3] und LAMPA[4] gegangen, die Wellenlängen von 6 und 4 mm benutzten. Der Primärspiegel des ersteren war nur 20 mm hoch und hatte eine Brennweite von 6 mm. Der Spiegel und Oszillator tauchten ganz in Petroleum ein. Der Resonator war (nach KLEMENČIČ) mit Thermoelement versehen und in einem sekundären Spiegel von 1,4 mm Brennweite montiert. Die Apparate: Polarisationsgitter (quadratisch, 2 cm Seitenlänge), Ebonitprisma (1,8 cm hoch) usw. waren auf einem Spektrometertisch aufgestellt, und es gelang, mit der Wellenlänge von 6 mm Interferenz, Reflexion, Doppelbrechung usw. gut nachzuweisen und z. B. den größten und kleinsten Hauptbrechungsquotienten des Schwefels zu messen. Die Anordnung des Oszillators zeigt die Figur 287. Die Primärleiter: kleine Platinzylinder $P$ (1,3 mm lang, 0,5 mm dick), sind in die Glasröhren ($G$) eingeschmolzen. Die Stromzuführung vom Induktorium (über einen Wasserwiderstand und Kondensator, die aber LAMPA bei seinen ähnlichen Versuchen nicht nötig fand) geschah durch Funken, die von den Drähten $D$ auf $P$ übersprangen.

D P G P P G P D

Figur 287.

Über ähnliche Versuche mit kleinen Wellenlängen und dem Kohärer als Reagens s. BOSE[5], HIMSTEDT[6] und besonders RIGHI[7]: Die Optik elektrischer Schwingungen.

Statt des Induktoriums hat zuerst TÖPLER[8] die Influenzmaschine benutzt.

Außer den schon zitierten Arbeiten von ZEHNDER s. u. a. noch die von RUBENS[9].

## 28. Wellen längs metallischer Leitungen.

### a) Stabförmiger Leiter oder Draht.

Die Theorie für einen unendlich langen Draht nach SOMMERFELD ist früher (S. 648) schon angedeutet worden, ebenso die Ausstrahlung eines begrenzten Drahtes nach ABRAHAM (S. 646), der die Möglichkeit von Oberschwingungen nachwies, die von KIEBITZ[10] experimentell konstatiert wurden. Die Versuche wurden mit einem gradlinigen Erreger von 250 cm Länge angestellt, dem ein kreisförmiger Empfänger mit kurzen angeschlossenen Paralleldrähten gegenüberstand. Auf dem letzteren konnte eine Brücke verschoben und so die Länge des Empfängers innerhalb kleiner Grenzen verändert werden. Der Brücke gegenüber befand sich eine Unter-

[1] W. D. COOLIDGE, Wied. Ann. **67**. 578. 1899. S. auch A. RIGHI, N. Cim. (4) **8**. 34. 1898. — [2] F. A. SCHULZE, Ber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg, Dezbr. 1902 und K. SCHAUM und F. A. SCHULZE, Ann. d. Phys. **13**. 422. 1904. — [3] P. LEBEDEW, Wied. Ann. **56**. 1. 1895. — [4] A. LAMPA, Sitzber. d. Wien. Akad. (IIa) **108**. 587 u. 1049. 1896, das letzte auch Wied. Ann. **61**. 79. 1897. — [5] J. Ch. BOSE, Proc. Roy. Soc. **59**. 160. 1896. Phil. Mag. (5) **43**. 55. 1897. — [6] F. HIMSTEDT, Ber. d. naturw. Ges. zu Freiburg i. Br. **11**. 1899. — [7] A. RIGHI, deutsch von B. DESSAU, Leipzig, 1898. — [8] A. TÖPLER, Wied. Ann. **46**. 306, 464, 642. 1893; **63**. 183. 1897. — [9] H. RUBENS, Zeitschr. für phys. und chem. Unterr. **9**. 241. 1896. **10**. 239. 1897. — [10] F. KIEBITZ, Ann. d. Phys. **5**. 872. 1901.

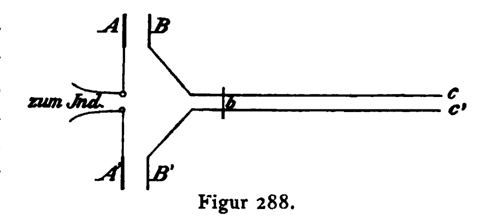
brechung im Kreis, die als Funkenstrecke diente oder mit RIGHIschen Resonatorstreifen oder den Glimmelektroden einer ZEHNDERschen Röhre verbunden war. Der Grundschwingung entsprach eine Länge des Empfängers von 248 cm, stellte man kleinere Empfänger her, so zeigten sie sich in Resonanz mit dem unveränderten Erreger, wenn ihre Länge $= \frac{248}{m}$ war, wo m die Reihe der ungeraden Zahlen 3, 5, ... 17 bedeutet; d. h. wie die Theorie ergibt, treten harmonische Oberschwingungen ungerader Ordnung auf. Auch die Knoten und Bauchlinien der magnetischen Kraft in der Nähe des Erregers, die ABRAHAMS Theorie verlangte, konnten zum Teil experimentell gefunden werden.

Versuche mit kreisförmigen Resonatoren über die Beschaffenheit des Feldes eines geradlinigen Leiters, besonders an dessen Ende, haben SARASIN und BIRKELAND[1] angestellt.

Mit dem RUTHERFORDschen Detektor hat CHANT[2] die von verschiedenen Erregern erzeugten Wellen längs eines Drahtes, längs einer Geberantenne und der Empfangsdrähte der drahtlosen Telegraphie untersucht.

## b) Das Paralleldrahtsystem.[3]

Dies Drahtsystem mit nach LECHERS Vorgang übergelegter Brücke, dessen Theorie schon früher (s. S. 655 ff.) gegeben ist, wird meist benutzt, um die Wellenlänge der erregten Schwingungen zu messen. Die Anregung zu den Schwingungen erhält das System durch den Oszillator (nach HERTZ, RIGHI, BLONDLOT), mit dem es gekoppelt ist, so daß in dem Gesamtsystem, nach der allgemeinen Theorie gekoppelter Systeme, zwei Schwingungen auftreten können. Sind primäre ($AA'$) und sekundäre ($BCC'B'$) Leitung (s. Figur 288) in ihren Dimensionen und Lagen unveränderlich, so wird das Auflegen einer Brücke ($b$) auf die Paralleldrähte die Koppelung verändern, stärker machen, was schon das andere Aussehen und lautere Knattern des Primärfunkens anzeigt. Verschiebt man $b$ nach dem Ende $CC'$ hin, so können nach und nach alle Eigenschwingungen des sekundären Systems hervortreten, wie sie die Theorie [s. Formel (61) S. 654] durch die KIRCHHOFFsche Gleichung gibt.



Figur 288.

Das beobachtete zuerst LECHER[4], der, wie schon früher gesagt, eine GEISSLERsche Röhre als Wellenanzeiger benutzte, die quer am Ende über die Drähte gelegt war. Eine solche Röhre spricht am besten an, wenn sie in einem Spannungsbauch liegt, die Lage der Brücke charakterisiert natürlich einen Spannungsknoten. Läßt man die Brücke $b$ liegen, während die Geißlerröhre gut anspricht, und verschiebt eine zweite Brücke $b_2$ von $b$ nach $CC'$ hin, so leuchtet die Röhre nur dann hell auf, wenn $b_2$ eine Knotenstelle des schwingenden Systems passiert, der Abstand zwischen $b_2$ und $b$ wird dann nahe ein ganzes Vielfaches der halben Wellenlänge ($\lambda$) sein. Zur genauen Bestimmung von $\frac{\lambda}{2}$ muß noch die Korrektion wegen der „Brückenverkürzung" (s. S. 655) angebracht werden, was für nicht zu

[1] E. SARASIN und KR. BIRKELAND, C. R. **117**. 618. 1893; **118**. 793. 1894. — [2] C. A. CHANT, Phil. Mag. (6) **5**. 331. 1903; **7**. 124. 1904; Am. Journ. of. Sc. (4) **18**. 403. 1904. — [3] E. LECHER, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. **99** (IIa). 1. 1890 u. Wied. Ann. **41**. 850. 1890. S. auch J. J. THOMSON, Proc. Roy. Soc. **46**. 1. 292. 1889. — [4] Über Anordnung und Versuchsbedingungen bei dem Drahtsystem s. noch W. DONLE, Wied. Ann. **53**. 178. 1890. — A. TÖPLER, ibid. **46**. 642. 1892. — H. EBERT u. E. WIEDEMANN, ibid. **48**. 549 u. **49**. 1. 1893. — R. APT, ibid. **61**. 631. 1897.

lange Brücken meist genügend geschieht, wenn man zur gemessenen Länge der Paralleldrahtleitung noch die halbe Brückenlänge hinzuaddiert. Man wird die Brücke im allgemeinen möglichst kurz wählen, da sie dann mehr reflektiert, ihre Länge ist also durch den Abstand der beiden Paralleldrähte gegeben, der auf 1—2 cm herabgehen kann.

Je besser die primäre Schwingung mit der auf der sekundären Leitung abgegrenzten in Resonanz ist, um so intensiver werden die Schwingungen in der letzteren sein. Will man die Wellenlänge des Erregers möglichst unbeeinflußt von den Schwingungen des sekundären Systems finden, so muß die Koppelung zwischen beiden sehr gering sein, dann bildet sich im Fall der Resonanz im Drahtsystem die schwach gedämpfte Erregerschwingung aus.

Hierauf beruht die früher erwähnte Methode von DRUDE[1] zur Bestimmung der Wellenlänge einer Oszillatorschwingung. Ein mit dem Oszillator schwach gekoppeltes Drahtrechteck, dessen eine Schmalseite verschiebbar ist, bildet das Sekundärsystem; die Resonanz wird durch eine in der Mitte aufgelegte Vakuumröhre festgestellt. Die Gesamtlänge des Rechtecks, vermehrt um 3 cm (Kapazität der Röhre), gibt die Wellenlänge der Erregerschwingung. — Zur Messung von größeren $\lambda$ ist in die unbewegliche Schmalseite des Rechtecks ein Kondensator eingeschaltet, dessen Kapazität durch Eintauchen der Platten in Flüssigkeit ($H_2O$ mit Dielektrizitätskonstante 81) vermehrt werden kann.

Durch jede Veränderung oder Verschiebung des primären und sekundären Systems gegeneinander ändert sich die Koppelung, also auch die Periode der auftretenden Schwingungen.

Werden z. B. die Platten $BB'$ den $AA'$ mehr und mehr genähert, so zeigen Beobachtungen[2], daß die Schwingungen in dem sekundären System stärker und stärker gedämpft werden und schließlich nur noch wenige Wellen längs der Drähte wahrzunehmen sind. Das erklärt sich durch die zunehmende Koppelung, die, wie die Theorie der Koppelung zeigt (s. diese), die Dämpfung vermehrt usw.

Eine sorgfältige experimentelle und theoretische Untersuchung haben COHN und HEERWAGEN[3] ausgeführt, sie gelangten dabei, indem sie von der HERTZschen Darstellung der Erregerschwingungen ausgingen, zu der KIRCHHOFFschen Gleichung. Bei ihren Versuchen endeten die Paralleldrähte in den Platten eines Kondensators ($C_0$), eine Brücke wurde auf der Leitung verschoben und die Lagen der Brücke ($b$) (Knotenpunkte) bestimmt, bei denen eine GEISSLERsche Röhre, die zwischen $b$ und $C_0$ sich befand, aufleuchtete, dann ist jedesmal der Teil des Systems vor $b$ mit dem hinter $b$ in Resonanz. Es gelang so, eine Reihe von Obertönen (bis zum sechsten) zu finden, die nicht harmonisch waren und deren Wellenlänge mit der KIRCHHOFFschen Formel im allgemeinen stimmte.

Mit der LECHERschen Anordnung hat auch LAMOTTE[4] gearbeitet, aber dabei eine Brücke ($b$) näher den sekundären Platten auf der Leitung fest liegen lassen und so ein System abgegrenzt, das aus dem Erreger, den sekundären Platten und Leitung bis zu $b$ besteht. Dann wurde eine zweite Brücke $b_2$ verschoben und die GEISSLERsche Röhre stets in der Mitte zwischen beiden Brücken gehalten, da sie dort (in einem Spannungsbauch) am besten anspricht. Die so gefundenen Obertöne fügen sich auch hier annähernd der KIRCHHOFFschen Gleichung.

Die Versuche LAMOTTES mit der BLONDLOTschen Anordnung lassen sich nicht aus dieser Formel berechnen, da die Anordnung nicht den Bedingungen der Rechnung genügt, aber auch sie ergeben eine Reihe von Obertönen[5].

---

[1] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **9**. 611. 1902. S. auch Anordnungen um Resonanz, Dielektrizitätskonstante, Koppelung usw. zu messen, Phys. Zeitschr. **4**. 734. 1903. — [2] S. z. B. D. E. JONES Rep. Brit. Ass. Cardiff. 1891. 561 u. Beibl. **17**. 851. 1893. — [3] E. COHN u. F. HEERWAGEN, Wied. Ann. **43**. 347. 1891. — [4] M. LAMOTTE, Wied. Ann. **65**. 92. 1897; Ann. de Chim. et de Phys. (7) **24**. 205. 1901. — [5] Weitere Literatur: SALVIONI, Rend. dell' Ac. dei Lincei **1**. 206 u. 250. 1892. Ricerche sulle onde elettriche stazionarie Perugia, 1893. — J. VON GEITLER,

Endigen die Drähte in $CC'$ frei (d. h. ist nach früherem $C_0$ sehr klein), so soll nach der Theorie im Abstand $\frac{1}{4}\lambda$ vom Ende ein Spannungsknoten liegen, das gilt, wie die Beobachtungen zeigen, nur angenähert, wohl zum Teil deshalb, weil von den Enden stets Ausstrahlung stattfindet[1]. Liegt bei $CC'$ eine Brücke, oder endigen die Drähte dort in einem Kondensator von größerer Kapazität, so befindet sich da (angenähert) ein Spannungsknoten.

Die Form der stehenden Welle im sekundären System ist vielfach untersucht worden. Zuerst von RUBENS[2], der das Bolometer benutzte und ihm von zwei gegenüberstehenden Punkten der Drähte in der S. 646 angegebenen Art die Schwingungen zuführte. Er fand, als keine Brücke auflag und die Ableitungsstellen nach dem Bolometer vom Anfang der Paralleldrähte systematisch nach $CC'$ verschoben wurden, eine Wellenkurve mit mehreren verschieden starken Maximis und Minimis; als eine Brücke $b$ aber fest liegen blieb, nahm die Kurve ganz die Form der einfachen Sinuslinie an. — BJERKNES[3] nahm Drähte (130 m), die länger waren, als der vom stark gedämpften Erreger ausgesandte Wellenzug, so daß nur eine einzige Reflexion zu berücksichtigen war, da, wenn die erste Welle zum zweitenmal wiederkehrte, sie schon durch einen elektrisch neutralen Draht lief, es konnten also keine dauernden stehenden Wellen zustande kommen. In verschiedenen Entfernungen vom Ende der Drähte stand ein Elektrometer, dessen Ausschläge man beobachtete. Die Kurve der Ausschläge gibt eine gedämpfte Sinusschwingung für die so untersuchte Welle des Erregers[4].

Der Einfluß der Dicke der Drähte ist nach den theoretischen Untersuchungen (s. S. 649 u. 650) derart, daß, je dünner die Drähte werden, um so kleiner wird für dieselbe Schwingungsdauer die Wellenlänge. Das haben u. a. ST. JOHN[5] und BARKLA[6] für Kupferdraht bestätigt. Der erstere fand z. B. für Wellen von 5 m Länge eine Abnahme des $\lambda$ von 5 Prozent, wenn der Durchmesser des Kupferdrahtes von 0,1201 cm auf 0,03915 cm sank.

Ebenso ergaben Versuche die von der Theorie geforderte geringe Verkleinerung der Wellenlänge durch abnehmende Leitfähigkeit[7]. Auch größere Permeabilität (Eisendrähte) vermindert $\lambda$[5].

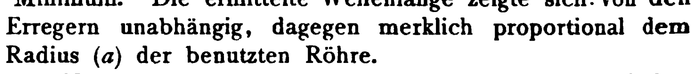
Laufen die Drähte nicht genau parallel, enthalten sie Ausbiegungen, Knicke, sind dickere oder dünnere Partien in die Leitung eingeschaltet, Drahtstücke oder Bleche angehängt usw., so findet bei jeder solchen Stelle eine Reflexion statt, da sich die Kapazität dort ändert[8]. Durch Einschalten solcher heterogener Leiter in das Drahtsystem können den NEWTONschen Ringen in der Optik ähnliche Erscheinungen hervorgerufen werden, da am Anfang und Ende des heterogenen Leiters vielfache Reflexionen eintreten werden. Solche Fälle, wie z. B. das Einschalten von Kondensatoren, sind eingehend behandelt von BARTON[8], der auch die Dämpfung in dem Paralleldrahtsystem zu bestimmen suchte[9].

Wied. Ann. **55**. 513. 1895; **57**. 412. 1896; **66**. 999. 1898. — P. DRUDE, Arch. de Genève (4) **3**. 464. 1897. — D. MAZOTTO, Atti delli Sc. di Torino. **28**. 417. 1892/93; **29**. 22 u. 369. 1893/94; N. Cim. (4) **6**. 172. 1897; (4) **7**. 5. 1898; **9**. 207. 1899. — E. CASTELLI, N. Cim. (5) **6**. 49. 1903. **8**. 161. 1904.

[1] Z. B. L. DE FOREST, Am. Journ. of Sc. (4). **8**. 58. 1899 u. Phys. Zeitschr. **1**. 193. 1900. — H. A. BUMSTEAD, Am. Journ. of Sc. (4) **14**. 359. 1902. — [2] H. RUBENS, Wied. Ann. **42**. 154. 1891. — [3] V. BJERKNES, Wied. Ann. **44**. 513. 1891. S. auch A. EKSTRÖM, Wied. Ann. **64**. 315. 1898. — [4] Andere Versuche s. z. B. KR. BIRKELAND, Wied. Ann. **47**. 583. 1892. — A. PEROT, C. R. **114**. 165. 1891; **115**. 1284. 1892. — J. A. POLLOCK u. O. U. VONWILLER, Phil. Mag. (6) **3**. 586. 1902. — CH. G. BARKLA, ibid. (6) **1**. 652. 1901. — [5] ST. JOHN, Phil. Mag. (5) **38**. 425. 1894. S. auch EMDEN, Sitz.-Ber. d. kgl. bayr. Akad. **22**. 71. 1892. — J. TROWBRIDGE, Am. Journ. of Sc. (3) **48**. 307. 1894 u. Phil. Mag. (5) **38**. 441. 1894. — [6] BARKLA, l. c. — [7] S. z. B. J. VON GEITLER, Wied. Ann. **49**. 184. 1893. — E. H. BARTON, Wied. Ann. **53**. 513. 1894; Proc. Roy. Soc. **54**. 85. 1896. — [8] E. H. BARTON u. L. LOWNDS, Phil. Mag. (5) **50**. 357. 1900. S. auch W. B. MORTON, ibid. (5) **43**. 383. 1897. — [9] E. H. BARTON u. G. B. BRYAN, Phil. Mag. (5) **43**. 39. 1897. — E. H. BARTON, ibid. **44**. 145. 1897 u. ibid. **46**. 296. 1898. — W. B. MORTON, ibid. **47**. 296. 1899.

### c) Metallröhren.

Die Länge der in Metallröhren verlaufenden Wellen wurde meist nach einer zuerst von V. VON LANG[1] benutzten Methode gemessen. Von dem Erreger (Blondlot- oder Righi-Oszillator) wurde die Welle durch eine Röhre ($A$), in der die ja stets stark gedämpfte Erregerschwingung möglichst vernichtet werden sollte, in die verzweigte Interferenzröhre geleitet (s. Figur 289). Sie ist nach dem Muster der QUINCKEschen Röhre in der Akustik gebaut, so daß die eine oder beide Seiten posaunenartig ausziehbar sind. Der eintretenden Röhre $A$ gegenüber befindet sich die Austrittsröhre $B$, von der die Welle zu dem Indikator (meist ein Kohärer) geführt wird. Eintritts- und Austrittsstellen $A$ und $B$ münden, wie die Figur zeigt, in würfelförmige Kästchen, die zwar nicht durchaus nötig sind[2], aber die Erscheinung viel deutlicher machen. Sind die Schenkel gleich lang, so zeigt der Kohärer ein Maximum der Intensität; unterscheidet sich ihre Länge um $\frac{\lambda}{4}$, so ist die Intensität ein Minimum. Die ermittelte Wellenlänge zeigte sich von den Erregern unabhängig, dagegen merklich proportional dem Radius ($a$) der benutzten Röhre.



Figur 289.

Nach der Theorie von WEBER (s. S. 657) ist bei den Versuchen die erste nicht axialsymmetrische Schwingung realisiert, d. h. in der Formel für die Wellenlänge ist $n = 1$, so daß die Länge der Grundschwingung

$$\lambda = \frac{2\pi}{l_1^{(1)}} \cdot a \quad ,$$

wo $l_1^{(1)}$ der Wert von $x$ in $J_1(x)$ ist, für den $J_1(x)$ seinen ersten Maximalwert hat.

Nach der Theorie der BESSELschen Funktionen ist also $l_1^{(1)} = 1{,}84$

$$\lambda = 3{,}415 \cdot a \quad .$$

Die nach dieser Formel berechnete Wellenlänge stimmt für manche Versuche sehr gut, bei anderen freilich wenig mit den Beobachtungen, vielleicht weil bei diesen die der Interferenzröhre vorgeschaltete Röhre zu kurz war und sich noch ein Einfluß der Erregerschwingung merklich machte. Folgende Tabelle nach WEBER zeigt diese Verhältnisse und gibt zugleich die Beobachter:

| Radius $a$ in cm | Wellenlänge in cm | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | v. LANG | DRUDE[3] | BECKER[4] | WEBER | berechnet |
| 2,95 | 8,8 | | | | 10,07 |
| 2,47 | 8,52 | | | | 8,435 |
| 2,35 | | 9,0 | | | 8,026 |
| 1,0 | | 4,5 | | | 3,415 |
| 3,0 | | | 9,5—10,4 | 10,35 | 10,245 |
| 1,5 | | | 4,94—5,03 | 5,1 | 5,122 |

Eine etwas andere Art der Beobachtung wurde zuerst von A. BECKER benutzt. Bei ihr war hinter dem Interferenzrohr in die Austrittsröhre noch ein T-Stück ein-

[1] VICTOR VON LANG, Sitzungsber. d. Wien. Akad. (IIa) 104. 980. 1895; 105. 253. 1896 und Wied. Ann. 57. 430. 1896. — [2] RUDOLF H. WEBER, Ann. d. Phys. 8. 743. 1902. — [3] P. DRUDE, Wied. Ann. 65. 481. 1898. — [4] A. BECKER, Ann. d. Phys. 8. 22. 1902.

geschaltet, dessen geschlossener Stiel ausziehbar war. Durch Ausziehen oder Einschieben des Stieles wurden die periodischen Intensitätsänderungen des Kohärers bewirkt und $\lambda$ gemessen.

Mit dieser Vorrichtung gelang es WEBER, noch eine Oberschwingung ($n = 2$, $m = 1$) nachzuweisen, wenn das Rohr so gestellt war, daß die ungleiche Länge seiner Schenkel die Grundschwingung vernichtete.

A. BECKER zeigte, daß, wenn die Ebene des Interferenzrohres senkrecht steht zur Ebene, in der sich Erreger und Kohärer befinden, die Wellen nicht mehr hindurchgehen. Das gilt aber nur für kreisförmigen Querschnitt des Rohres; für quadratischen Querschnitt fand WEBER keinen merklichen Unterschied, wie auch die beiden Ebenen gegeneinander geneigt waren.

### d) Schwingungen von Spulen.

In einer Drahtspule (etwa Sekundärspule eines Tesla-Transformators) kann man wie längs eines geraden Drahtes Schwingungen erzeugen, wenn man sie passend durch den Primärkreis anregt. An den freien Enden werden sich Spannungsbäuche befinden, und als Grundschwingung wird also die anzusehen sein, die in der Mitte der Spule einen Spannungsknoten hat, so daß die Länge der Spule $= \frac{\lambda}{2}$ wird. Man erhält diese Schwingung, indem man z. B. den aus einer Windung bestehenden Primärkreis des Tesla-Apparates in der Mitte um die Spule herumlegt; die Anregung ist hier (und überhaupt) besonders intensiv, wenn die Erregungsstelle ein Strombauch der Eigenschwingungen für das erregte System ist. Die Lage der Bäuche und Knoten, auch der Oberschwingungen, kann man durch genäherte Vakuumröhren oder dergleichen nachweisen[1]; s. z. B. die SEIBTschen Resonanzspulen bei „Tesla-Transformator".

Die Eigenschwingungen von Spulen hat DRUDE[2] untersucht, indem er in loser Koppelung auf sie einen einfachen Plattenkondensatorkreis wirken ließ, dessen Platten in meßbarer Weise gegeneinander verschoben werden konnten. Die jeder Stellung der Platten entsprechende Wellenlänge war durch Eichung mit einem Paralleldrahtsystem bestimmt worden. Eine Vakuumröhre am Ende der Spule ergab durch maximales Leuchten die Einstellung des Kondensators, bei der Resonanz zwischen Spule und Kondensatorkreis vorhanden war. Es fand sich

$$\frac{\lambda}{2} = l \cdot f\left(\frac{h}{2r}, \frac{g}{\delta}, \varepsilon\right) \quad ,$$

wo $h$ = Spulenhöhe; $2r$ = Spulendurchmesser; $g$ = Ganghöhe; $\delta$ = Drahtdicke; $\varepsilon$ = Dielektrizitätskonstante des Spulenkernes (Holz, Ebonit, Glas, Luft usw.); $l$ = Drahtlänge.

Innerhalb der Versuchsgrenzen erwies sich in ziemlich weitem Intervall $f \cdot \sqrt{\frac{h}{r}}$ als konstant. DRUDE gibt S. 322 und 323 Tabellen zur Berechnung der $\lambda$ aus gegebenen Werten der Argumente der Funktion $f$.

Angehängte Kapazität $C'$ vergrößerte die Periode, doch stieg diese Vergrößerung nie auf das Doppelte des ursprünglichen Wertes. Ist $C'$ sehr klein, so wird

$$C' = \frac{\alpha\pi}{4} 2r\left(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1\right) \quad ,$$

wo $\alpha$ ein Zahlenfaktor (etwa 1 bis 2) ist, der sich aus Tabellen der Arbeit berechnen läßt und $\lambda$, resp. $\lambda'$ die Wellenlänge der Grundschwingung der Spule ohne

[1] S. z. B. J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwingungen, S. 628 u. 652. — [2] P. DRUDE, Ann. d. Phys. 9. 293. 1902.

resp. mit der angehängten Kapazität $C'$ bedeuten. Hiernach läßt sich die sehr kleine Kapazität $C'$ messen.

Die Oberschwingungen waren nicht harmonisch zur Grundschwingung, bei ihnen schwingt die Spule nicht in kongruenten Teilen.

Als Dekrement einer Spule von 38 Windungen ($h = 57$ cm; $r = 48{,}5$ cm; $g = 1{,}5$ cm; $\delta = 1{,}8$ mm) fand ZENNECK[1] etwa 0,07, d. h. von der Größenordnung eines Kondensatorkreises mit Funkenstrecke.

Schwingungen von Spulen mit angehängten linearen Leitern (Antennen der drahtlosen Telegraphie) ergaben nach DRUDE[2] folgende Resultate: Der Spule sollen an beiden Enden stets gleiche Leiter angehängt sein, dann ist die Änderung der Strom- und Spannungsamplitude beim Übergang der Wellen von der Spule auf die Drähte und umgekehrt wesentlich von der Größe $\beta$ (Durchlaßindex) abhängig, wo sich findet:

$$\beta = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \quad .$$

Hier ist $\lambda_0$ die Eigenwellenlänge der Spule (ohne Antenne); $\lambda$ die Wellenlänge der Spule mit Antenne; $l$ die Länge der Antenne (ohne Spule).

Hier kann $\lambda_0$ nach den früheren Resultaten berechnet werden. $\beta$ hängt von den Parametern der Spule und Antenne in einer Weise ab, die DRUDE aus Versuchen ableitet und in einer Tabelle zusammenstellt, so daß $\lambda$ aus $\lambda_0$ und $\beta$ zu bestimmen ist. — Auch auf Vielfachantennen werden die Versuche ausgedehnt, bei denen (wie in der drahtlosen Telegraphie) die einzelnen Drähte parallel oder konisch angeordnet sind. Eine solche Vielfachantenne wirkt wie eine Antenne (aus einem Draht), deren Radius sich aus einem gewissen mittleren Querschnitt der Vielfachantenne ergibt.

Statt an beiden Spulenenden kann man nur an einem eine Antenne anbringen und an dem anderen eine (Kapazität) Metallplatte von der Flächengröße $S$, so daß in der Mitte der Spule noch ein Spannungsknoten bestehen bleibt. Die Größe von $S$, die einer Antenne der Länge $l$ das elektrische Gleichgewicht hält, berechnet sich nach DRUDE, wenn $l'$ die Länge des Verbindungsdrahtes zwischen Spule und Platte ist, aus:

$$\sqrt{S} = \frac{0{,}603}{\text{brigg.}\log\frac{l}{\varrho}} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l - l'}{\lambda}$$

(Dicke der Antenne $= 2\varrho$).

Je enger die Spule gewickelt war und je weniger ihr Radius den der Antenne übertraf, um so mehr schwächte sie die auf sie übergehenden Schwingungen.[3]

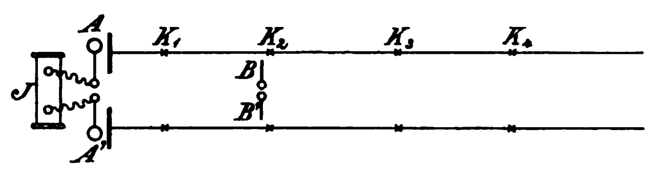
Zur Messung der Wellenlänge der z. B. bei der Telegraphie ohne Draht benutzten Schwingungen kann man (was schon von OUDIN zu anderen Zwecken geschehen war) nach SLABY[4] eine Spule benutzen, deren Windungen zum Teil durch Kurzschluß ausgeschaltet werden können. Bringt man diesen „Multiplikationsstab", dessen eines Ende geerdet ist, in die Nähe der zu messenden Schwingung, so zeigt sich, wenn er mit ihr in Resonanz ist, an seinem anderen Ende kräftige Büschelentladung, und hat man den Apparat vorher geeicht, so läßt sich die erregende Wellenlänge mit für praktische Zwecke genügender Genauigkeit bequem ablesen. Die Spule muß kleine Kapazität und große Selbstinduktion haben, damit die Leuchtwirkung möglichst kräftig ist, sie wird also aus dünnem Draht mit kleiner Ganghöhe gewunden. — Auch FLEMING[5] hat ein Instrument konstruiert

[1] J. ZENNECK, l. c. S. 628. — [2] P. DRUDE, Ann. d. Phys. **11**. 957. 1903. — [3] Über Strahlung von Spulen s. auch E. NESPER, Ann. d. Phys. **15**. 768. 1904. — [4] A. SLABY, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 1007. 1903. S. auch G. SEIBT, ibid. **22**. 580. 1901. — Graf ARCO, ibid. **24**. 1. 1903. — P. DRUDE, ibid. **26**. 339. 1905. — [5] J. A. FLEMING, Phil. Mag. (6) **8**. 417. 1904. S. auch ibid. **7**. 586. 1904.

(das er Kummeter nennt, um z. B. die Wellenlänge des Senders bei der Telegraphie ohne Draht zu bestimmen), dessen wesentlicher Teil eine 2—2½ m lange auf Ebonit gewundene Spule ist. Auf die Spule induziert der Kondensatorkreis des Senders (s. später), und durch einen geerdeten Schlitten wird die Spulenlänge geändert, bis sie, wie das Leuchten von GEISSLERschen Röhren zeigt, in Resonanz mit der Senderschwingung ist.

## 29. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Luft.

Es war, wie früher angeführt, HERTZ nicht gelungen über die Fortpflanzung der von ihm erzeugten Schwingungen in freier Luft und längs der Drähte befriedigende Resultate zu erhalten, das gelang zuerst E. SARASIN und L. DE LA RIVE[1], die in großen Räumen unter günstigeren Verhältnissen arbeiteten. Ihre Methode ist die HERTZsche, nur stellten sie (wie es HERTZ schon vorgeschlagen und ausgeführt) beiden Kapazitäten des Oszillators sekundäre Platten gegenüber, von denen aus dann die Paralleldrähte aus Kupfer liefen (s. Figur 290). Zwischen den Drähten wurde der Resonator $BB'$ (vertikaler Drahtkreis, mit Funkenstrecke oben) verschoben und die Stellen der Minimalfunken $K$ (Knoten) genau gemessen. Das geschah mit verschiedenen Resonatoren, so erhielt man die Wellenlänge der Drahtwellen.




Figur 290.

Die Wellenlänge in freier Luft wurde auch nach der HERTZschen Methode gemessen. Die Größe der reflektierenden Zinkblechwand war 8 × 16 m, der Abstand des Erregers von ihr 15 m. Mit denselben Resonatoren wie bei den Drahtwellen wurden die Knotenstellen in der Luft aufgesucht und die Wirkung des Erregers dadurch sehr verbessert, daß sein Funke in Öl oder Petroleum übersprang[2]. Bei mannigfacher Abänderung der Versuche war das Resultat, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in freier Luft und längs der Drähte dieselbe ist[3]. Die abweichenden Resultate von HERTZ erklären sich nach diesen Beobachtungen wesentlich aus den zu engen Raumverhältnissen und der zu kleinen reflektierenden Wand bei HERTZ' Versuchen.

### a) Direkte Bestimmung.

Eine direkte Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen verlangt, da $v = \frac{\lambda}{\tau}$, die Bestimmung der beiden Größen $\lambda$ und $\tau$, sie ist von MAC LEAN[4] nach der HERTZschen Methode versucht worden. Oszillator und Resonator waren möglichst gleich gemacht. Jeder bestand aus einer FRANKLINschen Tafel, deren Belegungen an Kupferdrähte anschlossen, die einander parallel im Abstand von 5 cm zu kleinen Platinspiralen führten, die in

[1] E. SARASIN und L. DE LA RIVE, Arch. de Genève (3) **23**. 113. 557. 1890 und besonders **29**. 358. 441. 1893 und C. R. **110**. 72. 1890; **112**. 658. 1891; **115**. 1277. 1892. — [2] E. SARASIN und L. DE LA RIVE, Arch. de Genève **28**. 306. 1892; C. R. **115**. 439. 1892. — [3] Das findet auch M. DUFOUR, C. R. **118**. 1039. 1894. — C. GUTTON, C. R. **128**. 1508. 1899. Ebenso für Asphalt C. GUTTON, C. R. **130**. 894. 1900. — [4] G. V. MAC LEAN, Phil. Mag. (5) **48**. 115. 1899.

Platinkugeln endeten. Beim Oszillator standen diese Kugeln 4 mm auseinander, beim Resonator wurden sie durch Feder und Schraube zusammengepreßt und dienten als Kohärer. Der Erreger sandte seine Strahlung nach einem 12,67 m entfernten ebenen Spiegel, und in den Zwischenraum wurde der Resonator auf einem fahrbaren Tisch gebracht. Sehr deutlich ließen sich so Knoten und Bäuche, d. h. $\lambda$, in der freien Luft bestimmen. Die Schwingungsdauer $\tau$ wurde durch Photographieren des Oszillatorfunkens ermittelt, freilich nicht des zu schwachen, bei Bestimmung von $\lambda$ benutzten, sondern eines ähnlich gebauten mit größerer Kapazität und Selbstinduktion, so daß durch Anwendung der Thomsonschen Formel eine Reduktion des direkt bestimmten $\tau$ auf das dem verwendeten Oszillator zugehörige nötig war. Es fand sich $v = 2{,}991 \cdot 10^{10}$ cm/sec. — Bei Bestimmung von $\tau$ mit dem Drehspiegel und Photographie erweisen sich die Abstände der ersten Funkenbilder immer etwas größer als die der folgenden[1], wohl wegen größerer Leitfähigkeit der Funkenstrecke während der späteren Oszillationen, so daß eine ganz eindeutige Bestimmung der Periode kaum möglich ist.

## b) Bestimmung mit Drahtwellen.

Trowbridge und Duane[2] maßen in der sekundären Leitung die Wellenlänge mit dem Bolometer, die etwa 56,8 m betrug, und bestimmten mit dem rotierenden Spiegel die Schwingungsdauer, dadurch erhielten sie im Mittel $v = 3{,}003 \cdot 10^{10}$ cm/sec. — Nur wenig weicht davon die Zahl ab, die Blondlot[3] für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines elektrischen Impulses längs einer Leitung von bekannter Länge erhielt. Die inneren Belegungen zweier gleicher Leydner Flaschen endigten in zwei Kugeln, die sich in 6 bis 7 cm Entfernung gegenüberstanden, sie waren mit dem Induktorium verbunden. Die äußere Belegung jeder Flasche bestand aus einem oberen und unteren voneinander isolierten Stanniolring; die beiden oberen Ringe endigten in zwei einander im Abstand von 0,5 mm gegenüberstehenden Messingspitzen, von den beiden unteren Stanniolringen führten Drahtleitungen (bei einigen Versuchen 1029 m, bei anderen 1821,4 m lang) zu denselben Messingspitzen. In einem rotierenden Spiegel wurden die Funken beobachtet, die bei der Entladung der oberen und, gleich darauf, der unteren Belegungen entstanden. Es ergab sich im Mittel aller Versuche $v = 2{,}972 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Demnach pflanzen sich elektromagnetische Störungen mit Lichtgeschwindigkeit durch die Luft fort[4].

## c) Indirekte Bestimmung.

Indirekte Bestimmungen der Größe $v$ in Luft sind zahlreich gemacht worden unter Voraussetzung der Richtigkeit der Thomsonschen Formel. So z. B. von Blondlot[5], der seinem Abschnitt 26 erwähnten Resonator die beschriebene Form gab, um dessen Schwingungsdauer nach der Thomsonschen Formel möglichst exakt berechnen zu können. War so $\tau$ bekannt, so bestimmte Blondlot das dem Resonator zugehörige $\lambda$, indem er ihn zwischen die Paralleldrähte eines Lecherschen Systems brachte, auf dem er eine Brücke verschob. Er nahm dann den Abstand zweier Brückenstellungen, bei denen ein Erlöschen der Resonatorfünkchen eintrat, als $\frac{\lambda}{2}$ an (s. später). Die Kapazität des Resonators ließ sich durch Entfernung seiner Kondensatorplatten voneinander sehr stark verändern; als

[1] S. die folgende Arbeit von Trowbridge und Duane S. 223; auch C. Tissot, C. R. **133**. 929. 1901. S. auch R. Swyngedauw, C. R. **130**. 708. 1900 und Journ. de Phys. (4) **2**. 14. 1903. — [2] J. Trowbridge und W. Duane, Phil. Mag. (5) **40**. 211. 1895. — [3] R. Blondlot, C. R. **117**. 543. 1893; Ann. de chim. et de phys. (7) **7**. 520. 1896. — [4] Clarence A. Saunders, Phys. Rev. **4**. 81. 1896 erhielt nach der Methode von Trowbridge und Duane die Zahl: $2{,}982 \cdot 10^{10}$ cm/sec. — [5] R. Blondlot, Journ. de Phys. **10**. 549. 1891.

Mittel der zuverlässigsten Beobachtungen ergab sich $v = 3{,}022 \cdot 10^{10}$ cm/sec. — Eine Prüfung der Formel $v' = \frac{v}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}$ haben BOCARRA und GANDOLFI[1] für verschiedene Mischungen von Paraffin und Eisen versucht, für die einzeln $\mu$ und $\varepsilon$ bestimmt werden konnten und $\frac{v}{v'} = \nu$ sich durch den auch experimentell gefundenen Brechungsquotienten $\nu$ ergab. Die Änderungen von $\nu$ und $\sqrt{\mu\,\varepsilon}$ fanden in demselben Sinne statt.

## 30. Reflexion freier elektrischer Wellen.

### a) Metalle.

Die Grundversuche von HERTZ über die Reflexion sind vielfach wiederholt und mit sehr verschiedenen Wellenlängen bestätigt worden. Dabei hat man gefunden, daß die reflektierenden Spiegel (ebene oder parabolische) große Dimensionen haben müssen, sollen nicht störende Umstände die Reinheit der Erscheinungen verdecken[2]. So erklärt sich z. B. die Verschiebung des ersten Maximums und Minimums der elektrischen Kraft von der reflektierenden Wand gegen den Oszillator hin, die HERTZ beobachtete, aus den zu kleinen Dimensionen der Wand[3]. — Das erste Maximum der durch senkrechte Reflexion erzeugten stehenden Welle liegt aber im allgemeinen, auch bei großem Spiegel, diesem näher, als der Lage des ersten Minimums entspricht, wenn die Untersuchung mit einem Resonator vorgenommen wird. Der Grund findet sich im Zusammenwirken der von Oszillator und Resonator ausgehenden reflektierten Wellen; es muß deshalb zu guter Wirkung eines parabolischen Spiegels, dessen Brennweite nicht gleich $\frac{\lambda}{4}$, sondern gleich dem Abstand des ersten Maximums vom Spiegel gemacht werden[4].

Eine elliptische Polarisation der reflektierten Wellen, die RIGHI mit seinen Resonatoren für etwa $\lambda = 10$ cm gefunden haben wollte[5], scheint nach LINDMANN[6] sich nicht nachweisen zu lassen, wie Versuche mit Thermoelementen als Indikatoren zeigten.

Die Intensität der unter $45^0$ reflektierten Strahlung für $\lambda = 5$ cm fand COLE[7] mit Thermoelement merklich gleich der einfallenden, wenn die elektrische Schwingung senkrecht zur Einfallsebene war, dagegen nur etwa $92\,^0/_0$ der einfallenden für Schwingungen der elektrischen Komponente in der Einfallsebene.

### b) Drahtgitter[8].

Die reflektierende Wand braucht nicht zusammenhängend zu sein, sondern kann, wie schon HERTZ[9] gezeigt hat, durch ein Gitter aus Drähten oder Blechstreifen ersetzt werden, die einander parallel sind und deren Längserstreckung die Richtung der elektrischen Schwingung (des Oszillators) hat. HERTZ benutzte 1 mm dicke und 3 cm voneinander abstehende, auf einem achteckigen Holzrahmen montierte Kupferdrähte. Waren die mit Hohlspiegeln versehenen Oszillator und Resonator einander und mit den Gitterdrähten parallel, so wirkte das Gitter als Spiegel, wurde es um $90^0$ gedreht, so daß die Drahtrichtung senkrecht zur Schwingungsrichtung, dann reflektierte es nicht. Standen

[1] V. BOCARRA und A. GANDOLFI, N. Cim. (4) **8**. 191. 1898. — [2] F. TROUTON, Phil. Mag. (5) **32**. 80. 1891. — [3] K. F. LINDMANN, Ann. d. Phys. **7**. 824. 1902. — [4] K. F. LINDMANN, l. c. — [5] A. RIGHI, Optik elektr. Schwing. S. 150. — [6] K. F. LINDMANN, Ann. d. Phys. **4**. 617. 1900. — [7] A. D. COLE, Wied. Ann. **57**. 290. 1896. — [8] Theorie des Drahtgitters bei J. J. THOMSON, Rec. Res. S. 425. — [9] H. HERTZ, Ausbreitung usw. S. 193.

Erreger und Empfänger senkrecht zueinander und die Gitterdrähte einem von ihnen parallel, so fand keine Reflexion statt, hatten die Drähte eine geneigte Lage (45°) gegen die Schwingungen, so reflektierten sie die Komponente, die in die Drahtrichtung fiel.

Das umgekehrte, wie für die reflektierte Strahlung, gilt für die von Drahtgittern durchgelassene Strahlung[1], sie ist ein Maximum, wenn die Drähte senkrecht, dagegen ein Minimum (merklich gleich null), wenn sie parallel der einfallenden Schwingung gerichtet sind. In Zwischenstellungen läßt das Gitter eine Komponente der Strahlung durch, es hellt das bei gekreuztem Erreger und Empfänger dunkle Gesichtsfeld wieder auf.

Diese Eigenschaften des Gitters werden für ein bestimmtes $\lambda$ verstärkt, wenn seine Drähte kräftig zum Mitschwingen durch die einfallenden Wellen angeregt werden, d. h. wenn man lineare Resonatoren als Gitterstäbe wählt. Garbasso[2] konstruierte solche Resonatorengitter, indem er die langen Gitterdrähte aus einzelnen voneinander getrennten Stücken herstellte, deren Länge $\frac{\lambda}{2}$ der einfallenden Schwingung war; ein solches Gitter läßt dann alle Wellen, außer die der Länge $\lambda$, hindurch. Damit und mit einem aus solchen Resonatoren (Stanniolstreifen auf Glasplatten) gebildetem Prisma wollte Garbasso nachweisen, daß die Strahlung eines Oszillators eine Vielheit von Wellenlängen enthalte, doch da sein Empfänger auch ein Resonator ist, bleibt auch hier die von Bjerknes aufgestellte Erklärung der multiplen Resonanz bestehen.

Tauchen solche Resonatorengitter statt in Luft in dielektrische Flüssigkeiten, so zeigen sie maximale Reflexion für Wellen, deren Perioden sich wie die Wurzeln aus den Dielektrizitätskonstanten ändern[3].

Den Drahtgittern analog verhält sich ein Spalt[4] in einer ausgedehnten Metallplatte. Er läßt die Schwingungen senkrecht zu seiner Längserstreckung hindurch und schirmt die parallel seiner Längskante verlaufenden ab. Beobachtet man die durchtretenden Wellen mit einem Resonator, so kann man die Spaltlänge auf die Schwingungsdauer des Resonators abstimmen und erhält dann eine maximale Wirkung. Wird der Erreger durch ein Induktorium getrieben und beobachtet man die Wellen mit Vorrichtungen, die von den langsamen Schwingungen des Induktoriums beeinflußt werden, so gewährt ein Spaltschirm zwischen Erreger und Empfänger wirksamen Schutz gegen diese Beeinflussung ohne Schwächung (bei passender Spaltlänge mit Verstärkung) der schnellen Schwingungen.

### c) Dielektrika.

Die Versuche bestätigten, soweit die Beobachtungsgenauigkeit es zuließ, die Gültigkeit der Fresnelschen Intensitätsformeln, das Vorhandensein eines Polarisationswinkels $\alpha$ für den $\operatorname{tg}\alpha = \nu$, und ergaben, daß die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene vor sich gehen.

Trouton[5] beobachtete mit kreisförmigem Resonator und Funkenstrecke; Klemenčič[6] untersuchte die Reflexion an einer Schwefelplatte mit Thermoelementen und Wellen von 60 cm Länge. Ebenso bestimmte Cole[7] das Reflexions-

[1] H. Hertz, l. c. S. 190. S. auch H. Rubens und R. Ritter, Wied. Ann. **40**. 55. 1890. — [2] A. Garbasso, Atti Ac. di Torino **28**. 1893 und Journ. de phys. (3) **2**. 259. 1893. — A. Garbasso und E. Aschkinass, Wied. Ann. **53**. 534. 1894. S. auch L. Zehnder, Wied. Ann. **52**. 54. 1894 und **53**. 177. 1894. — [3] E. Aschkinass und Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. **5**. 489. 1901. Weitere Beobachtungen über die absorbierenden Eigenschaften von Resonatorengittern s. Cl. Schäfer, Ann. d. Phys. **16**. 106. 1905. — Über die Theorie der Gitter s. auch H. Lamb, Proc. of the London Math. Soc. **9**. 324. 1897. — [4] K. Waitz, Wied. Ann. **63**. 237. 1897; **66**. 308. 1898 und M. Latrille, ibid. **65**. 408. 1898. — [5] F. Trouton, Nature **39**. 391. 1888; **40**. 398. 1889. — [6] J. Klemenčič, Wied. Ann. **45**. 62. 1892. — [7] A. D. Cole, l. c. S. 310.

vermögen für die elektrische Schwingung senkrecht (*s*) und parallel (*p*) zur Einfallsebene, er fand in Prozenten der einfallenden Intensität für $\lambda = 5$ cm:

| | *s* | *p* |
|---|---|---|
| Wasser . . . . . . . | 71,8 | 52,7 |
| Alkohol . . . . . . | 40,5 | 15,4 |
| Petroleum . . . . . | 9,2 | |

woraus sich nach FRESNELS Formeln der Brechungsquotient bestimmen ließ.

RIGHI[1] beobachtete mit seinen Resonatoren $R$, die in einem Hohlspiegel montiert, um die Achse des Spiegels in meßbarer Weise gedreht werden konnten. Eine Drehung von $R$ um den Winkel $\alpha$ aus einer dem Oszillator ($O$) parallelen Lage, bis keine Funken mehr in $R$ wahrzunehmen sind, schwächt die Amplitude der Schwingungen in $R$ auf einen bestimmten kleinen Wert, der proportional $\cos\alpha$. Macht man das bei einem Einfallswinkel $i$ einmal, wenn die Schwingungen von $O$ in der Einfallsebene, und dann wenn sie senkrecht zu dieser Ebene vor sich gehen, so erhält man ein relatives Maß für die Intensität der in den beiden Azimuten geschehenden reflektierten Schwingungen. Dadurch ist ein Vergleich mit den FRESNELschen Formeln möglich. Die Messungen ergaben für Schwefel und Paraffin Bestätigung der Theorie; eine untersuchte Glasplatte, 0,7 cm dick, erzeugte Interferenzerscheinungen. — Auch Totalreflexion[2] und durch sie bewirkte zirkulare und elliptische Polarisation beobachtete RIGHI.

## 31. Brechung.

Die Brechung freier Wellen ist nach HERTZ' Vorgang ganz in der Art von Lichtwellen mit Prismen untersucht worden, die man bald sehr viel kleiner machte, als man Wellen von kürzerer Länge erzeugen und beobachten konnte. LEBEDEW[3], BOSE[4], LAMPA[5] gingen, wie erwähnt, bis zu $\lambda = 6$ und 4 mm, besonders der letzte maß die Brechungsquotienten einer Anzahl fester und flüssiger Körper zwischen 8 und 4 mm Wellenlänge. — Auch die brechende Wirkung von Linsen aus Kolophonium, Paraffin usw. konnte nachgewiesen werden[6].

Bei weitem die meisten Bestimmungen von Brechungsquotienten, ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge und Temperatur, wurden aber für Flüssigkeiten und mit Drahtwellen gemacht. Umgibt man die Drähte des Paralleldrahtsystems mit einem anderen Dielektrikum als Luft, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der längs der Drähte laufenden Wellen eine andere, was durch Messung der Wellenlänge in der früher für Luft beschriebenen Art nachgewiesen werden kann. Das haben zuerst J. J. THOMSON[7] und K. WAITZ[8] gezeigt, dann sind von ARONS und RUBENS[9] die ersten genaueren Messungen des elektrischen Brechungsquotienten: $\nu = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ gemacht worden, wo $\lambda_0$ resp. $\lambda$ die Wellenlänge in Luft resp. dem Dielektrikum bezeichnen. Daran schlossen sich sehr zahlreiche Bestimmungen dieser Größe, und besonders DRUDE[10] hat Methoden ausgearbeitet, nach denen die Messung von $\nu$ bequem und exakt geschehen kann. Die so gefundenen Werte erlauben nach der MAXWELLschen Beziehung $\nu^2 = \varepsilon$, die

---

[1] A. RIGHI, Optik elektr. Schwing. S. 139. — [2] S. auch J. C. BOSE, Proc. Roy. Soc. **62**. 293 u. 300. 1898. — [3] [4] [5] l. c. S. 672. — [6] S. z. B. O. LODGE u. J. HOWARD, Phys. Soc. **10**. 143. 1889. — RIGHI, l. c. 156. — [7] J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **30**. 129. 1890. — [8] K. WAITZ, Wied. Ann. **41**. 494. 1890; **44**. 527. 1891. — [9] L. ARONS u. H. RUBENS, Wied. Ann. **42**. 581. 1891; **44**. 206. 1891; **45**. 381. 1892. — [10] S. besonders P. DRUDE, Wied. Ann. **61**. 466. 1897; Zeitschr. f. phys. Chem. **23**. 267. 1897; Abhandl. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl. **23**. 1 u. 59. 1897; Ann. d. Phys. **8**. 336. 1902.

Dielektrizitätskonstante zu bestimmen, deshalb sind diese Untersuchungen schon Handbuch 4, S. 96 usw. angeführt worden und brauchen wir hier nicht auf sie einzugehen.

Righi[1] stellte zwischen seinen mit Hohlspiegeln versehenen Oszillator und Resonator 5 cm dicke Paraffinplatten vertikal auf, so daß der Einfallswinkel etwa 55° (Polarisationswinkel des Paraffins) war. Die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene gingen sehr viel weniger intensiv durch die Platte als die parallel der Einfallsebene. Durch Einschalten von 7 bis 8 solcher Platten wurden die Schwingungen senkrecht zur Brechungsebene fast völlig ausgelöscht, die Polarisationsebene der austretenden Schwingungen zeigt sich nach der Brechungsebene hin durch die Plattensäule gedreht.

## 32. Absorption elektrischer Wellen.

### a) Metalle.

Die Absorption elektrischer Wellen durch Metalle bewies schon die Schirmwirkung, die von den obersten Schichten eines Drahtes, an dem Wellen entlang laufen, für die inneren Teile ausgeübt wird, und wie sie z. B. Hertz für die von ihm erzeugten Schwingungen nachgewiesen hat (s. S. 634).

Nach Formel (10), S. 602 hängt das Eindringen der Welle in die Drähte ab von der Größe

$$\varkappa = \varrho \cdot \pi \sqrt{\sigma \mu n_1} \quad ,$$

wo $\varrho$ der Radius, $\sigma$ die Leitfähigkeit, $\mu$ die Permeabilität und $n_1$ die Schwingungszahl pro Sekunde für den Draht ist. Es war das Verhältnis der Amplituden an der Drahtoberfläche $a_\varrho$ und in der Tiefe $\beta$ unter der Oberfläche $a_{(\varrho-\beta)}$:

$$\frac{a_{(\varrho-\beta)}}{a_\varrho} = e^{-2\varkappa \cdot \frac{\beta}{\varrho}} \quad .$$

Für geometrisch gleiche Drähte aus verschiedenem Material wird also für eine bestimmte Schwingungszahl die Tiefe des Eindringens der Welle um so kleiner sein, je größer das Produkt $\sigma\mu$ ist. Das haben Versuche von Bjerknes[2] bestätigt, die unabhängig von dieser Theorie angestellt wurden. Dabei wurden genau gleiche Drahtkreise von 125 cm Länge und 0,5 mm Querschnittsdurchmesser, die auf einen Hertzschen Oszillator abgestimmt waren, mit dünnen Schichten verschiedener Metalle (Cu, Fe, Ni, Co, Zn) galvanisch überzogen, die Dicke der Schichten wurde durch Wägung bestimmt. Diese Resonatoren endigten statt in einer Funkenstrecke in den kleinen Platten eines Bjerknesschen Elektrometers, durch das also die Intensität der Schwingungen gemessen werden konnte. Hatte die Dicke des Überzuges eine gewisse (für die verschiedenen Metalle verschiedene) Größe erreicht, so änderte sich der Ausschlag des Elektrometers nicht mehr, die Schwingung drang dann nicht mehr durch den Überzug hindurch. Die Figur 291 gibt das Resultat der Versuche. Die Abszissen sind die Dicken der aufgetragenen Schichten: für die Dicke $x = 0$ ist der Ausschlag des Elektrometers bei allen Resonatoren gleich eins angenommen. Die Kurven geben die Abnahme der Elektrometerausschläge für die verschiedenen Metalle, je schneller die Ordinaten abnehmen, um so größer ist das Absorptionsvermögen der Oberflächenschicht. Man sieht, daß dies Vermögen mit der Leitfähigkeit und Permeabilität wächst, wie es die Theorie verlangt[3]. — Die Periode der benutzten Schwingungen war $14 \cdot 10^{-9}$.

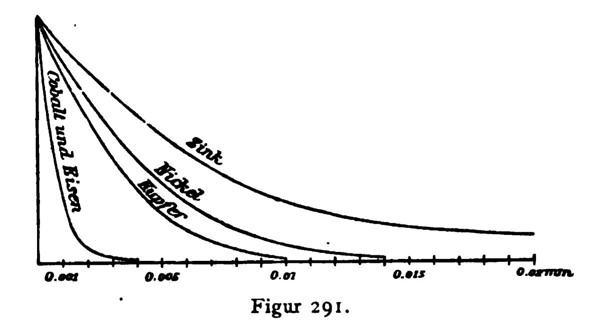
---

[1] A. Righi, Optik elektr. Schwingungen. 158. — [2] V. Bjerknes, Wied. Ann. **48**. 592. 1893. — [3] S. auch C. A. Chant, Phil. Mag. (6) **3**. 425. 1902, der bei Überziehen von zylindrischen Oszillatoren mit dünnen Schichten von Au, Ag, Pt usw. keinen Skin-Effekt nachweisen konnte.

Die Schirmwirkung der Metalle wird sehr oft benutzt, wenn man Meßapparate oder dgl. vor Beeinflussung durch elektrische Wellen schützen will, man schließt sie dann in metallische Hüllen ein, die sehr dünn sein dürfen, z. B. aus Stanniol[1], Gold- oder Silberpapier u. dgl. bestehen können, wenn nur jeder Schlitz der Öffnung in der Hülle vermieden ist. Bei solchem Schutze ist es aber oft die Reflexion und weniger die Absorption, die das Abschirmen besorgt, da die Metalle (s. S. 641 u. 642) wie vollkommene Spiegel wirken.

Mit die ersten Versuche über solche Schirmwirkung der Metalle und auch leitender Flüssigkeiten hat J. J. THOMSON[2] angestellt und dabei den Einfluß der Leitfähigkeit konstatiert. Ebenso ergaben die Versuche von KLEMENČIČ[3] über die Erwärmung von Drähten durch elektrische Schwingungen Übereinstimmung mit den Formeln von RAYLEIGH und STEFAN, also Bestätigung der Theorie.

In qualitativer Weise läßt sich nach J. J. THOMSON[4] die Absorption der Energie von elektrischen Schwingungen durch eine schon früher angegebene Versuchsanordnung demonstrieren (s. Figur 259, S. 604). Bringt man in die Spule $K_2$ (statt der Vakuumröhre $R_2$) einen Körper, der die Schwingungen absorbiert, so wird die Helligkeit von $R_1$ um so mehr geschwächt, je größer diese Absorption ist. So zeigt sich, daß ein Elektrolyt in $K_2$ die Helligkeit von $R_1$ weniger beeinflußt, als die zu passender Verdünnung ausgepumpte, mit Gas gefüllte Röhre $R_2$.



Figur 291.

Bringt man in $K_2$ einen Kupferzylinder, so bleibt $R_1$ hell leuchtend, ersetzt man das Kupfer durch einen Eisenzylinder, so wird $R_1$ dunkel, es absorbiert also ein Eisenzylinder sehr viel mehr Energie als ein solcher von Kupfer. Da sich leicht zeigen läßt, daß dies nicht von der verschiedenen Leitfähigkeit herrührt, so ist damit bewiesen, daß das Eisen auch bei diesen schnellen Schwingungen seine magnetischen Eigenschaften behält. — Ebenso wie der Eisenzylinder unterdrückt auch ein Hohlzylinder aus dünnem Stanniol in $K_2$ das Leuchten von $R_1$. Man hat also das paradoxe Resultat, daß dünne Metallröhren die Schwingungen viel stärker absorbieren als dickwandige oder Vollzylinder. Dieses Resultat leitet THOMSON aus der Theorie ab und findet, daß die Absorption (und dadurch bewirkte Erwärmung) ein Maximum ist für eine zylindrische Röhre, die in einer koaxialen Spule sich befindet, wenn die Dicke $h$ der Röhre:

$$h = \frac{1}{2\pi n \sigma \cdot a},$$

die erzeugte Wärmemenge ist dann

$$= \tfrac{1}{16} n b a \mathfrak{H}_0^2,$$

wo $a$ und $b$ innerer und äußerer Radius des kreisförmigen Röhrenquerschnitts sind, $\sigma$ die Leitfähigkeit und $\mathfrak{H}_0$ die Maximalamplitude der magnetischen Feldstärke.

## b) Flüssigkeiten.

Nach J. J. THOMSON hat auch STEFAN[5] die Schirmwirkung von Elektrolyten[6] gezeigt, eingehend quantitativ studiert aber wurde die Absorption der Flüssigkeiten mit Hilfe des Paralleldrahtsystems.

[1] E. BRANLY, Journ. de phys. **8**. 24. 1899; Stanniolblatt von 0,008 mm Dicke läßt HERTZsche Wellen nicht durch. — [2] J. J. THOMSON, Proc. Roy. Soc. **45**. 269. 1889. — [3] J. KLEMENČIČ, Wied. Ann. **50**. 456. 1893 u. **53**. 707. 1894. — [4] J. J. THOMSON, Rec. Res. 327. — [5] J. STEFAN, Wied. Ann. **41**. 414. 1890. — [6] S. auch. CH. NORDMANN, C. R. **133**. 139. 1901; ibid. **134**. 417. 1902.

Hat das die Drähte umgebende Medium (Flüssigkeit) Leitvermögen, oder endigen Drähte in einem Kondensator, zwischen dessen Platten ein nicht völlig isolierender Körper sich befindet, so werden die Wellen zum Teil absorbiert, die verlorene Energie wird in JOULEsche Wärme verwandelt. Die Größe der Absorption bestimmt der Absorptionskoeffizient $\alpha$, der dadurch definiert ist, daß die Amplitude $A$ auf der Strecke $x$ zu

$$A \cdot e^{-\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}}$$

wird, wo $\lambda$ die Wellenlänge in dem betreffenden Medium ist. Führt man statt $\lambda$ die Wellenlänge $\lambda_0$ in Luft ein, so wird der letzte Ausdruck zu

$$A \cdot e^{-\frac{2\pi\nu\alpha x}{\lambda_0}},$$

wo $\nu\alpha$ oft der Extinktionskoeffizient heißt.

$\alpha$ kann man für Medien, deren $\mu = 1$ ist, nach Gleichung (66), S. 656 berechnen, nach ihr wächst die Absorption fast proportional der Leitfähigkeit ($\sigma$) und der Schwingungsdauer ($\tau$) und umgekehrt proportional der Dielektrizitätskonstante ($\varepsilon$). Körper, die sich so verhalten, haben, wie man sagt, normale Absorption, das ist z. B. der Fall für wässerige Salzlösungen. Als Dielektrizitätskonstante der Lösung kann meist die des Lösungsmittels angesehen werden.

Die DRUDEsche Methode[1] zur Bestimmung von $\varepsilon$ und $\alpha$ mit Endkondensator, wie sie Figur 32, S. 97, im 4. Band des Handbuchs abgebildet ist, verlangt nur Bruchteile eines Kubikzentimeters der zu untersuchenden Substanz, die in das Kölbchen, das den Kondensator bildet, gebracht wird, und gestattet neben Flüssigkeiten auch feste Körper zu verwenden. Wäre die Substanz vollkommen leitend, so würde der Kondensator einer Überbrückung der Drähte am Ende entsprechen, und nach der Theorie [Formel (61), S. 654] wäre bei Resonanz der Teil der Leitung von Brücke $B$ bis zum Kondensator ein ganzes Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ der Schwingung vor $B$. Für eine vollkommen isolierende Substanz dagegen entspricht das Ende der beiden Drähte einem Spannungsbauch, und die Länge der Leitung von $B$ an unterscheidet sich von dem ersten Fall um $\frac{\lambda}{4}$ (die benutzte Wellenlänge war 73 cm). Variiert also die Leitfähigkeit ($\sigma$) der Substanz von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \infty$, so muß die Länge der Endleitung, um in Resonanz mit der Schwingung vor $B$ zu bleiben, stetig von 0 bis $\frac{\lambda}{4}$ geändert werden.

In den beiden Extremfällen ist die Reflexion der Schwingungen im Endkondensator fast total, und es können eine große Anzahl scharf ausgeprägter Knoten und Bäuche zwischen $B$ und dem Ende bei genügend langem Drahtsystem konstatiert werden. Wird aber die Füllung des Kondensators mit Substanzen vorgenommen, die immer steigende Leitfähigkeit haben (Wasser- und Salzlösungen zunehmender Konzentration), so wird die bei Reflexion am Kondensator eintretende Amplitudenschwächung, wie sich berechnen läßt, erst abnehmen, bis die Leitfähigkeit einen bestimmten Betrag erreicht hat und dann mit weiter wachsender Leitfähigkeit wieder zunehmen. Solange die Amplitudenschwächung wächst, werden die stehenden Wellen (Knoten und Bäuche) schlechter und schlechter sich ausbilden und die GEISSLERsche Röhre vor $B$ wird weniger und weniger hell leuchten, die Zahl der zu beobachtenden Knoten und Bauchstellen wird geringer werden, vielleicht werden gar keine mehr zu konstatieren sein.

---

[1] P. DRUDE, Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Klasse **23**. 1 u. 59. 1897; Zeitschr. für phys. Chem. **23**. 267. 1897; Wied. Ann. **61**. 466. 1897; Ann. d. Phys. **8**. 336. 1902.

Aus dieser Änderung der Leuchtintensität der Röhre und der verschiedenen Länge der Endleitung für Resonanz läßt sich der Absorptionskoeffizient schätzungsweise bestimmen. Zu dem Zwecke muß man Eichkurven für Lösungen ($NaCl$, $CuSO_4$ usw.) konstruieren, bei denen man die Größe der normalen Absorption berechnen kann und bei denen die Leuchtintensität der Geißler-Röhre für die berechneten Werte des Absorptionskoeffizienten beobachtet ist.

DRUDES Untersuchungen haben gezeigt, daß es viele Substanzen gibt, die anormale Absorption haben, d. h. bei denen die Absorption eine andere ist, als sie sich aus ihrer Leitfähigkeit berechnen würde; fast alle diese Substanzen enthalten die Hydroxylgruppe, so daß es scheint, als ob diese Gruppe eine Bedingung für das Auftreten der normalen Absorption wäre.

Ist die Absorption nicht sehr klein, so ändert sich der Brechungsquotient und die Wellenlänge durch sie, wie es die Formeln (19) oder (65) und (67), Abschnitt 24, angeben.

Durch Aufnahme der Wellenkurven mit dem Bolometer zeigte EICHENWALD[1], daß die Absorption der Lösungen von $NaCl$ und $H_2SO_4$ für Wellenlängen (in Luft) von 5,5 m und 1 m mit der berechneten übereinstimmt. Dabei hingen die Enden des Paralleldrahtsystems, durch ein Gewicht gespannt, vertikal in einem Zylinder mit der Flüssigkeit, und die Absorption war so stark, daß keine Reflexion der Wellen von den freien Drahtenden aus stattfand. Kleine, von den Paralleldrähten isolierte Drahthacken umschlossen die in die Flüssigkeit tauchenden Drahtstücke und konnten längs deren meßbar verschoben werden. An die Hacken war die Bolometerleitung angeschlossen. Die Flüssigkeitsoberfläche fiel in einen Knoten der von einem Blondlot-Erreger in dem überbrückten Paralleldrahtsystem erzeugten Schwingung.

Nach derselben Methode arbeitete VON BAEYER[2] mit 74 cm Wellenlänge, nur verwandte er statt des Bolometers ein Thermoelement und verglich in einer Meßbrücke dessen wechselnde Ausschläge bei Verschiebung der Drahthacken mit den Ausschlägen eines zweiten konstant wirkenden Thermoelements. Dies zweite Element gehörte einer Paralleldrahtleitung an, in der durch denselben Blondlot-Erreger Wellen erzeugt wurden, der auch die Schwingungen in der Leitung hervorrief, die in der zu untersuchenden Flüssigkeit endete.

WILDERMUTH[3] ließ die Paralleldrähte durch den Boden eines vertikalen Zylinders treten, in den die Flüssigkeit eingefüllt wurde und führte die Leitung bis zu dem Thermoelement, das zur Messung diente. An der Eintrittsstelle in den Zylinder war eine Brücke über die Drähte gelegt, und die Länge der Leitung zwischen Flüssigkeit und Drahtende war nach V. BJERKNES[4] größer gemacht, als ein halber Wellenzug, wie ihn der Erreger aussandte, so daß keine Reflexionserscheinungen zwischen Flüssigkeit und Thermoelement störten. Es wurde ein wenig Flüssigkeit in den Zylinder gefüllt und der Ausschlag des Galvanometers beobachtet, dann wurden immer gleiche Flüssigkeitsmengen zugeschüttet und jedesmal der Ausschlag bestimmt. Die Ausschläge ergaben eine wellenförmige Kurve mit abnehmenden Maximis und Minimis, die schließlich ganz verschwanden. Trat dieser Fall ein, so konnte man nach einer einfachen Formel den Absorptionskoeffizienten berechnen. Die Berechnung ist nach dem Vorgang von BJERKNES[5] und DRUDE[6] wie in der Optik für die Farben dünner Blättchen auszuführen. Man hat für eine zeitlich und örtlich gedämpfte Welle:

$$A \cdot e^{-\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}} e^{2\pi(\iota-\delta)\left(\frac{t}{\tau}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

[1] A. EICHENWALD, Ann. d. Phys. **62**. 571. 1897. — S. auch P. ZEEMANN, Zittingsverslag Kon. Acad. van Wet. 1895/96. 140 u. 188; 1896/97. 133. — [2] O. VON BAEYER, Ann. d. Phys. **17**. 42. 1905. — [3] K. WILDERMUTH, Ann. d. Phys. **8**. 212. 1902. — [4] V. BJERKNES, Wied. Ann. **44**. 513. 1891. — [5] V. BJERKNES, l. c. — [6] P. DRUDE, Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wiss., mat.-naturw. Kl. **23**. 59. 1897.

die Reflexionen an der Brücke (Boden des Trogs mit Flüssigkeit) und an der Flüssigkeitsoberfläche zu berücksichtigen und die Summe aller nach dem Thermoelement gelangenden Wirkungen zu nehmen. Diese sind durch die Summe über alle Amplitudenquadrate der im Elemente anlangenden Wellen gegeben.

Die Länge der benutzten Wellen war 63 cm und 22,2 cm. Für Wasser ergab sich bei den kleinen Wellen anormale Absorption[1].

Über die erwähnte Berechnung und Versuche zur Bestimmung der Absorption vergleiche man noch die Arbeit von Berg[2].

Für wässerige Salzlösungen fanden sich die Absorptionskoeffizienten bei allen Beobachtungen merklich der Theorie entsprechend[3].

Einige Werte des Absorptionskoeffizienten $\alpha$ für eine Schicht der Flüssigkeit, deren Dicke gleich der Wellenlänge ist, sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Zahlen Drudes[4] werden als besonders sorgfältig bestimmt von ihm bezeichnet und lassen sich mit von Baeyers Beobachtungen[5] direkt vergleichen, da dieser mit $\lambda = 74$ cm und Drude mit $\lambda = 73$ cm Wellen arbeitete. D bedeutet Drudes, B von Baeyers Resultat, das dieser mit Hilfe der von ihm bestimmten, teilweise sehr beträchtlichen Temperaturkoeffizienten auf die von Drude benutzte Temperatur reduziert hat.

$\alpha$

| Äthylalkohol | | | Propylalkohol | | | Isobutylalkohol | | | Glyzerin | | | Methylalkohol | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| °C | D | B | °C | D | B | °C | D | B | °C | D | B | °C | D | B |
| 15 | 0,21 | 0,22 | 15 | 0,41 | 0,37 | 18 | 0,47 | 0,45 | 20 | 0,42 | 0,35 | 16 | 0,08 | 0,07 |

Andere Werte von Drude sind:

| Substanz | | °C | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| Isopropylalkohol | | 20 | 0,24 |
| Butylalkohol | normal | 19 | 0,45 |
| | sekundär | 19 | 0,33 |
| | tertiär | 18 | 0,40 |
| Amylalkohol | | 22 | 0,43 |
| Heptylalkohol | | 21 | 0,31 |
| Allylalkohol | | 21 | 0,07 |
| Benzylalkohol | | 21 | 0,19 |
| Ameisensäure | | 21 | 0,08 |
| Essigsäure | | 20 | 0,07 |

Die Werte von Wildermuth geben $\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$, den Absorptionskoeffizienten für eine Schicht von 1 cm Dicke, und lassen sich nicht direkt mit den angeführten

[1] S. auch P. Drude, Wied. Ann. **65**. 498. 1898. — V. Busceni, N. Cim. (5) **9**. 105. 1905. — [2] O. Berg, Ann. d. Phys. **15**. 306. 1904. — [3] S. auch E. Branly, C. R. **129**. 672. 1899. — [4] P. Drude, Zeitschr. für phys. Chem. l. c. — [5] O. von Baeyer. l. c.

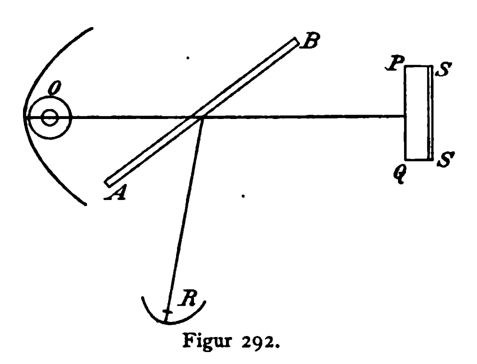
vergleichen, da er andere Wellenlängen benutzte. Er fand ein sehr rasches Anwachsen von $\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ mit abnehmendem $\lambda$ für Äthylalkohol, weniger schnell für Propylalkohol. Für $\lambda = 63$ cm war $\frac{2\pi\alpha}{\lambda}$ für wässerigen Äthylalkohol dem Gewichtsprozentgehalt an absolutem Alkohol proportional.

---

Für die drahtlose Telegraphie ist es wichtig zu wissen, ob die Erdoberfläche elektrische Wellen stark absorbiert. Versuche ergeben, wie natürlich, daß Sand und Sandstein um so undurchlässiger für die Wellen werden, je feuchter sie sind[1]. Ein 30 cm tief in Erde eingegrabener Kohärer wurde von elektrischen Wellen nicht beeinflußt[2].

## c) Schlecht leitende (isolierende) feste Körper.

Righi[3] hat die Durchlässigkeit solcher Körper (und auch isolierender Flüssigkeiten) für elektrische Wellen zu bestimmen gesucht, indem er die von einem Erreger mit Hohlspiegel ausgehende Strahlung, ehe sie zum Resonator gelangte, durch die Stoffe hindurchgehen ließ. Genauere Resultate gab die Anordnung der Figur 292. Der Oszillator $O$ sandte seine Strahlen durch die große geneigte Spiegelglasplatte $AB$ auf die Metallplatte $SS$, von der sie über $AB$ zurück zum Righi-Resonator $R$ gelangten. $R$ konnte der einfallenden Schwingung parallel gestellt und dann meßbar um den Winkel $\beta$ gedreht werden, bis er keine Funken mehr gab. War $\beta$ beobachtet, so brachte man den zu untersuchenden Körper $PQ$ vor $SS$ und bestimmte jetzt den Auslöschungswinkel $\eta$, dann ist $\frac{\cos^2\eta}{\cos^2\beta}$ ein Maß für die Verminderung der Intensität durch die Gegenwart von $PQ$.



Figur 292.

Bei diesen Versuchen mit Wellenlängen von ca. 5 bis 20 cm zeigten sich Schwefel, Ebonit, Paraffin, Selenit vollkommen durchlässig, während Spiegelglas, Marmor, Tannenholz beträchtlich absorbierten. Holz absorbierte viel stärker, wenn seine Fasern den Schwingungen parallel, als wenn sie senkrecht zu ihnen verliefen.

Ähnliche Versuche mit einigen Mineralien ergaben Bose[4], daß die Richtung bester Leitfähigkeit auch die Richtung größter Absorption ist. —

Auch Gase können, wie früher erwähnt, elektrische Wellen absorbieren, wenn sie ionisiert sind und so als Leiter wirken[5]. Die größte Schirmwirkung der Luft soll bei Drucken zwischen 0,05 bis 0,3 mm liegen[6]. — Rein rechnerisch hat Hasenöhrl[7] die Absorption elektrischer Wellen in einem „trüben Medium" behandelt, d. h. in einem völlig isolierendem Medium, in dem kleine leitende Kugeln gleichmäßig verteilt sind[8].

[1] E. Branly und G. Le Bon, C. R. **128**. 879. 1899. — [2] E. Lagrange, C. R. **132**. 203. 1901. — [3] A. Righi, Optik elektr. Schwing. 123. — [4] J. C. Bose, Proc. Roy. Soc. **60**. 433. Jan. 1897. — [5] S. z. B. J. Moser, C. R. **110**. 397. 1890. — J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **32**. 321, 335. 1891. — [6] E. Lecher, Phys. Zeitschr. **4**. 32. 1902—1903. — [7] F. Hasenöhrl, Sitzber. d. Wien. Akad. (IIa) **111**. 1230. 1902 u. **112**. 30. 1903. — [8] Über den Einfluß kleiner Hindernisse auf elektrische Wellen s. auch Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **44**. 28. 1897.

## 33. Interferenz.

Schon die Erzeugung stehender Wellen und andere Versuche von Hertz bewiesen die Interferenz von elektrischen Wellen, bald wurden dann viele der bekannten optischen Grundversuche mit elektrischen Hilfsmitteln nachgeahmt. Nach dem Vorgang von Boltzmann[1] führten Klemenčič und Czermak[2] den Fresnelschen Spiegelversuch aus, indem sie zwei ebene Metallspiegel $S$, $S_1$ benutzten, an denen die vom Oszillator (mit Hohlspiegel) ausgehenden Strahlen zum Resonator (mit Thermoelement und Hohlspiegel) reflektiert wurden. Zuerst stießen $S$ und $S_1$ mit einer Kante aneinander und bildeten so eine ebene reflektierende Wand, dann wurde z. B. $S_1$ parallel mit sich selbst senkrecht zu seiner Anfangsstellung verschoben. Der so erzeugte Gangunterschied der zum Resonator gelangenden Strahlen von $S$ und $S_1$ ergab die Wellenlänge (40—70 cm) der benutzten Resonatoren, die aus ebenen Metallstreifen bestanden, deren einander zugewandte Enden durch die Drähte des Thermoelementes (s. Figur 284 S. 665) verbunden waren. — Auch das Dekrement der Schwingungen ließ sich genähert bestimmen.

Righi[3] hat mit seinen Erregern und Resonatoren außer dem genannten noch andere optische Interferenzversuche, z. B. den mit einem Spiegel, den Fizeauschen Versuch mit dem Doppelprisma usw., ausgeführt. Nach einer von ihm benutzten Anordnung konstruierte Wiedeburg[4] einen Interferentialrefraktor, mit dem er die Brechungsquotienten von Paraffin und Spiegelglas maß.

Auch die Farben dünner Plättchen hat Righi[5] bei Paraffin- und Schwefelplatten mit seinen Apparaten nachgewiesen. Ebenso hat man mit Drahtwellen solche Erscheinungen hergestellt, indem man die Paralleldrähte durch verschieden dicke Schichten von Flüssigkeit gehen ließ und ganz nach dem Muster der optischen Rechnung die durch Interferenz erzeugten Maxima und Minima unter Berücksichtigung der vielfachen Reflexionen ermittelte[6].

Die stehenden Wellen längs Drähten und in Metallröhren sind schon früher behandelt.

## 34. Beugung.

Sie wurde von Righi[7] mit seinen Apparaten zuerst, ganz nach dem Muster der optischen Anordnungen, beobachtet. So konnte er die Beugung durch einen Spalt, durch ein Gitter aus Blechstreifen, am Rande eines Metallschirms etc. konstatieren. Eine andere, der Optik nachgebildete Beugungserscheinung hat Lampa[8] untersucht. Durch jede solche Beobachtung läßt sich die benutzte Wellenlänge, wie beim Licht, bestimmen, was z. B. auch Zehnder[9] mit einem Gitter getan hat. Mit einem zylindrischen Gitter und dem Kohärer als Indikator hat Bose[10] Wellenlängen bestimmt. — Theoretisch ist die Beugung um ein leitendes Hindernis von Macdonald[11] behandelt worden.

## 35. Doppelbrechung.

Zuerst beobachtete sie Righi[12] am Tannenholz, das, wie früher angegeben, die elektrischen Schwingungen verschieden stark in Richtung seiner Fasern und senkrecht dazu absorbiert und also auch fortpflanzt. Demnach ist dies Holz

---

[1] L. Boltzmann, Wied. Ann. **40**. 399. 1889. — [2] J. Klemenčič und P. Czermak, Wied. Ann. **50**. 174. 1893. — [3] A. Righi, Optik elektr. Schwing. 75 usw. — [4] O. Wiedeburg, Wied. Ann. **59**. 497. 1896. — [5] A. Righi, l. c. 99. — [6] G. Udny Yule, Wied. Ann. **50**. 742. 1893. — E. Barton, ibid. **53**. 513. 1894. S. auch die andern unter 8 u. 9 S. 675 zitierten Arbeiten und die bei „Absorption von Flüssigkeiten" angeführten Abhandlungen. — [7] A. Righi, l. c. 105. — [8] A. Lampa, Sitzber. d. Wien. Akad. (IIa) **108**. 786. 1899 und die früher zitierten Arbeiten. — [9] L. Zehnder, Wied. Ann. **53**. 162. 1894. — [10] J. C. Bose, Proc. of the Roy. Soc. **60**. 167. 1896. — [11] H. W. Macdonald, Proc. Roy. Soc. **66**. 251. 1903. — [12] A. Righi, Mem. della R. Ac. di Bologna (5) **4**. 487. 1894.

doppeltbrechend, wie RIGHI zeigte, indem er eine parallel den Fasern geschnittene Holzplatte zwischen seinen Oszillator und Resonator einschaltete. Im allgemeinen zeigte sich die aus der Platte austretende Schwingung elliptisch polarisiert; stellte man Erreger und Empfänger gekreuzt, senkrecht zu ihrer Verbindungslinie, zwischen beide die Holzplatte und drehte diese in ihrer Ebene, so verhielt sie sich ganz wie ein einachsiger Kristall zwischen zwei Nicols. — Etwas später hat MACK[1] ähnliche Versuche mit längeren Wellen ($\lambda = 50-60$ cm) angestellt.

Die Doppelbrechung von Kristallen haben zuerst GARBASSO[2], LEBEDEW[3], BOSE[4] untersucht. LEBEDEW konstruierte ein „Nicolsches Prisma", wo Schwefel den Kalkspat und eine Ebonitplatte den Canadabalsam vertrat.

Die hierher gehörigen Arbeiten sind großenteils schon Handbuch **4** im Kapitel über Dielektrizitätskonstanten angeführt. Weitere Literatur:

J. C. BOSE, Proc. Roy. Soc. **63**. 146, 152. 1898.
D. MAZOTTO, Rendic. R. Ac. dei Lincei **6**. 73, 95, 134. 1897.
G. PIERCE, Phil. Mag. (6) **1**. 548. 1901.
E. PASQUINI, N. Cim. (4) **7**. 153. 1898.
A. GARBASSO, N. Cim. (5) **4**. 176. 1902.

BRAUN[5] hat versucht, ein doppeltbrechendes Medium dadurch herzustellen, daß er in einem isotropen ausgedehnten Medium (Luft) Stücke eines zweiten isotropen Mediums (Backsteine) regelmäßig einlagerte, die nach drei aufeinander senkrechten Richtungen verschiedene Ausdehnung hatten. Man kann dann von drei verschiedenen Dielektrizitätskonstanten nach den Richtungen der ungleichen Ausdehnung der Backsteine reden. Versuche mit Wellen von 68 cm Länge nach der RIGHIschen Methode bestätigten qualitativ die Erwartungen. Auch der REUSCHsche Versuch, die Drehung der Polarisationsebenen des Lichtes durch aufeinander geschichtete, gegeneinander gedrehte Glimmerplatten zu erzeugen, findet sein Analogon auf dem Gebiet der elektrischen Wellen durch den Versuch von BOSE mit gedrillten Jutefasern. Brachte nämlich BOSE der Länge nach zwischen die gekreuzten Polarisator und Analysator seines Apparates ungedrillte Jutefasern, so blieb das Gesichtsfeld dunkel, es hellte sich auf, sobald die Fasern verdrillt, ihre Querschnitte gegeneinander gedreht wurden. Der Sinn der Drillung bestimmt den Sinn der Drehung der Polarisationsebene.

## 36. Telegraphie ohne Draht[7].

Die Möglichkeit, durch elektromagnetische Wellen ohne vermittelnde Drähte in die Ferne Zeichen zu geben, war durch HERTZ' „Strahlen elektrischer Kraft" dargetan, doch wurden Versuche mit diesen neuen Anordnungen meist zu wissenschaftlichen Zwecken in den beschränkten Räumen der Laboratorien angestellt, und erst MARCONI versuchte eine Nachrichtenübertragung über weitere Strecken und erreichte bald Erfolge, die frühere, mit andern Methoden (Leitung, Influenz usw.) angestellte Bemühungen weit hinter sich ließen.

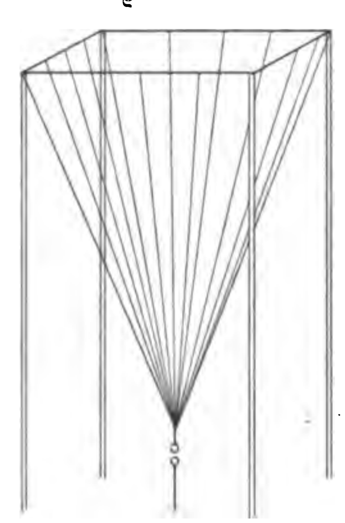
Auf die historische Entwicklung und den Anteil der verschiedenen Forscher und Erfinder einzugehen, ist hier nicht der Ort, wir geben nur kurz die Grundlagen der jetzt noch gebräuchlichen Einrichtungen und Methoden an.

Die Wellenlängen, mit denen meist gearbeitet wird, liegen etwa zwischen 300 und 1000 Metern.

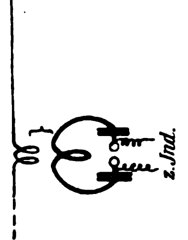
[1] K. MACK, Wied. Ann. **54**. 342 u. **56**. 707. 1895. — [2] A. GARBASSO, Atti della R. Ac. di Torino 30. Mai 1895. — [3] P. LEBEDEW, Wied. Ann. **56**. 1. 1895. — [4] J. C. BOSE, Proc. Roy. Soc. **59**. 160. 1896. — [5] F. BRAUN, Phys. Zeitschr. **5**. 199. 1904. — [6] J. C. BOSE, Proc. Roy. Soc. **63**. 146. 1898. — [7] Wir folgen hier im wesentlichen dem schon oft zitierten Buch von J. ZENNECK, wo sich auch sehr vollständig Literatur (Bücher und Einzelabhandlungen) angeführt findet.

### a) Der Sender.

Die einfachste Form des Senders, die auch jetzt noch zum Teil benutzt wird, ist der sogenannte Marconi-Sender. Ein langer vertikaler Draht, an dessen unterem Ende sich die Funkenstrecke befindet, deren Pole mit dem die Elektrizität liefernden Apparat (Induktorium, Wechselstromtransformator) verbunden sind; der untere Pol ist geerdet. An der Funkenstrecke liegt, wie zu kräftiger Wirkung nötig, ein Strombauch, die Ausstrahlung des Senders kann dann in der in Abschnitt 24 unter b) Abteilung $\varepsilon$) angegebenen Weise berechnet werden. Die Erde darf als großer Leiter angesehen werden, deshalb ließ sich die unsymmetrische Anordnung durch Spiegelung an der Erde zu einer symmetrischen ergänzen. Die elektrische und magnetische Feldstärke ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$) ergab sich in weiterem Abstand vom Sender der Entfernung umgekehrt proportional, und die Wellenlänge $\lambda = 4\,l$, wo $l =$ Länge des Senderdrahtes; das Dekrement der Grundschwingung: $\gamma = \frac{2{,}44}{\log \frac{2l}{\varrho}}$; $\varrho$ ist der Drahtradius.



Figur 293.




Figur 294.

Eine Verstärkung der Wirkung erzielt man, wenn man statt einer Antenne eine Vielfachantenne anwendet, d. h. ein System von gleichen Drähten, das einen zylindrischen oder konischen vertikalen Drahtkäfig bildet (s. Figur 293). Dadurch wird die Kapazität der Längeneinheit und also die Stromamplitude, auf die es wesentlich ankommt, erhöht; die Wirkung einer Vielfachantenne führt Drude auf die einer einfachen von zu berechnendem Radius zurück[1].

Auch durch Vergrößerung der Funkenstrecke kann man die Wirkung steigern, doch ist das nur in sehr beschränktem Maße möglich, da dabei zugleich die Dämpfung (der Funkenwiderstand) stark zunimmt. Schaltet man aber mehrere Funkenstrecken hintereinander, so verteilt sich die Gesamtspannung auf die einzelnen Funken, und man kann zu höheren Spannungen bei kleinerem Funkenwiderstand übergehen und so die Wirkung beträchtlich erhöhen.

### Koppelung des Senders mit einem Kondensatorkreis.

Ein großer Fortschritt in der Übertragung von Zeichen auf weite Entfernungen wurde von Braun[2] gemacht, der zuerst den Sender mit einem Kondensatorkreis

[1] P. Drude, Ann. d. Phys. 11. 978. 1903. — [2] F. Braun, D. R. P. eingereicht 14. Okt. 1898.

(direkt oder nur induktiv) (s. Figur 294*) koppelte, so daß die Wellen dieses Kreises die Schwingungen auf der Antenne erregten. Durch diese Transformation findet freilich ein Energieverlust statt; da aber zwischen den Schwingungen des Kondensatorkreises und des Senders Resonanz hergestellt wird, ist doch eine große Steigerung der Wirkung möglich.

Um die Anregung wieder in einem Strombauch geschehen zu lassen, muß der Sender symmetrisch gemacht werden. Das kann z. B. dadurch geschehen, daß man unter der Koppelungsstelle den Draht in einem rechten Winkel umbiegt und ihn horizontal weiterführt, oder indem man den umgebogenen Draht in einer passenden Kapazität[1] (dem Gegengewicht) enden läßt, die man so wählt, daß Resonanz erzielt wird [s. Abschnitt 28 d) S. 677]. Endlich kann man die Antenne, und das ist das Einfachste, auch unter der Koppelungsstelle erden, wodurch freilich weniger gut definierte und auch wechselnde Verhältnisse geschaffen werden, je nach der Art und sich ändernden Feuchtigkeit des Bodens.

Die Theorien[2] der direkten (bei der ein Teil der Leitungsbahn für beide Systeme gemeinsam ist) oder bloß induktiven Koppelung sind prinzipiell nicht voneinander verschieden, und es treten hier die früher angegebenen Resultate (s. S. 618ff.) in Kraft.

$\alpha$) Starke Koppelung.

Bei ihr kann die maximale Spannungs- und Stromamplitude auf der Antenne sehr groß gemacht werden, sie wird also zur Überwindung sehr großer Entfernungen zu wählen sein.

Die Spannungsamplitude ist nach Gleichung (20) S. 622, bei Vernachlässigung des von 1 wenig verschiedenen Faktors,

$$(V_2)_{max} = (V_1)_0 \cdot \frac{1}{4} f \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad ,$$

wo $(V_1)_0$ die Spannungsamplitude im Kondensatorkreis, d. h. das Funkenpotential bezeichnet. $C_1$ resp. $C_2$ sind die Kapazitäten des Kondensatorkreises resp. des Senders und $f$ der von der Dämpfung und Koppelung abhängige Faktor, der für nicht zu starke Koppelung ($k$) und Dämpfung ein Maximum etwa bei $k = 0{,}6$ hat[3].

Für direkte Koppelung hat ABRAHAM[4] den Wert der maximalen Stromamplitude berechnet. Er findet für den Strom am Anschlußpunkt der Antenne an den Kondensatorkreis:

$$i = (V_1)_0\, \eta \sin\left(\frac{n' - n''}{2} \cdot t\right) \cos(n_0\, t)$$

[Ähnliches ergibt Gleichung (15), S. 621 für induktive Koppelung], wo $n'$ und $n''$ die Schwingungszahlen der beiden durch Koppelung entstehenden Schwingungen sind, die als nicht sehr verschieden angenommen werden, so daß Schwebungen der Schwebungszahl $n' - n''$ entstehen. $n_0$ ist die Schwingungszahl, $\tau_0$ die Schwingungsdauer des in Resonanz befindlichen Senders und Kondensatorkreises vor der Koppelung und

$$\eta = \frac{C_2}{l} \sqrt{\frac{2\, C_1}{C_2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2\, C_2}{L_1}} \quad ,$$

da (im GAUSSschen Maßsystem) für die Länge $l$ der Antenne bei der Grundschwingung gilt:

$$4\, l = \lambda_1 = 2\,\pi \sqrt{C_1 L_1} \quad ,$$

wo $L_1$ = Selbstinduktion des Kondensatorkreises.

*) Die Figur zeigt die induktive Koppelung nach ZENNECK, Elektromagnet. Schwing. 821.

[1] Berechnung des Gegengewichtes, s. DRUDE, l. c. 984. — [2] S. (außer den zitierten Arbeiten von M. WIEN und P. DRUDE) über Koppelung noch G. SEIBT, Elektrotechn. Zeitschr. 23. 315 usw. 1902; Phys. Zeitschr. 5. 452. 627. — J. ZENNECK, ibid. 575. 811. — M. ABRAHAM, ibid. 174. 1904. — [3] P. DRUDE, l. c. 550. — [4] M. ABRAHAM, l. c.

Die Stromamplitude ist:

$$a = (V_1)_0\, \eta \sin\left[\frac{(n' - n'')\, t}{2}\right] \quad ,$$

und die mittlere Strahlung pro Sekunde ist nach früherem

$$\mathfrak{S} = 2{,}44\, \frac{c\, a^2}{4} \quad ,$$

sie wächst also proportional $\eta^2$, d. h. um $\mathfrak{S}$ möglichst groß zu machen, ist die Selbstinduktion des Kondensatorkreises ($L_1$) möglichst klein und die Kapazität des Senders möglichst groß zu machen.

Um das erstere zu erreichen, wird man jede „tote Selbstinduktion“ zu vermeiden haben, d. h. den nicht auf den Sender induzierenden Teil des Kondensatorkreises so klein wie möglich machen müssen. — Ein großes $C_2$ wird man durch Verwendung von Vielfachantennen zu erreichen suchen.

Berücksichtigt man die Dämpfung durch Ausstrahlung, so war das logarithmische Dekrement der Grundschwingung der Antenne:

$$\gamma = \frac{2{,}44}{\log\left(\frac{2\, l}{\varrho}\right)} = 2{,}44\, \frac{2\, C_2}{l} \quad .$$

Die maximale, zur Zeit $t_0 = \frac{\pi}{n' - n''}$ stattfindende Stromamplitude $(V_1)_0\, \eta$ wird durch Strahlung auf

$$a_m = (V_1)_0 \cdot \eta \cdot e^{-\frac{\gamma\, t_0}{2\, \tau_0}}$$

reduziert. Da $\frac{n' - n''}{n_0} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{C_2}{2\, C_1}}$, so wird

$$a_m = (V_1)_0 \cdot \eta \cdot e^{-\gamma \frac{\pi}{16} \sqrt{\frac{2\, C_1}{C_2}}} \quad ,$$

oder

$$a_m = (V_1)_0 \cdot \eta\, e^{-f\eta} \quad , \qquad \text{wo} \qquad f = 2{,}44 \cdot \frac{\pi}{8} \quad .$$

Diesem $a_m$ ist die Wellenamplitude proportional, und man erhält somit die größte Wirkung, wenn $\eta \cdot e^{-f\eta}$ ein Maximum wird, d. h. für

$$L_1 = 6{,}7 \cdot 10^5 \cdot C_2 \quad .$$

Dabei ist $L_1$ in cm und $C_2$ in Mikrofarad zu messen.

Endlich kann man noch zur Erhöhung von $a_m$ das Funkenpotential $(V_1)_0$ durch Vergrößerung der Schlagweite im Kondensatorkreis steigern. Dabei müssen die Entladungskugeln großen Radius (2,5 cm und mehr) haben, da nur in diesem Fall mit zunehmender Schlagweite die Spannung beträchtlich zunimmt. Bei Steigerung der Schlagweite bis 4 cm hat ZENNECK[1] für Kugeln von 2,5 cm Radius durch Versuche eine dieser Steigerung fast proportionale Zunahme des Potentials gefunden: bis zu solcher Schlagweite wird in der Tat bei der drahtlosen Telegraphie gegangen.

Bei starker Koppelung kann aber [s. Formeln (21) und (22) S. 622] die Dämpfung der Schwingungen nicht klein gemacht werden, sie sinkt höchstens auf den arithmetischen Mittelwert der Dämpfung beider Einzelschwingungen des Senders und Kondensatorkreises herab, und da die letztere stets klein gegen die erstere, so kann im günstigsten Fall die Dämpfung auf die Hälfte ihres Wertes für die Senderschwingung herabgedrückt werden. Man hat also, wie M. WIEN[2] ausführt, eine

---

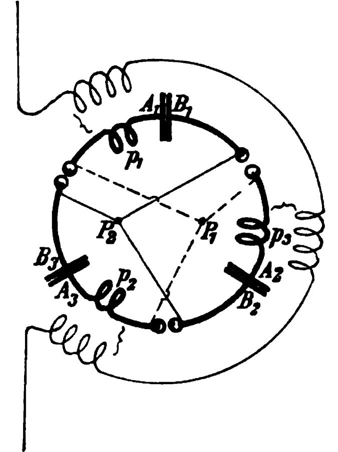
[1] J. ZENNECK, Phys. Zeitschr. 5. 590. 1904. — [2] M. WIEN, Ann. d. Phys. 8. 686. 1902.

mächtige, explosionsartig erfolgende Schwingung, die aber nach wenigen Oszillationen durch Dämpfung schon fast vernichtet ist. In einem nach etwas anderer als der angeführten Formel berechneten Beispiel, wo $\lambda = 300$ m, $l = 75$ m, $n_0 = 10^6 \cdot 2\pi$, $L_1 = 1000$ cm, $\delta_1 = \delta_2 = 3{,}75 \cdot 10^5$, findet M. WIEN eine Steigerung des Funkenpotentials, z. B. $(V_1)_0 = 30000$ Volt, auf etwa das 13fache und das logarithmische Dekrement $\gamma = 0{,}375$.

**Energieschaltung.** Will man die Spannung immer weiter steigern, so kommt man, da die Koppelung $(k)$ dabei stark bleiben muß, also der Koeffizient der wechselseitigen Induktion nicht unter eine gewisse Grenze heruntergehen darf, nach Gleichung

$$k^2 = \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}$$

zu einer unteren Grenze für den Wert von $L_1$ und demnach bei gegebener Schwingungsdauer zu einer oberen Grenze von $C_1$, und ebenso läßt sich die Ladespannung aus früher erwähnten Gründen nicht über einen gewissen Wert steigern. Diese Grenzen kann man nach dem Vorschlag von BRAUN[1] überschreiten, wenn man mehrere Kondensatorkreise, von denen jeder auf eine mit dem Sender verbundene Spule induziert, parallel geschaltet ladet und sie sich hintereinander verbunden entladen läßt. Ein Schema dieser Schaltung gibt Figur 295 nach ZENNECK, l. c., S. 852.



Figur 295.

Die Punkte $P_1$ und $P_2$ sind an die Pole des Wechselstromtransformators angeschlossen und durch so große Widerstände mit dem Kondensatorkreis verbunden, daß dessen Schwingungen nur sehr wenig durch sie hindurchgehen. So werden alle $m$ Kondensatoren $(AB)$ parallel geschaltet geladen, während sie bei der Entladung in Reihe geschaltet sind. Jede Kondensatorleitung ist durch einige Drahtwindungen $(p)$ mit gegenüberstehenden Spulen des Senderkreises induktiv gekoppelt, was die Klammern $\}$ andeuten sollen. Nimmt man die Kondensatoren von gleicher Kapazität $C$ und lädt sie zu derselben Potentialdifferenz $V$, so ist die Energie

$$m \cdot \tfrac{1}{2} C V^2 \quad ,$$

also $m$-mal so groß wie für einen Kondensator. Die Schwingungsdauer bleibt dieselbe, da beim Entladen die Kapazität der Anordnung auf $\frac{1}{m} C$ sinkt, die Selbstinduktion auf $m \cdot L$ vermehrt wird.

Denselben Zweck[2] soll auch eine mehrfache Transformation des erregenden Wechselstromes erfüllen, so daß der Wechselstromtransformator nicht direkt auf den Kondensatorkreis des Senders, sondern auf einen dazwischen geschalteten Kondensatorkreis wirkt, der dann erst den Senderkreis erregt.

### $\beta$) Schwache Koppelung.

Bei ihr kann die Dämpfung fast auf den kleinen Betrag der Dämpfung im Kondensatorkreis herabgedrückt werden. Dabei wird aber die Maximalamplitude des Potentials oft viel kleiner wie $(V_1)_0$. M. WIEN berechnet für dieselbe Wellenlänge, Senderlänge und Schwingungszahl wie oben, wenn $L_1 = 5 \cdot 10^4$, $\gamma_1 = \frac{1}{100}$,

[1] F. BRAUN, Phys. Zeitschr. 5. 196. 1904. — [2] Electrician 50. 140. 1902—1903; s. J. ZENNECK, Elektromagnet. Schwing., S. 849.

$\gamma_2 = \frac{1}{4}$, das Amplitudenverhältnis zu 0,13, d. h. die Amplitude der ausgesandten Schwingung ist sieben- bis achtmal kleiner als das Funkenpotential; dagegen $\gamma = 0{,}0123$.

Jetzt ist eine scharfe Resonanz möglich, während diese bei starker Koppelung nicht gut ausgebildet sein kann.

Auf die Versuche, ungedämpfte Schwingungen mit Hilfe des elektrischen Lichtbogens zu erzeugen, kann hier nur hingewiesen werden.[1]

---

Zur Ladung des Senders oder seines Kondensatorkreises werden meist Wechselstromtransformatoren benutzt, von denen der Resonanzinduktor[2] besonders gute Wirkungen erzielen soll. Bei ihm wird der sekundäre Kreis so gewählt, daß er in Resonanz mit den Schwingungen des Wechselstroms im Primärkreis ist. Dann bewirkt erst die Steigerung der Spannung an den Polen durch die Schwingungen des sekundären Kreises, daß ein Funken überschlägt, und man kann so viel größere Spannungsamplituden erzeugen. Damit gute Resonanz eintritt, darf die Koppelung zwischen den beiden Kreisen des Transformators nicht fest und die verwendeten Eisenkerne dürfen, um Hysteresisverluste möglichst zu vermeiden, nicht geschlossen sein.

Als Modell zur Veranschaulichung von starker und schwacher Koppelung bei der BRAUNschen Anordnung können zwei kurze sympathische Pendel dienen[3]. Hängt man an einem horizontalen Draht ein Pendel 1 von großer Masse (das dem Kondensatorkreis mit großer Energie entspricht) auf und dicht daneben, d. h. stark gekoppelt, eines (2) von kleinerer Masse, das in einer Flüssigkeit schwingt (Antennenkreis) und deshalb stark gedämpft ist, so gerät 2 durch die Bewegung von 1 ins Mitschwingen, beide Bewegungen werden aber durch die Flüssigkeitsdämpfung von 2 schnell vernichtet. Koppelt man dagegen 2 nur schwach mit 1, indem man beide Pendel in größerer Entfernung voneinander an den Draht hängt, so erregt die Bewegung von 1 schwächere und länger andauernde Schwingungen von 2.

## b) Der Empfänger.

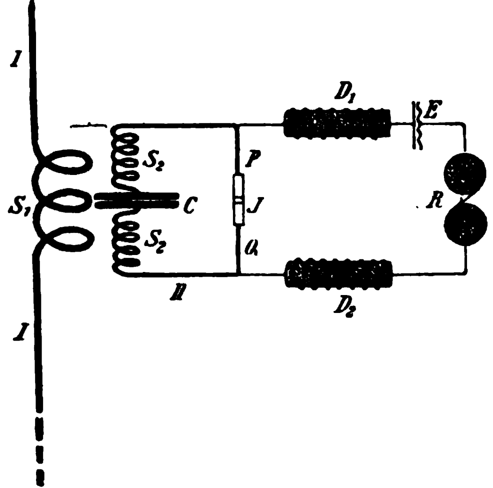
Er ist in vieler Beziehung ein Abbild des Senders: Ein hoher Mast oder besser eine Vielfachantenne nimmt die Schwingung auf und leitet sie zu dem Wellenindikator. Als solcher wird meist ein Kohärer ($J$) genommen (s. Figur 296), der sehr empfindlich ist, aber durch Erschütterung stets wieder in seinen Anfangszustand zurückgeführt werden muß. Da er in diesem einen hohen Widerstand besitzt, so hat MARCONI ihn schon sehr bald aus der direkten Verbindung mit der Antenne losgelöst und in einen mit ihr gekoppelten, geschlossenen Kreis versetzt. Der Kohärer reagiert auf die Spannung, nicht auf den Strom an seinen Enden, deshalb muß in seinen Kreis eine Selbstinduktionsspule ($S_2$) eingefügt werden, die die Spannungsamplitude vergrößert. Endlich darf, wenn der Kohärer durch die Schwingungen besser leitend geworden ist, nur ein schwacher Strom durch ihn hindurchgehen, es können also in seinen Kreis nicht direkt die eines stärkeren Stromes bedürfenden Apparate zur Aufnahme der Zeichen (Morseapparate usw.) eingeschaltet werden. Man schaltet vielmehr nur ein Relais ($R$) in diesen Kreis ein und läßt durch das erst die Hilfsleitungen schließen, in denen sich die Zeichen empfangenden Vorrichtungen befinden. Damit dabei nicht in dem geschlossenen Kreise, der durch die Spule, das Relais und die Hilfssäule ($E$) des Kohärers gebildet wird, dauernd ein Strom fließt, fügt man in die Mitte der Spule einen Kondensator von genügender Größe ($C$) ein, der

---

[1] S. Zitate S. 614 unter 7 von DUDDEL, H. TH. SIMON und M. REICH. — [2] G. SEIBT, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 276, 494, 708. 1904. — R. H. RENDAHL, ibid., S. 394, 641. — Graf ARCO, ibid., S. 641. — [3] M. WIEN, Phys. Zeitschr. **4**. 76. 1902—1903.

die Schwingungsdauer nicht ändert, da er nach früherem wie eine Überbrückung wirkt.

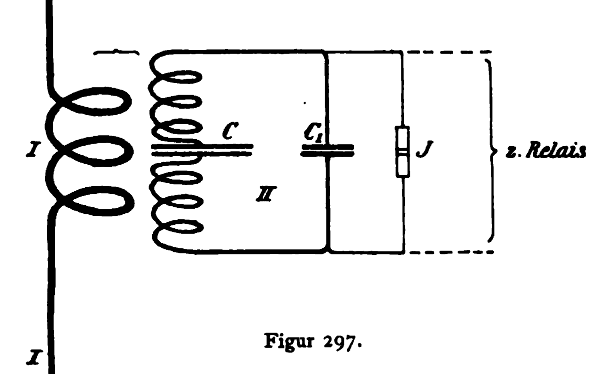
So kommt man zu der Anordnung der Figur 296*, die nach ZENNECK[1] noch jetzt als Empfänger von der Marconi-Gesellschaft für den einfachen Marconi-Sender benutzt wird. In der Figur sind noch zwei kleine Drosselspulen ($D_1$ und $D_2$) angedeutet, die wohl dazu dienen, die Schwingungen des Systems $S_2 J$ zu reflektieren und in ihm stehende Wellen zu erzeugen. Die Koppelungsspule $S_1$ der Antenne kann geerdet sein oder ein elektrisches Gegengewicht haben usw. Auf andere Arten der Schaltung von primärem und sekundärem System im Empfänger, wie sie von BRAUN, SLABY u. a. angegeben sind, kann hier nicht eingegangen werden.




Figur 296.

### c) Abstimmung von Sender und Empfänger.

Soll der Empfänger auf den Sender abgestimmt werden, so ist das in scharfer Weise nur möglich, wenn sowohl der Sender wie der Empfänger lose Koppelung haben[2], es müssen dabei die Schwingungskreise natürlich in ihrer Schwingungszahl unveränderlich sein. Für die Periode des Kreises $S_2 J$ des Empfängers kommt aber die Kapazität des Kohärers in Betracht, daß ist eine nicht genügend konstante Größe, deshalb hat MARCONI dem Kohärer $J$ parallel einen Kondensator $C_1$ geschaltet (s. Figur 297*), der die Periode des Kreises dann wesentlich bestimmt. Der sehr viel größere Kondensator $C$ hat, wie oben erwähnt, hierbei nur wenig Einfluß. Die Genauigkeit der Abstimmung (die Schärfe der Resonanz) zwischen Sender und Empfänger wird bei loser Koppelung beider wesentlich von der Dämpfung abhängen. Die beiden vom Sender ausgehenden Wellen haben merklich gleiche Schwingungszahl $n$ (in $2\pi$ Sekunden), aber nach (18) und (19), S. 621 ungleiche Dämpfung, wirksam wird nur die schwach gedämpfte Schwingung auf den Empfänger sein, deren Dämpfung mit $\delta'$ bezeichnet werde. Im Empfänger sei ebenfalls $n$ die Schwingungszahl der beiden möglichen Schwingungen, von denen auch nur die schwach gedämpfte




Figur 297.

* Figur 296 u. 297 entnommen aus ZENNECK, l. c. 884 u. 885.
[1] J. ZENNECK, l. c. 883. — [2] S. z. B. M. WIEN, l. c. 704 usw.



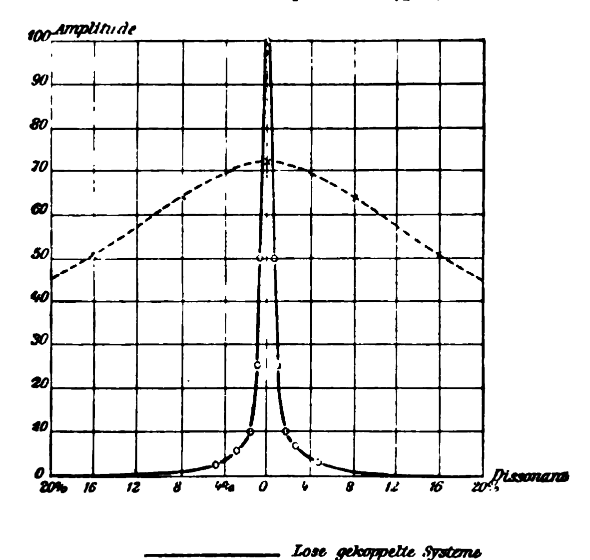
berücksichtigt zu werden braucht, deren Dämpfungskonstante $\eta'$ ist nach (18) S. 621:

$$\eta' = \eta_2 + \frac{k^2 n^2}{4(\eta_1 - \eta_2)} ,$$

wo $\eta_2$ resp. $\eta_1$ die kleine Dämpfung des (sekundären) Kondensatorkreises resp. die starke Dämpfung des (primären) Antennenkreises bezeichnet. Macht man die Koppelung $k^2$ schwach genug, so wird merklich $\eta' = \eta_2$.

Ist der Empfänger etwas gegen den Sender verstimmt, so daß seine Schwingungszahl $n_2$ statt $n$, also $n - n_2$ die „Dissonanz" beider Apparate ist, dann wird nach M. Wien (l. c.) das Verhältnis der jetzt im Empfänger auftretenden Schwingungsamplitude ($A_{n_2}$) zu der im Fall des unisono vorhandenen ($A_n$)

$$\frac{A_n}{A_{n_2}} = \sqrt{\frac{(n - n_2)^4}{(\eta_1 \delta')^2} + \frac{(n - n_2)^2}{(\delta')^2} + 1} .$$



Figur 298.

Die Figur 298 gibt die Resonanzkurve, in ihr bedeuten die Abszissen prozentische Werte der Dissonanz, die Ordinaten geben die Amplitudenverhältnisse. Die gestrichelte Kurve stellt dasselbe dar, wenn statt gekoppelter Systeme einfache benutzt werden und das Funkenpotential im Sender dasselbe wie vorher ist.

Trotz der ausgebildeten Resonanz und der schwachen Dämpfung im Empfänger sind doch die Wirkungen der so gekoppelten Systeme nicht viel größer als der einfachen, da nach (17), S. 621 die maximale, vom schwach gekoppelten Sender ausgehende Spannungsamplitude kleiner sein wird als das dort benutzte Funkenpotential. Im Empfänger entsteht also ein schwacher, aber nur langsam abklingender „Ton".

Die scharfe Abstimmung läßt eine Störung nur durch Schwingungen zu, die der Empfängerschwingung sehr nahe liegen, sichert also den Verkehr zwischen zwei mit abgestimmten Apparaten versehenen Stationen. Ebenso wird durch scharfe Resonanz eine Mehrfachtelegraphie erst möglich.

Statt des Kohärers benutzt Marconi auch den von ihm modifizierten [s. unter f) S. 665] Rutherfordschen magnetischen Wellendetektor, der in vieler Beziehung den Kohärer übertreffen soll.

Die Entfernungen, bis zu welchen die drahtlose Telegraphie wirksam geworden ist, sind in der letzten Zeit sehr gewachsen; so hat Marconi von der Station Poldhu (Cornwallis in England) über den Atlantischen Ozean (2500 km) telegraphieren können. Dabei, wie überhaupt, erwies sich, daß die Telegraphie über See besser als über Land gelang und daß größere Entfernungen größere Wellenlängen erforderten.

[1] Über Abstimmung von Sendern s. A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 711, 777, 915. 1085. 1904.

Die Rolle, welche der Erdboden bei dem Vorgang spielt[1], ist noch nicht klar erkannt, da aber eine Erdung nicht durchaus nötig ist[2], wird wohl die Elektrisierung der Oberfläche[3] keine Rolle spielen, sondern es wird die Welle längs der leitenden Erdoberfläche, wie längs eines Drahtes hingleiten und auch der Erdkrümmung folgen können.

JACKSON[4] fand, daß Berge usw. Hindernisse für die drahtlose Telegraphie sind, da er direkt hinter ihnen keine von der anderen Seite des Berges kommenden Zeichen wahrzunehmen vermochte, während in größerem Abstand (außerhalb des Bergschattens) der Empfänger wieder ansprach. Nebel und feuchte Atmosphäre verminderten die Fortpflanzungsweite. In der Nacht ist eine bessere Nachrichtenübermittlung möglich als am Tage[5].

Es sei noch folgende Literatur angeführt.

Bücher und Broschüren (teils zusammenfassende Darstellungen):

J. ZENNECK, Elektromagnetische Schwingungen u. drahtlose Telegraphie. Stuttgart 1905.
A. RIGHI u. B. DESSAU, Die Telegraphie ohne Draht. Braunschweig 1903.
F. BRAUN, Drahtlose Tel. durch Wasser u. Luft. Leipzig 1901.
A. SLABY, Die Funkentelegraphie. 2. Aufl. Berlin 1901.
A. TURPAIN, Les applications pratiques des ondes électriques. Paris 1902.
A. PRASCH, Die Tel. ohne Draht, u. Fortschritte auf dem Gebiet der drahtlosen Tel. I—III, 1902—03.
J. A. FLEMING, Cantor lectures on Hertzian Wave telegraphy. London 1903.
G. EICHHORN, Die drahtlose Telegraphie. Leipzig 1904.
A. ZAMMARCHI, La telegraphia senza fili di Guglielmo Marconi. Bergamo 1904.

Einzelne Abhandlungen:

G. MARCONI, Electrician. **42**. 690. 1898; Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 289. 1899.
O. LODGE, ibid. **42**. 269.
J. BLONDIN, L'éclair. él. **28**. 93. 1901.
R. FESSENDEN, Elektrotechn. Zeitschr. **22**. 604. 1901.
A. SLABY, ibid. S. 38.
F. BRAUN, ibid. S. 258. 469. 1901.
G. MARCONI, Electrician. **47**. 172. 1901.
F. BRAUN, Phys. Zeitschr. **3**. 146. 1902; Ann. d. Phys. **8**. 199. 1902.
A. SLABY, Elektrotechn. Zeitschr. **23**. 165. 1902.
F. BRAUN, Phys. Zeitschr. **4**. 361. 1903.
A. TURPAIN, L'éclair. él. **32**. 13, 281, 337, 377. 1902; **34**. 12. 1903.
J. REYVAL, ibid. **34**. 41, 319. 1903.
PFITZNER, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 523. 1904.
G. FERRIÉ, C. R. **136**. 1248. 1903.
LINDOW, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 586. 1903.
C. A. CHANT, Phil. Mag. (6) **7**. 124. 1904.
F. BRAUN, Phys. Zeitschr. **5**. 193. 1904.
G. FERRIÉ, Journ. de Phys. (4) **3**. 782. 1904.
C. TISSOT, C. R. **139**. 628. 1904.
G. W. PIERCE, Phys. Rev. **19**. 196. 1904.
G. SEIBT, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 1111. 1904.
L. MANDELSTAM, Phys. Zeitschr. **5**. 245. 1904.

## 37. Magnetisierbare Körper im Feld elektrischer Schwingungen.

Sieht man ab von den qualitativen Beobachtungen über die Magnetisierung durch den Entladungsschlag von Leydner Flaschen, wie sie schon früher erwähnt ist und wie sie schon von SAVARY[6] gemacht wurde, so war OBERBECK[7] der erste,

[1] Theorethisches s. z. B. K. ULLER (Dissert.), Rostock 1904. — H. M. MACDONALD, Proc. Roy. Soc. **71**. 251. 1903. — Lord RAYLEIGH, ibid. **72**. 40. 1903 u. H. POINCARÉ, ibid. 42. — [2] J. S. SACHS, Ann. d. Phys. **18**. 348. 1905, fand für 31 m Wellen u. Institutsversuche, daß durch elektrisches Gegengewicht bessere Übertragung als durch Erdung erreicht würde. — [3] E. LECHER, Phys. Zeitschr. **4**. 320. 722. 1903. — A. VOLLER, ibid. S. 410. 664. 820. — A. KÖPSEL, Dinglers polyt. Journ. **318**. 385. 1903. — [4] H. B. JACKSON, Proc. Roy. Soc. **70**. 254. 1902. — [5] G. MARCONI, Electrician, **49**. 388. 1902. — J. JOLY, Nature, **66**. 199. — O. LODGE, ibid. 222. 1902. — [6] SAVARY, Pogg. Ann. **8**. 352. 1826; **9**. 443; **10**. 73. 1827. S. auch VON LIPHART, ibid. **116**. 513. 1863. — [7] A. OBERBECK, Wied. Ann. **21**. 672. 1884.

der die Magnetisierung von Eisenkernen in Spulen durch elektrische Schwingungen untersuchte. Er erzeugte die Wechselströme durch einen Sinusinduktor und benutzte die WHEATSTONEsche Brücke, bei der drei Zweige merklich induktionslos waren, während der vierte die Spule enthielt, deren Selbstinduktionskoeffizient bestimmt wurde. Führte er dann den Eisenkern in die Spule ein, so gab der jetzt viel größere Wert des Selbstinduktionskoeffizienten ein Maß für die Magnetisierung des Eisens. Bei der kleinen Schwingungszahl von etwa 100 pro Sekunde waren für Bündel aus dünnen Drähten und für dünne Stäbe die magnetischen Momente nahezu den erregenden Kräften (Stromstärken) proportional, bei dicken Stäben zeigte sich eine Phasendifferenz zwischen den magnetischen Schwingungen des Eisenkernes und den erregenden Wechselströmen, und der Magnetismus nahm mit wachsender Schwingungszahl ab.[1]

Diese Erscheinungen werden von OBERBECK auf die Wirkung der in dem Eisenkern auftretenden Wirbelströme zurückgeführt und die Phasenverschiebung $\varphi$ läßt sich nach ihm durch die Größe $\varkappa = \varrho \pi \sqrt{\sigma \mu n_1}$ [s. Formel (10), S. 602] darstellen, wo $\varrho$ der Drahtradius, $n_1$ die Schwingungszahl pro Sekunde, $\sigma$ und $\mu$ Leitfähigkeit und Permeabilität bezeichnen; und zwar ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \varkappa^2 \cdot \frac{1 + \frac{\varkappa^4}{6}}{1 + \frac{2\varkappa^4}{3}} .$$

Die Schwächung der magnetischen Induktion gegenüber der Amplitude der induzierenden Kraft gibt OBERBECK durch einen Schwächungskoeffizienten $F$ an, mit dem die Amplitude der Induktion multipliziert werden muß, wo

$$F = \sqrt{\frac{1 + \frac{\varkappa^4}{3}}{1 + 2\varkappa^4}} .$$

Die OBERBECKsche Theorie des Einflusses der Wirbelströme wurde auch von M. WIEN[2] geprüft, indem er Wechselströme der Schwingungszahlen 128, 256, 520 seiner Wechselstromsirene benutzte und nach der MAXWELLschen Methode in der WHEATSTONEschen Brücke die Selbstinduktionskoeffizienten von Spulen bestimmte, in denen sich die Ringe aus Eisendraht befanden. In dem Brückendraht diente ein optisches Telephon als Stromanzeiger, und die magnetisierende Kraft ergab sich aus der Messung der Intensität des Wechselstromes durch ein Dynamometer im Nebenschluß. Bei kleinen magnetischen Kräften zeigte sich annähernd Übereinstimmung für die Phasenverschiebung $\varphi$ zwischen Beobachtung und Theorie. Auf die weiteren Resultate WIENs über Hysteresis kann hier nicht eingegangen werden.

Sobald man zu schnelleren Schwingungen übergeht, als sie OBERBECK und WIEN benutzten, zeigt die Magnetisierung durch Wechselstrom starke Abweichungen von ihrem Verhalten bei konstantem Strom. Das hat seinen Grund wesentlich darin, daß der von dem elektrischen Wechselstrom erzeugte, periodisch veränderliche Strom magnetischer Induktion nicht mehr den Querschnitt des magnetischen Leiters gleichmäßig erfüllt, ganz analog wie ein elektrischer Wechselstrom von kurzer Periode nur in der Oberflächenschicht des Leiters fließt. Bei Magnetisierung eines zylindrischen Eisenkörpers durch Kreisströme, die senkrecht zur Zylinderachse laufen, ist die Analogie vollständig zwischen dem magnetischen Induktionsfluß, umgeben von den zirkularen elektrischen Stromlinien, und dem

---

[1] S. auch G. C. GEROSA, Rend. del R. Ist. Lomb. (?) **24**. I. 1891. — [2] M. WIEN, Wied. Ann. **66**. 859. 1898. S. dort auch weitere Literatur.

einen Draht durchfließenden elektrischen Strom, umgeben von den magnetischen Kraftlinien.

Indem ZENNECK (wie früher erwähnt) die Begriffe und Bezeichnungen (Selbstinduktion, Impedanz usw.) der elektrischen Strömung auf die magnetische übertrug, fand er, daß der Einfluß des Materials und der Dimensionen des magnetischen Leiters auf die magnetische Strömung sich durch die oben schon benutzte Größe $\varkappa$ darstellen läßt, die ja auch für die Verteilung eines elektrischen Stromes in einem Leiter maßgebend war.

Darnach wäre die Stärke des magnetischen Induktionsflusses (Stärke der Magnetisierung) bei schnellen Schwingungen (großem $\varkappa$) um so kleiner, die Magnetisierung wäre um so mehr nur auf eine dünne Oberflächenschicht beschränkt und die Phasenverschiebung von außen nach innen um so bedeutender, je größer der Radius $\varrho$ des zylindrischen Leiters und je schneller ($n_1$) die erregenden Schwingungen sein würden. Mit stets zunehmendem $n_1$ muß schließlich für jeden Kern ($\varrho$) der Fall eintreten, daß der Kern den Induktionsfluß in der umgebenden Spule nicht mehr steigert, sondern sogar herabdrückt.[1]

Direkte Versuche von VARLEY[2] bestätigen einige dieser Folgerungen. Er fand eine Abnahme in der Stärke der Magnetisierung mit Zunahme des Drahtradius und der Schwingungszahl. Als Maß für die Intensität der Magnetisierung diente die Ablenkung der Kathodenstrahlen in der BRAUNschen Röhre, die durch ein Eisendrahtbündel in einer von Kondensatorschwingungen durchlaufenen Spule bewirkt wurde.

ZENNECK[3] benutzte die Schlagweite eines Funkenmikrometers, das mit der Spule, in der die Kondensatorschwingungen erregt wurden, verbunden war, um die Verstärkung des Induktionsflusses zu bestimmen, wenn in die Spule Eisenkerne gleicher Dimension, aber aus verschieden dicken Drähten gebildet, eingeführt wurden. Ist $V_1$ die Spannungsamplitude des Mikrometers, wenn die Kerne in der Spule lagen, $V_2$ die Amplitude, wenn die Spule ohne Kern war, so gibt die nachstehende Tabelle eine Übersicht der Resultate:

| Kern | Massiv | Draht $\varrho = 0{,}9$ mm | Draht $\varrho = 0{,}35$ mm | Draht $\varrho = 0{,}12$ mm | Pulver |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{V_1}{V_2}$ | 0,66 | 1,31 | 1,73 | 1,72 | 2,76 |
| Energieverbrauch | 4,5 | 31 | 41 | 55 | 6 |

Die Zahlen der dritten Reihe geben den Energieverbrauch bei derselben Schwingungszahl und Stromamplitude durch ein Hitzdrahtthermometer gemessen.

Nach diesen Resultaten kann also ein massiver Eisenkern den Induktionsfluß in der Spule vermindern; will man ihn möglichst ökonomisch verstärken, so sind Eisenpulver bei schnellen Schwingungen Drähten vorzuziehen, besonders da Pulver, lose oder mit Paraffin verschmolzen, für langsame und für Wechselströme der Schwingungszahl $10^6$ fast dieselbe Wirkung ergibt.[4]

Schon die früher (s. S. 685) angeführten Versuche von BJERKNES zeigten, wie gering (einige Tausendstel Millimeter) die Tiefe ist, bis zu welcher die Wirkungen der Schwingungen eindringen. Dasselbe ergaben Versuche von RUTHERFORD[5] für Nadeln aus Stahl oder weichem Eisen. Für Zylinder, die aus einem Gemisch von Eisenpulver und Paraffin hergestellt waren, fand BIRKELAND[6], daß die Magnetisierung bei 10% Eisen bis 7 mm, bei 25% bis 5 mm unterdie Oberfläche eindrang.

[1] S. auch H. PELLAT, C. R. **126**. 711. 1898. — [2] W. M. VARLEY, Diss. Straßburg 1901 und Phil. Mag. (6) **3**. 500. 1902. — [3] J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **11**. 1132. 1903. — [4] J. ZENNECK, Ann. d. Phys. **12**. 869. 1903. S. auch F. BRAUN, ibid. **10**. 326. 1903. — [5] E. RUTHERFORD, Phil. Trans. **189**. 1. 1897. — [6] KR. BIRKELAND, C. R. **118**. 1320. 1894.

## Permeabilität $\mu$ des Eisens für schnelle Schwingungen.

Die Bestimmung der Permeabilität $\mu$ für schnelle Schwingungen hat gezeigt, daß $\mu$ für sie beträchtlich kleiner ist als für konstanten Strom, sichere Werte sind aber für $\mu$ wohl kaum noch gewonnen.

KLEMENČIČ[1] maß mit Thermoelement die in einem linearen Resonator durch die Schwingungen erzeugte Temperatursteigerung, wenn ein Teil des Resonators aus Eisendraht, dann, wenn dieser Teil aus Messingdraht von denselben Dimensionen bestand. Durch Vergleichung der beiden Erwärmungen bestimmte er aus der RAYLEIGHschen Formel für den Widerstand ($w'$) bei sehr schnellen Schwingungen: $w' = w \cdot \varrho \pi \sqrt{\sigma \mu n_1}$ die Größe $\mu$. Auch CARDANI[2] suchte $\mu$ durch die von den Wechselströmen im Eisen entwickelte Wärme zu bestimmen. — Das so gewonnene $\mu$ wird nur einen oberen Grenzwert darstellen, da die Wärmeentwicklung durch Wirbelströme hier nicht berücksichtigt ist.

ST. JOHN[3] stellte in einem Paralleldrahtsystem aus Kupfer- und in einem aus Eisendrähten Resonanz mit demselben Oszillator her und maß in beiden die Wellenlänge ($\lambda$), sie war für Eisen etwas kleiner. Nach der Beziehung $\tau = 2\pi\sqrt{LC}$ wurde das Verhältnis des Selbstinduktionskoeffizienten $L$ und $L_1$ für Kupfer- und Eisenleitung bestimmt:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} .$$

Da nach RAYLEIGH [s. Gleichung (19) S. 608] sich das $L'$ für Schwingungen aus dem $L_0$ ergibt, das für die Kupfer- und Eisenleitung gleich ist:

$$L' = L_0 + \sqrt{\frac{\mu l \cdot w}{2n}} ,$$

wo $l$ = Länge der Leitung, so findet sich $\mu$.

Auch VARLEY hat in seiner zitierten Arbeit einige Werte von $\mu$ ermittelt.

Die Resultate sind etwa:

| $n_1$ | $\mu$ | $\varrho$ in mm | Beobachter |
|---|---|---|---|
| 1 bis $3{,}5 \cdot 10^4$ | 110 — 101 | | VARLEY |
| $4{,}5 \cdot 10^7$ | 74 — 118 | 0,19 — 0,23 | KLEMENČIČ |
| $5{,}8 \cdot 10^7$ | 83,5 — 107 | 0,39 — 0,59 | ST. JOHN |
| ca. $5 \cdot 10^5$ | 15,6 — 125,9 | 0,047 — 2,7 | CARDANI |

Bei KLEMENČIČ gilt $\mu = 74$ für harten Bessemerstahl; $\mu = 118$ für weiches Eisen. CARDANI und ST. JONN finden eine Zunahme des $\mu$ mit $r$.

## Energieabsorption im Eisen bei schnellen Schwingungen.

Befindet sich ein Eisenkern in einer koaxialen, von Schwingungen durchlaufenen Spule, so findet eine starke Energieabsorption (Wärmeerzeugung) in ihm statt, deren Theorie von OBERBECK[4] gegeben wurde und die man (ohne Berücksichtigung der Hysteresis) in folgender Weise berechnen kann[5]: Die magnetische Kraft sei parallel der Zylinderachse und ändere sich wie der reelle Teil von

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{int} .$$

---

[1] J. KLEMENČIČ, Wied. Ann. **53**. 705. 1894. — [2] P. CARDANI, N. Cim. (4) **7**. 239. 1898. — [3] CH. E. ST. JOHN, Phil. Mag. (5) **38**. 425. 1894; **39**. 297. 1895. — [4] A. OBERBECK, l. c. — [5] J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **32**. 458. 1891 und Rec. Res. S. 318. — M. B. FIELD, J. Inst. Electr. Engin. **33**. 1125. 1904 und Beibl. **29**. 315. 1905.

Dann besteht nach früherem, da $\mathfrak{H}$ nur von $r$ (dem Abstand von der Achse) abhängt, die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} = 4\pi\mu\sigma\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad ,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} = p^2 \mathfrak{H} \quad ,$$

wo

$$p^2 = 4\pi\mu\sigma\iota n \quad .$$

Die Lösung ist:

$$\mathfrak{H} = A J_0(\iota p r) e^{\iota n t}$$

($J_0$ die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung). An der Oberfläche des Zylinders, dessen Radius $a$ sei, gilt.

$$A J_0(\iota p a) = \mathfrak{H}_0 \quad ,$$

also:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \frac{J_0(\iota p r)}{J_0(\iota p a)} e^{\iota n t} \quad .$$

Für die in dem Zylinder induzierten Ströme, deren Dichte $\mathfrak{j}$ sei, ist:

$$4\pi\mathfrak{j} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} = -\iota p \mathfrak{H}_0 \frac{J_0'(\iota p r)}{J_0(\iota p a)} e^{\iota n t} \quad .$$

Der Radius $a$ und $n$ seien so klein, daß $p a$ eine kleine Größe, dann wird genähert:

$$J_0(\iota p a) = 1 \quad ; \qquad J_0(\iota p r) = -\tfrac{1}{2}\iota p r \quad ,$$

also:

$$4\pi\mathfrak{j} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_0 p^2 r e^{\iota n t} = -2\pi\mu\sigma\iota n \mathfrak{H}_0 r e^{\iota n t} \quad .$$

Nimmt man hiervon den reellen Teil, so ist:

$$\mathfrak{j} = \frac{\mu\sigma n}{2}\mathfrak{H}_0 r \sin(n t) \quad .$$

Also die pro Zeiteinheit in der Längeneinheit des Zylinders entwickelte Wärmemenge:

$$W_m = \int_0^a \frac{\mathfrak{j}^2}{\sigma} 2\pi r\, dr = \frac{\mathfrak{H}_0^2}{16}\pi\sigma\mu^2 n^2 a^4 \quad .$$

Hat man $N$ Drähte in einem Bündel, dessen Gesamtquerschnitt $S = N\pi a^2$, so ist $N \cdot W_m = \overline{W}_m$ die im Bündel entwickelte Wärme, d, h.

$$\overline{W}_m = \frac{S^2}{16\pi N}\mu^2 n^2 \sigma \mathfrak{H}_0^2 \quad ,$$

also umgekehrt proportional der Zahl der das Bündel bildenden Drähte. Durch Vergrößerung dieser Zahl, Verkleinerung der Dicke der benutzten Drähte, kann man also die entwickelte Wärmemenge verkleinern.

Ist dagegen $p a$ sehr groß, so wird genähert

$$J_0(\iota p r) = \frac{e^{p r}}{\sqrt{2\pi p r}} \quad ,$$

und berechnet man hieraus wieder die Wärmemenge für die Längeneinheit des Zylinders, so wird sie:

$$\frac{a}{8\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\mu n}{\sigma}} \cdot \mathfrak{H}_0^2 \quad ,$$

d. h. sie ist der Quadratwurzel aus $\mu$ direkt und aus $\sigma$ umgekehrt proportional. Hier werden also, im Gegensatz zu dem Resultat bei langsamen Stromwechseln, die schlechter leitenden Körper größere Wärmemengen entwickeln.

Versuche über solche Wärmeentwicklung haben u. a. M. WIEN [1], J. KLEMENČIČ [2] angestellt.

## Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern.

Über die Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern ist schon großenteils S. 224 dieses Bandes berichtet. Die Theorie läßt sich im Anschluß an die Grundgleichungen (6) oder (7) S. 636 nach J. J. THOMSON [3] wie folgt darstellen. Ein gerader Eisenzylinder mit kreisförmigem Querschnitt, dessen Achse die $z$-Achse, unterliege an einer Stelle der Einwirkung einer ihn umgebenden Magnetisierungsspule, so daß die magnetischen Kraftlinien in durch die $z$-Achse gelegten Ebenen verlaufen. Die Komponenten der magnetischen Induktion werden dann sich ändern wie

$$e^{\iota(mz+nt)}\,, \qquad \text{wo} \qquad m = \beta\iota - \eta \quad .$$

Dabei bestimmt $\beta$ die Absorption, und wenn $n$ die Schwingungszahl in $2\pi$ Sekunden, $v'$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, so ist $\eta = \frac{n}{v'}$.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}$ eine der Komponenten $(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)$ der magnetischen Induktion, so gilt für $\mathfrak{A}$ in dem leitenden Eisenzylinder die Gleichung, da $\frac{1}{T_0}$ in ihm sehr groß ist:

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\mathfrak{A} \quad ,$$

d. h. für unsern Fall:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial y^2} = p^2\mathfrak{A}\,, \qquad \text{wo} \qquad p^2 = m^2 + \frac{4\pi\sigma\mu n\iota}{c^2} \quad .$$

In dem umgebenden Dielektrikum aber besteht die Beziehung:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial y^2} = k^2\mathfrak{A}\,, \qquad \text{wo} \qquad k^2 = m^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}n^2 = m^2 - \frac{n^2}{v^2} \quad ,$$

wenn $v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Dielektrikum. Endlich ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0 \quad .$$

Die Lösung wird wieder durch BESSELsche Funktionen gegeben. An der Oberfläche des Zylinders, dessen Radius $a$ sei, sind die Bedingungen einzuführen, daß die tangentiale magnetische Kraft und daß die radiale magnetische Induktion für $r = a$ stetig bleiben.

J. J. THOMSON findet so für langsame Schwingungen, bei denen die Strömung merklich gleichförmig über den Querschnitt verteilt ist, wenn man noch $\frac{2}{\mu}$ als klein ansieht:

$$k^2 = -\frac{4}{a^2\mu}\cdot\frac{1}{\log(\mu\gamma^2)} = m^2 - \frac{n^2}{v^2} \quad ,$$

wo $\log\gamma$ die sogenannte MASCHERONIsche Konstante $= 0{,}5772157\ldots$ ist.

In allen praktisch möglichen Fällen ist $\frac{n^2}{v^2}$ sehr klein, also $k^2 = m^2$ und

$$m = \beta i - \eta = \frac{\iota 2}{a}\left\{\frac{1}{\mu}\,\frac{1}{\log(\mu\gamma^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \beta = \frac{2}{a}\left\{\frac{1}{\mu}\,\frac{1}{\log(\mu\gamma^2)}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad .$$

[1] M. WIEN, l. c. — [2] J. KLEMENČIČ, Wied. Ann. 58. 249. 1896. — [3] J. J. THOMSON, Rec. Res. S. 302. — S. auch J. ZENNECK, Ann. d. Phys. 11. 867. 1903.

$\eta$ ist hier scheinbar null, weil Größen von der Ordnung $\varkappa^2$ vernachlässigt sind. Die Abnahme der Schwingungsamplitude auf der Strecke $z$ ist dadurch gegeben. Die magnetische Induktion sinkt also auf der Strecke $\frac{1}{2} a \{\mu \log(\mu \gamma^2)\}^{\frac{1}{2}}$ auf $\frac{1}{e}$ ihres Wertes.

Für schnellere Schwingungen, wenn man $p\,a$ groß gegen 1, aber klein gegen $\mu$ ansieht, ergibt sich:

$$\beta = \frac{2}{a} \frac{\left(\frac{\pi n \sigma a^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left[\log \gamma^2 \left(\frac{\mu}{\pi n \sigma a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{2}{a} \frac{\left(\frac{\pi n \sigma a^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left[\log \gamma^2 \left(\frac{\mu}{\pi n \sigma a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\frac{\pi}{8},$$

jetzt sinkt also die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ ihres Wertes auf der Strecke:

$$\frac{a}{2} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\mu}{\pi n \sigma a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{\log \gamma^2 \left(\frac{\mu}{\pi n \sigma a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Strecke ist, da hier $\mu^{\frac{1}{4}}$ statt $\mu^{\frac{1}{2}}$ steht, viel kürzer als die für langsamere Schwingungen und gleiche Amplitudenabnahme.

Die Versuche[1] bestätigen diese Folgerungen der Theorie nur in beschränktem Maße. Eine Demonstration[2] der Erscheinungen kann mit der Braunschen Röhre gegeben werden. Man verbindet die den Magnetismus erregende Spule $S_1$ mit zwei einander gegenüberstehenden Spulen, zwischen denen die Röhre liegt; senkrecht zu diesen Spulen schließen zwei andere einander gegenüberstehende Drahtrollen die Röhre ein, und sie sind mit einer auf dem Eisenzylinder verschiebbaren Rolle $S_2$ verbunden, die von dem Teil des Zylinders induziert wird, über dem sie gerade liegt. Das Bild auf dem Schirm der Braunschen Röhre gibt dann Aufschluß über das Verhältnis der Schwingungen in $S_1$ und $S_2$, ihre Phasendifferenz und Amplituden und erlaubt so ein Urteil über die Dämpfung (Absorption) und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen.

Weitere Literatur über hierher gehörige Fragen:

E. Madelung, Ann. d. Phys. **17**. 861. 1905, wo zahlreiche Literaturangaben.
R. Arnò, Rend. Ac. dei Lincei. **14**. 278. 368. 512. 1905.

---

[1] S. z. B. A. Oberbeck, Wied. Ann. **22**. 73. 1884. — J. Zenneck, Ann. d. Phys. **10**. 845. 1903. — [2] J. Zenneck, Ann. d. Phys. **9**. 518. 1902.

# Absolutes Maß bei magnetischen und elektrischen Größen.

Von A. OBERBECK.*)

## I. Die absoluten Maßsysteme. Dimensionen der magnetischen und elektrischen Größen nach denselben.

Magnetische Mengen und Kräfte wurden zuerst von F. GAUSS[1], elektrische Größen von W. WEBER[2] auf absolutes Maß zurückgeführt.

Da magnetische und elektrische Kräfte sich gegenseitig beeinflussen, so kann man bei Benutzung der Grundgesetze des Elektromagnetismus von den nach absolutem Maß gemessenen magnetischen Kräften zu den elektrischen Größen übergehen, diese auf jene zurückführen. Man kann aber auch zuerst für Elektrizitätsmengen durch Benutzung ihrer elektrostatischen Wechselwirkungen eine absolute Einheit festsetzen, daraus die übrigen elektrischen Größen und schließlich die magnetischen Größen herleiten. Die Dimensionen derselben sowie die einzelnen Einheiten sind in beiden Fällen verschieden. Wir haben es daher mit zwei verschiedenen absoluten Maßsystemen zu tun, welche man als das elektromagnetische und das elektrostatische (mechanische) System bezeichnet.

Wir gehen zuerst zur Ableitung der Dimensionen der einzelnen Größen über, wobei wir es zunächst noch offen lassen, welches System angewandt werden soll.

### A) Magnetische Größen.

1. Die magnetischen Kraftwirkungen lassen sich am einfachsten durch die Annahme ausdrücken, daß sie von einem meßbaren (positiven oder negativen) Agens ausgehen. Man bezeichnet dasselbe als freien Magnetismus. Ist die in Betracht kommende Menge in einem Punkt konzentriert, so bezeichnen wir dieselbe als Stärke des Magnetpols oder kurz als Magnetismusmenge ($\mu$). Nach dem COULOMBschen, durch Versuche hinreichend bestätigten Grundgesetz ist die Kraftwirkung eines Pols auf einen anderen dem Produkt der Magnetismusmengen direkt, dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional, oder wenn wir eine von den Einheiten abhängige Konstante $\alpha$ einführen, so ist:

$$R = \alpha \frac{\mu \mu'}{r^2} \quad (I)$$ [3].

2. Als magnetische Intensität oder Stärke eines magnetischen Kraftfeldes ($H$) bezeichnen wir die auf die Einheit des freien Magnetismus

*) Für die zweite Auflage durchgesehen und erweitert von H. v. STEINWEHR.

[1] F. GAUSS, Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Göttingen 1832. Gauss' Werke 5. 80. — [2] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbest. 2. 1852; 4. 1857. — Webers Werke 3. 301—400, 591—674. — [3] Unter $R$ ist eine mechanische Kraft, unter $L$ eine Arbeit zu verstehen. Dimensionsgleichungen sind, wie früher, durch Einklammerung der Größen [ ] bezeichnet.

wirkende mechanische Kraft. Also ist das Produkt der Intensität mit einer beliebigen Magnetismusmenge von der Dimension einer Kraft

$$[R] = [\mu H] \quad .$$

3. Als Anzahl der Kraftlinien ($N$), welche durch eine Fläche gehen, bezeichnen wir die Summe der magnetischen Feldstärken senkrecht zu der Fläche. Ihre Anzahl für die Flächeneinheit ist 1, wenn die magnetische Intensität 1 ist. Die Anzahl aller von einem Einheitspol ausgehenden Kraftlinien ist hiernach: $4\pi\alpha$. Die Dimension der Kraftlinienzahl ist:

$$[N] = [H l^2] \quad .$$

4. Das magnetische Potential ist die Arbeit bei der Verschiebung eines Einheitspols aus einem Kraftfeld in unendliche Entfernung. Also ist:

$$[L] = [R l] = [\mu U] \quad .$$

5. Magnetisches Moment $M$ eines Polpaares ist das Produkt der Stärke des einen Pols mit der Entfernung von dem anderen.

$$[M] = [\mu l] \quad .$$

6. Ist ein magnetisierbarer Körper der Wirkung magnetischer Kräfte ausgesetzt, so wird derselbe polarisiert. Das Moment der Volumeneinheit ist der Intensität der magnetischen Kraft an dem betreffenden Ort proportional.[1] Die Magnetisierungskonstante ($\varkappa$) (magnetische Suszeptibilität) des Mediums ist dann das Moment der Volumeneinheit bei Wirkung der Einheit der magnetischen Kraft.

$$[M] = [\varkappa H l^3] \quad .$$

Von derselben Dimension ist die magnetische Permeabilität: $(1 + 4\pi\varkappa)$.

## B) Elektrische Größen.

7. Zur Erklärung der elektrostatischen Kraftwirkungen macht man die Annahme, daß die betreffenden Körper mit freien Elektrizitätsmengen ($e$) bedeckt sind. Ihre Wechselwirkung erfolgt ebenfalls nach dem COULOMBschen Gesetz. Wenn daher $\beta$ eine neue Konstante bedeutet, so ist:

$$R = \frac{\beta e e'}{r^2} \quad . \tag{II}$$

8. Die Stärke eines elektrischen Kraftfeldes ($F$) ist die mechanische Kraftwirkung auf die Einheit der Elektrizitätsmenge.

$$[R] = [e F] \quad .$$

9. Die Anzahl der elektrischen Kraftlinien ($N'$) definiert man analog der Definition der magnetischen Kraftlinien

$$[N'] = [F l^2] \quad .$$

10. Moment eines elektrischen Punktepaares ($M'$), wenn in dem einen die Menge $+e$, im anderen $-e$ enthalten ist, ist:

$$[M'] = [e l] \quad .$$

11. Für dielektrisch polarisierbare Medien führen wir die Dielektrizitätskonstante $\eta$ durch die Gleichung ein:

$$[M'] = [\eta F l^3 \quad .$$

[1] Bei stark magnetisierbaren Medien ist der Zusammenhang beider Größen verwickelter.

12. Das elektrostatische Potential ($V$) ist die Arbeit bei der Verschiebung der Elektrizitätsmenge 1 aus dem elektrischen Kraftfeld in unendlich große Entfernung. Also:

$$[L] = [e\,V] \quad .$$

13. Bei den konstanten Strömen der Hydro- und Thermoketten besteht die elektromotorische Kraft ($E$) aus Potentialdifferenzen an gewissen Stellen des Stromkreises. Da andere, elektromotorische Kräfte, z. B. diejenigen der Induktion, sich ihrem Wesen nach in keiner Weise von ersteren unterscheiden, so setzen wir allgemein fest, daß die elektromotorische Kraft und das elektrostatische Potential dieselbe Dimension haben,

$$[E] = [V] \quad .$$

14. Die Stromstärke ($i$) ist die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Stromkreises fließende Elektrizitätsmenge. Also:

$$[e] = [i\,t] \quad .$$

15. Die Kapazität eines isolierten Leiters ist die zur Ladung desselben auf das Potential 1. erforderliche Elektrizitätsmenge

$$[e] = [c\,V] \quad .$$

16. Zur Definition des Widerstandes dient das OHMsche Gesetz:

$$[E] = [i\,w] \quad .$$

17. Die Definition des Induktionskoeffizienten einer Leitung (Rolle) auf sich selbst ($p$) oder des Induktionskoeffizienten einer Leitung in bezug auf eine andere ($q$) behalten wir uns im Augenblick noch vor.

Man übersieht aus dieser Zusammenstellung sofort, daß die Dimensionen aller magnetischen Größen außer von der Masse, Länge und Zeit nur noch von der Dimension von $\mu$ abhängen. In gleicher Weise hängen alle elektrischen Größen nur von der Dimension der Elektrizitätsmenge ab.

Ferner zeigt eine einfache Umrechnung, daß:

$$[\alpha] = \left[\frac{1}{\varkappa}\right] \quad ,$$

$$[\beta] = \left[\frac{1}{\eta}\right] \quad .$$

Wenn daher, wie später geschehen wird, $\alpha$ oder $\beta$ gleich 1 gesetzt wird, so ist die Magnetisierungskonstante resp. die Dielektrizitätskonstante eine dimensionslose Zahl.

## C) Beziehungen zwischen magnetischen und elektrischen Größen.

Die hier in Betracht kommenden Tatsachen bestehen aus zwei Hauptgruppen:

a) der ponderomotorischen Wechselwirkung zwischen Magneten und elektrischen Strömen,

b) der elektromotorischen Wirkung in einem Leiter bei Bewegung desselben in einem Magnetfeld oder bei Änderung der Stärke desselben. Die für diese beiden Fälle aufzustellenden Formeln enthalten magnetische und elektrische Größen. Bei Festlegung der Einheiten der einen Art werden daher durch dieselben diejenigen der anderen Art mit bestimmt. Um dies zu vermeiden, werden wir in beide Formeln Konstanten einführen, welche uns gestatten, zunächst noch keine bestimmte Wahl zu treffen.



Eine längere Diskussion dieses Gegenstandes[1] hat gezeigt, daß eine Reihe verschiedener Maßsysteme möglich ist, von denen sich einzelne durch größere Einfachheit und Zweckmäßigkeit auszeichnen. Von diesem Gesichtspunkt ausgehend, werden wir später den bei den einzelnen Grundgesetzen eingeführten Konstanten spezielle Werte geben.

a) Von einer geschlossenen, von einem Strom $i$ durchflossenen Leitung sei ein geradliniges Stück $l$ beweglich. Befindet sich dasselbe in einem Kraftfeld $H$, dessen Kraftrichtung senkrecht zu $l$ sei, so wird das bewegliche Stück von einer Kraft $R$ angegriffen, und es ist:

$$R = \gamma l H i \quad ,$$

worin $\gamma$ die oben besprochene Konstante ist.

b) Von einer geschlossenen Drahtleitung sei ein geradliniges Stück $l$ beweglich. Wird dasselbe in einem Kraftfeld von der Stärke $H$ mit der Geschwindigkeit $\omega$ senkrecht zu $l$ und $H$ verschoben, so wird in demselben die elektromotorische Kraft $E$ induziert, und es ist:

$$E = -\varepsilon l H \omega \quad .$$

Hierin ist $\varepsilon$ ebenfalls eine von den Einheiten abhängige Konstante (F. Neumanns Induktionskonstante)[2]. Mit Rücksicht auf die Dimensionen erhalten wir die Gleichungen:

$$\text{(III)} \qquad [R] = [\gamma H l i] \quad ,$$

$$\text{(IV)} \qquad [E] = [\varepsilon H l^2 t^{-1}] \quad .$$

Wir schalten hier noch eine Bemerkung ein.

In einer geschlossenen Leitung wird auch dann ein Strom induziert, wenn in einem benachbarten Stromkreis die Stromstärke sich ändert, und es ist[3]:

$$E = -\varepsilon q \frac{di}{dt} \quad ,$$

oder den Dimensionen nach:

$$[E] = [\varepsilon q i t^{-1}] \quad .$$

Hieraus ist die Dimension des Induktionskoeffizienten $q$ (sowie des Koeffizienten $p$) zu entnehmen.

## D) Ableitung der verschiedenen Maßsysteme.

Um zu sehen, welche Maßsysteme überhaupt möglich sind, berechnen wir die Dimensionen von $E$, $i$, $H$ aus den früheren Angaben. Wir erhalten:

$$[H] = \left[\frac{\sqrt{R\alpha}}{l}\right] \quad ,$$

$$[E] = [\sqrt{R\beta}] \quad ,$$

$$[i] = \left[\frac{l}{t}\sqrt{\frac{R}{\beta}}\right]$$

und setzen diese Werte in (III) und (IV) ein. Dann ist:

$$\left[\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right] = \left[\gamma \frac{l}{t}\right] = \left[\varepsilon \frac{l}{t}\right] \quad .$$

---

[1] R. Clausius, Wied. Ann. **16**. 529—551. — H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **17**. 42—54. — R. Clausius, Wied. Ann. **17**. 713—719. 1882. — H. Hertz, Wied. Ann. **24**. 114—118. 1885. — [2] Handbuch **5**. 542. — [3] Handbuch **5**. 542.

Es folgt zunächst:

$$[\gamma] = [\varepsilon] \quad .$$

Bezeichnet man ferner mit $v$ eine Geschwindigkeit, so ist:

$$\left[\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right] = [\gamma v] \quad .$$

Wir sind also noch in der Lage, zwei der eingeführten Konstanten bestimmen zu können. Hierbei wird man selbstverständlich möglichst einfache Werte wählen.

Maßsysteme, in denen $\alpha = 1$ ist, bezeichnen wir als elektromagnetische. Es ist:

(a) $$\alpha = 1, \quad \beta = v^2, \quad \gamma = \varepsilon = 1 \quad ,$$

(a′) $$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{v^2}, \quad \gamma = \varepsilon = \frac{1}{v^2} \quad .$$

Solche, in denen $\beta = 1$ gesetzt ist, bezeichnen wir als elektrostatische Maßsysteme.

(b) $$\alpha = \frac{1}{v^2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \varepsilon = 1 \quad ,$$

(b′) $$\alpha = v^2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \varepsilon = \frac{1}{v^2} \quad .$$

Endlich kann man setzen:

(c) $$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \varepsilon = \frac{1}{v} \quad .$$

Dieses von H. v. HELMHOLTZ und anderen benutzte System wird häufig als GAUSSsches Maßsystem bezeichnet.

System (a) ist das übliche, elektromagnetische System.

Bei dem System (b) erhalten wir

$$[\mu] = \left[m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{5}{2}} t^{-2}\right] \quad .$$

Bei (b′) ist:

$$[\mu] = \left[m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}\right] \quad .$$

Hiernach entspricht (b) der Formulierung des elektrostatischen Systems von R. CLAUSIUS, (b′) derjenigen von CL. MAXWELL[1]. Über die Ableitung der verschiedenen Maßsysteme vgl. auch Untersuchungen von MERCADIER[2].

## E) Absolute Einheiten und Dimensionen der einzelnen Größen nach den beiden Hauptsystemen.

Als solche nehmen wir, dem allgemeinen Gebrauch entsprechend, die Systeme (a) und (b′). Man übersieht leicht, daß die Dimensionen der elektrischen Größen bei (c) mit denjenigen von (b) oder (b′) übereinstimmen, diejenigen der magnetischen Größen mit den Dimensionen nach (a).

In dem elektromagnetischen System sind die Einheiten der Hauptgrößen die folgenden:

[1] Vgl. R. CLAUSIUS, Wied. Ann. **16**. 535—536. 1882. — [2] E. MERCADIER, Compt. rend. **116**. 800—803, 872—875, 974—977. 1893.

1. Einheit des freien Magnetismus ist diejenige Menge, welche auf die gleiche Menge in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraftwirkung ausübt.

2a) Die Einheit der Stromstärke besitzt ein elektrischer Strom, wenn ein von demselben durchflossener, geradliniger Leiter von der Längeneinheit durch die Einheit der magnetischen Intensität die Einheit der Kraftwirkung erfährt, wobei angenommen wird, daß die magnetischen Kraftlinien senkrecht zu dem Leiter liegen.

2b) Die Einheit der Stromstärke wird meist in etwas anderer Weise definiert. In dem Artikel Elektromagnetismus wird gezeigt[1], daß ein Kreisstrom mit dem Radius $r$ auf einen Magnetpol in seinem Mittelpunkt die Kraftwirkung:

$$R = \gamma \cdot \frac{i\mu \cdot 2\pi r}{r^2}$$

ausübt. Hier ist $\gamma = 1$. Also besitzt derjenige Strom die Einheit der Stromstärke, welcher beim Durchfließen eines Kreises vom Radius 1 auf einen Einheitspol im Kreismittelpunkt mit $2\pi$ mechanischen Krafteinheiten wirkt.

3. Aus $\varepsilon = 1$ folgt:

Die Einheit der elektromotorischen Kraft wird in einem Draht von der Längeneinheit induziert, wenn derselbe mit der Einheit der Geschwindigkeit durch ein Kraftfeld von der Stärke 1 senkrecht zu sich selbst und zu den Kraftlinien bewegt wird.

4. Einheit des Widerstandes ist der Widerstand eines Stromkreises, in welchem die Einheit der elektromotorischen Kraft die Einheit der Stromstärke hervorruft.

In dem elektrostatischen System gelten folgende Einheiten:

1. Einheit der Elektrizitätsmenge ist diejenige Elektrizitätsmenge, welche auf die gleiche Menge in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraftwirkung ausübt.

2. Die Einheit der Stromstärke besitzt derjenige Strom, bei welchem durch den Querschnitt in der Zeiteinheit die Einheit der Elektrizitätsmenge fließt.

3. Aus Nr. 7 und Nr. 12 folgt für $\beta = 1$:

$$V = \frac{e}{l} .$$

Das elektrostatische Potential hat den Wert 1 in einem Punkt, welcher von der Elektrizitätseinheit sich in einer Entfernung befindet, welche der Längeneinheit gleich ist. Nach Nr. 13 ist daher in einem Stromkreis die Einheit der elektromotorischen Kraft vorhanden, wenn bei einem vollständigen Durchgang durch den Kreis die Summe aller Potentialdifferenzen der Einheit gleich ist.

4. Die Widerstandseinheit folgt dann aus den Einheiten der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke, wie bei dem elektromagnetischen System.

Auf Grund der oben gegebenen Definitionen der magnetischen und elektrischen Größen, sowie der besonderen Werte der Konstanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$ für das elektromagnetische und elektrostatische System wird die Ableitung der Dimensionen der einzelnen Größen keine Schwierigkeiten bieten. Wir stellen dieselben in der folgenden Tabelle zusammen, wobei die Spalten $D_m$ und $D_e$ Dimensionen nach dem elektromagnetischen und elektrostatischen System bedeuten. Die letzte Spalte gibt die Quotienten $\frac{D_m}{D_e}$.

[1] Handbuch S. 420.

| | | $D_m$ | $D_e$ | $\frac{D_m}{D_e}$ |
|---|---|---|---|---|
| Magnetische Menge . . . . . . . . | $\mu$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}$ | $v$ |
| Magnetische Intensität . . . . . . | $H$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-2}$ | $v^{-1}$ |
| Magnetisches Potential . . . . . . | $U$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}$ | $v^{-1}$ |
| Elektrizitätsmenge . . . . . . . . | $e$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}$ | $v^{-1}$ |
| Elektrische Intensität . . . . . . | $F$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-2}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$ | $v$ |
| Elektrisches Potential . . . . . . | $V$ } | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}$ | $v$ |
| Elektromotorische Kraft . . . . . | $E$ } | | | |
| Stromstärke . . . . . . . . . . . | $i$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}$ | $m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}$ | $v^{-1}$ |
| Kapazität . . . . . . . . . . . . | $c$ | $l^{-1} t^{2}$ | $l$ | $v^{-2}$ |
| Widerstand . . . . . . . . . . . | $w$ | $l t^{-1}$ | $l^{-1} t$ | $v^{2}$ |
| Induktionskoeffizient . . . . . . | $p, q$ | $l$ | $l^{-1} l^{2}$ | $v^{2}$ |

Hiernach ist also das Verhältnis der Dimensionen magnetischer und elektrischer Größen nach den beiden Maßsystemen gewissen Potenzen einer Geschwindigkeit gleich. Dasselbe gilt auch von den Einheiten der verschiedenen Größenarten nach den beiden Maßsystemen. Ist daher diese Geschwindigkeit bestimmt, so kann man alle Größen, welche auf Einheiten des einen Systems bezogen sind, sofort nach Einheiten des anderen Systems wiedergeben. Ist z. B. die Maßzahl für eine Stromstärke elektromagnetisch $i_m$, elektrostatisch $i_e$, so ist:

$$i_e = v \cdot i_m \quad .$$

Für eine Kapazität und für einen Widerstand gelten die Gleicnungen:

$$c_e = v^2 c_m \quad ,$$

$$w_e = \frac{w_m}{v^2} \quad .$$

## II. Das internationale, absolute Maßsystem.

Da bei formaler Gleichberechtigung der beiden Systeme experimentelle, absolute Messungen nach dem elektromagnetischen System erheblich leichter auszuführen waren, so hat man die Methode absoluter Messungen nach diesem System bevorzugt. Setzt man die magnetische Feldkraft eines Ortes — gewöhnlich die Horizontalintensität des Erdmagnetismus — als bekannt voraus, so ist die Messung einer Stromstärke mit Hilfe einer Tangentenbussole nach absolutem Maß leicht auszuführen. Wäre der Widerstand des Stromkreises dann auch in absolutem Maß bekannt, so ergäbe sich die elektromotorische Kraft in demselben Maß durch einfache Rechnung — und umgekehrt. Von diesem Gesichtspunkt aus hat W. Weber[1] eine Reihe von Methoden entwickelt, bestimmte Widerstände nach absolutem, elektromagnetischem Maß zu messen. Auch die gleichzeitige „Bestimmung der Konstanten, von welcher die Intensität induzierter elektrischer Ströme abhängt“, ausgeführt von G. Kirchhoff[2], kann man als absolute Widerstandsmessung bezeichnen.

[1] W. Weber, Elektrodynamische Maßbestimmungen. 2. 1852. — [2] G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 76. 412. 1849; Ges. Abh. 118—131.

Da sich Widerstände leicht vergleichen lassen, so braucht eigentlich nur für einen bestimmten Widerstand die Messung nach absolutem Maß vorgenommen zu werden. Kopien eines solchen Normalwiderstandes, welche zu demselben in einem bekannten Verhältnis stehen, würden dann ebenfalls gestatten, nach absolutem Maß zu messen. Noch zweckmäßiger ist es indes, eine überall reproduzierbare Widerstandseinheit anzunehmen und diese nach absolutem Maß zu messen. Als eine solche hat sich am besten die von W. SIEMENS[1] vorgeschlagene Einheit — Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt — bewährt.

Schon die ersten absoluten Widerstandsbestimmungen W. WEBERs zeigten, daß die auf die üblichen Einheiten der Länge (1 cm)[2] und der Zeit (1 Sek.) bezogene Widerstandseinheit einen sehr kleinen Wert besitzt, so daß also mäßig große Widerstände, wie z. B. die Quecksilbereinheit, durch sehr große Zahlen nach absolutem Maß auszudrücken sind. Dies wurde die Veranlassung, daß man ein großes Vielfaches ($10^9$) der absoluten Widerstandseinheit unter dem Namen „Ohm" als neue, in die Praxis einzuführende Einheit vorschlug.

Aus dem oben angeführten Grunde wurde auch eine neue Einheit für die elektromotorische Kraft, das „Volt" = $10^8$ absolute Einheiten, in Aussicht genommen.

Widerstände von der Größe eines Ohm wurden von einem Komitee der British Association in den Jahren 1863—64 in Form von Drähten hergestellt und als B. A. U. (British-Association-Units) benutzt. Sie erwiesen sich aber um mehr als 1 % zu klein.

Auf dem ersten elektrischen Kongresse zu Paris wurden über die Definition der Grundeinheiten sowie über die Benennung einiger abgeleiteter Einheiten folgende Beschlüsse gefaßt:

1. Als Grundeinheiten der elektrischen Maße gelten das Zentimeter, die Maße des Gramms und die Sekunde.

2. Die bis jetzt angewandten Einheiten, das Ohm und Volt, behalten ihre gegenwärtigen Bedeutungen: $10^9$ für ersteres, $10^8$ für letzteres.

3. Die Widerstandseinheit Ohm wird dargestellt durch eine Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt bei 0° C.

4. Eine internationale Kommission soll beauftragt werden, durch neue Versuche die Länge der Quecksilbersäule zu bestimmen, welche den Wert Ohm repräsentiert.

5. Man nennt Ampere die Stromintensität, welche ein Volt in einem Ohm hervorruft.

6. Man bezeichnet als Coulomb die Elektrizitätsmenge, welche durch ein Ampere in einer Sekunde geliefert wird.

7. Man definiert als Farad die Kapazität, welche durch die Bedingung charakterisiert ist, daß ein Coulomb in einem Farad ein Volt gibt.

Bei einem späteren Kongreß (1889) wurden noch eine Reihe von weiteren Definitionen hinzugefügt[4], von denen wir die folgenden beiden mitteilen:

1. 1 Joule ist die praktische Arbeitseinheit. Es ist gleich $10^7$ C.-G.-S.-Einheiten, gleich der Energie, welche der durch 1 Ampere in 1 Ohm in einer Sekunde erzeugten Wärme äquivalent ist.

2. 1 Watt ist die praktische Einheit der Arbeitsleistung (puissance), d. h. die Arbeitsleistung eines Joule in einer Sekunde. 1 Watt ist gleich 1 Joule per Sekunde gleich $10^7$ C.-G.-S.-Einheiten.

3. Für die Praxis wird die Leistung von Maschinen in Kilowatts statt in Pferdekräften ausgedrückt.

---

[1] W. SIEMENS, Pogg. Ann. **110**. 18. 1860. — [2] W. WEBER selbst benutzte das Millimeter als Längeneinheit. — [3] Wied. Ann. **14**. 708. 1881. — [4] E. MASCART, Compt. rend. **109**. 393. 1889; Beibl. **13**. 974. 1889.

4. 1 Quadrant ist die praktische Einheit der Selbstinduktion; sie ist eine Länge von $10^9$ cm.

Die übrigen Beschlüsse beziehen sich hauptsächlich auf die Definitionen von Bezeichnungen, welche Wechselströmungen betreffen.

Eine spätere Konferenz (1884) behielt das sogenannte legale Ohm als Grundeinheit bei und definierte es als den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 $mm^2$ Querschnitt und 106 cm Länge bei der Temperatur des schmelzenden Eises; an Stelle des Volts wurde jedoch das Ampere als zweite Grundeinheit angenommen und als $10^{-1}$ elektromagnetische C.-G.-S.-Einheiten festgesetzt. Von einer Definition durch das elektrochemische Äquivalent des Silbers nahm man Abstand, weil die Messungen am Silbervoltameter nocht nicht als abgeschlossen betrachtet wurden.

Um die Beziehungen zwischen dem theoretischen Ohm ($=10^9$ absolute elektromagnetische Einheiten) und dem praktisch festgesetzten legalen Ohm zu ermitteln, wurden zahlreiche absolute Widerstandsmessungen ausgeführt, zu deren Besprechung wir nun übergehen.

## III. Ohmbestimmungen.

Nach den Beschlüssen der Pariser Kongresse kam es darauf an:

a) Normalwiderstände herzustellen, welche aus Quecksilbersäulen von genau festzustellender Länge und 1 qmm Querschnitt bestehen,

b) den Widerstand derselben bei $0^0$ C nach absolutem, elektromagnetischem Maß zu bestimmen oder mit anderen, auf dieses Maß bezogenen Widerständen zu vergleichen.

Indem wir für die erste Aufgabe auf verschiedene Spezialuntersuchungen[1] verweisen, wenden wir uns zu den wichtigsten Methoden der absoluten Widerstandsbestimmung und den dabei erhaltenen Resultaten. Jedoch soll hier nur ganz kurz der Grundgedanke der einzelnen Methoden auseinandergesetzt werden, während wir für die anzubringenden Korrektionen, die Berücksichtigung störender Umstände usw. auf die Originalarbeiten verweisen müssen. Zum leichteren Verständnis der eingeführten Bezeichnungen schicken wir noch eine Bemerkung voraus. Die Differentialgleichung für die Bewegung eines kurzen Magnetstabes, auf welchen außer dem Erdmagnetismus ein durch die Windungen eines Multiplikators fließender Strom wirkt, lautet für sehr kleine Ablenkungen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\varkappa}{\vartheta}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{MH}{\vartheta}\varphi = \frac{MGi}{\vartheta} \quad .$$

In derselben ist:

$M$ das magnetische Moment des Stabes,

$H$ die Horizontalkomponente,

$\vartheta$ das Trägheitsmoment des schwingenden Systems,

$\varkappa$ der Dämpfungsfaktor,

$G$ das Drehungsmoment der Stromeinheit auf einen Stab vom Moment 1.

Die Schwingungsbewegung des Stabes ohne Stromwirkung ist durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\varphi = e^{-\frac{\lambda t}{T}}\left(A\cos\frac{\pi t}{T} + B\sin\frac{\pi t}{T}\right) \quad .$$

[1] K. STRECKER, Wied. Ann. **25**. 253 u. 456. 1885. — H. FEUSSNER, Wied. Ann. **40**. 139. — H. PASSAVANT, Wied. Ann. **40**. 505. 1890; ferner W. JAEGER, Zeitschr. f. Instrk. 1896. 134 und W. JAEGER u. K. KAHLE, Ann. der Physik. **64**. 456. 1898.

Die beiden der Beobachtung zugänglichen Größen: die Schwingungsdauer $T$ und das logarithmische Dekrement $\lambda$ erfüllen die Gleichungen:

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{\varkappa}{2\vartheta}, \qquad \frac{\pi^2 + \lambda^2}{T^2} = \frac{MH}{\vartheta} \quad .$$

Die durch einen konstanten Strom $i$ bewirkte Ablenkung ist:

$$\varphi_0 = \frac{G}{H} i \quad .$$

Geht durch den Multiplikator ein Strom von so geringer Dauer, daß der Magnet in der betreffenden Zeit seine Gleichgewichtslage noch nicht verlassen hat, so erfolgt ein Ausschlag $\varphi'$, für welchen die Gleichung gilt:

$$\varphi' = \frac{G\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}\, e^{-\frac{\lambda a}{\pi}}}{H \cdot T} J \quad ,$$

worin $J$ die Gesamtstärke des Momentanstromes ist und:

$$a = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}$$

gesetzt wurde.[1]

Wir gehen hiernach zur Besprechung der einzelnen Methoden über.

## 1. W. Webers Methode des Erdinduktors.

Ein vertikaler Multiplikator, dessen Gesamtfläche $F$ ist, wird um eine vertikale Achse um einen Winkel von 180° gedreht. Die hierbei induzierte elektromotorische Kraft ist:

$$E = 2FH \quad .$$

Ist der Widerstand des ganzen Stromkreises, von welchem der Induktor ein Teil ist, $w$, so ist die Gesamtstärke des Induktionsstromes:

$$J = \frac{2FH}{w} \quad .$$

Wird derselbe durch ein Galvanometer geleitet, wo die Horizontalkomponente $H'$ ist, und ist der erste Ausschlag $\varphi'$, so ist:

$$w = \frac{2F \cdot GH\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{e^{\frac{\lambda a}{\pi}} T \cdot H' \varphi'} \quad .$$

Die Konstanten $F$ und $G$ sind aus den Dimensionen des Multiplikators und des Induktors zu berechnen. Die übrigen Größen werden beobachtet. Dann ergibt sich $w$ in absolutem Maß. In dieser einfachen Form lassen sich die Beobachtungen nicht ausführen. Um erhebliche Ausschläge zu erhalten, wird die Multiplikationsmethode angewandt. Ferner ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Drehung des Induktors nicht in verschwindend kurzer Zeit ausgeführt werden kann. Die Berechnung für diesen Fall hat E. Dorn[2] ausgeführt.

Beobachtungen nach dieser Methode wurden von W. Weber und Zöllner[3], ferner zum Teil mit Benutzung derselben Apparate von G. Wiedemann[4] ausgeführt.

---

[1] Handb. 4. 274 ff. — [2] E. Dorn, Wied. Ann. 17. 654—672. 1882. — [3] W. Weber und Zöllner, Berichte d. sächs. Ges. d. Wissensch. 1880. — [4] G. Wiedemann, Abhandl. d. Berl. Akad. 1884 und Wied. Ann. 42. 227—256 und 425—449. 1891.

Als Endresultat ergab sich:

$$1 \text{ Ohm} = 106{,}265 \text{ cm} .$$

Nach einer Bemerkung von E. DORN[1] soll die Berechnung des Beobachtungsmaterials nochmals vorgenommen werden.

Die beschriebene Methode wurde ferner angewandt von MASCART, DE NERVILLE und BENOIT[2].

## 2. W. WEBERS Methode des Rotationsinduktors.

Eine Drahtrolle von großen Dimensionen wird um ihren vertikalen Durchmesser in gleichmäßige Rotation versetzt. Infolgedessen wird durch die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus eine periodisch wechselnde, elektromotorische Kraft erregt. Bei geschlossener Rolle zirkuliert in derselben ein periodischer Strom. Eine im Zentrum des Multiplikatorkreises befindliche Magnetnadel erfährt aber durch diesen Strom eine dauernde Ablenkung, deren Größe beobachtet wird.

Ist $\varphi$ der Winkel, welcher die Ebene der Multiplikatorwindungen zur Zeit $t$ mit dem magnetischen Meridian bildet, so ist die induzierte, elektromotorische Kraft:

$$E = F \cdot H \cdot \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} .$$

In derselben Zeit ist der Induktionsstrom: $i = \frac{E}{w}$ und die Rückwirkung desselben auf die Magnetnadel:

$$MG \cos(\varphi - \alpha)\, i ,$$

wenn $\alpha$ die Ablenkung des Stabes und $M, F, G, H$ dieselbe Bedeutung haben wie bei 1. Das Drehungsmoment des rotierenden Multiplikators bei $n$ Umdrehungen in der Zeiteinheit ist hiernach:

$$n \int_0^{2\pi} FG \cdot MH \cos(\varphi - \alpha) \cos\varphi \, d\varphi .$$

Demselben ist das Drehungsmoment des Erdmagnetismus $MH \sin\alpha$ gleich. Also:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi n}{2} \cdot \frac{FG}{w}$$

oder:

$$w = \frac{F \cdot G \cdot \psi}{2 \operatorname{tg}\alpha} ,$$

wenn $\psi$ die Winkelgeschwindigkeit des Multiplikators ist.

Bei dieser Entwicklung ist indes von der Selbstinduktion des Stromkreises abgesehen, durch welche der Induktionsstrom verzögert und dadurch seine Wirkung auf den Magnetstab verändert wird. Auch übt der ruhende Magnetstab auf den rotierenden Multiplikator eine induzierende Wirkung aus. Angewandt wurde diese Methode von dem Komitee der British-Association, später von Lord RAYLEIGH und A. SCHUSTER[3], von Lord RAYLEIGH[4] und von H. WEBER[5]. Letzterer ließ den Induktor um eine horizontale Achse rotieren, und zwar um die mag-

[1] Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Maßeinheiten, entworfen durch das Kuratorium der phys.-techn. Reichsanstalt nebst kritischem Bericht von E. DORN. Berlin, J. Springer, 1893, S. 47. — [2] E. MASCART, F. DE NERVILLE und R. BENOIT, Ann. d. chim. et d. phys. **6** (6). 5—36. 1884. — [3] Lord RAYLEIGH und A. SCHUSTER, Proc. Roy. Soc. **32**. 104 bis 141. 1881. — [4] Lord RAYLEIGH, Phil. Trans. Vol. **173** (II). 661—697. 1882. — [5] H. WEBER, Der Rotationsinduktor. Braunschweig 1882.

netische Achse der abgelenkten Nadel. Zu diesem Zweck mußte der Rotationsapparat, der Ablenkung der Nadel folgend, um eine vertikale Achse gedreht werden.

### 3. W. Webers Dämpfungsmethode.

Ein Magnetstab wird innerhalb eines Multiplikators in Schwingungen versetzt. Ist letzterer geschlossen, so werden in ihm Induktionsströme erregt, welche außer dem Luftwiderstand eine besondere, dämpfende Wirkung auf die Nadelschwingungen ausüben. Die beiden Einflüsse lassen sich trennen, indem man das logarithmische Dekrement bei offenem und bei geschlossenem Multiplikator beobachtet. Wir sehen daher in der weiteren Besprechung dieser Methode von der Luftdämpfung ab.

Die zur Zeit $t$ induzierte, elektromotorische Kraft ist:

$$E = MG\frac{d\varphi}{dt} \quad ,$$

die Stromstärke:

$$i = \frac{MG}{w}\,\frac{d\varphi}{dt} \quad .$$

und die Rückwirkung auf die Nadelschwingungen:

$$-MGi = -\frac{M^2 \cdot G^2}{w} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad .$$

Nach den früheren Entwicklungen[1] ist also:

$$\varkappa = \frac{M^2 \cdot G^2}{w} \quad ,$$

$$\frac{2\lambda}{T} = \frac{M^2 \cdot G^2}{\vartheta \cdot w} \quad .$$

Bezeichnet man die Schwingungsdauer des Magnetstabes ohne Dämpfung mit $T_0$, so ist:

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{\vartheta}{MH}} \quad \text{und} \quad T = \frac{T_0\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}{\pi} \quad .$$

Also:

$$w = \frac{MG^2\,\pi\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}{2\lambda H \cdot T_0} \quad .$$

Sind $M/H$ und $G$ nach absolutem Maß bestimmt, die übrigen Gößen direkt beobachtet, so ergibt sich auch $w$ in absolutem Maß.

Die Galvanometerkonstante $G$ kann ausgerechnet oder zweckmäßiger direkt beobachtet werden, indem man den Zweigstrom eines absolut gemessenen Stromes durch die Windungen leitet. Sind die Schwingungen nicht mehr unendlich klein, so ist $G$ keine Konstante, und es muß auf die Veränderungen dieser Größe Rücksicht genommen werden[2]. Bestimmungen nach dieser Methode wurden ausgeführt von H. Wild[3], von F. Kohlrausch[4] (zum Teil in Verbindung mit Methode 1) und von E. Dorn[5].

[1] Handbuch **5**. 715. — [2] Vgl. K. Schering, Wied. Ann. **9**. 287 u. 452. 1879. — [3] H. Wild, Wied. Ann. **23**. 665—677. 1884. — [4] F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. **6**. 1—35. 1873; Abh. d. Bayr. Akad. **16**. 1888. — [5] E. Dorn, Wied. Ann. **17**. 773—816. 1882; **36**. 22—72, 398—447. 1889.

## 4. Methode der Voltainduktion (KIRCHHOFFsche Methode)[1].

Zwei Drahtrollen stehen axial nebeneinander. Durch die eine Rolle wird ein konstanter Strom geleitet, während die andere mit einem Galvanometer verbunden ist. Bei Öffnung oder Schließung des Stromes $i$ entsteht ein Induktionsstrom, dessen Gesamtintensität $J$ an dem Galvanometer gemessen wird. Dann ist:

$$J = \pm \frac{q\,i}{w} \ .$$

Sind $i$ und $J$ nach absolutem Maß bestimmt, so bedarf es noch der Berechnung des wechselseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Rollen aufeinander.

Anstatt nur einen Induktionsstoß zu benutzen, kann man mit Hilfe eines Disjunktors den primären Strom in schneller Folge öffnen und schließen und entweder nur die Öffnungs- oder nur die Schließungsströme zum Galvanometer leiten, welches hierdurch eine konstante Wirkung erfährt. Bezeichnet man dieselbe mit $\varphi_1$, diejenige durch einen bekannten Bruchteil des primären Stromes $(\varkappa i)$ mit $\varphi_2$ und mit $n$ die Anzahl der Unterbrechungen, so ist:

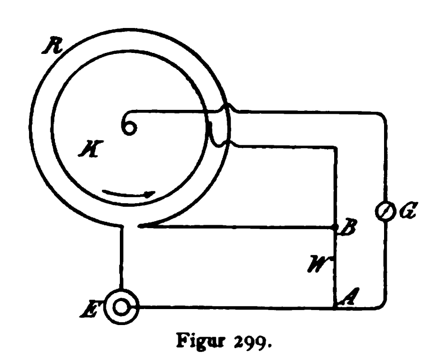
$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{q\,n}{\varkappa\,w} \ .$$

Weitere zweckmäßige Modifikationen dieser Methode haben ROITI und HIMSTEDT benutzt.

Die Methode wurde angewandt von: ROWLAND[2], FR. WEBER[3], GLAZEBROOK, DODDS und SARGANT[4], MASCART, DE NERVILLE und BENOIT[5], ROITI[6] und HIMSTEDT[7].

## 5. Methode der rotierenden Platte von LORENZ[8].

Eine kreisförmige Metallplatte $K$ (Fig. 299) wird um ihre Achse in Rotation versetzt. Dabei befindet sich dieselbe im Innern einer Drahtrolle $(R)$ mit derselben Achse, durch welche ein konstanter Strom geleitet wird. Hierdurch wird in der rotierenden Scheibe eine elektromotorische Kraft induziert, welche in radialer Richtung wirkt. An der Achse und an dem Umfang der Scheibe schleifen Kontakte. Von denselben führen Drähte zu den beiden Punkten $A$ und $B$ des Stromkreises, zwischen welchen der absolut zu messende Widerstand $w$ sich befindet. Bei einer bestimmten Umdrehungszahl $n$ der Scheibe sei die Potentialdifferenz zwischen $A$ und $B$ infolge des Durchgangs des konstanten Stromes $i$ gleich der induzierten, elektromotorischen Kraft in der Scheibe. Bezeichnet man dieselbe bei einer Umdrehung in der Zeiteinheit und bei Einheit der Stromstärke mit $E_1$, so ist:



Figur 299.

$$n\,E_1\,i = w\,i$$

[1] G. KIRCHHOFF, Pogg. Ann. **76**. 412. 1849. — [2] H. ROWLAND, Sillim. J. (3) 281, 325. 430. 1878. — [3] FR. WEBER, Der absolute Wert der SIEMENSschen Quecksilbereinheit in der Größe des Ohms als Quecksilbersäule. Zürich 1884. — [4] R. T. GLAZEBROOK, J. M. DODDS und E. B. SARGANT, Phil. Trans. Vol. **174**. 223—268. 1883. — [5] E. MASCART, DE NERVILLE und BENOIT, Ann. de chim. et de phys. **6** (6). 5—36. 1884. — [6] A. ROITI, Nuovo Cimento **12** (3). 60—64. 1882; **15**. 97—114. 1884. — [7] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **22**. 281—286. 1884; **26**. 547—575; **28**. 338—354. 1888. — [8] L. LORENZ, Pogg. Ann. **149**. 251—269. 1873. Neuerdings wurde nach dieser Methode von W. F. AYRTON und J. V. JONES eine Bestimmung ausgeführt, die den Wert 1,06285 lieferte. Electrician **40**. 150. 1897.

oder:

$$n E_1 = w \quad .$$

Die Gleichheit der Potentialdifferenz und der induzierten elektromotorischen Kraft wird mit Hilfe eines in die betreffende Leitung eingeschalteten, empfindlichen Galvanometers festgestellt.

Es handelt sich hierbei also um die Berechnung von $E_1$ aus den Dimensionen der Rolle und der Scheibe und aus der Bestimmung der Umdrehungszahl.

Benutzt wurde diese Methode von Lord RAYLEIGH und Mrs. SIDGWICK[1], von LORENZ[2], von ROWLAND, KIMBALL und DUNCAN[3], von DUNCAN, WILKES und HUTCHINSON[4] und von JONES[5].

Endlich hat noch G. LIPPMANN[6] verschiedene Methoden der Ohmbestimmung angegeben, von welchen wir die letzte als Methode 6 bezeichnen wollen. Nach derselben rotiert eine kleinere Rolle im Innern einer größeren, durch welche ein konstanter Strom geleitet wird. Die erste Rolle, in welcher eine periodisch wechselnde, elektromotorische Kraft induziert wird, wird aber nur dann auf kurze Zeit durch eine äußere Leitung geschlossen, wenn die elektromotorische Kraft ihren größten Wert besitzt. Diese Leitung führt zu einem Galvanometer und dann zu zwei Punkten der primären Leitung. Bei einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit heben sich die Wirkungen auf das Galvanometer auf. Dann ergibt sich der Widerstand zwischen den beiden Verzweigungspunkten in gleicher Weise wie bei Methode 5 nach absolutem Maß.

Eine Ohmbestimmung nach dieser Methode wurde von WUILLEUMIER[7] ausgeführt.

Eine kritische Vergleichung der einzelnen Methoden haben vorgenommen Lord RAYLEIGH[8] und G. WIEDEMANN[9], der erhaltenen Zahlenwerte E. DORN[10], dessen Zusammenstellung wir hier folgen lassen DORN hat einem Teil der beobachteten Werte nur ein geringeres Gewicht zuerkannt, als den übrigen. Demnach folgen in Tabelle I die Beobachtungen mit halbem Gewicht, in Tabelle II diejenigen mit ganzem Gewicht, wobei in unentschiedenen Fällen die kleineren und die größeren Zahlen einzeln aufgeführt sind. Die römischen Ziffern verweisen auf die Nummern der Methoden in der obigen Zusammenstellung.

Tabelle I.

| | | |
|---|---|---|
| WILD | III | 1,06192 |
| DUNCAN, WILKES, HUTCHINSON | V | 1,06352 |
| MASCART, DE NERVILLE, BENOÎT | IV | 1,06293 |
| KIMBALL 1883 | IV | 1,06250 |
| | Mittel | 1,06272 |

Tabelle II.

| | | Kleinster | Größter Wert |
|---|---|---|---|
| KOHLRAUSCH | III | 1,06264 | 1,06310 |
| DORN | III | 1,06235 | 1,06235 |
| RAYLEIGH und SIDGWICK | V | 1,06255 | 1,06288 |
| ROWLAND, KIMBALL, DUNCAN | V | 1,06290 | 1,06290 |
| ROWLAND 1887 | V | 1,06320 | 1,06320 |

1 Lord RAYLEIGH und Mrs. SIDGWICK, Phil. Trans. Vol. **174**. 295—322. 1883. — 2 L. LORENZ, Wied. Ann. **25**. 1—31. 1885. — 3 H. ROWLAND, J. KIMBALL und L. DUNCAN, Elektrotechn. Zeitschr. **6**. 441. 1885. — 4 L. DUNCAN, G. WILKES und C. T. HUTCHINSON, Phil. Mag. **28** (5). 98—106. 1889. — 5 J. V. JONES, Electrician 1890. Beibl. 15. S. 134. 1891. — 6 G. LIPPMANN, Compt. rend. **93**. 713—716. 1881; **95**. 1154—1155 u. 1348—1350. 1882. — 7 H. WUILLEUMIER, Journ. de Phys. **9** (2). 220—231. 1890. — 8 Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. **14** (5). 329. 1882. — 9 G. WIEDEMANN, Elektrotechn. Zeitschr. **3**. 260—269. 1882. — 10 E. DORN, Kritischer Bericht über den wahrscheinlichen Wert des Ohm. Berlin 1893. 82—85.

| | | Kleinster | Größter Wert |
|---|---|---|---|
| Jones | V | 1,06281 | 1,06307 |
| Glazebrook, Dodds, Sargant | IV | 1,06265 | 1,06299 |
| Himstedt | IV | 1,06257 | 1,06257 |
| Rowland und Kimball | IV | 1,06310 | 1,06310 |
| Rayleigh | II | 1,06280 | 1,06312 |
| Wuilleumier | VI | 1,06267 | 1,06285 |
| Mittel | | 1,06275 | 1,06292 |

„Unter Hinzunahme der Beobachtungen mit halbem Gewicht folgt das Hauptmittel:

$$1{,}06289 \pm 0{,}00024 \quad .$$

Man wird einstweilen

1,0628

als dem wahren Werte sehr nahe kommend ansehen dürfen und, wenn es sich um die Wahl zwischen 1,062 und 1,063 handelt, jedenfalls

1,063

vorziehen“[1].

Dieser Wert des Ohm wird zum Unterschied von dem durch die Pariser Kongresse angenommenen legalen Ohm das internationale Ohm genannt.

Inzwischen[2] waren auch die Arbeiten über die absolute Strommessung[3] resp. über das elektrochemische Äquivalent des Silbers[4] so weit fortgeschritten, daß man auch hier eine Zahl festsetzen konnte, welche einen nahen Anschluß der praktischen Einheit an die theoretische verbürgte. Der Wert des Silberäquivalents konnte im Jahre 1893 hauptsächlich infolge der Arbeiten von F. und W. Kohlrausch und Lord Rayleigh als bis auf wenige Zehntausendstel sichergestellt angesehen werden. In dem Entwurfe des Kuratoriums der Reichsanstalt, welcher die Beschlüsse der vorher erwähnten Pariser Konferenz zur Grundlage nahm, wurden die Zahl 1,063 für das Ohm und 1,118 mg Silber für die Ampere-Sekunde vorgeschlagen. Trotz zahlreicher inzwischen erschienener Arbeiten über das Silberäquivalent, von denen an anderer Stelle[5] näher berichtet worden ist, hat man auch jetzt noch keine Veranlassung, an dieser Zahl etwas zu ändern.

Es schien der Zeitpunkt gekommen, an dem eine internationale Übereinkunft in betreff der gesetzlich festzulegenden Einheiten herbeigeführt werden konnte. Der zur Erreichung dieses Zieles veranstaltete Kongreß zu Chicago im Jahre 1893 beschloß, außer den Einheiten der Stromstärke und des Widerstandes auch für die elektromotorische Kraft in der Gestalt des Clark-Elements[6] ein Normal vorzuschlagen, so daß statt der bis dahin angenommenen zwei Grundeinheiten nun deren drei festgesetzt werden sollten. Man hatte, als dieser Beschluß gefaßt wurde, nicht bedacht, daß es nur zulässig ist, zwei Einheiten festzulegen, da hiermit auch die dritte infolge des Ohmschen Gesetzes mitbestimmt ist, und also, falls man noch eine dritte Einheit festsetzt, für diese tatsächlich zwei Werte, die durchaus nicht übereinzustimmen brauchen, auftreten. In diese Schwierigkeit gerieten die Vereinigten Staaten von Nordamerika, England und Frankreich, welche die Chicagoer Beschlüsse ihren Gesetzen zugrunde gelegt

---

[1] E. Dorn, l. c. S. 84. — [2] Vgl. hierzu und dem weiter folgenden; Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Maßeinheiten. Berlin 1893. J. Springer. — Zur Frage der Legalisierung eines Normals der elektromotorischen Kraft. Elektrotechn. Zeitschr. 1904. 609. — Elektrische Normale von W. Jaeger. Phys. Zeitschr. 7. 361. — Ergebnisse der Internationalen Konferenz über elektrische Maßeinheiten von W. Jaeger u. St. Lindeck. Elektrotechn. Zeitschr. 1905. — [3] Handbuch 4. 254. — [4] Handbuch 4. 875. — [5] l. c. — [6] Über die Normalelemente siehe Bd. 4. 204.

hatten, als es sich herausstellte, daß der gesetzliche Wert des Clark-Elements um 0,001 Volt zu groß angenommen worden war.

Deutschland dagegen sowie Österreich und Belgien, welche ihre Gesetze in Anlehnung an die deutschen gegeben haben, vermieden diesen Fehler, indem sie sich zwar in bezug auf das Ohm und das Ampere an die Chicagoer Beschlüsse hielten, die Festlegung der Spannungseinheit aber, wie es auch allein richtig ist, unterließen.

Durch das getrennte Vorgehen der verschiedenen Staaten wurde der Hauptzweck der elektrischen Kongresse, nämlich der, eine internationale Übereinstimmung der elektrischen Gesetze herbeizuführen, verfehlt. Man ist deshalb zurzeit bemüht, die mangelnde Übereinstimmung nachträglich noch zu erzielen.

Der internationale Elektriker-Kongreß in St. Louis im Jahre 1904 brachte auf diesem Wege keinen wesentlichen Fortschritt, konnte vielmehr nur die augenblickliche mißliche Lage der elektrischen Gesetzgebung konstatieren und empfahl die dauernde Bildung einer internationalen Kommission. Dieselbe ist bislang noch nicht ernannt worden, da man auf Anregung des Bureau of Standards in Washington zunächst auf einer Vorkonferenz eine Einigung über die in Frage stehenden Punkte zwischen den zur Überwachung der elektrischen Einheiten berufenen staatlichen Instituten herbeiführen wollte. Auf dieser Konferenz, die im Oktober 1905 in der Reichsanstalt zu Charlottenburg stattfand, kam man in vielen Punkten zu einer Einigung, so daß man hoffen darf, daß bei der endgültigen allgemeinen Regelung die Gesichtspunkte Geltung erhalten werden, welche für die jetzigen deutschen Gesetze maßgebend sind.

Eine Übereinstimmung in der Gesetzgebung gewährleistet jedoch nicht ohne weiteres auch eine Übereinstimmung der von den einzelnen Ländern ausgegebenen Normalen; diese letztere würde nach einem von der Reichsanstalt gemachten Vorschlage sichergestellt werden, wenn ein internationales Bureau für elektrische Maße begründet würde, das die elektrischen Normalen für alle Länder herzustellen hätte. Die Charlottenburger Konferenz erkannte zwar die Wichtigkeit einer solchen Maßnahme, konnte sich aber nicht entschließen, im einzelnen zu der Frage Stellung zu nehmen, so daß ihre endgültige Regelung späteren Verhandlungen vorbehalten bleiben muß.

Es mögen hier nun die wichtigsten Paragraphen des deutschen Gesetzes[1] betreffend die elektrischen Maßeinheiten folgen:

§ 1.

Die gesetzlichen Einheiten für elektrische Messungen sind das Ohm, das Ampere und das Volt.

§ 2.

Das Ohm ist die Einheit des elektrischen Widerstandes. Es wird dargestellt durch den Widerstand einer Quecksilbersäule von der Temperatur des schmelzenden Eises, deren Länge bei durchweg gleichem, einem Quadratmillimeter gleich zu achtendem Querschnitt 106,3 Zentimeter und deren Maße 14,4521 Gramm beträgt.

§ 3.

Das Ampere ist die Einheit der elektrischen Stromstärke. Es wird dargestellt durch den unveränderlichen elektrischen Strom, welcher bei dem Durchgange durch eine wässerige Lösung von Silbereitrat in einer Sekunde 0,001118 Gramm Silber niederschlägt.

§ 4.

Das Volt ist die Einheit der elektromotorischen Kraft. Es wird dargestellt durch die elektromotorische Kraft, welche in einem Leiter, dessen Widerstand ein Ohm beträgt, einen elektrischen Strom von einem Ampere erzeugt.

[1] Gültig seit dem 1. Juni 1898.



Wie man sieht, sind die theoretischen Definitionen in dem Gesetze ganz fortgelassen und nur Vorschriften für die Herstellung der praktischen Einheiten gegeben worden. Wenn auch Wert darauf gelegt worden ist, die praktischen Einheiten in möglichst nahe Übereinstimmung mit ihren theoretischen Definitionen zu bringen, so muß doch hervorgehoben werden, daß ein absoluter Anschluß überhaupt nicht zu erreichen ist, und daß es in der Tat viel wichtiger ist, unveränderliche und genau reproduzierbare Normale zu besitzen, als die sehr viel schwerer meßbaren Abweichungen der praktischen Einheiten von ihren theoretischen Definitionen zu kennen.

## IV. Bestimmung der Konstante, von welcher die Verhältnisse der elektromagnetischen zu den elektrostatischen Einheiten abhängen.

Diese Konstante ist eine Geschwindigkeit und wird gewöhnlich mit $v$ bezeichnet.

Ihre Messung erfolgt in der Weise, daß man eine der elektrischen Größen nach dem einen und nach dem anderen Maßsystem absolut bestimmt. Benutzt wurden hierbei:

a) Elektrizitätsmengen,
b) elektromotorische Kräfte,
c) Kondensatorkapazitäten.

Die Vergleichung von Elektrizitätsmengen wurde von W. WEBER und F. KOHLRAUSCH[1] vorgenommen. Zu diesem Zweck wurde eine Leidener Flasche geladen und durch Verbindung der inneren Belegung mit einem Sinuselektrometer die dort herrschende Spannung festgestellt. Durch Berührung mit einer isolierten Messingkugel wird ein Bruchteil der Ladung abgenommen. Von der auf der Kugel befindlichen Menge wird wiederum ein bekannter Bruchteil an die Standkugel einer COULOMBschen Drehwage abgegeben und dort elektrostatisch gemessen. Aus der Abnahme der Elektrometerablenkung bei der besprochenen Verminderung der Elektrizitätsmenge kann auf die in der Flasche vorhandene Menge geschlossen werden. Die Flasche wird nun durch ein Galvanometer entladen und hierdurch die entladene Menge elektromagnetisch bestimmt. Schließlich wird noch die in der Flasche zurückgebliebene Menge berücksichtigt. Es ergab sich:

$$v = 3{,}111 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}.$$

Die nächste Bestimmung wurde von CL. MAXWELL[2] ausgeführt. Derselbe bewirkte die Kompensation der Anziehung zweier geladener Platten durch die elektrodynamische Abstoßung zwischen zwei Rollen, welche von einem konstanten Strom durchflossen wurden, während die Platten mit den Polen einer konstanten Kette in Verbindung waren.

Als Resultat ergab sich:

$$v = 2{,}88 \cdot 10^{10}.$$

Mehrere weitere Bestimmungen wurden nach einer Methode von Sir W. THOMSON ausgeführt. Der Strom einer konstanten Kette wird elektromagnetisch (mit Benutzung eines Elektrodynamometers) gemessen. In den Stromkreis ist ein großer Widerstand eingeschaltet. Die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten dieses Widerstandes wird elektrostatisch mit Hilfe des THOMSONschen absoluten Elektrometers gemessen.

[1] W. WEBER und R. KOHLRAUSCH, Elektrodyn. Maßbestimmungen IV. 1856. Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maß. — W. WEBERS Werke **3**. 609 bis 674. — [2] CL. MAXWELL, Philos. Trans. 1868 (II). 643—657; Lehrbuch der Elektrizität, deutsch von WEINSTEIN **2**. 522.

Resultate nach dieser Methode:

| | |
|---|---|
| Sir W. THOMSON [1] . . . . . . . . . | $v = 2{,}82 \cdot 10^{10}$, |
| M'KICHAN [2] . . . . . . . . . . . | $v = 2{,}93 \cdot 10^{10}$, |
| SHIDA [3] . . . . . . . . . . . | $v = 2{,}995 \cdot 10^{10}$, |
| HURMUCESCU [4] . . . . . . . . . . | $v = 3{,}001 \cdot 10^{10}$. |

Nach der dritten Methode wird die Kapazität eines Kondensators elektrostatisch aus seinen Dimensionen berechnet. Zur Messung wird derselbe durch Verbindung seiner Belegungen mit den Polen einer konstanten Kette geladen. Endlich wird der Entladungsstrom nach Trennung der Belegungen von der Kette und Herstellung einer leitenden Verbindung derselben elektromagnetisch durch den ersten Ausschlag der Nadel eines Galvanometers bestimmt.

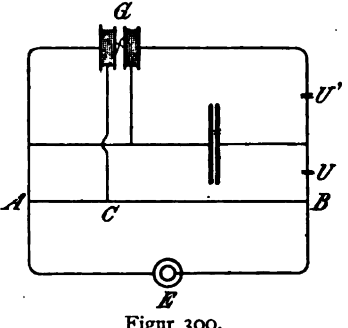
Die Gesamtstärke $J$ desselben ist:

$$J = \frac{E c}{v^2} \quad ,$$

wenn die elektromotorische Kraft der Kette $E$ und $c$ die elektrostatische Kapazität des Kondensators bedeuten.

Ferner wird der Strom derselben Kette durch dasselbe Galvanometer geleitet. Erfolgt hierbei die Ablenkung $\varphi_0$, wenn der Gesamtwiderstand des Stromkreises $w$ beträgt, und ist der Ausschlag des Entladungsstromes $\varphi'$, so ist:

$$\frac{c}{v^2} = \frac{e^{\frac{\lambda a}{\pi}} \cdot T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2} \cdot w} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi_0} \quad .$$



Figur 300.

Auf die gewöhnlich erforderliche Verzweigung des konstanten Stromes bei seinem Durchgang durch das Galvanometer soll hier nicht näher eingegangen werden.

Noch einfacher gestaltet sich diese Methode, wenn in schneller Folge durch eine selbsttätige Wippe der Kondensator geladen und dann durch das Galvanometer entladen wird. Ist die hierbei entstehende konstante Ablenkung desselben $\varphi_1$ und $n$ die Anzahl der Ladungsströme in der Zeiteinheit, so ist:

$$\frac{n c}{v^2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0 \cdot w} \quad ,$$

$$v = \sqrt{\frac{n c w \cdot \varphi_0}{\varphi_1}} \quad .$$

Endlich kann man (HIMSTEDT) ein Differentialgalvanometer benutzen, bei welchem die Wirkung der Entladungsströme derjenigen des konstanten Stromes resp. eines Bruchteils desselben gleich ist. Wird die in der Figur 300 dargestellte Anordnung benutzt, wobei die Wippe abwechselnd in $U$ und $U'$ Schließung bewirkt, so ist:

$$v = \sqrt{\frac{n c \cdot W(R + W)}{w}} \quad ,$$

wenn der Widerstand $AC = w$, $AB = W$ und $AGC = R$ ist.

[1] Sir W. THOMSON, Rep. of Brit. Assoc. 1869, S. 434. — [2] M'KICHAN, Phil. Mag. **47** (4). 218. 1874. — [3] R. SHIDA, Phil. Mag. **10** (5). 431—436. 1880. — Vgl. auch die Diskussion: Phil. Mag. **11** (5). 473; **12**. 76, 154, 224, 300. 1881. — [4] M. HURMUCESCU, Ann. de chim. et de phys. **10** (7). 433. 1897.

Mit Hilfe von Kondensatorladungen ergab sich bei der Messung von:

AYRTON und PERRY[1] . . . . $v = 2{,}98 \cdot 10^{10}$,
STOLETOW[2] . . . . . . . . $v = 2{,}98 - 3{,}00 \cdot 10^{10}$,
J. J. THOMSON[3] . . . . . . . $v = 2{,}963 \cdot 10^{10}$,
J. KLEMENČIČ[4] . . . . . . . $v = 3{,}0188 \cdot 10^{10}$,
F. HIMSTEDT[5] . . . . . . . $v = 3{,}0093 \cdot 10^{10}$ (Gesamtmittel),
H. ABRAHAM[6] . . . . . . . $v = 2{,}992 \cdot 10^{10}$.

Zu diesen Resultaten mag noch bemerkt werden, daß die drei ersten Beobachter einen Schutzringkondensator benutzten (ebenso auch ABRAHAM), während KLEMENČIČ und HIMSTEDT einen aus zwei kreisförmigen Platten bestehenden Kondensator anwandten, dessen Kapazität nach einer Formel von G. KIRCHHOFF[7] berechnet wurde, deren Richtigkeit noch besonders geprüft worden war. In seiner letzten Untersuchung benutzte HIMSTEDT ebenfalls einen Schutzringkondensator.

Die Geschwindigkeit $v$ stimmt sehr nahe mit derjenigen des Lichtes überein, für welche F. HIMSTEDT[8] als Mittel aus fünf neueren Untersuchungen den Wert:

$$3{,}002 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

angibt.

Nehmen wir für $v$ den Wert: $3 \cdot 10^{10}$, so erhalten wir für die internationalen Einheiten die folgenden Werte:

| | Elektromagnetisch | Elektrostatisch |
|---|---|---|
| 1 Volt . . . . . . . . . . . . . . | $10^8$ | $1/300$ |
| 1 Ohm . . . . . . . . . . . . . . | $10^9$ | $1/9 \cdot 10^{-11}$ |
| 1 Ampere . . . . . . . . . . . . | $10^{-1}$ | $3 \cdot 10^9$ |
| 1 Coulomb . . . . . . . . . . . . | $10^{-1}$ | $3 \cdot 10^9$ |
| 1 Farad . . . . . . . . . . . . . | $10^{-9}$ | $9 \cdot 10^{11}$ |

[1] W. E. AYRTON und J. PERRY, Phil. Mag. **7** (5). 222—289. 1879. — [2] A. STOLETOW, Journ. d. Phys. **10**. 468. 1881. — [3] J. J. THOMSON, Proc. Roy. Soc. **35**. 346—347. 1883; Trans. Roy. Soc. 1883 (3). 707—720. — [4] J. KLEMENČIČ, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **89**. 298—328; Rep. d. Phys. **20**. 462—489. 1884. — [5] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **29**. 560 bis 579. 1886; **33**. 1—12; **35**. 126—136. 1888. — [6] H. ABRAHAM, Compt. rend. **114**. 654—657, 1355—1356. 1892. — [7] Handbuch **4** (1). 35. — [8] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **35**. 136. 1888.

# Technische Anwendungen der Induktion.

## I. Dynamoelektrische Maschinen. Kraftübertragung.

Von TH. DES COUDRES.

---

### A) Geschichtliches über Starkstromelektrotechnik.

GAUSS' und WEBERS elektrische Telegraphenverbindung 1833 arbeitete mit Magnetinduktionsströmen. Für Zwecke des Signalwesens, für Minenzündung, Sicherheitsvorrichtungen, elektrische Uhren, ebenso wie für medizinische Wirkungen konnten die magnetelektrischen Maschinen der physikalischen Laboratorien von vornherein praktische Verwendung finden. Anders wo es sich um Umsetzung größerer Energiebeträge handelte. Das Boot, welches JACOBI 1839 auf der Newa mit etwa 1 Pferdekraft elektrisch in Bewegung setzte, trug eine Grovebatterie. Durch Bunsenelemente wurde bei der Erstaufführung von Meyerbeers Prophet 1846 in Paris die aufgehende Sonne gespeist, mit der FOUCAULT die elektrische Bogenlampe beim großen Publikum einführte. Auch für die damals beliebten Sonnenmikroskop-Demonstrationen mußten stets viele Zellen mit der lästigen Salpetersäure aufgebaut werden, sofern man nicht DRUMONDsches Kalklicht vorzog.

Die Grundlage für eine wirtschaftliche Starkstromtechnik war erst gegeben, als man erkannt hatte, daß zu mechanischer Erzeugung starker Ströme an Stelle der Stahlmagnete Elektromagnete zu setzen seien. 1848 hatte J. BRETT die Anregung gegeben, den im Anker einer magnetelektrischen Maschine erzeugten Strom durch eine um den Stahlmagneten gewickelte Drahtspule zu senden und damit die Wirksamkeit des Magneten zu erhöhen[1].

Aus dem Jahre 1851[2] stammt SINSTEDTENs Vorschlag, mit dem Strom einer magnetelektrischen Maschine einen Elektromagneten zu erregen und vor diesem einen zweiten Anker rotieren zu lassen, dessen Strom eventuell den Elektromagneten einer noch größeren Maschine speisen sollte. Durch solche Koppelung zweier Maschinen erhielt H. WILDE[3] 1866 bereits recht starke Ströme.

Den entscheidenden letzten Schritt aber verdankt man WERNER SIEMENS. Er erläuterte am 17. Januar 1867 vor der Berliner Akademie das Prinzip der von ihm sogenannten dynamoelektrischen Maschinen. Der durch den remanenten Magnetismus weichen Eisens in einem rotierenden Anker erzeugte schwache Strom braucht nur in passender Richtung wieder um das Eisen geleitet zu werden, und es tritt Selbsterregung ein, d. h. Strom und Magnetismus werden sich fortwährend gegenseitig selbst verstärken und rasch sehr bedeutende Maximalwerte erreichen. Die Abhandlung schließt mit den durch den praktischen Erfolg seitdem glänzend gerechtfertigten Worten: „Der Technik sind gegenwärtig die Mittel gegeben, elektrische Ströme von unbegrenzter Stärke auf billige und bequeme Weise überall da zu erzeugen, wo Arbeitskraft disponibel ist[4]." Nicht ganz vier Wochen später machte CH. WHEATSTONE in einer Sitzung der Royal-Society den fast

---

[1] Spezific. of Patent 12054. — [2] Pogg. Ann. **84**. 186. 1851. — [3] Proc. Roy. Soc. **15**. 107. 1866. — [4] Pogg. Ann. **130**. 332. 1867.





gleichen Vorschlag, nur wollte er die Erregerwicklung nicht wie SIEMENS in den Hauptstromkreis schalten (Hauptstrommaschine), sondern in einen Nebenschluß legen (Nebenschlußmaschine)[1].

Für die praktische Ausführung der dynamoelektrischen Maschinen konnten nun zunächst all die technischen Gestaltungen Anwendung finden, welche FARADAYS wegweisende Grundideen bereits in der Ära der magnetelektrischen Maschinen erfahren hatten[2].

**Unipolarmaschinen.** Die von FARADAY zuerst beschriebene und als „neue elektrische Maschine" bezeichnete Vorrichtung[3], eine zwischen Magnetpolen rotierende Kupferscheibe mit Schleifkontakten an der Achse und an der Peripherie, lieferte ohne weiteres konstante elektromotorische Kraft. Den gleichen Vorteil, daß ohne Kommutationsvorrichtung direkt konstanter Gleichstrom abgenommen werden kann, boten auch die anderen Anordnungen[4], für deren Wirkungsweise sich der wenig glückliche Name Unipolare Induktion eingebürgert hat. Immer von neuem hat man versucht, auf diesem verlockenden Prinzipe zu technisch verwendbaren Starkstromerzeugern zu gelangen[5]. Aber stets wurden die Erwartungen enttäuscht. Die Maschinen bewährten sich nicht.[6] Hauptschwierigkeit machte das Erzielen genügend hoher Spannung.

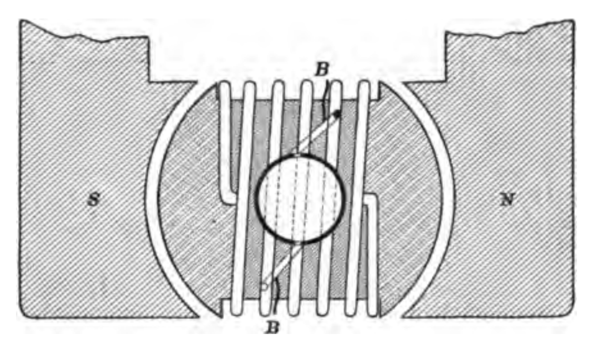
In eine neue Phase scheint das Problem der Gleichstrommaschinen ohne Ummagnetisierung und ohne Stromwender erst in allerneuester Zeit getreten zu sein durch die mit Hilfe der Dampfturbinen erreichbaren hohen Umlaufszahlen, so daß die elektromotorische Kraft schon pro Längeneinheit des einzelnen Leiters sehr groß wird. Die General Electric Co. hat eine von J. C. NOEGGERATH durchgebildete (azyklische) Dynamo von 300 KW für 500 Volt mit Erfolg ausgeführt[7]. Der auf der Achse einer Kurtisturbine von 3000 Umdrehungen sitzende Anker trägt 12 wirksame Leiter, die durch 24 Schleifringe und 12 feststehende Rückleiter hintereinander geschaltet werden. Von kundiger Seite[8] wird der zukünftigen Entwicklung dieser Maschinengattung eine hoffnungsvolle Prognose gestellt.

**Gleichstrommaschinen mit offener Wicklung.** Die ältesten kleinen Dynamomaschinen hatten den Doppel-T-Induktor von SIEMENS[9] (Figur 301), dessen Spule mit ihren Enden an zwei halbkreisförmige Segmente angeschlossen war, auf denen die Bürsten schleiften. Der magnetische Kreis ist hier schon sehr vollkommen. Aber der gelieferte Gleichstrom schwankt bei jeder Umdrehung zweimal zwischen Null und einem Maximalwerte (Figur 302). Um die Pulsationsamplituden des Stromes zu vermindern, brachte man auf dem Anker mehrere Spulen unter verschiedenen Winkeln an und führte sie zu entsprechend gegeneinander verschobenen Kollektorsegmenten, wie Schema Figur 303 zeigt. Jedes Segmentpaar war nur während der Zeit mit den Bürsten in Berührung, während in der ihm zugehörigen Spule maximale elektromotorische Kraft herrschte; die anderen

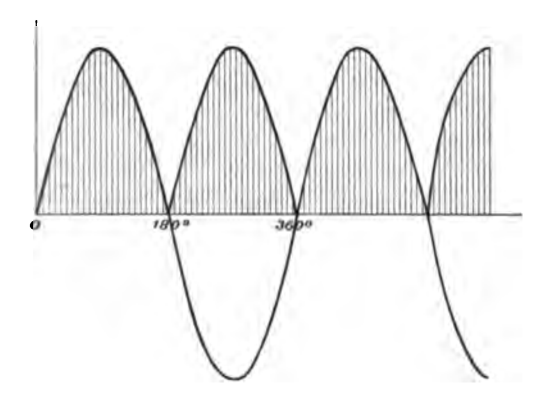
---

[1] Proc. Roy. Soc. **15**. 369. 1867. Der Fall, daß dieselbe Entdeckung von mehreren Forschern unabhängig gemacht wurde, kommt auf dem Gebiete der Starkstromtechnik übrigens merkwürdig häufig vor. Außer dem Dynamoprinzip sei in dieser Hinsicht besonders genannt der Ringanker mit Kollektor und geschlossener Wicklung (PACINOTTI 1860, GRAMME 1870). Das Mehrphasenstromfeld und der Drehstrommotor (FERRARIS, N. TESLA, beide 1888), der synchrone Gleichlauf von Wechselstrommaschinen (WILDE 1869, HOPKINSON 1883). — [2] Als erste magnetelektrische Vorläufer der Dynamomaschinen nennt man meist die Vorrichtungen von DAL NEGRO, Phil. Mag. (3) **1**. 45. 1832 und von PIXII, Ann. de chim. et de phys. **50**. 322 und **51**. 76. 1832. — [3] Handbuch **5**. 538. — FARADAY, Experim. Res. Art. 85. — [4] l. c. Art. 135, 155, 158, 219, 220, 222. — [5] Noch heute werden auf diesem Gebiete die eigenartigsten Projekte patentiert, z. B. D. R. P. Nr. 156029. — [6] Unipolarmaschinen von Siemens & Halske und von Forbes findet man z. B. in älteren Auflagen des Buches „Die dynamoelektrischen Maschinen" von SILV. THOMPSON beschrieben und abgebildet. Die sieben Auflagen dieses Werkes geben überhaupt eine vorzügliche Übersicht über die Entwicklungsgeschichte auch der konstruktiven Seite des Dynamomaschinenbaues und über das Auftauchen und eventuell wieder Verschwinden neuer Typen. — [7] I. E. NOEGGERATH, Proc. of the American Inst. of Electrical Engineers. Januar 1905. — [8] C. L. FELDMANN, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. 831. 1905. — [9] Engl. Patent Nr. 2017. 1856; Pogg. Ann. **101**. 271. 1857.

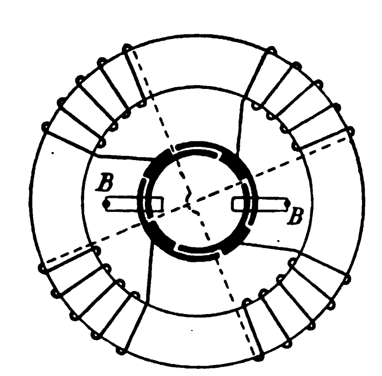




Figur 301.

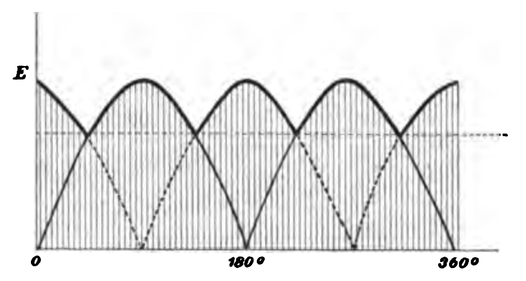


Figur 302.



Figur 303.

Spulen blieben so lange ausgeschaltet und stromlos, verursachten darum auch keine JOULEschen Wärmeverluste. Figur 304 gibt die von zwei um 90° gegeneinander verdrehten Spulen gelieferte Spannungskurve wieder. Dynamos mit derartig getrennten Ankerspulen werden als Maschinen mit offener Wicklung bezeichnet. Sie eignen sich zur Erzeugung hoher Spannung und zur Anbringung von Vorrichtung für automatische Stromregulierung (z. B. durch automatisches Verstellen der Bürstenbrücke), wie beides bei Serienschaltung von vielen Bogenlampen gefordert wird. Dabei sind die schwachen Strompulsationen sogar insofern von Vorteil, als sie die Mechanismen der Lampen leicht beweglich halten. In Europa haben die Dynamos mit offener Wickelung nie eine Rolle gespielt. Eine um so größere in Amerika, wo die ersten Bogenlampenreihenanlagen schon aus dem Jahre 1881 datieren[1], und wo dieser Betriebsmodus noch heute verbreitet ist. Über die interessante Gesamtgestaltung und die interessanten Einzelheiten der hierbei verwandten Maschinen von THOMSON HOUSTEN[2] und von BRUSH[3] mag auf die Be-



Figur 304.

[1] E. HAGEN, Elektrische Beleuchtung. Berlin 1885. — [2] Amer. Patent Nr. 223557. 1880; 296569. 1884. — A. GUEROUT, La Lum. Electr. 15. 398. 1885. — [3] Amer. Patent Nr. 189997. 1877. — Engineering 31. 25. 1881. — E. RICHTER, Elektrotechn. Zeitschr. 3. 193. 1882. — F. UPPENBORN, Zentralbl. f. Elektrotechnik 4. 191. 1882 und WIETLISBACH, ibid. 470.

schreibung in den Handbüchern über Dynamomaschinen von KITTELER und S. THOMPSON verwiesen werden. Bei den ungünstigen amerikanischen Arbeiterverhältnissen verlohnen sich dort selbst recht komplizierte automatische Reguliermechanismen, wenn diese nur die Betriebssicherheit unabhängig von geschulten Arbeitskräften machen[1].

**Gleichstrommaschinen mit geschlossener Wicklung.** Durch die Einführung des GRAMME-PAZINOTTIschen Ringankers[2] 1871 und durch die Erfindung des HEFNER-ALTENECKschen Trommelankers[3] 1873 war das Problem der technischen Erzeugung von Gleichströmen mit minimalen Schwankungen endgültig gelöst. Unzählige Formen nahmen die Maschinen im einzelnen an. 1880 wurde zuerst von W. SIEMENS Nebenschlußschaltung der Feldmagnete ausgeführt. Die Erfindung der seit 1881 auftretenden Verbundschaltung wird von verschiedenen Seiten beansprucht.

Epochemachend für die Entwicklung der gesamten Elektrotechnik wirkte die Erfindung der Glühlampe (EDISON 1879) und das, was man damals die Lösung des Problems der „Teilung des elektrischen Lichtes" nannte, die Ausbildung des Zweileitersystemes, d. h. der Parallelschaltung von Lampen und sonstigen Verbrauchsapparaten durch EDISON 1879[4]. Ihr folgte sehr bald 1883 das Dreileitersystem JOHN HOPKINSONS. Die erste elektrische Zentrale der Welt, die EDISONsche des sogenannten Distriktes I in New York, wurde am 3. September 1882 dem Betriebe übergeben. Es folgt 1883 Mailand als erste Zentrale in Europa, 1884 Berlin die erste in Deutschland. 1886 ging Dessau mit der Anwendung von Gasmotoren voran. 1887 hatte Lübeck den Mut des ersten Elektrizitätswerkbetriebes auf städtische Kosten.

Die erste elektrische Bahn war auf der Berliner Gewerbeausstellung 1879 zu sehen, und 1881 wurde von SIEMENS & HALSKE ein dauernder elektrischer Bahnbetrieb in Lichterfelde eingeführt. 1884 nahm Amerika die Aufgabe mit großem praktischen Erfolg in Angriff, und Anfang der 90er Jahre kamen die Errungenschaften der Neuen Welt auf dem Gebiete des elektrischen Bahnbaues wieder der Alten Welt zugute. Die Straßenbahnen wurden in allen größeren Städten schwer ins Gewicht fallende Abnehmer der Elektrizitätswerke.

Der praktische Dynamomaschinenbau war in den beiden ersten Jahrzehnten seiner Entwicklung der theoretischen Behandlung vorausgeeilt. Noch Ende der 80er Jahre wurden Dynamomaschinen wie Elektromotoren wesentlich nach dem Gefühl entworfen. Erst allmählich begann man die inzwischen erkannten Gesetze des magnetischen Kreises auf Vorausberechnung von Maschinenleistungen anzuwenden. Es sind hier besonders die Namen ROWLAND[5], BOSANQUET[6], W. VON SIEMENS[7], G. KAPP[8] und namentlich die Gebrüder HOPKINSON[9] zu nennen.

Unter dem Einflusse der von der Theorie gegebenen Prinzipien für ökonomische Bauart ist die Mannigfaltigkeit der Formen zurückgegangen. Die Dynamos sind im allgemeinen gedrungener geworden. Nicht nur die Magnetschenkel von 150 cm Länge und nur 23 cm Durchmesser der EDISONschen (alten) New Yorker Zentrale wurden als unwirtschaftlich erkannt. Auch Typen, wie die einst weit verbreitete SCHUCKERTsche Flachringdynamo (1876) werden nicht mehr gebaut. Die Kostspieligkeit ihrer Herstellung hat den Wettbewerb mit einfacheren

---

[1] Als dritte verbreitete Maschine mit offener Ankerwicklung sei aus neuerer Zeit noch die von Westinghouse (Pittsburg) genannt. Elektrotechn. Zeitschr. **15**. 515. 1894. — G. MAYER, Elektrotechn. Zeitschr. **11**. 257. 1890; **14**. 626. 1893; **15**. 515. 1894. — [2] A. PACINOTTI, Nuovo Cimento **19**. 378. 1865; C. R. **73**. 543. 1871. — Z. TH. GRAMME, Engl. Patent Nr. 1668. 1870; C. R. **73**. 175. 1871; **75**. 1497. 1872. — [3] Engl. Patent Nr. 2001. 1873. — [4] Erste Anlage: 115 Glühlampen auf einem Dampfer „Columbia". — [5] Phil. Mag. (4) **46**. 140. 1873; Electrician **13**. 536. 1884. — [6] Phil. Mag. (5) **15**. 207. 1883; 532. Juni 1884; **19**. 73. 1885. — [7] Wied. Ann. **24**. 93. 1885 und Lebenserinnerung 314. Berlin 1892. — [8] Electrician Februar 1886 bis Mai 1887. — [9] I. u. E. HOPKINSON, Phil. Trans. Lond. **177**. 331. 1886. — I. HOPKINSON, Original papers on Dynamo machinery and allied subjekts. New York 1893.

Formen nicht aushalten können. Wo sich aber solch alte Flachringmaschine noch in physikalischen Instituten befindet, wird man sie wegen ihrer mit den Mängeln des magnetischen Kreises Hand in Hand gehenden vorzüglichen Kühlung und damit großen Überlastbarkeit für Experimentierzwecke besonders hoch schätzen.

**Wechselstrom.** Wechselstromerzeugung hat nie Schwierigkeiten bereitet. Trotzdem trat sie in der Starkstromtechnik anfangs sehr gegen den Gleichstrom zurück. Für chemische Zwecke war Wechselstrom vor Entstehung der Lichtbogenchemie (Carbid, Salpetersäure) überhaupt nicht zu verwenden. Für Bogenlampen und Motorbetrieb anfangs mindestens nur sehr schwierig. Trotzdem wurde schon 1886 von GANZ & Co. in Rom eine große Zentrale nach dem Transformatorensystem errichtet.

Erst die Erfindung des Drehstrommotors[1] eröffnete dem Wechselstrome volle Konkurrenzfähigkeit mit dem Gleichstrom. Entscheidend für Erkenntnis der praktischen Überlegenheit des Wechselstromes, sofern es sich um größere Entfernungen handelt, war die Frankfurter Ausstellung 1891[2]. DOBROWOLSKYs[3] verketteter Dreiphasenstrom übertrug mittels doppelter Transformation 300 PS über 175 Kilometer von Laufen am Neckar in die Ausstellung (Hochspannungsleitung von 30000 Volt). Die größte heutige elektrische Anlage überhaupt, die seit 1894 den Niagarafällen 50000 PS entnimmt, ist eine Wechselstromanlage.

Eine gute Anschauung von der Entwicklung der einzelnen elektrischen Betriebsarten gewinnt man aus der seit 1894 in der Elektrotechnischen Zeitschrift alljährlich gegebenen Statistik der Elektrizitätswerke in Deutschland. 1894 gab es 148 solche Werke mit 38000 KW, 1906[4] war die Zahl 1338 mit 723000 KW Gesamtleistung, darunter 1080 Anlagen für Gleichstrom. 100 mit Gleich- und Drehstrom, 96 für Drehstrom, 37 für Wechselstrom, 18 für Gleich- und Wechselstrom, 2 nach dem monozyklischen System, 1 mit Gleichstrom, Drehstrom und Wechselstrom. Analoge jährliche Zusammenstellungen für England veröffentlicht die Zeitschrift „The Electrician".

## B) Die Starkstromtechnik der Gegenwart[5].

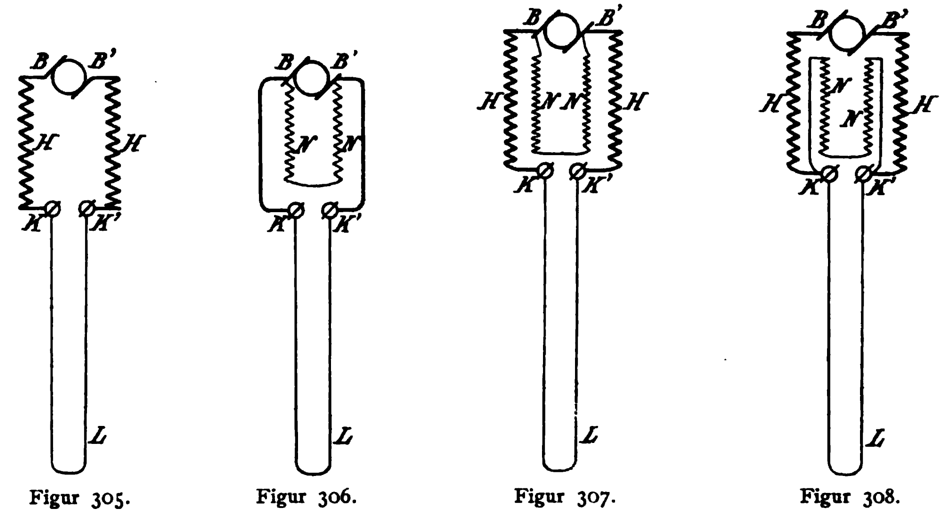
### Die Gleichstrommaschine[6].

Im Felde feststehender Elektromagnete dreht sich der Induktor oder Anker. Der vom mitrotierenden Kollektor durch „Bürsten" abgenommene Strom dient außer zu Leistungen im äußeren Schließungskreise auch zur Erregung der Feld-

[1] Siehe unten S. 768. — [2] Allg. Bericht über d. Internat. Elektrotechnische Ausstellung in Frankfurt (Main) 1891. 2. Bd. 1893; auch UPPENBORN, Elektrotechn. Zeitschr. **13**. 378. 1892. [3] D. R. P. Nr. 51083 vom 8. März 1889. — [4] Elektrotechn. Zeitschr. **28**. 422. 18. April 1907. — [5] Da bei den folgenden kurzen Angaben über Dynamomaschinen, Motoren, Transformatoren und Leitungssysteme der heutigen Elektrotechnik immer im einzelnen auf die Spezialliteratur verwiesen werden muß, so seien an dieser Stelle von neuesten Büchern über Starkstromtechnik nur genannt das von HEINKE herausgegebene Sammelwerk, Handbuch der Elektrotechnik, Leipzig, zum Teil 1907 noch im Erscheinen begriffen, Band **4** schon in 2. Aufl. erschienen; das Lehrbuch ARNOLDs „Die Gleichstrommaschine", 2. Aufl., Berlin 1906 und sein Handbuch „Die Wechselstromtechnik", Berlin 1902—1904; das schon oben erwähnte Handbuch von S. THOMPSON „Die dynamoelektrischen Maschinen", 7. Aufl., Halle 1907, 2. Band unter der Presse; die Bücher G. KAPPS „Dynamomaschinen für Gleich- und Wechselstrom", 4. Aufl., Berlin 1904. Elektrische Kraftübertragung, 3. Aufl., Berlin 1898. Aber auch die kleine „Einführung in die Elektrotechnik" von TH. EHRHARD, 2. Aufl., Leipzig 1907 und die „Leçons d'Electrotechnique génerale" von P. JANET, 2. Aufl., Paris 1904/1907 verdienen besondere Erwähnung. Einige Bemerkungen über elektrotechnische Literatur vom Standpunkte des Physiklehrers aus findet man bei KLEIN und RIECKE „Über angewandte Mathematik und Physik", 207, Leipzig 1900. Im vorausgehenden Texte „Über Elektrotechnik" muß es dort S. 184, Z. 6 heißen „175" statt „280" Ampere, S. 202, Z. 4 „abhängig von" statt „proportional", Z. 6 „große" statt „maximale". — [6] Siehe hier außer den eben genannten Büchern noch I. FISCHER HINNEN „Die Wirkungsweise, Berechnung und Konstruktion elektrischer Gleichstrommaschinen", 3. Aufl. Zürich 1897.

magnete. Wird der Gesamtstrom des Ankers in dickdrähtigen Windungen von geringem Widerstande um die Feldmagnete geführt (*HH* in Figur 305), so spricht man von einer

1. Hauptstrommaschine, Reihen oder Serienmaschine, Maschine mit direkter Wicklung. Im Gegensatze dazu besteht bei der
2. Nebenschlußmaschine die Feldmagnetbewicklung (*NN* Figur 306) aus vielen Windungen dünnen Drahtes und ist parallel zur äußeren Leitung geschaltet. Endlich sind als dritte Klasse zu unterscheiden die

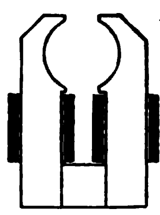



Figur 305. Figur 306. Figur 307. Figur 308.

3. Maschinen mit gemischter Wicklung, Kompound- oder Verbundmaschinen. Hier sind die Elektromagnete mit zwei Lagen von Windungen versehen, einer dickdrähtigen von wenig Umgängen und einer aus einer größeren Anzahl von Windungen schwächeren Drahtes. Es sind beide in Figur 307 und Figur 308 dargestellte Anordnungen in Gebrauch. Entweder der Strom verzweigt sich an den Bürsten *B* (Nebenschluß parallel zum Anker) oder erst an den Klemmen *K* (Nebenschluß parallel zur Leitung, „langer Nebenschluß").

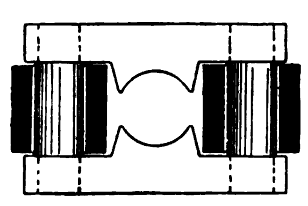
## Zweipolige Dynamos.

**Feldmagnete.** Die bewährtesten Feldmagnetformen sind in den Figuren 309, 310 und 311 wiedergegeben. Das einfache Hufeisen hat den Mangel unvollkommener Symmetrie des Feldes. Bei der sogenannten Manchestermaschine Figur 310 wird

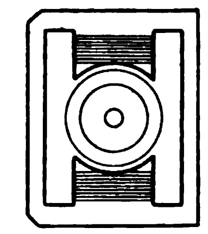




Figur 309.



Figur 310.



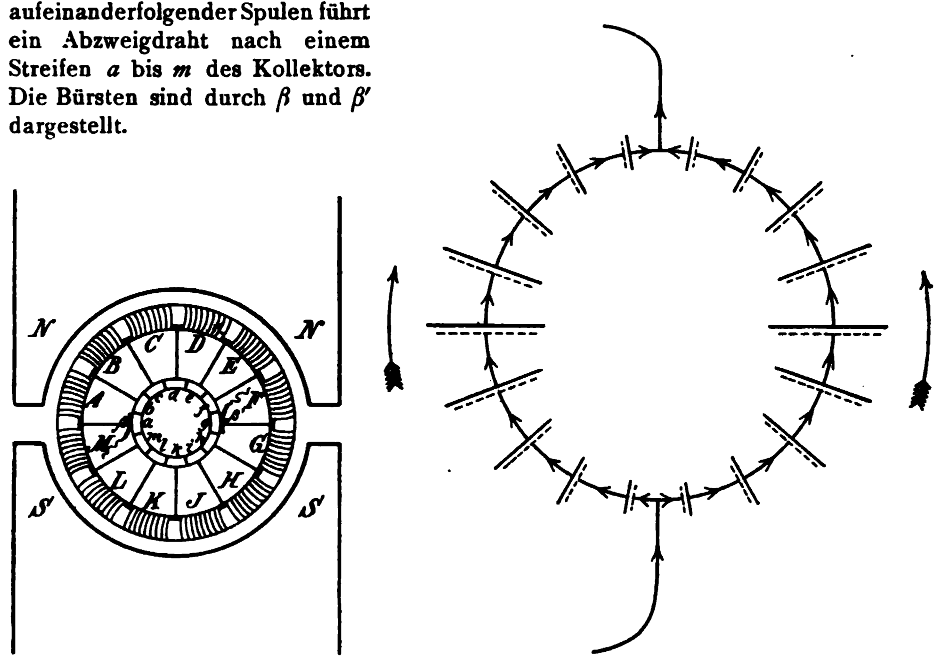
Figur 311.

der Anker von zwei parallel geschalteten Kraftlinienkreisen durchsetzt. Die Pole sind „Folgepole". Die geschlossene Type Figur 311 zeichnet sich durch einfache Herstellungsweise und geringe Streuung aus. Als Material tritt neben dem magnetisch ungünstigen Gußeisen und dem kostspieligeren Schmiedeeisen nämlich immer mehr weicher Stahlguß (Flußeisen) in den Vordergrund.

**Anker.** Wenn das zur Verminderung des magnetischen Widerstandes zwischen den Polen eingeführte Eisen ruhen würde, wie der Spulenkern eines Darsonvalgalvanometers[1], was für die Induktionswirkung in den bewegten Ankerspulen ganz gleichgültig wäre, so könnte es massiv sein. Da aber der eiserne Ankerkern bei den heutigen Maschinen aus mechanisch konstruktiven Gründen den Träger der Ankerspulen bildet und mitrotiert, so muß man ihn zur Verhinderung von Wirbelstromausbildung senkrecht zum Kraftlinienflusse unterteilen. (Verwendung von Transformatorblechscheiben und nur noch selten von Eisendrähten.)

Das Prinzip der „geschlossenen Ankerwicklung" und die Wirksamkeit des Kollektors tritt am anschaulichsten bei der

**Ringwicklung** zutage. Die aus den Spulen *A* bis *M* der schematischen Figur 312 bestehende Bewicklung läuft in sich zurück. Von der Verbindungsstelle je zweier aufeinanderfolgender Spulen führt ein Abzweigdraht nach einem Streifen *a* bis *m* des Kollektors. Die Bürsten sind durch $\beta$ und $\beta'$ dargestellt.

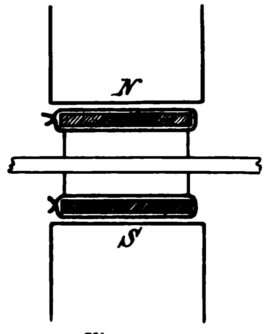



Figur 312. Figur 313.

Bei der augenblicklichen Stellung des Ringes geben Spule *A* bis *F* gleichgerichtete elektromotorische Kräfte, ebenso *G* bis *M*. Die Bürsten führen den Strom durch Vermittlung der Streifen *a* und *g* des Kollektors in die Leitung. Bei fortgesetzter Drehung tritt jedesmal die folgende Windung an Stelle der vorhergehenden, ebenso die nächste Kollektorlamelle an Stelle der benachbarten, so daß die Wirkung unverändert bleibt. Nur bei dem Übergang der Bürste $\beta$ von *a* auf *m* resp. der Bürste $\beta'$ von *g* auf *f* tritt ein Augenblick ein, wo die Streifen *a* und *m* sowie *f* und *g* leitend verbunden sind. Dadurch werden die Spulen *M* und *F* in dieser Zeit kurz geschlossen. Sie sind also während dessen elektromotorisch für den äußeren Kreis unwirksam. Hierdurch wird eine Stromschwankung bedingt, die aber um so geringer bleibt, je größer die Anzahl der Spulen ist, in welche die ganze Wicklung zerfällt.

Sehen wir hiervon ab, so kann man also die Induktionswirkung in dem Ringe so auffassen, als ob in jeder Hälfte dieselbe konstante elektromotorische Kraft *E* ihren Sitz hat, und beide Ringhälften nebeneinander geschaltet sind, Skizze Figur 313 soll zugleich die im Raum feststehende Verteilung der Kompo-

[1] Handbuch 4. 294. Figur 85.

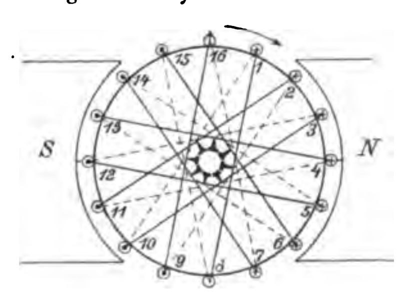


Figur 314.

nenten von $E$ und ihre Größenverhältnisse andeuten. Figur 314 gibt einen durch die Achse gelegten Querschnitt des GRAMMEschen Zylinderringinduktors. Vom Ringanker zur

**Trommelwicklung** können wir uns rein geometrisch in folgender Weise einen stetigen Übergang vorstellen. Man sehe zunächst vom Eisenkerne ab und denke den Radius des inneren Zylinderringmantels der Ringwicklung kleiner und kleiner werden bis zu Null und dann weiter negativ bis zum Betrage des äußeren Ringradius wachsen. Dann liegen sämtliche Drähte auf der Außenfläche einer zylindrischen Trommel, und diese wäre nun nachträglich mit unterteiltem Eisen auszufüllen.

Auch wer die Trommelwicklung als Vervollkommnung des SIEMENSschen DoppelT-Induktors auffassen will, tut gut, bei der Herleitung den Parallelismus zur Ringwicklung nicht aus dem Auge zu verlieren: Ein Eisenzylinder werde in Ebenen durch seine Achse von regelmäßig wachsendem Azimute $\varphi$ knäuelartig mit Draht bewickelt. Die Verbindung je zweier Nachbarwicklungen führe man zu dem gleichen Kollektorsegmente wie die Spulenverbindung von demselben Azimute bei einem GRAMMEschen Ring. Für $\varphi$ gleich $180^0$ ist dann entsprechend dem halben Ringe erst die Hälfte der Kollektorabschnitte angeschlossen, dagegen die gesamte Zylinderoberfläche schon mit Draht bedeckt. Wickle ich also weiter bis $360^0$, ehe ich Anfang und Ende des Drahtes zum geschlossenen Kreise schließe, so bekomme ich über die erste Drahtlage eine zweite Drahtlage. Zwei aufeinanderliegende Windungen, die an gegenüberliegende Kollektorsegmente angeschlossen sind, werden dabei in entgegengesetztem Sinn aufgewickelt. Praktisch legt man die beiden Windungslagen jetzt nicht mehr übereinander, sondern aus Symmetriegründen zwischen einander und wickelt, um an der Achse nicht zu viel ausbiegen zu müssen, auch nicht in größten Kreisen, sondern in großen Sehnen, wie beides Figur 315 erkennen läßt. Die auf der hinteren Trommelbasis verlaufenden Verbindungen sind punktiert gezeichnet.



Figur 315.

**Vorzüge von Ring und Trommel.** Da beim Trommelanker Drähte mit der vollen Maschinenspannungsdifferenz dicht nebeneinander zu liegen kommen, so ist zur Erzeugung hoher Spannungen im Interesse zuverlässiger Isolation der Ringanker besser geeignet. Können für den heutigen Trommelanker etwa 1000 Volt als obere Grenze gelten, so liefert z. B. Schuckert (speziell im Physikalischen Laboratorium z. B. für Gasentladungen oder Telegraphie ohne Draht wertvolle) Ringankergleichstromdynamos für 5000 Volt. Auch die Reparatur etwa schadhaft gewordener Wickelungsabteilungen kann beim Ringanker viel leichter ausgeführt werden als beim Trommelanker, wo die Überkreuzung der Drähte das Herausnehmen einzelner Windungen unmöglich macht. Ebenso ist der Ring dem Trommelanker hinsichtlich besserer Ventilation und leichterer Kühlung überlegen. Endlich sind beim Trommelanker die Drähte schwieriger gegen tangentiale Verschiebungen und Biegung durch die magnetischen Kräfte zu sichern. Man verwendet daher vielfach statt glatter Anker Nuten oder Lochanker. Bei ihnen sind die wirksamen Drähte in achsenparallelen Nuten oder der Außenfläche naheliegenden Löchern im Ankereisen isoliert eingebettet. Gleichzeitig ist es dadurch möglich, den Interferrikumspalt sehr eng, den magnetischen Widerstand auf dem Wege der Kraftlinien also sehr klein zu machen.

Kardinalnachteil andererseits des Ringankers dem Trommelanker gegenüber ist der durch die starke Einschnürung des geteilten Kraftlinienflusses bedingte größere magnetische Widerstand. Daß die auf der Innenseite des Zylinderringes verlaufenden Drähte bloß inaktiven Ballastwiderstand bilden, fällt weniger ins Gewicht, weil der Gesamtwiderstand der heutigen Anker ohnehin sehr klein ist. Dagegen macht die Verbindung des Eisenkernes mit der Achse (der Armaturstern) beim Ringanker mehr Schwierigkeiten, zumal hierzu bei ihm ja kein magnetisierbares Material verwandt werden darf, da die den Innenraum des Ringes durchsetzenden Kraftlinien für die Wirksamkeit der Maschine verloren gehen (zum Streuflusse gehören).

**Der Kollektor.** Für die Lamellen wählt man als Material jetzt meist nicht mehr Bronze (oder Eisen), sondern hartes Kupfer, für ihre Isolation weichen Glimmer, der sich gleichmäßig mit den Segmenten abnutzt.

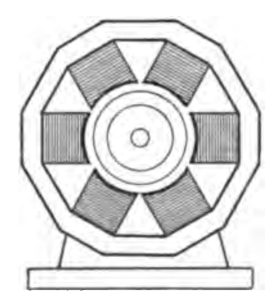
**Die Bürsten.** Metallbürsten werden als Blätterbürsten (aus etwa 0,03 mm dicken Kupfer oder Messingblechen) oder als Gewebebürsten ausgeführt. Bei Kohlebürsten läßt sich die Härte durch verschiedenen Graphitgehalt abstufen.

Um die Vorzüge von Metallbürsten (große Stromdichte, kleine Kollektorabmessungen) und Kohlebürsten (bessere Kommutation und Kollektorschonung) zu vereinigen, hat man beide Arten in der Weise kombiniert, daß sich an die ablaufende Spitze einer Metallgewebebürste unmittelbar noch eine kleine Kohlebürste anschließt.

## Mehrpolige Gleichstrommaschinen.

Zur Erhöhung der Leistung einer Dynamomaschine kann nicht einfach eine zweipolige Form beliebig vergrößert werden. Schon aus dem Grunde nicht, weil bei konstanter Ampere-Belastung der Einheit des Drahtquerschnittes die Joulesche Gesamtwärmeentwicklung mit der dritten Potenz, die Oberfläche aber, welche diese Wärme abzuführen hat, nur mit der zweiten Potenz wächst. Man muß vielmehr die Zahl der Feldmagnetpole vermehren. Die Wirkung zweier aufeinanderfolgender ungleichnamiger Pole ist ganz dieselbe, wie die einer zweipoligen Maschine. Meist wird durch entsprechende Vervielfältigung der Bürsten, welche jedesmal die Spulen beim Durchgang durch die neutralen Zonen berühren, und durch Verbindung der Bürsten mit gleichem Vorzeichen die Stromstärke proportional der Anzahl der Polpaare vergrößert. (Mehrpolige Maschinen mit Parallelschaltung.)

Bei Maschinen mit Reihenschaltung der von den einzelnen Polpaaren induzierten elektromotorischen Kräfte andererseits sind nur zwei Bürsten vorhanden. Diese Schaltungsweise ist jedoch bei mehr als vierpoligen Maschinen selten geworden, da man für hohe Spannung meist Wechselstrom bevorzugt.

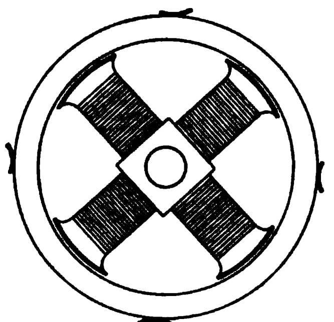


Figur 316.

Der ursprünglich in deutschen Zentralen eingeführte vielpolige Feldmagnettypus Figur 316 für Gußstahl verdrängt jetzt auch im Auslande andere Außenpolsysteme. Bei diesen Maschinen kommen als Ankerformen ebenfalls nur noch Ring und Trommel vor. Die Bewicklung kann dabei in so mannigfaltiger Art ausgeführt werden, und es sprechen bei Auswahl der einzelnen Ausführungsweisen so mannigfaltige technische und fabrikatorische Rücksichten mit, daß die Lehre von den Ankerwicklungen fast ein besonderer Wissenschaftszweig geworden ist[1]. Man unterscheidet außer ein- oder mehrfacher Parallelschaltung und Reihenschaltung noch Arnolds Reihenparallelschaltung, die aus mehreren parallel verbundenen Reihenschaltungen besteht.

[1] E. Arnold, Die Ankerwicklungen und Ankerkonstruktionen der Gleichstromdynamomaschinen, 3. Aufl., Berlin-München 1899. — F. Loppé, Traité élémentaire des Enroulements des Dynamos à courant continu. Paris 1904.

Die beiden Pole einer zweipoligen Maschine sind an Kraftlinienergiebigkeit immer gleich, nicht aber je zwei Pole eines mehrpoligen Feldes. Zum Ausgleiche solcher Unsymmetrien verwendet man Äquipotentialverbindungen, d. h. Drähte, welche Punkte nominell gleichen Potentiales kurz schließen.



Figur 317.

Als eine besondere Form der Ringankermaschinen ist noch die Innenpolmaschine zu nennen. Figur 317 zeigt die Anordnung. Der Feldmagnet befindet sich im Inneren des Ringes und steht fest. Der Anker wird an der einen Seite durch einen Stern mit langen Armen auf der rotierenden Achse befestigt. Die Ankerwicklung ist so eingerichtet, daß die Bürsten von der Außenseite den Strom unmittelbar entnehmen können. Die großen Zentralenmaschinen dieser Art gewähren einen reizvollen Anblick.

## Theoretisches über die Gleichstrommaschine im Betrieb.

Bei allen folgenden Erörterungen sollen der Einfachheit halber nur zweipolige Maschinen ausdrücklich berücksichtigt werden. Die Übertragung auf Maschinen mit mehreren Polpaaren macht meist keine Schwierigkeiten.

Die von einer Gleichstromdynamo abgegebene Leistung beträgt

$$A = P \cdot I \text{ Watt,}$$

wenn $P$ die Klemmenspannung, $I$ die Stromstärke im äußeren Stromkreise bezeichnet.

**Ohms Gesetz.** Der Zusammenhang zwischen Klemmenspannung $P$, elektromotorischer Kraft $E$, den Strömen und Widerständen in Anker, Feldmagnet und äußerem Stromkreis ergibt sich für die verschiedenen Schaltungsweisen Figur 305 bis 308, S. 730 wie folgt:

Hauptstrommaschine:

$$E = P + I_A(w_A + w_S) = P\left(1 + \frac{w_A + w_S}{w}\right); \quad P = E - I(w_A + w_S) = E\frac{w}{w + w_A + w_S};$$

$$I_A = I = \frac{E - P}{w_A + w_S}; \quad I = \frac{E}{w_S + w_A + w}; \quad I_S = I;$$

Nebenschlußmaschine:

$$E = P + I_A w_A = P\left(1 + \frac{w_A}{w_N} + \frac{w_A}{w}\right); \quad P = E - I_A w_A = E\frac{w\, w_N}{w(w_N + w_A) + w_A w_N};$$

$$I_A = I + I_N = \frac{E - P}{w_A}; \quad I = \frac{P}{w}; \quad I_N = \frac{P}{w_N};$$

Maschinen mit gemischter Wicklung parallel zum Anker:

$$E = P + I_A w_A + I w_S = P\left(1 + \frac{w_S + w_A}{w} + \frac{w_A(w + w_S)}{w\, w_N}\right);$$

$$P = E - I_A w_A - I w_S = E\frac{w\, w_N}{w_A(w_N + w + w_S) + w_N(w + w_S)};$$

$$I_A = I + I_N = \frac{E - P}{w_A}; \quad I = \frac{P}{w}; \quad I_S = I; \quad I_N = \frac{P + I w_S}{w_N};$$

parallel zum äußeren Kreis:

$$E = P + I_A(w_A + w_S) = P\left(1 + \frac{(w + w_N)(w_A + w_S)}{w\,w_N}\right) \quad ;$$

$$P = E - I_A(w_A + w_S) = E\frac{w\,w_N}{w\,w_N + (w + w_N)(w_A + w_S)} \quad ;$$

$$I_A = I + I_N = \frac{E - P}{w_A}; \qquad I = \frac{P}{w}; \qquad I_S = I_A; \qquad I_N = \frac{P}{w_N} \quad .$$

Die Indizes $A$, $N$, $S$ beziehen sich auf Anker, auf Nebenschluß und Serienwicklung der Feldmagnete. $I$ ist der nach außen abgegebene Strom. In $w_A$ ist auch der oft relativ nicht unerhebliche Übergangswiderstand an den Bürsten einzubegreifen.

**Statische Charakteristik und Magnetisierungskurve.** Die elektromotorische Kraft eines Ankers mit geschlossener Wicklung in absolutem Maße ist gleich der von den Drähten je einer Wicklungshälfte pro Sekunde geschnittenen Anzahl Kraftlinien oder in Volt:

$$E = \Phi z \frac{u}{60} \cdot 10^{-8} \quad , \tag{1}$$

wo $u$ die Tourenzahl pro Minute, $z$ die Zahl der auf der äußeren Zylinderfläche verlaufenden „wirksamen" Leiter bezeichnet. $\Phi$ ist der Kraftlinienfluß, der den Anker durchsetzt. Es sind beim Lochanker diejenigen Kraftlinien nicht mitzurechnen, die in der Zylinderoberflächenschicht außerhalb des Löcherkranzes verlaufen, beim Ringanker diejenigen, welche ihren Weg durch den eisenfreien Hohlraum des Zylinderringes nehmen. Die Formel lehrt, daß die elektromotorische Kraft nur von der Gesamtzahl $\Phi$ der Kraftlinien abhängig ist, aber nicht von der mehr oder weniger regelmäßigen Beschaffenheit des Feldes.

Man hat sich seinerzeit darüber gewundert, daß ein glatter und ein Zahnanker bei gleichem $\Phi$ die gleiche elektromotorische Kraft liefern, obwohl die in den Nuten liegenden Drähte sich durch Schirmwirkung dauernd nur in ganz schwachem Felde befinden und darum auch stromdurchflossen nur ganz geringe ponderomotorische Kräfte erfahren[1]. Will man an der bildlichen Auffassung festhalten, welche die Kraftlinien (nach strengerem Sprachgebrauche Induktionslinien) wie substanzielle Dinge nach Art von Kautschukfäden behandelt, so muß man sagen: bei Translationen der Trennungsflächen von Eisen und dem unmagnetischen Material der Lücken tritt eine Bewegung der Kraftlinien im Raume ein; sie springen von einem Zahn über eine Lücke rasch zum nächsten Zahne über, ohne daß ihre Dichte im Nutenraume je erheblicher wird. Auch daß die Kräfte des auf den Anker wirkenden ponderomotorischen Drehungsmomentes direkt am Eisen angreifen, ist aus dem Kraftlinienbilde ersichtlich.

Behufs Berechnung von $\Phi$ aus den Amperewindungen und aus dem magnetischen Widerstande haben wir das Gesetz des magnetischen Kreises[2] in der dem ersten KIRCHHOFFschen Satze $\Sigma E = \Sigma I w$ entsprechenden Form zu benutzen. Denn wegen der Streuung hat $\Phi$ im Feldmagneten einen anderen (höheren) Wert ($\Phi_F$) als im Anker und im Interferrikum, dem magnetisch indifferenten Raum zwischen dem Eisenkern der Armatur und den Ausbohrungen der Polstücke. Wir erhalten also

$$\frac{4\pi N I}{10} = \Phi\frac{l_A}{q_A\,\mu_A} + \Phi\frac{2\delta}{q_\delta} + \Phi_F\frac{l_F}{q_F\,\mu_F} \quad . \tag{2}$$

[1] M. VON DOBROWOLSKY, Betrachtungen über Loch- und Zahnanker, Elektrotechn. Zeitschr. **18**. 429. 1897. — H. DU BOIS, ibid. 502, Anwendungen elektromagnetischer und mechanischer Schirmwirkung, Elektrotechn. Zeitschr. **19**. 379. 1898. — [2] Handbuch **5**. 158.

$N$ ist hier die Windungszahl, $l$ sind mittlere Längen des Kraftlinienweges, $\delta$ ist die Breite der beiden Interferrikumspalte, $q$ sind mittlere Querschnitte des Induktionsflusses. Unter Einführung des von den GEBR. HOPKINSON als Streuungskoeffizient[1] definierten Quotienten

$$\frac{\Phi_F}{\Phi} = \nu \tag{3}$$

läßt sich auch schreiben

$$\Phi = \frac{4\pi N I}{10} \frac{1}{\frac{l_A}{q_A \mu_A} + \frac{2\delta}{q_\delta} + \nu \frac{l_F}{q_F \mu_F}} . \tag{4}$$

Das Kraftlinienzahlverhältnis $\frac{\Phi_F}{\Phi}$ bestimmt sich experimentell einfach in der Weise, daß man eine Drahtwindung einmal um den Anker, das andere Mal um das Feldmagnetjoch schlingt und die Ausschläge eines mit ihr verbundenen balistischen Galvanometers bei Schließung des Erregerstromes in beiden Fällen vergleicht.

Die Permeabilitätswerte

$$\begin{cases} \mu_A = f_1\left(\frac{\Phi}{q_A}\right) = f_1(B_A) \quad , \\ \mu_F = f_2\left(\frac{\nu\Phi}{q_F}\right) = f_2(B_F) \end{cases} \tag{5}$$

sind aus sogenannten Materialcharakteristiken zu entnehmen, d. h. aus Kurven oder Tabellen, welche für das Eisenmaterial von Anker und Feldmagnet $\mu$ als Funktion von $B$ entweder direkt darstellen[2] oder gemäß $\mu = \frac{B}{H}$ aus zusammengehörigen Werten von $B$ und $H$ zu berechnen gestatten.

Durch Substitution von $\Phi$ aus Relation (4) in Gleichung (1) erhalten wir die elektromotorische Kraft $E$ in ihrer Abhängigkeit vom Erregerstrome $I$. Man nennt dies die statische Charakteristik der Maschine. Bei ihr sind im Unterschiede vom wirklichen Betrieb die Ankerwindungen stromlos. Die statische Charakteristik ist darum bei einer Hauptstrommaschine nur durch Sondererregung mit einer fremden Stromquelle experimentell zu realisieren. Bei einer Nebenschlußmaschine fällt sie praktisch mit der Leerlaufcharakteristik zusammen, d. h. mit der Kurve, die man erhält, wenn man bei offenem äußerem Stromkreise durch Abstufung eines in den Nebenschluß eingeschalteten Widerstandes den Erregerstrom von kleinem zu maximalem Werte anwachsen läßt und die außerdem gemessene Klemmenspannung $P$ als Ordinate zu $I$ als Abszisse aufträgt. In Anbetracht der relativen Kleinheit auch der höchsten Erregerstromstärken einer Nebenschlußmaschine ist für Leerlauf sowohl der Spannungsabfall $E - P = I w_A$ als die Rückwirkung des Ankerstromes auf das Feld praktisch meist zu vernachlässigen.

Bei Vorausberechnung von $\Phi$ und $E$ kann es sich empfehlen, den magnetischen Kreis der Dynamo in mehr als drei Abschnitte zu zerlegen. Man wird z. B. für Feldmagnetschenkel und Joch den magnetischen Widerstand einzeln in Rechnung setzen, falls beide aus verschiedenem Material bestehen. Auch der verschiedene Sättigungsgrad des Ankereisens in den Zähnen und im Körper ist unter Umständen zu berücksichtigen, ebenso die Abhängigkeit der Streuung $\nu$ vom Sättigungsgrade der einzelnen Teile. Je kleiner eine Maschine ist, um so weniger werden jedoch solche Korrektionen der Mühe verlohnen, da dann der magnetische Widerstand der Interferrikumspalte weit überwiegt.

---

[1] Orig. papers on dynamo machinery and allied subjects 87. New York 1893. — [2] Handbuch 5. 182.

**Selbsterregung.** Die maßgebenden Versuche und Überlegungen hinsichtlich des Angehens von Dynamomaschinen verdanken wir AUERBACH[1]. Der schon vor Beginn der Rotation des Ankers bestehende remanente Magnetismus sei $\Phi_0$. Dieser würde den Anfangsstrom $I_0 = c \cdot \Phi_0 \cdot u$ induzieren, wenn

$$c = \frac{z \cdot 10^{-8}}{60\,w} \quad ,$$

$u$ die Tourenzahl pro Minute und $w$ bei Nebenschlußmaschinen die Summe von Anker- und Feldwicklungswiderstand ist. Durch Strom $I_0$ wird der Magnetismus

$$\Phi_1 = k \cdot I_0 = c \cdot k \cdot u \cdot \Phi_0$$

erzeugt. Der Proportionalitätsfaktor $k$ beträgt hier (von der Streuungskorrektion abgesehen) gemäß Gleichung (4)

$$(6) \qquad k = \frac{4\,\pi N}{10} \cdot \frac{1}{\dfrac{l_A}{q_A \dfrac{dB_A}{dH}} + \dfrac{2\,\delta}{q_\delta} + \dfrac{l_F}{q_F \dfrac{dB_F}{dH}}} \quad .$$

Den Kraftlinienzuwachs können wir uns wieder als Ursache eines neuen Strominkrementes $I_1$ denken, Strom $I_1$ als Ursache neuer Kraftlinien, diese wieder als Quelle eines neuen Stromes usf. ad infinitum.

$$(7) \qquad \begin{cases} \Phi = \Phi_0\,[1 + c\,k\,u + (c\,k\,u)^2 + (c\,k\,u)^3 + \ldots] = \Phi_0 \dfrac{1}{1 - c\,k\,u} \quad , \\ I = c\,u\,\Phi_0\,[1 + c\,k\,u + (c\,k\,u)^2 + (c\,k\,u)^3 + \ldots] = I_0 \dfrac{c\,u}{1 - c\,k\,u} \quad . \end{cases}$$

Solange $u$ erheblich kleiner als $\frac{1}{c\,k}$ ist, bleiben $\Phi$ und $I$ von der Größenordnung ihrer kleinen Anfangswerte $\Phi_0$, $I_0$. Es tritt praktisch keine Selbsterregung ein. Die Maschine „geht“ vielmehr „erst an“, wenn sich $u$ der kritischen Tourenzahl

$$(8) \qquad u_s = \frac{1}{k\,c}$$

nähert. $u_s$ scheint nach dieser Formel unabhängig vom remanenten Magnetismus $\Phi_0$ zu sein, während erfahrungsmäßig eine Maschine, wenn sie erst kurz zuvor außer Betrieb gesetzt war, bei sehr viel kleinerer Umdrehungsgeschwindigkeit wieder angeht, als wenn sich durch längere Ruhe der remanente Magnetismus weitgehend verloren hat. Dies rührt davon her, daß im Gebiete schwächster Feldstärken $\mu = \frac{B}{H}$ $\left(\text{und auch } \frac{dB}{dH}\right)$ sehr kleine, d. h. nahe an 1 liegende, Werte hat, die aber mit wachsendem $B$ sehr rasch bis zum zehnfachen Betrage etwa ansteigen[2]. Figur 318 zeigt das Schema einer Materialcharakteristik vom Typus der hier in Betracht



Figur 318.

[1] Wied. Ann. **34**. 172. 1888. — [2] Siehe Handbuch **5**. 198 u. f.

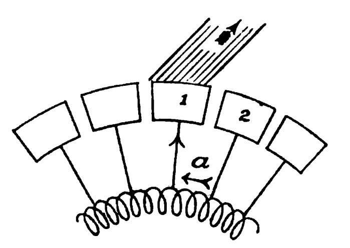
kommenden Eisensorten. $k$ ist demgemäß tatsächlich eine Funktion von $\Phi_0$ und darum ist nach Gleichung (8) indirekt auch $u_s$ eine solche.

Übrigens liegt bei den heute verwandten sehr weichen Gußmaterialien und den heutigen Materialdimensionierungen $u_s$ vielfach über der Tourenzahl des normalen Betriebes. Die Dynamos sind dann also praktisch nicht mehr selbsterregend. Man muß bei Ingangsetzen Akkumulatoren zu Hilfe nehmen. Das SIEMENSsche Dynamoprinzip wird nicht mehr zur Felderregung, sondern nur noch zur automatischen Feldregulierung benutzt.

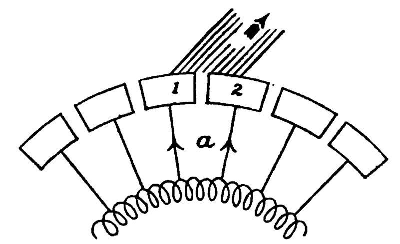
Für $uck = 1$ divergieren die Reihen (7). Aber schon vorher verlieren sie ihre Anwendbarkeit und Bedeutung, da bei erheblichem Intervalle von $I$ und $\Phi$ in jedem Gliede ein durchaus anderer Wert von $k$ einzusetzen wäre. Der magnetische Widerstand des Kreises nimmt zunächst mit wachsendem $\Phi$ ab, so daß also bei Annäherung an die kritische Geschwindigkeit $\Phi$ noch plötzlicher und rascher mit $u$ steigen würde, als die Formel erwarten ließe.

Trotzdem streben $I$ und $\Phi$ immer, d. h. bei jeder Tourenzahl bestimmten endlichen Grenzen zu, denn bei Annäherung der Eisenteile an den Zustand der magnetischen Sättigung nimmt der Widerstand des magnetischen Kreises wieder stark zu, was auch aus Figur 318 abzulesen ist. Ja, nach Erreichung des neuen Gleichgewichtes kann mutatis mutandis Formel (7) von neuem als angenähertes Bild des Zusammenhanges von $I$ und $u$ dienen.

**Der Kommutationsvorgang, Funken, Bürstenverschiebung, Wendepole.** Man nehme den Anker aus einer Dynamomaschine heraus und stelle ihn entfernt von jeglichem äußeren Magnetfelde so auf, daß er etwa mit Hilfe einer Drehbank in Rotation gesetzt werden kann. Wird dem Kollektor durch angelegte Bürsten von außen Strom zugeführt, so treten die heftigsten Funken auf, sobald die Bank

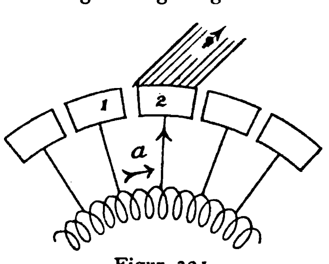


Figur 319.



Figur 320.

in Gang gesetzt wird, obwohl der Strom keine andere Arbeit leistet als die Überwindung des geringen OHMschen Ankerwiderstandes. Die Funken rühren von der Selbstinduktion der jeweils durch die Bürsten kurz geschlossenen Ankerabteilung her. Gerade so liegen die Verhältnisse bei Umlauf des Ankers in der Maschine, sofern nur die Bürsten symmetrisch zum Felde stehen, so daß sich die Kurzschlußwindungen jeweils in der neutralen Zone befinden, wo die Bewegung im Felde für die Stromvorgänge in ihnen ohne Einfluß ist. Bei Stellung Figur 319 fließe durch $a$ der halbe Ankerstrom $\frac{I_A}{2}$ in dem vom



Figur 321.

Pfeile angedeuteten Sinne. Nach der Zeit $\frac{1}{um}$ (wo $u$ Tourenzahl, $m$ Gesamtzahl der Kollektorsegmente) ist die Konfiguration in Figur 321 übergegangen. Dann besteht also in $a$ wieder der Strom $\frac{I_A}{2}$, aber in umgekehrter Richtung. Zwischendurch war Spule $a$ eine Zeitlang kurz geschlossen, Figur 320. Während dieser Zeit

$T\left(<\frac{1}{u\,m}\right)$ würde sich der Hauptstrom $I_A$ jeweils im Verhältnis der Übergangswiderstände $w_{\ddot{u}1}$ und $w_{\ddot{u}2}$ an den Segmenten 1 und 2 teilen und durch $a$ nur der Strom $I_1 - I_2 = 2\,I_1 - I_A$ fließen, falls $a$ keine Selbstinduktion hätte und wir den Ohmschen Widerstand von $a$ gegen die Übergangswiderstände vernachlässigen.

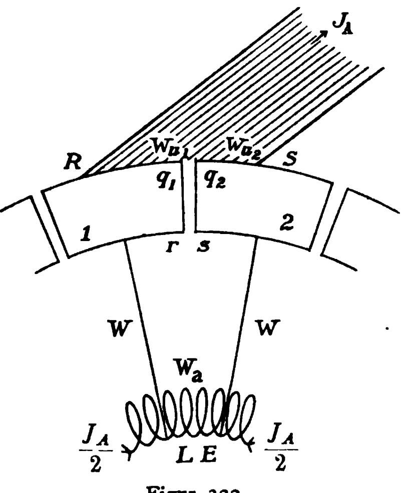
Wegen der Selbstinduktion $L$ wird sich aber tatsächlich über die Hauptstromzweige in dem Kurzschlußkreise ein Extrastrom $i$ lagern. Sein Anfangswert (zu Beginn des Kurzschlusses $t = 0$) ist $\frac{1}{2}\,I_A$ und für den während der Zeit $t = 0$ bis $t = T$ stetig veränderlichen Widerstand des Kurzschlußkreises (von $\infty$ über ein Minimum wieder zu $\infty$) einen Mittelwert $w_m$ eingesetzt, würde er nach dem Gesetze

$$i = \frac{1}{2}\,I_A\,e^{-\frac{w_m}{L}\,t}$$

abklingen, also zur Zeit $t = T$, wo die Bürste das Segment 1 verläßt, den Wert

$$\frac{1}{2}\,I_A\,e^{-\frac{w_m}{L}\,T} \tag{9}$$

haben. Ist dieser Wert noch einigermaßen erheblich, so wird die Stromdichte unter der ablaufenden Bürstenspitze zu groß, die Bürste erhitzt sich und die plötzliche Unterbrechung des stärkeren Stromes von erheblicher elektromotorischer Kraft führt zur Funkenbildung an der Unterbrechungsstelle $K$. Funkenbildung bekämpfen heißt also die Abklingungszeit des Extrastromes gegenüber der Kurzschlußzeit herabdrücken.



Figur 322.

Formel (9) würde zunächst lehren, daß Vermehrung der Sektorenzahl nur dann etwas nützt, wenn nicht zugleich die Auflagebreite $RS$ Figur 322 der Bürsten im selben Maße wie die Lamellenbreite mit verkleinert wird, da ja sonst $T$ und $L$ proportional abnehmen. Dagegen wird die Intensität des Kurzschlußstromes und damit die Stromdichte bei Annäherung an den Zeitpunkt $t = T$ erniedrigt: 1. durch Vergrößerung der Übergangswiderstände pro Kontaktflächeneinheit (Kohlebürsten), 2. durch Erstreckung der Bürstenbreite über mehrere Lamellen, 3. durch Verminderung der Anzahl der Windungen des Ankerdrahtes zwischen zwei benachbarten Kommutatorsektoren (was Feldverstärkung erfordert, wenn die elektromotorische Kraft der Maschine erhalten bleiben soll).

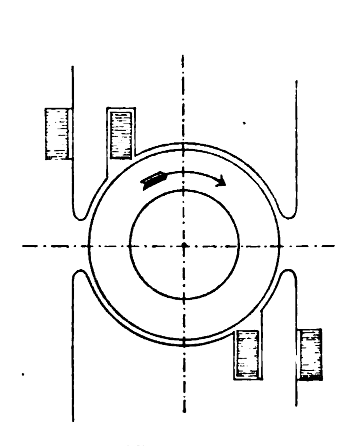
Mit genannten Mitteln allein kommt man jedoch praktisch meist nicht ganz zum Ziel. Es kann vielmehr der für eine funkenlose Kommutation erforderliche rasche zeitliche Verlauf des Kurzschlußstromes nur erhalten werden, wenn sich die kurzgeschlossene Spule in einem solchen magnetischen Felde bewegt, daß die in der Spule induzierte elektromotorische Kraft $E_k$ die Kommutation unterstützt oder, wie sich Kapp auch ausdrückt, daß sie den Draht schon unter der Bürste gleichsam auf den Strom vorbereitet, der in ihm fließt, nachdem er die Bürste verlassen hat.

Einfachstes Verfahren zu Gewinnung einer solchen „kommutierenden elektromotorischen Kraft“ besteht darin, daß man die Bürsten in der Bewegungsrichtung des Ankers vorrückt. Da die Kraftliniendichte am Polrande des Feldmagneten allmählich wächst, so kann man dort stets einen Punkt finden, wo das erwünschte

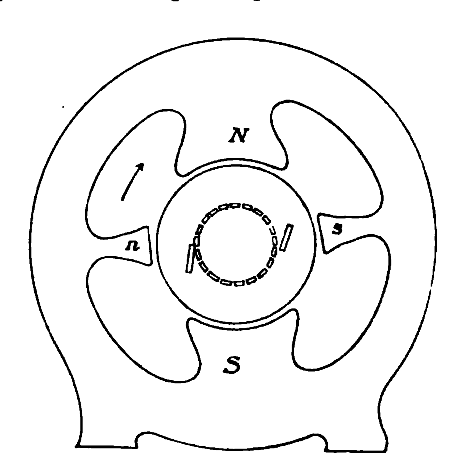
Funkenminimum eintritt. Beim Ringanker wird der Bürstenverschiebungswinkel im allgemeinen größer ausfallen als beim Trommelanker, da bei ihm zur Selbstinduktion der wirksamen Drähte noch diejenige der Drähte auf der inneren Zylinderfläche hinzukommt.

Streng kann die Kompensation der Selbstinduktion immer nur für eine bestimmte Stromstärke sein. Zwar bei Hauptstrommaschinen wird der Bürstenverschiebungswinkel erst stärker mit der Strombelastung schwanken, wenn die Sättigungsgrade von Feld- und Ankereisen sehr verschieden werden. Vorher ändern sich ja das den Extrastrom erzeugende Eigenfeld der kurzgeschlossenen Ankerabteilung und das kommutierende Feld einander annäherungsweise proportional. Bei der Nebenschlußdynamo dagegen bleibt das äußere Feld nahezu konstant, während die kurzschlußelektromotorische Kraft nahezu proportional mit $I_A$ wächst. Hier müßten die Bürsten bei jeder Änderung der Belastung neu eingestellt werden. Dies ist immer unbequem und bei Generatoren für elektrischen Bahnbetrieb, z. B. wegen der Raschheit und Regellosigkeit der Stromschwankungen, direkt ausgeschlossen.

Den Übelstand zu beseitigen sind mannigfache Kunstgriffe ersonnen und durchgeprobt worden. SAYER[1] schaltet in jede Verbindungsleitung zwischen Anker-



Figur 323.




Figur 324.

wickelung und Kommutator eine Hilfsspule ein, die gegen die Hauptspule verschoben ist und die kommutierende elektromotorische Kraft liefern soll. In der Tat lassen sich die Verhältnisse dieser Hilfswickelung auf dem Anker so wählen, daß die Kurzschlußspannung für alle Belastungen bei konstanter Bürstenstellung nahezu kompensiert wird.

In der praktischen Ausführung macht es jedoch weniger Schwierigkeiten, die besondere Kommutationsvorrichtung am ruhenden Feldmagneten anzubringen, statt auf dem rotierenden Anker. Ein dahingehendes Patent war schon 1884 von MENGES genommen worden[2]. 1886 schlug SWINBURNE vor, einen Polzahn am Eintrittsrande des Poles mit einer Hauptstromwickelung zu versehen (Figur 323), um die gleiche Bürstenlage für alle Belastungen beibehalten zu können.

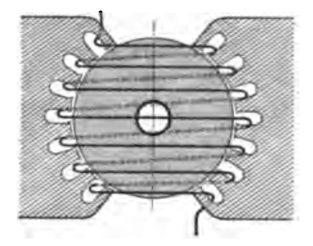
Heute bringt man die Hauptstromwickelung zur Erzeugung eines besonderen kommutierenden Feldes meist auf Hilfspolen an, die symmetrisch zu den Hauptpolen liegen[3]. Figur 324 zeigt die übliche Anordnung einer Maschine mit „Wende-

[1] D. R. P. Nr. 73119 von 1892 und Nr. 78954 von 1893. — [2] D. R. P. Nr. 34465. — [3] Siehe z. B. POHL, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. 509. 1905; **27**. 713. 1906. — E. ARNOLD, ibid. 261.

polen"[1]. Die so erreichte symmetrische Lage der funkenfreien Zone (Bürstenwinkel Null) ist noch von besonderem Werte für Maschinen, die als Motoren bald im einen, bald im anderen Sinne laufen müssen.

Zu nennen wären hier auch die Kompensationsquerwickelungen in Nuten oder Löchern der Feldpolschuhe, wie sie FISCHER-HINNEN[2] und RYAN[3] angegeben haben (Figur 325).

Unsere bisherigen Betrachtungen waren rein qualitativer Natur. Für quantitative Behandlung der Verhältnisse genügt die Einführung des problematischen Widerstandes $w_m$ ebensowenig wie die unstrenge Annahme der Unabhängigkeit der Hauptstromteilung an der Bürste von dem gleichzeitig bestehenden Kurzschlußstrom. Doch macht es keine Schwierigkeiten, KIRCHHOFFS $\Sigma E + \Sigma I w = 0$ für den Kurzschlußstromkreis exakt hinzuschreiben:



Figur 325.

$$L\frac{di}{dt} + w_a i + (w + w_{u1})\left(\frac{I_A}{2} + i\right) - (w + w_{u2})\left(\frac{I_A}{2} - i\right) - E_{(t)} = 0 \quad .$$

Hier ist $w_a$ der Widerstand, $L$ die Selbstinduktion der Spule $a$, $w$ der Widerstand je einer Zuleitung zu den Kollektorsegmenten, $E_{(t)}$ die kommutierende elektromotorische Kraft, $I_A$ der als konstant gegebene Ankerstrom. Die Übergangswiderstände $w_{u1}$ und $w_{u2}$ haben wir den Bürstenauflageflächen $q_1$, $q_2$ umgekehrt proportional zu setzen. Der Auflagefläche $q_1 + q_2 = q =$ constans[4] entspreche der Widerstand $w_u$, dann wird wegen

$$q_1 = \frac{T-t}{T} q \qquad \text{und} \qquad q_2 = \left(1 - \frac{T-t}{T}\right) q$$

$$w_{u1} = \frac{T}{T-t} w_u \qquad \text{und} \qquad w_{u2} = \frac{T}{t} w_u \quad .$$

Die Kurzschlußstromdifferentialgleichung nimmt die Form an

$$L\frac{di}{dt} + (w_a + 2\,w)\,i + w_u \frac{T}{T-t}\left(\frac{I_A}{2} + i\right) - w_u \frac{T}{t}\left(\frac{I_A}{2} - i\right) = E_{(t)} \quad .$$

Als Grenzbedingung ist hinzuzufügen

$$i_{(t=0)} = \frac{I_A}{2} \quad .$$

Was für das Funkenproblem interessiert, ist die Stromdichte

$$\frac{i}{q_{(t)}} = i \frac{T}{(T-t)\,q}$$

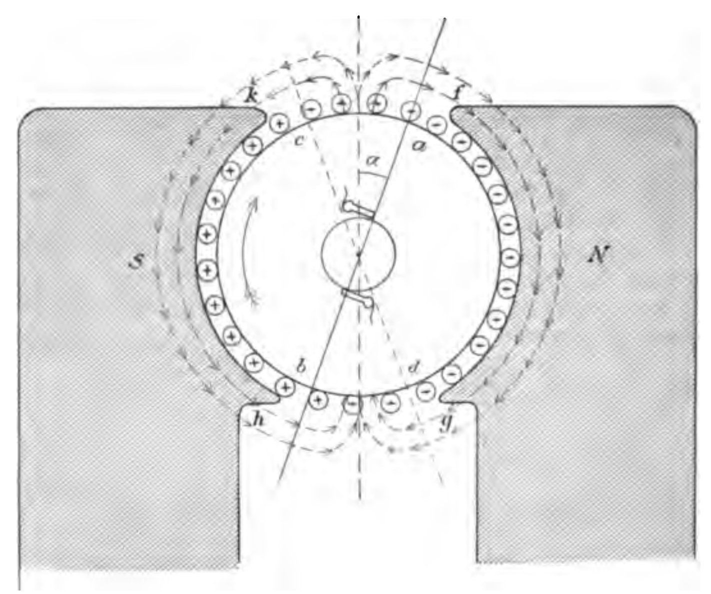
an der ablaufenden Bürste, sowie die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion des Kurzschlußstromes $L\frac{di}{dt}$ bei Annäherung an $t = T$. Während die Integration im Falle Bürstenbreite $\leqq$ Lamellenbreite (wie die obige Gleichung voraussetzt) durchführbar ist, wird die Rechnung beim gleichzeitigen Kurzschlusse mehrerer Spulen sehr verwickelt wegen der gegenseitigen Induktion der kurzgeschlossenen Spulen.

Praktisch kommt zur Beeinflussung der Funkenbildung durch die elektromagnetischen Verhältnisse immer noch die Funken begünstigende Wirkung der mechanischen

[1] Über eine besonders einfache Bewickelungsart für Manchestertypen mit Kommutationspolen siehe FISCHER-HINNEN, Elektrotechn. Zeitschr. **18**. 786. 1897. — [2] Elektrotechn. Zeitschr. **14**. 63. 1893. — [3] The Electrician **34**. 765. 1895. — [4] Von der gesamten Bürstenbasis $RS$ ist der auf der Isolationsschicht zwischen beiden Sektoren aufliegende Teil $rs$ abzuziehen.

Bürstenerschütterungen und diese läßt sich schwer abschätzen. Dem Studium der Stromwendung in Gleichstrommaschinen und der Funkenunterdrückung am Kommutator ist in neuerer Zeit außergewöhnliche Aufmerksamkeit zugewendet worden[1]. Auch experimentell hat man den Verlauf des Kurzschlußstromes untersucht[2] und ARNOLD, der mit seinen Schülern die Führung auf dem Gebiete des Kommutationsproblemes übernommen hat, urteilt: Ebenso, wie man an jeder Dampfmaschine die Arbeitsweise des Dampfes mit Hilfe des Indikatordiagrammes studiert, so wird man in Zukunft den Verlauf der Kommutation an Hand der Kommutationsdiagramme beurteilen müssen.

**Ankerreaktion.** Der Strom in einem Anker mit geschlossener Bewickelung erzeugt im Ankereisen magnetische Pole, die in der Verbindungslinie der Stromabnahmestellen (*a b* Figur 326) liegen. Das von den Ankeramperewindungen herrührende Feld mit dem Hauptfelde einfach vektoriell zusammenzusetzen, hieße



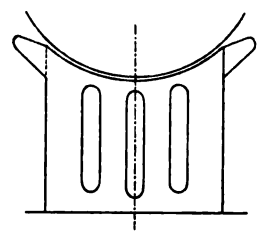

Figur 326.

den Einfluß der Verteilung der Eisenmassen der Maschinen ganz vernachlässigen. Besser kann den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung getragen werden, wenn wir ESSONs Vorgang folgen und die Ankerwindungen nach der Art ihrer magnetisierenden Wirkung für die Betrachtung in zwei Gruppen teilen, in die Querwindungen von *a* bis *d* und *b* bis *c* und in die den Bereich des doppelten Verschiebungswinkels $\alpha$ einnehmenden Gegenwindungen *c a* und *b d*. Die magnetomotorische Kraft der letzteren hat die gleiche Richtung, aber den umgekehrten Sinn wie die von der Feldmagnetwickelung herrührenden Kraftlinien. Die Gegenamperewindungen sind darum einfach mit negativem Vorzeichen in die magneto-

[1] E. THOMAS, The Electrician **40**. 557. 1898. — FISCHER-HINNEN, Elektrotechn. Zeitschr. **19**. 850. 1898. — E. ARNOLD und G. MIE, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 97. 1899. — G. KAPP, ibid. 32. — H. M. HOBART, Journ. Inst. El. Eng. **31**. 170. 1901. — A. ROTHERT, Elektrotechn. Zeitschr. **23**. 309. 1902. — K. PICHELMAYER, ibid. **24**. 1081. 1903. — G. MIE, Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys. **53**. 37. 1906. — E. ARNOLD und LA COUR, Samml. elektrotechn. Vortr. **9**. Heft 9/10; Die Kommutation usw. bei Gleichstrom und Wechselstrommaschinen, Stuttgart 1906. — A. RAILING, ibid. **4**. Über Kommutierungsvorgänge und zusätzliche Bürstenverluste, 1903. — H. LINSEMANN (Graphische Behandlung des Problems), Elektrotechn. Zeitschr. **28**. 506. 1907. — E. ARNOLD und E. PFIFFNER. ibid. 263. — R. RUDENBERG, Samml. elektrotechn. Vortr. **10**. Stuttgart 1907. — [2] H. EVERET und H. PEAKE 1989; Electrician 22, April 1898; L'éctair électr. **16**. 337. 1898.

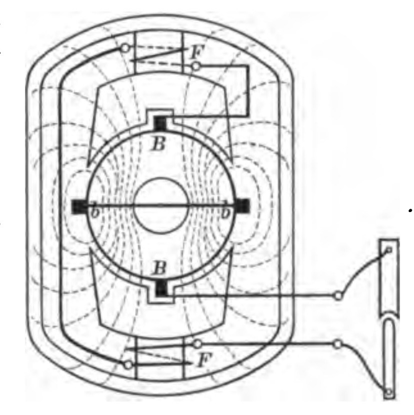
motorische Kraft des Gesamtkreises aufzunehmen. Sie verschwinden, sobald durch Wendepole oder sonstige Vorrichtungen gestattet ist, ohne Bürstenverschiebung zu arbeiten.

Durch die Querwindungen wird eine zur Verbindungslinie der Feldpole senkrechte Magnetisierung des Ankereisens erzeugt. Die zwischen *c* und *a* in Luft austretenden Kraftlinien wählen als Pfad geringsten Widerstandes zum Südpole *bd* den Weg durch das Eisen der Feldmagnetpolenden, wie in der Figur durch die gestrichelten Linien angedeutet ist. Dadurch wird der Magnetismus in und vor den Polkanten *f* und *h* geschwächt, in und vor *g* und *k* verstärkt. Letzteres kann unzweckmäßige (die Permeabilität vermindernde) lokale Sättigung des Eisens bedingen. Ersteres dagegen hat den Übelstand, daß die Bürstenverschiebung für funkenfreien Betrieb größer sein muß, als es ohne die Feldschwächung am kommutierenden Polrande der Fall wäre, und die Vergrößerung des Winkels $\alpha$ vermehrt ihrerseits wieder unliebsam die entmagnetisierenden Gegenwindungen. Man kann der schädlichen Feldverzerrung durch die Quermagnetisierung mit Hilfe passend gestalteter Polschuhe entgegenarbeiten. Bei der Form Figur 327 z. B. ist der magnetische Widerstand für den Querfluß durch Luftschlitze vergrößert. Noch wirksamer sind natürlich Kompensationsquerwickelungen auf den Feldpolen, von denen oben beim Kommutationsproblem die Rede gewesen ist.



Figur 327.

**Die Rosenbergsche Dynamomaschine.** Empfindet man im allgemeinen das vom Ankerstrom erzeugte, zu dem Primärfelde senkrecht gerichtete Querfeld als störend, so wird es bei einer neueren Klasse von Maschinen[1] umgekehrt zur Erzeugung der nutzbaren Spannung benutzt. Das Prinzip der Konstruktion und Wirkungsweise ist aus Figur 328 zu ersehen. Die Bürsten *bb* sind kurz geschlossen und dienen lediglich dazu, um durch die Ankerrückwirkung des sie durchfließenden Stromes (des Hilfsstromes) den Anker in einer zu den ursprünglichen Kraftlinien senkrechten Richtung zu magnetisieren. Das so entstehende Querfeld (Sekundärfeld) erzeugt erst im Anker die Gebrauchsspannung, und zwar sind die Stromabnahmestellen, die Bürsten *BB*, wieder um 90° gegen die Hilfsbürsten *bb* versetzt. Der den Bürsten *BB* entnommene Nutzstrom magnetisiert seinerseits den Anker in genau entgegengesetzter Richtung wie die Feldmagnetwickelungen *FF*. Nur die Differenz zwischen dem ursprünglichen Magnetfeld (Primärfeld) und dem Gegenfeld des Ankers (Tertiärfeld) bleibt wirksam, um die zur Erzeugung des Hilfstromes nötige elektromotorische Kraft zu induzieren.




Figur 328.

Die Maschinen dieser Art haben offenbar die Eigentümlichkeit, daß die Polarität des von ihnen gelieferten Stromes unabhängig von der Drehrichtung ist. Außerdem ändert sich die Stromstärke in weiten Grenzen nur wenig mit der Tourenzahl. Dies macht sie vorzüglich geeignet für Stromerzeugung in Eisenbahnzügen bei Antrieb durch die Wagenachsen. In der Tat war es das Problem der elektrischen Zugbeleuchtung, welches E. Rosenberg zu seiner Maschinenkonstruktion geführt hat. Aber auch für Lichtbogenschweißung hat er Dynamos auf seinem Prinzipe bauen lassen.

[1] E. Rosenberg, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. 393. 1905; **27**. 1035. 1906.

**Die dynamischen Charakteristiken.** Um ein Urteil über Verwendbarkeit zu bestimmten Zwecken und über den Umfang der Leistungsfähigkeit einer Dynamo zu erlangen, eignet sich als bestes Veranschaulichungsmittel des Verhaltens der Maschine im Betrieb die sogenannte äußere Charakteristik

$$P = f(I) \quad ,$$

d. h. die Kurve, deren Abszissen die Angaben $I$ eines in den äußeren Stromkreis eingeschalteten Amperemeters, deren Ordinaten die zugehörigen Angaben $P$ eines an die Maschinenklemmen angelegten Voltmeters darstellen. Figuren 329—331 sind Schemata der äußeren Charakteristiken von Hauptstrommaschine (329), Nebenschlußmaschine (330) und einer für möglichst konstante Betriebsspannung gewickelten Verbundmaschine (331).



Figur 329.

Die trigonometrische Tangente des Leitstrahles vom Koordinatenanfangspunkte nach einem Punkte $S$ der Kurve oder die Strecke $ab$, die dieser Leitstrahl auf der Ordinate $I = 1$ abschneidet, stellt den Widerstand des äußeren Stromkreises

$$w = \frac{P}{I}$$

bei der betreffenden Betriebsweise dar. Offenem Stromkreise entspricht vertikaler Leitstrahl, horizontalem Leitstrahl Kurzschluß der Maschinenklemmen.



Figur 330.

Man sieht, wie bei der Serienmaschine der Strom mit abnehmendem äußerem Widerstande dauernd steigt, während die Klemmenspannung zunächst stark zunimmt, um später nach Passieren eines mehr oder minder flachen Maximums wieder zu sinken. Die Nebenschlußmaschine zeigt bei stetiger Verminderung des äußeren Widerstandes von $\infty$ bis Null anfangs langsamen, später rascheren Spannungsabfall, während der Strom zunimmt. Bei einem kritischen Werte des äußeren Widerstandes beginnen Strom wie Spannung in einem labilen Aste mit dem Widerstande rapid zu sinken. Bei Kurzschluß wird die Maschine praktisch stromlos, es bleibt nur der vom remanenten Magnetismus herrührende Anteil. Die Compound-Maschinenkurve läßt eine näherungsweise Kompensation des entgegengesetzten Einflusses ihrer beiden Wickelungen erkennen.

Einzeichnung des gleichseitigen Hyperbelnetzes konstanter Leistungen

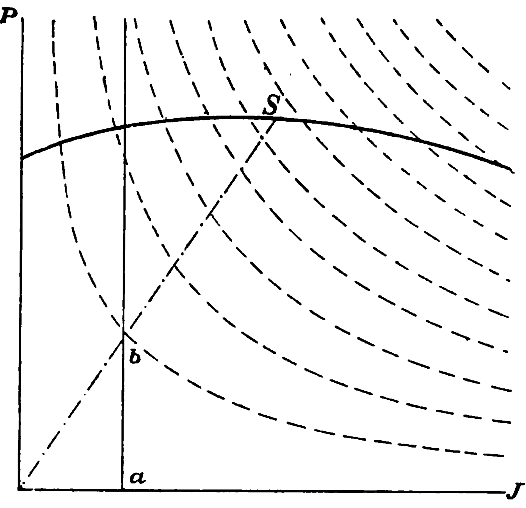
$$P \cdot I = \text{const.}$$

erlaubt überdies die von der Maschine abgegebene elektrische Arbeit für die verschiedenen Punkte der Charakteristik bequem abzuschätzen und auch in dieser Hinsicht den Einfluß des äußeren Widerstandes zu diskutieren. Um ferner die in der Dynamo erzeugte Gesamtleistung

$$E \cdot i_A$$

und das Güteverhältnis

$$\gamma = \frac{PI}{EI_A}$$



Figur 331.

in ihrer Abhängigkeit von der Betriebsweise beurteilen zu können, fügt man in die Figur zur äußeren Charakteristik noch die „innere Charakteristik"

$$E = \varphi(I_A) \quad .$$

Die Berechnung beider Kurven auseinander, d. h. von $E$ und $I_A$ aus $P$ und $I$, geschieht bei der Hauptstrommaschine gemäß den Beziehungen

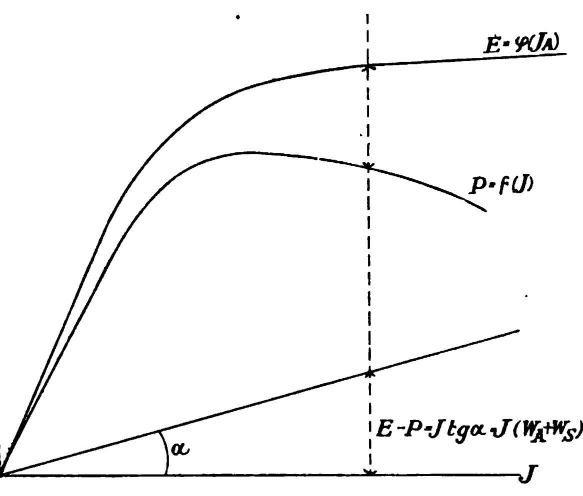
$$\begin{cases} I_A = I \\ E = P + I(w_A + w_S) \end{cases} ,$$

bei der Nebenschlußmaschine mittels der Formeln

$$\begin{cases} I_A = I + \dfrac{P}{w_N} \\ E = P + \left(I + \dfrac{P}{w_N}\right) w_A \end{cases} .$$

(Siehe S. 734.) An Stelle der Rechnung können auch die den Gleichungen entsprechenden graphischen Konstruktionen treten:

Bei einer Hauptstromdynamo erhält man die innere Charakteristik, wenn man die Ordinaten der äußeren Charakteristik um die den gleichen Abszissen entsprechenden Ordinaten einer geraden Linie vergrößert, die im Winkel



Figur 332.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{E - P}{I} = \operatorname{arc\,tg}(w_A + w_S)$$

gegen die Abszissenachse geneigt durch den Koordinatenanfangspunkt gezogen ist (Figur 332). Kürzer ausgedrückt: die in der Ordinatenrichtung um den Winkel

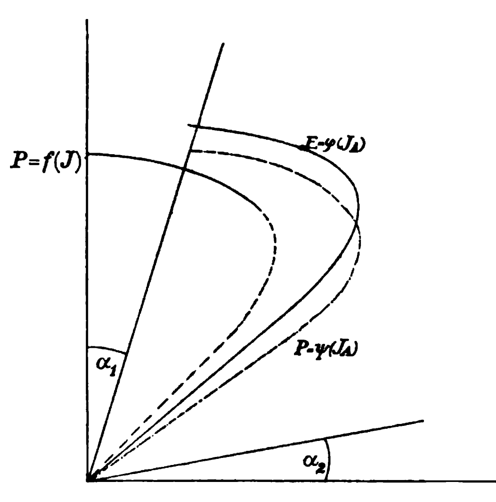
$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(w_A + w_S)$ gescherte äußere Charakteristik stellt die innere Charakteristik dar.

Analog ist bei einer Nebenschlußmaschine zum Übergange von der äußeren zur inneren Charakteristik (Figur 333) die äußere Charakteristik zunächst in der Abszissenrichtung um den Winkel

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{I_A - I}{P} = \operatorname{arc\,cot} w_N$$

zu scheren und die so erhaltene Kurve dann in der Ordinatenrichtung um den Scherungswinkel

$$\alpha_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{E - P}{I_A} = \operatorname{arc\,tg} w_A \quad .$$




Figur 333.

Umgekehrte Scherungen, d. h. Scherungen um $-\alpha$ bzw. $-\alpha_1$ und $-\alpha_2$, verwandeln natürlich eine innere in die entsprechende äußere Charakteristik.

Vergleich der Kurven 330, 331 und 332 läßt verstehen, warum Hauptstrommaschinen als Generatoren selten verwendet werden. Eigentlich fast nur für Kraftübertragung bei konstanter Stromstärke. Hier regulieren sie im Falle konstanten Drehungsmomentes der Antriebsmaschine (Turbine, Dampfmaschine ohne Regulator) ihre Tourenzahl innerhalb ziemlich weiter Grenzen automatisch.

Die meisten Betriebe und alle Mehrleitersystem-Zentralen verlangen konstante Netzspannung unabhängig von der Stromstärke. Dies kann mit einer Nebenschlußdynamo erreicht werden, wenn in deren Erregerwicklungen ein Regulierwiderstand eingeschaltet ist, der durch automatische Vorrichtungen oder durch einen Wärter bedient wird.

Bei kleineren Anlagen wäre dies zu kostspielig und bei elektrischem Bahnbetrieb erfolgen die Belastungsschwankungen so rasch, daß Nachregulierung des Nebenschlußwiderstandes nicht ausführbar ist. Für diese Fälle sind Verbunddynamos am Platze. Man bemißt die Zahl der Hauptstromwindungen so, daß die Spannung für Vollbelastung gleich der für Leerlauf wird. Die zwischen beiden Punkten bestehen bleibende schwache Krümmung der Kurve hat man wohl noch dadurch weiter abzuflachen gewußt, daß der Hauptstromspule ein Eisenwiderstand parallel geschaltet wurde, der bei höheren Stromstärken stark anwächst, wodurch die Compoundcharakteristik für stärkere Belastungen gehoben wird.

**Vorausberechnung** bzw. graphische Vorausbestimmung des Verhaltens einer Gleichstrommaschine im Betrieb. Die aus Gleichung (1) und (4) S. 735 u. 736 erhaltene Formel für $E_0$, die elektromotorische Kraft bei stromlosem Anker in ihrer Abhängigkeit vom Erregerstrome $I_F$

$$E_0 = \frac{4\pi N z u}{600} \cdot \frac{I_F}{\dfrac{l_A}{q_A \mu_A} + \dfrac{2\delta}{q_\delta} + \nu \dfrac{l_F}{q_F \mu_F}} \cdot 10^{-8} = f(I_F \cdot z) = \psi(I_F) \quad ,$$

liefert die statische Charakteristik als Funktion der Maschinenabmessungen und der Permeabilitätskurven der Eisenmaterialien. Die Überführung einer inneren in eine äußere dynamische Charakteristik haben wir auch bereits erledigt. Es gilt also nur noch die innere dynamische Charakteristik $E = \varphi(I_A)$ aus der jetzt als gegeben angenommenen statischen Charakteristik $E_0 = \psi(I_F)$ abzuleiten.

Hauptstrommaschine. Hier ist wegen $I_F = I_A$ nur die Ankerrückwirkung auf das Feld in die statische Charakteristik einzuführen. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe der Gegenwindungen $z_g$, die ihrerseits aus Bürstenverschiebungswinkel und Ankerwindungszahl zu berechnen ($z_g = z_A \cdot \sin\alpha$) bzw. zu schätzen sind. Es wird

$$E = f[I_A \cdot (z - z_g)] = \varphi(I_A) \quad ,$$

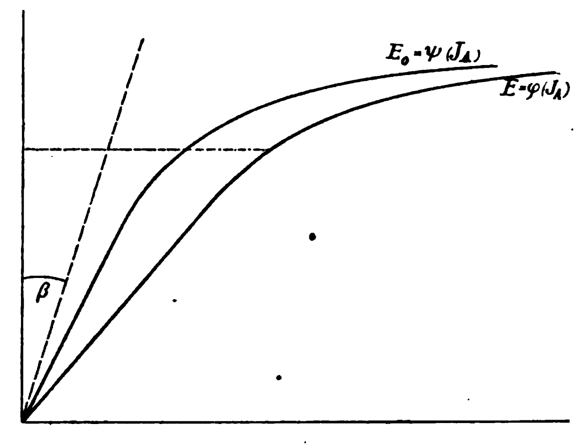
d. h. aus der Kurve

$$E_0 = f(I_A \cdot z) = \psi(I_A)$$

wird $E = \varphi(I_A)$ erhalten, wenn man parallel der Abszisse um den Winkel

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_g}{z} \left(= \operatorname{arc\,tg} \frac{z_A \sin\alpha}{z}\right)$$

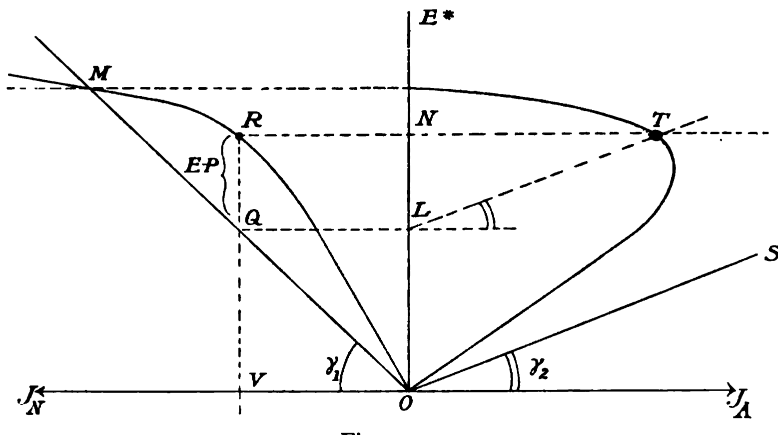
schert (Figur 334).




Figur 334.

Nebenschlußdynamo. Wir sehen zunächst von der Ankerreaktion ab, so daß die angenäherte elektromotorische Kraft $E^* = E_0$ wird und haben in $E_0 = \psi(I_F)$ nur $I_F$ durch $I_A$ auszudrücken gemäß der Beziehungen von S. 734

$$I_A = \frac{E_0 - P}{w_A} = \frac{E_0 - I_N w_N}{w_A} \quad ,$$




Figur 335.

wo für $I_F$ der dortigen Bezeichnungsweise entsprechend $I_N$ (Nebenschlußstromstärke) geschrieben ist. Die Anwendung dieser Formel führt zur einfachen Konstruktion Figur 335, die wohl zuerst von Silv. Thompson angegeben worden ist: $ORM$ sei die statische Charakteristik oder die Magnetisierungskurve. Die Hilfslinien $OM$ und $OS$ bilden mit den Abszissenachsen die Winkel

$$\gamma_1 = \operatorname{arc\,tg} w_N \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \operatorname{arc\,tg} w_A \quad .$$

Ziehe jetzt durch Punkt $R$ und durch den Schnittpunkt $Q$ von $RV$ mit $OM$ horizontale Gerade, darauf durch $L$ eine Parallele zu $OS$. Alsdann ist Schnittpunkt $T$ der dem Punkte $R$ der statischen Charakteristik entsprechende Punkt der $E^* = \varphi(I_A)$-Kurve.

Die Rückwirkung des Ankerstromes $I_A$ auf das Feld bewirkt nun, daß die elektromotorische Kraft $E$ um $C \cdot I_A \cdot z_g$ Volt geringer als $E^*$ ausfällt. $C$ die pro Zusatzamperewindung eintretende Änderung der elektromotorischen Kraft folgt wieder aus der statischen Charakteristik. Die $E^*$-Kurve geht also durch Scherung parallel der Ordinatenachse um den Winkel

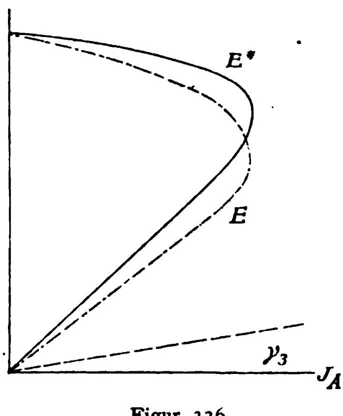
$$-\gamma_3 = -\operatorname{arc\,tg}(C \cdot z_g)$$

(Figur 336) über in die gesuchte Charakteristik

$$E = \varphi(I_A) \quad .$$

Berechnung oder Konstruktion einer Verbunddynamocharakteristik ist entsprechend umständlicher, bietet aber prinzipiell nichts Neues.

Dieselben Grundsätze und Formeln, welche für eine gegebene Maschine auf deren Verhalten im Betrieb schließen lassen, finden natürlich auch Anwendung, wenn für gegebene Betriebsforderungen eine passende Maschine konstruiert werden soll. Im Mittelpunkte der Betrachtungen hat auch bei solcher Projektierungsarbeit der Kraftfluß zu stehen. Einerseits kommt die Forderung möglichst geringen Materialaufwandes hinzu, andererseits die Forderung, daß sich kein Maschinenteil zu sehr erwärmen darf. Außer den Jouleschen Wärmeverlusten, die im elektrischen Güteverhältnis $\frac{P \cdot I}{E \cdot I_A}$ ihren Ausdruck finden, sind noch die Hysteresis im Ankereisen, die Wirbelströme und die mechanische Reibung der bewegten Teile (auch die der Bürsten) zu berücksichtigen. Wird die Summe dieser Verluste mit $v$ bezeichnet, so nennt man das Verhältnis der von der Maschine geleisteten äußeren elektrischen Arbeit zu der durch die Maschine verbrauchten mechanischen Arbeit



Figur 336.

$$\eta = \frac{PI}{E \cdot I_A + v}$$

den elektrischen Wirkungsgrad. Er geht bei großen Maschinen über 90%, während er für Dynamos von einem kleinen Bruchteil Pferdekraft bis 60% sinken kann.

Nähere Angaben über die beim Entwurfe von Dynamomaschinen zu befolgenden Methoden und die richtige Bemessung der verschiedentlichen unvermeidlichen Verluste wird man in einem Handbuche der Physik nicht suchen[1]. Die Kraftliniendichte im Anker beträgt jetzt meist 10—16 Tausend Gauß. Bei 10—15 m/sec Peripheriegeschwindigkeit rechnet man pro Watt Verlust 5—7 qcm Ankeroberfläche. Doch hängt die Strombelastbarkeit einer Maschine sehr von den Ventilationsverhältnissen im einzelnen ab.

### Wechselstrom- und Drehstrommaschinen[2].

Im Anker jeder gewöhnlichen Gleichstromdynamo fließt Wechselstrom. Ihn als solchen nach außen zu leiten, braucht man nur zwei Kollektorlamellen, die

[1] Vgl. z. B. die an Arnolds „Konstruktionstafeln für Dynamomaschinenbau" anknüpfenden Diskussionen: G. Kapp, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 186. 1903. — E. Arnold, ibid. 285. — A. Rothert, ibid. 404. — Beachte auch H. Hobart, Journ. Inst. El. Eng. **31**. 170. 1901. — H. Mavor, ibid. **31**. 218. 1901 und **32**. 473. 1902. — W. Esson, ibid. **32**. 929. 1902. — F. Scott, ibid. 362. — [2] Heinkes Handbuch **4**. — F. Niethammer, Ein- und Mehrphasen-Wechselstromerzeuger, 2. Aufl., Leipzig 1906. — E. Arnold und I. L. Lacour, Die Synchronen-Wechselstrommaschinen. Berlin 1904.

zueinander wie eine positive zu einer negativen Gleichstrombürste liegen mit Metallringen zu verbinden und auf diesen Ringen Wechselstromabnehmer schleifen zu lassen. Die Periodenzahl $T$ des Wechselstromes wird gleich dem Produkt aus Umdrehungszahl und Anzahl der Polpaare, die effektive Spannungsdifferenz[1]

$$P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p_{(t)}^2 \, dt}$$

an den Schleifringen beträgt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gleich 0,707 der Gleichstromspannung der Maschine, da die maximale Spannungsdifferenz gleich der des Gleichstromes sein muß, d. h.

$$p_{(t)} = P \sin \frac{2\pi}{T} t \quad .$$

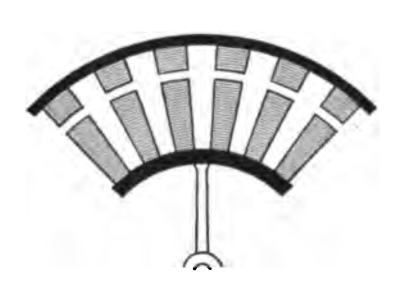
Eine in dieser Weise für Laboratoriumszwecke improvisierte Wechselstrommaschine unterscheidet sich von den üblichen Wechselstromgeneratoren der heutigen Technik besonders in zwei Punkten. Die Felderregung geschieht bei den Wechselstromdynamos der Technik durch eine besondere Gleichstrommaschine oder durch Akkumulatoren meist geringerer Spannung, als die Spannung des zu erzeugenden Wechselstroms beträgt. Denn Wechselstrom findet im allgemeinen nur bei Anlagen höherer Spannung Verwendung. (Siehe unter Leitung und Verteilung S. 784.) Sodann erreicht man bei Wechselstromentnahme aus einer für Gleichstromlieferung gebauten Maschine wegen zu geringer Polzahl meist nicht die gebräuchliche Frequenz. Diese beträgt auf dem Kontinent jetzt 50 Perioden in der Sekunde[2]. In England geht man bis auf das Doppelte, in Amerika bis 140. Die Niagaraanlage mit 25 Perioden steht ganz vereinzelt da. Für ruhige elektrische Beleuchtung kann jedenfalls nicht unter die Periodenzahl 40 gegangen werden, und bei einer zweipoligen Maschine würde das schon 2400 Umdrehungen in der Minute erfordern, was die selbst bei den kleinsten Dynamos aus mechanischen Gründen zulässige Grenze weit übersteigt. Alle eigentlichen Wechselstrommaschinen haben darum mindestens zwei Polpaare, die großen Maschinen sind sehr vielpolig (bis weit über 100).

Eine Ausnahme machen nur die mit Dampfturbinen direkt gekuppelten Maschinen, die sogenannten Turbogeneratoren[3]. Hier können bei zweipoligem Felde 50 Perioden durch 3000 Touren pro Minute erreicht werden. Natürlich wählt man bei derartigen Maschinen wegen der Zentrifugalkraft die Längsdimensionen möglichst groß, die Querdimensionen der rotierenden Teile möglichst klein.

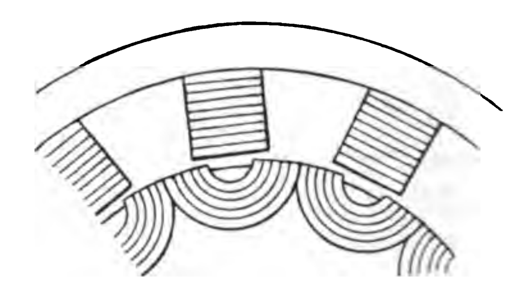
**Konstruktionstypen.** Der Formenreichtum ist bei den noch heute ausgeführten Wechselstrommaschinen viel größer als bei den Generatoren für Gleichstrom. Außer der Vielpoligkeit spricht hier der Umstand mit, daß zur Wechselstromerzeugung die Ankerwicklungen nicht in möglichst kleinen Abteilungen stetig über die ganze Peripherie verteilt zu werden brauchen, sondern daß es genügt, wenn die Zahl der Ankerspulen gleich der Zahl der Feldpole ist. Außer dem Ring und Trommelanker kann demgemäß die Stern-, Pol- oder Zacken-

[1] Die Bezeichnung „effektiv" für die geometrischen Mittelwerte von Spannungs- und Stromstärke wurde auf dem Pariser Kongreß 1889 angenommen. — [2] Über die wissenschaftliche Verwendbarkeit einer 32poligen Maschine von 600 Perioden pro Sekunde siehe W. Wien, Phys. Zeitschr. **4**. 586. 1903. — [3] Zeitschr. f. Elektrotechnik, 96. Wien 1904. — F. Niethammer, Zeitschr. Verein. deutsch. Ingenieure **49**. 762. 1905; Turbodynamos und verwandte Maschinen, Zürich 1906. — F. Tischendörfer, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. 799. 1905. — A. Heyland, Elektrotechn. Zeitschr. **28**. 329. 1907. Auch mit Turbodynamos für Gleichstrom sind, nebenbei bemerkt, schon praktische Erfolge erzielt worden (z. B. von Brown, Boweri & Co.).

ankerform Figur 337 gewählt werden. Sind bei ihr die Spulen in radialer Richtung wenig ausgedehnt, so geht sie stetig in Trommelwicklung, Figur 338, über. Sogenannte Scheibenanker, bei denen die Achsen der flachen Spulen der Drehungsachse parallel liegen und die oft ohne Eisen ausgeführt wurden[1], dagegen baut

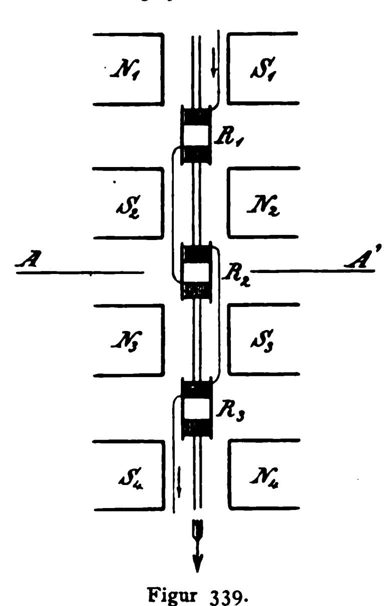


Figur 337.



Figur 338.

man in Europa wenigstens nicht mehr, wohl aber existieren Exemplare des Modells SIEMENS & HALSKE vom Jahre 1878 mit eisenfreiem Scheibenanker noch vielfach in physikalischen Instituten und sind der gut sinusförmigen Spannungskurve wegen für viele Wechselstromdemonstrationsversuche in der Tat besonders geeignete Maschinen. Außenpol- und Innenpolanordnung findet man bei den heute verbreiteten Typen in gleicher Weise vertreten.



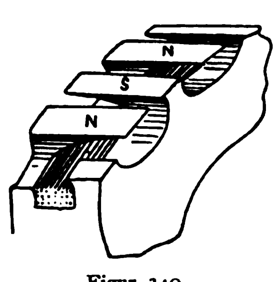

Figur 339.

Statt des Ankers läßt man vielfach den Feldmagnet umlaufen. Der Anker ruht dann also und dies hat bei hoher Spannung den Vorteil, daß die Ankerdrähte leichter isoliert werden können, da sie nicht gegen die Zentrifugalkraft gesichert zu werden brauchen. Den Anker bildet man überdies meist als Lochanker, d. h. die Ankerdrähte werden durch vollständige Einbettung in das unterteilte Eisen auch dem Einfluß der elektrodynamischen Kräfte entzogen[2]. Während für den Wechselstromkreis zugleich mit den bewegten Teilen auch Schleifringe und Bürsten wegfallen, muß jetzt dem rotierenden Feldmagnete der Gleichstrom durch Schleifringe zugeführt werden.

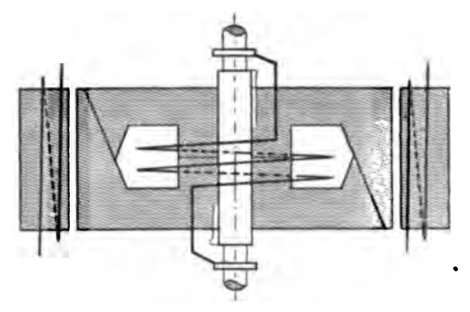
Um bei vielpoligem Magnetfelde nicht für jedes Polpaar besonderer Erregerspulen zu bedürfen, hat man Kunstgriffe wie den aus Figur 340 und 341 ersichtlichen angewandt.

Oder aber man verzichtet darauf, daß das den Anker durchsetzende Feld bei der Rotation das Vorzeigen wechselt. Der Wechselstrom wird vielmehr dadurch erzeugt, daß die Ankerspulen abwechselnd in sehr starke und in sehr schwache Felder derselben Polarität kommen. Figur 342 stellt eine solche Gleichpoltype mit innerem Feldsterne im Querschnitt dar. Alle Nordpole liegen auf der einen, die Südpole auf der anderen Seite und werden durch eine gemeinsame Spule erregt.

[1] Siehe Figur 339. — [2] Vide H. DU BOIS, Wied. Ann. 65. 25. 1898.

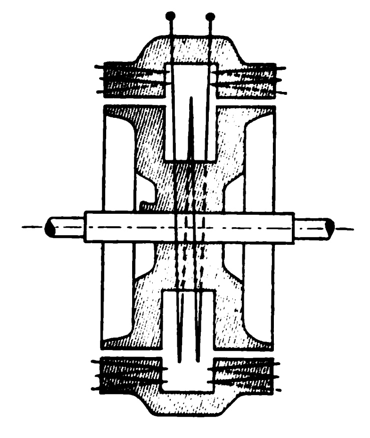



Figur 340.



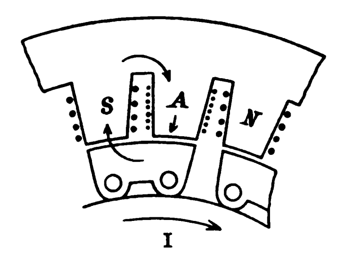
Figur 341.

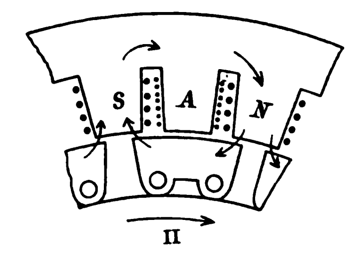
Endlich baut man Wechselstrommaschinen, bei denen sowohl Feld- als Ankerwicklungen feststehen und nur Eisenteile ohne Bewicklung rotieren, die sogenannten Induktortypen. Bei ihnen wird durch die Bewegung der Eisenmassen entweder der magnetische Widerstand periodisch geändert oder der Verlauf der Kraftlinien in wechselnde Bahnen gelenkt. Figur 343 sind Schemata einer Induktortype der letzteren Gattung. $N$ und $S$ stellen Feldpolzacken konstanter Polarität dar, $A$ trägt eine Ankerspule und ist bei Stellung I Nordpol, bei Stellung III Südpol.

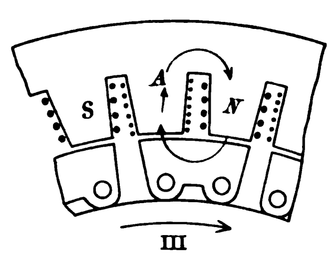


Figur 342.

**Mehrphasenstromerzeugung.** Unter Mehrphasenstrom versteht man ein System zugleich erzeugter Wechselströme, welche zeitlich um einen bestimmten Bruchteil der vollen Periode gegeneinander verschoben sind. Über die Verwendung von Mehrphasenstrom zum Zwecke der Kraftübertragung siehe unten S. 768. $Z$ gleiche um $\frac{1}{Z}$



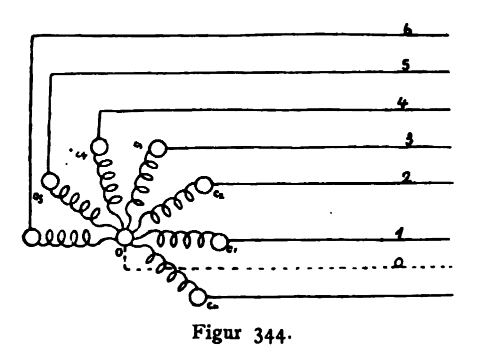




Figur 343.

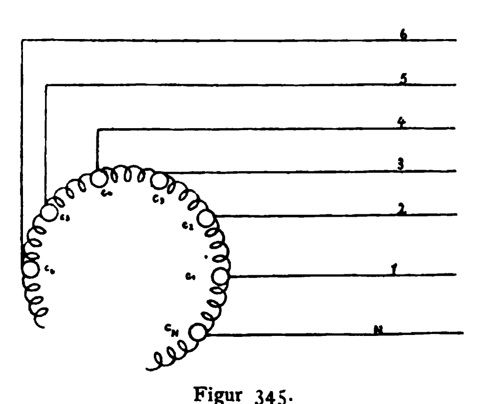
Periode verschobene Wechselspannungen erhält man durch $Z$ auf dem Anker einer Wechselstrommaschine angebrachte kongruente Wicklungen, wenn deren

entsprechende Teile in $\frac{1}{Z}$ des Winkelabstandes aufeinanderfolgender gleichnamiger Feldpole voneinander geführt sind. Zur Stromabnahme wären $2\,Z$ Schleifringe und $2\,Z$ Leitungsdrähte nötig. Doch kann auch ein gemeinsamer Draht für alle $Z$ Ströme als Rückleitung dienen, analog wie man in der Telegraphie die Erde als gemeinsame Rückleitung benutzt. Die Zahl der Schleifringe und Leitungsdrähte reduziert sich damit auf $Z + 1$. Sofern infolge von Symmetrie des Ankers und des Feldes die Summe aller $Z$ instantanen elektromotorischen Kräfte gleich Null ist, so gilt dies bei gleicher Belastung der $Z$ Stromkreise auch für die $Z$ Ströme. Der gemeinsame Rückleiter einer solchen Sternverkettung Figur 344 wird also stromlos und kann darum, ohne an der Strom- und Spannungsverteilung irgend etwas zu ändern, auch noch fortgelassen werden.

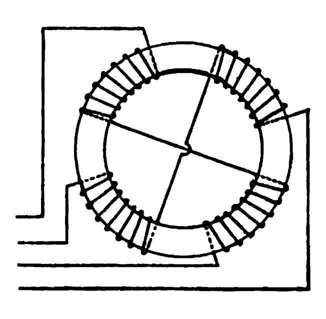


Figur 344.

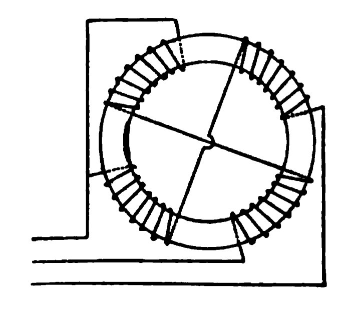
Eine zweite Methode, $Z$ Wechselströme, deren Augenblickswertsumme Null beträgt, mittels nur $Z$ Drähten fortzuleiten, besteht darin, daß man die Rückleitung jeder Phase mit der Hinleitung der folgenden zusammenfallen läßt, die elektromotorischen Kräfte also in Serie geschaltet zu einem Ringe schließt, Figur 345. Über Klassifikation und eingehende Behandlung allgemeiner Mehrphasensysteme muß auf STEINMETZ, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen, Deutsche Ausgabe Berlin 1900, Kapitel 23—30, verwiesen werden[1]. Die dort angewandte konsequente Terminologie findet man allerdings nicht von allen Autoren befolgt. Die Unsicherheit des Sprachgebrauches bezieht sich darauf, ob man um eine halbe Periode gegeneinander verschobene Ströme als zwei Phasen bezeichnen will. Praktische Anwendung finden im allgemeinen nur Zwei- und Dreiphasenmaschinen.



Figur 345.



Figur 346.

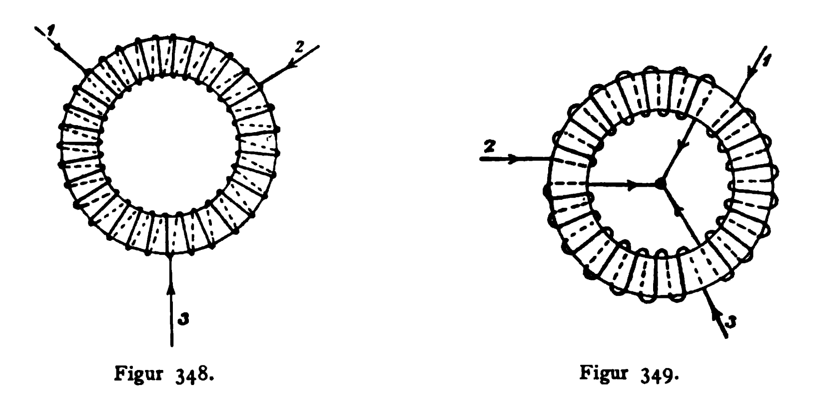


Figur 347.

Erstere: für unsymmetrische Zweiphasensysteme mit um ein Viertel Periode (90°) differierenden elektromotorischen Kräften, entweder unverkettet (Figur 346) für

[1] Siehe auch E. ARNOLD, Die Wicklungen der Wechselstrommaschinen. Berlin 1904.

vier Leitungen oder verkettet (Figur 347) für deren drei. Symmetrischer Dreiphasenstrom — oft Drehstrom schlechthin genannt — mit 120° Phasenverschiebung wird in Stern- (Figur 348) sowohl als in Dreieckschaltung (Figur 349) erzeugt. Erstere Figur zeigt auch direkt die Anordnung, wenn man einer zweipoligen Gleichstrommaschine Drehstrom entnehmen will. Es sind drei Schleifringe mit




Figur 348. Figur 349.

drei um ein Drittel Umfang voneinander abstehenden Kommutatorpunkten zu verbinden. Als effektive Spannungsdifferenz erhält man so für je zwei Ringe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{3} \cdot E_g = 0{,}612\, E_g \quad ,$$

wenn $E_g$ die elektromotorische Kraft zwischen den Gleichstrombürsten bezeichnet. Über das sogenannte monozyklische System, das sich aber praktisch nicht besonders bewährt zu haben scheint, siehe unten Seite 786.

## Verhalten im Betrieb.

**Elektromotorische Kraft.** Es sei $\Phi$ der aus Erregungsamperewindungen und magnetischem Widerstande unter Berücksichtigung der Streuung zu berechnende Kraftfluß per Pol[1], die Polzahl sei $\Pi$, $u$ die Umdrehungszahl in der Minute, $z$ die Gesamtzahl der auf dem Anker wirksamen Drähte $= 2\,a\,m$, falls es sich um $m$ hintereinandergeschaltete Spulen von je $a$ Windungen handelt. Diese Daten genügen jedoch im allgemeinen nicht ohne weiteres zur Bestimmung des Effektivwertes $E_{\text{eff}}$ der elektromotorischen Kraft einer Wechselstrommaschine. Es ist vielmehr auch die Kenntnis der Kurvenform der elektromotorischen Kraft $e_{(t)}$ nötig und $e_{(t)}$ hängt seinerseits sowohl von der geometrischen Konfiguration des Feldes, z. B. von der Polschuhbreite, als auch von der Ankerbewicklungsart ab, z. B. bei Pol- oder Trommelwicklung von der Spulenbreite (ARNOLDs Feldformfaktor und Wicklungsfaktor). Man trägt diesen Tatsachen durch den KAPPschen Koeffizienten $K$ Rechnung, indem man schreibt

$$E_{\text{eff}} = K \cdot \frac{\Pi \cdot u}{60} \cdot z \cdot \Phi \cdot 10^{-8} \text{ Volt.}$$

So umständlich der Faktor $K$ bei einer konkreten Maschine zu berechnen ist[2], er hat eine einfache Bedeutung. Er ist gleich zweimal dem Verhältnis des

---

[1] Bei Gleichpoltypen tritt an Stelle von $\Phi$ die halbe Differenz von Kraft- und Streufluß. $\frac{1}{2}(\Phi_{\max} - \Phi_{\min})$. — [2] G. KAPP, Dyn. Masch. f. Gleich- und Wechselstrom, 4. Aufl., § 98, Berlin 1904.

quadratischen zum arithmetischen Mittelwerte der Ordinatenabsolutwerte der elektromotorischen Kraftkurve.

$$K = \frac{2\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T e_{(t)}^2\, dt}}{\frac{1}{T}\int\limits_0^T [e_{(t)}]_{\text{abs.}}\, dt} .$$

Dies Verhältnis selbst wird Formfaktor der elektromotorischen Kraft genannt[1]. $K$ variiert etwa von 1,6 bis 2,5 und liegt für heutige gute Maschinen meist bei 2,2, d. h. bei dem auch für sinusförmigen Verlauf von $e_{(t)}$ gültigen Werte $\pi \cdot \sqrt{2}$. Jedenfalls sind spitze Formen von $e_{(t)}$ zu vermeiden, wegen der durch ihren hohen Scheitelwert bedingten starken Isolationsbeanspruchung. Für Zwecke der Rechnung können Maschinenwechselstrom- und Wechselspannungskurven immer sinusförmig angenommen werden.

Sofern wir zunächst die Ankerrückwirkung vernachlässigen, werden die inneren Charakteristiken (s. S. 745) der üblichen Wechselstromgeneratoren wegen ihrer Sonderregung horizontale gerade Linien; die elektromotorische Kraft bleibt unabhängig von der Belastung.

**Klemmenspannung.** Wird ein Wechselstromgenerator vom Ankerwiderstand $w_A$ und der (mittleren) Selbstinduktion $L_A$ durch einen äußeren Stromkreis vom Widerstande $w$ und der Selbstinduktion $L$ geschlossen, so fließt der Strom

$$I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{(w + w_A)^2 + (L + L_A)^2 \omega^2}}$$

und bleibt hinter der elektromotorischen Kraft $E$ um

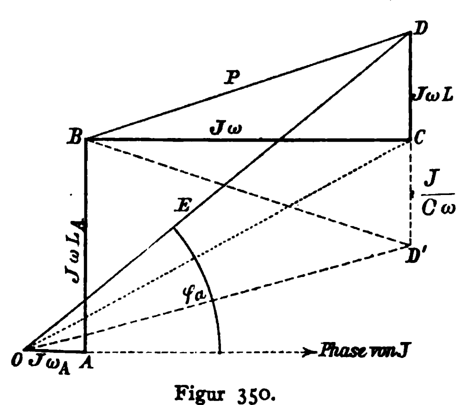
$$\varphi_a = \operatorname{arc\,tg} \frac{(L + L_A)\,\omega}{w + w_A} ,$$

gegen die Klemmenspannung $P$ um

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{L\,\omega}{w}$$

zurück; $\omega$ ist die übliche Abkürzung für $\frac{2\pi}{T}$. Die Klemmenspannung sinkt — von Ankerreaktionswirkungen, wie gesagt, zunächst abgesehen[2] — auf

$$P_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \frac{\sqrt{w^2 + L^2 \omega^2}}{\sqrt{(w + w_a)^2 + (L + L_a)^2 \omega^2}} .$$




Figur 350.

Anschaulicher als an dieser Formel übersieht man die Abhängigkeit von Belastungsart und Klemmenspannung in der Vektordiagrammdarstellung Figur 350. Wäre $I$ bekannt, so erhielte man aus den Wattkomponenten $I w_A$ und $I w$ und aus den um 90° voreilenden wattlosen Komponenten $i\omega L_A$ und $i\omega L$ direkt die elektromotorische Kraft $E$ gleich $OD$ nach Betrag und Phase. Im allgemeinen ist jedoch $E$ gegeben und $P$ wird gesucht. In diesem Falle konstruieren wir die Figur zunächst unter Zugrundelegung eines beliebigen Stromwertes und

[1] Elektrotechn. Zeitschr. 17, 132. 1896. — [2] Vide Anm. 1 S. 756.

verändern dann, unter Erhaltung aller Richtungen, die Dimension der Zeichnung so, daß $OD$ die verlangte Größe erhält. Da $OD$ sich von $OC$ weit mehr unterscheidet als $BD$ von $BC$, so folgt, daß durch Einführung von Selbstinduktion in den äußeren Stromkreis die Klemmenspannung sinkt.

Entgegengesetzt wirkt eine in den Schließungsbogen geschaltete Kapazität $C$. $\varphi$ wird dann negativ, $\frac{I}{C\omega}$ ist nach unten aufzutragen und an die Stelle von $D$ tritt $D'$. Die entsprechende Formel wäre

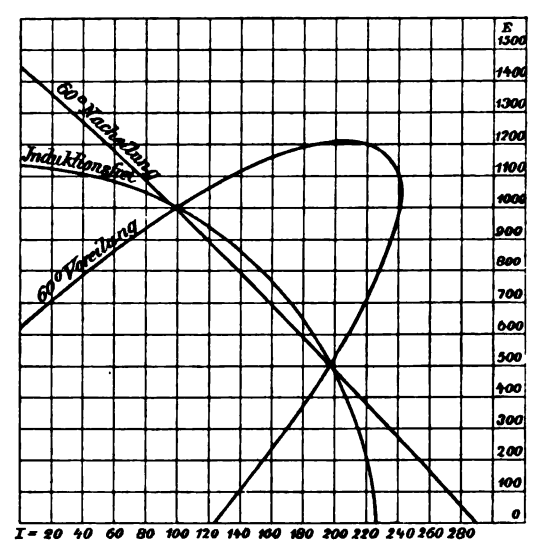
$$P_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \frac{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}{\sqrt{(w + w_a)^2 + \left(L_a\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} .$$

Ein langes konzentrisches Kabel bei Glühlampenbeleuchtung stellt zwar eine dem Widerstande $w$ parallel geschaltete Kapazität $C$ dar. Doch ist für die Rechnung ein solcher „verzweigter" Stromkreis durch einen „äquivalenten Widerstand" $w'$ mit Serienschaltung einer „äquivalenten Kapazität" $C'$ ersetzbar[1]. Es beträgt

$$w' = \frac{w}{1 + (\omega C w)^2}\,; \qquad C' = \frac{1 + (\omega C w)^2}{\omega^2 w^2 C} .$$

(Phasenverfrühter Strom kann auch durch Einschaltung von leerlaufenden, übererregten Synchronmotoren erzeugt werden [„Phasenregler"].)[2]

**Ankerreaktion.** Ist der Ankerstrom in Phase mit der elektromotorischen Kraft, so wird er dann Null und wechselt das Zeichen, wenn die wirksamen Spulen von einem Maximum an Feldkraftlinien durchsetzt werden, wenn also z. B. bei Polankertype sich Anker und Feldpole gerade gegenüberstehen. Die entmagnetisierende Wirkung vor die magnetisierende Wirkung nach dieser Stellung werden sich gerade aufheben. Anders bei induktiver Belastung. Der Strom bleibt dann hinter der elektromotorischen Kraft zurück, er fließt noch in entmagnetisierendem Sinne, wenn die Spule direkt vor dem Pole steht. Die elektromotorische Kraft der Maschine muß sinken. Umgekehrt verstärkt ein voreilender Strom das Feld und damit die elektromotorische Kraft. Die von STEINMETZ gegebenen äußeren Charakteristiken (Figur 351) $P = f(I)$ eines Synchrongenerators für die Phasenverschiebungen 0, $+60^0$ und $-60^0$ zeigen die Verschiedenartigkeit des Einflusses von induktionsfreier, induktiver und antiinduktiver Belastung. Die Felderregung ist bei den drei Kurven so gewählt, daß immer $E = 1000$ Volt bei $I = 100$ Ampere war.

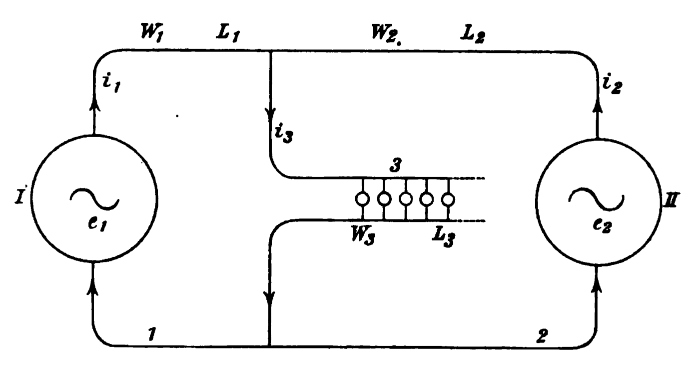



Figur 351.

[1] Vgl. z. B. F. BEDELL und A. CREHORE, Theorie der Wechselströme 255. Berlin und München 1895. — [2] E. ARNOLD, Wechselstromtechnik 4. 447 und ff. siehe unten S. 764.

Da die Selbstinduktion des Ankers in gleicher Weise auf die Klemmenspannung wirkt wie die Ankerreaktion[1], so denkt man für Zwecke der Rechnung die wirkliche Maschine durch eine ideelle Maschine ersetzt, die keine Ankergegenwindungen, dafür aber größere Selbstinduktion als die wirkliche Maschine hat.

**Zusammenarbeiten von Wechselstromgeneratoren.** Bei Wechselstromanlagen ist es ganz ebenso wie bei Gleichstromzentralen zweckmäßig, die Gesamtleistung auf mehrere getrennt angetriebene Dynamoeinheiten zu verteilen, um die Zahl der jeweils im Gange befindlichen Maschinen möglichst dem augenblicklichen Strombedarfe anpassen zu können. Zwei und mehr Wechselstromerzeuger werden offenbar ohne jede gegenseitige Beeinflussung Strom in dieselben Sammelschienen liefern können, wenn die Instantanwerte $p_{(t)}$ ihrer Klemmenspannungen jederzeit genau gleich groß sind, was identische Kurvenform, Frequenz, Amplitude und Phase erfordern würde. In jedem anderen Falle müssen lokale Ausgleichströme zwischen den Wechselstrommaschinen fließen, die Maschinen können auch bei Leerlauf, d. h. offenem äußerem Stromkreise nicht stromlos sein. Ehe man zwei Wechselstromdynamos parallel an eine Verbrauchsleitung




Figur 352.

anschaltet, wird man sie auf angenähert gleiche elektromotorische Kraft, auf möglichst nahe gleiche Wechselzahl und auf gleiche Phasen bringen[2]. Es ist nun die Frage: Erhält sich der Zustand der Phasengleichheit und damit der Synchronismus von selbst? Wirken die Ausgleichströme bei kleinen Phasendifferenzen $\varphi_1 - \varphi_2$ einer etwaigen Neigung der Antriebsmotoren zum Außertrittfallen entgegen? Die beiden Maschinen I und II Figur 352 mögen die elektromotorischen Kräfte

$$(1)\quad \begin{cases} e_1 = E_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ e_2 = E_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

liefern und 3 soll das Verbrauchsnetz darstellen. Die Augenblicksstromwerte $i_1$ und $i_2$ berechnen sich dann als Summe der von $e_1$ und $e_2$ einzeln herrührenden Komponenten nach den Stromverzweigungsregeln.[3] Es wird z. B.

---

[1] Mit dem Worte Selbstinduktion fassen wir die Wirkung derjenigen Kraftlinien zusammen, welche mit den Ankerwindungen, nicht aber mit den Feldwindungen verkettet sind, während die Ankerreaktion von den Kraftlinien des Ankerstroms dargestellt wird, die ihren Weg durch das Eisen des magnetischen Feldkreises nehmen. Man kann sich letztere Kraftlinien durch einen bestimmten Bruchteil der Ankerbewicklung erzeugt vorstellen, durch die darum sogenannten Ankergegenwindungen. Vgl. die Terminologie bei den Gleichstrommaschinen oben S. 742. — [2] Die Mittel hierzu werden unten S. 766 bei Besprechung des Synchronmotors genannt. — [3] Siehe z. B. BEDELL und CREHORE, l. c. Kap. 15.

$$i_1 = \frac{E_1}{\sqrt{(w_1 + w_{23})^2 + (\omega L_1 + \omega L_{23})^2}} \sin\left(\omega t + \varphi_1 - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L_1 + \omega L_{23}}{w_1 + w_{23}}\right)$$

$$- \frac{E_2 \sqrt{w_{13}^2 + (\omega L_{13})^2}}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}\sqrt{(w_2 + w_{13})^2 + (\omega L_2 + \omega L_{13})^2}}$$

$$\sin\left(\omega t + \varphi_2 - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L_2 + \omega L_{13}}{w_2 + w_{13}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L_{13}}{w_{13}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L_1}{w_1}\right) \quad ,$$

wenn $w_{23}$ eine Abkürzung für

$$\frac{\dfrac{w_2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} + \dfrac{w_3}{w_3^2 + (\omega L_3)^2}}{\left(\dfrac{w_2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} + \dfrac{w_3}{w_3^2 + (\omega L_3)^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega L_2}{w_2 + (\omega L_2)^2} + \dfrac{\omega L_3}{w_3^2 + (\omega L_3)^2}\right)^2}$$

ist und $L_{23}$, $W_{13}$, $L_{13}$ analoge Bedeutung haben. Wir können also schreiben

$$(2) \qquad \begin{cases} i_1 = A_1 E_1 \sin(\omega t + \varphi_1 - \alpha_1) + B_1 E_2 \sin(\omega t + \varphi_2 - \beta_1) \quad , \\ i_2 = A_2 E_2 \sin(\omega t + \varphi_2 - \alpha_2) + B_2 E_1 \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta_2) \quad , \end{cases}$$

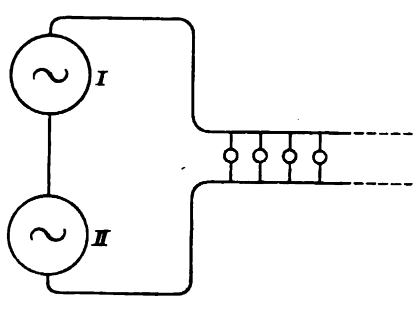
wo die Konstanten $A_1$, $B_1$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $A_2$, $B_2$, $\alpha_2$, $\beta_2$ durch $w_1$, $L_1$, $w_2$, $L_2$, $w_3$, $L_3$ bestimmt sind. Demnach betragen die Leistungen der beiden Dynamos

$$(3) \qquad \begin{cases} A_I = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i_1 e_1 \, dt = A_1 E_{\text{eff}1}^2 \cos\alpha_1 - B_1 E_{\text{eff}1} E_{\text{eff}2} \cos(\beta_1 + \varphi_1 - \varphi_2) \quad , \\ A_{II} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i_2 e_2 \, dt = A_2 E_{\text{eff}2}^2 \cos\alpha_2 - B_2 E_{\text{eff}1} E_{\text{eff}2} \cos(\beta_2 + \varphi_2 - \varphi_1) \quad . \end{cases}$$

Die Formeln lehren: War $\varphi_1 = \varphi_2$ und es tritt durch irgend eine Störung eine Phasendifferenz $\varphi_1 \gtrless \varphi_2$ ein, so wird dadurch die Antriebsmaschine der voreilenden Dynamo stärker belastet, die der zurückbleibenden entlastet. Die Ausgleichströme haben also in der Tat das Streben, die Armaturwicklungen der beiden Maschinen in dieselben Lagen relativ zu den Polsystemen zu bringen und so die Maschinen in synchronem Lauf zu erhalten. Das Zusammenwirken dieser sogenannten synchronisierenden Kraft mit der Trägheit der umlaufenden Massen hat für genügend kleine Reibungs- bzw. OHMschen Widerstände zur Folge, daß der Ausgleich einer Phasendifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ bei Konstanz der Drehungsmomente der Antriebsmaschinen in gedämpften Schwingungen um die Lage $\varphi_1 = \varphi_2$ erfolgt. Bald eilt die eine, bald die andere Maschine etwas vor. Die Maschinen „pendeln", wie man sich ausdrückt, mit abnehmender Amplitude. Erfolgen die äußeren Störungen der Phasengleichheit periodisch, etwa durch den Ungleichförmigkeitsgrad der Gas- oder Dampfmaschinen oder durch Regulatorschwingungen, so kann besonders starkes Pendeln und schließlich „außer Tritt fallen" eintreten, wenn Resonanz zwischen den durch den Antrieb erzwungenen Schwingungen und den eigenen Schwingungen des Wechselstromerzeugersystems besteht[1]. Aus den Formeln (2) und (3) ist auch zu ersehen, daß es sehr wohl

[1] A. BLONDEL, La Lum. El. **45**. 351, 615; **46**. 151, 456; **47**. 34, 85. 1892/93. — M. BOUCHEROT, La Lum. El. **45**. 201. 501; **46**. 512. 1892. — M. HUTIN und M. LEBLANC, La Lum. El. **46**. 601 und 651. 1892. — G. KAPP, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 134. 1899. — G. BENISCHKE, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 870. 1899 und Elektrotechnik in Einzeldarstellung, Heft 2, Der Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen, Braunschweig 1902. — H. GÖRGES, Elektrotechn. Zeitschr. **21**. 188. 1900. — E. ROSENBERG, Elektrotechn. Zeitschr. **23**. 425, 450. 468, 1027. 1902. — A. FÖPPL, Elektrotechn. Zeitschr. **23**. 59. 1902. — A. SOMMERFELD, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 273. 1904.

möglich ist, Wechselstrommaschinen verschiedener Spannung ohne weiteres parallel geschaltet arbeiten zu lassen. Die resultierende Spannung ist gleich einem Mittelwerte aus den Spannungen beider Maschinen[1].




Figur 353.

Hintereinanderschalten von Wechselstromdynamos (Figur 353) ist nur möglich, wenn ihre rotierenden Polkränze durch starre Verbindung mechanisch fest miteinander gekuppelt sind. Im anderen Falle würde ein Zusammenarbeiten labil sein, denn für die Leistungen $A_I = E_{1\,eff}$ mal Summe der Wattkomponenten der von beiden Maschinen herrührenden Ströme und für $A_{II} = E_{2\,eff}$ mal Summe der mit $E_2$ in Phase befindlichen Stromkomponenten ergibt sich

$$(4)\quad \begin{cases} A_I = \dfrac{E_{eff1}}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}\left\{E_{eff1}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{w}\right) + E_{eff2}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{w} + \varphi_1 - \varphi_2\right)\right\}\,, \\ A_{II} = \dfrac{E_{eff2}}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}\left\{E_{eff2}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{w}\right) + E_{eff1}\cos\left(\operatorname{arc\,tg} + \varphi_2 - \varphi_1\right)\right\}\,. \end{cases}$$

Aus diesen Ausdrücken aber folgt, daß mit wachsendem $\varphi_1 - \varphi_2$ die voreilende Maschine noch weiter entlastet, die Belastung der zurückbleibenden noch weiter gesteigert wird, d. h. der Synchronismus kann nicht erhalten bleiben.

Anders bei entgegengerichteten elektromotorischen Kräften zweier in Serie geschalteter Wechselstrommaschinen. Für $\varphi_1 - \varphi_2 = 180 - \delta$ erhalten wir

$$(5)\quad \begin{cases} A_I = \dfrac{E_{eff1}}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}\left\{E_{eff1}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{w}\right) - E_{eff2}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{w} - \delta\right)\right\}\,, \\ A_{II} = \dfrac{E_{eff2}}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}\left\{E_{eff2}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{w}\right) - E_{eff1}\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega L}{\omega} + \delta\right)\right\}\,. \end{cases}$$

Dann aber haben für kleines $\delta$ $A_I$ und $A_{II}$ verschiedene Vorzeichen. Die eine Maschine läuft als Dynamo, die andere als Synchronmotor[2]. Ihre Achse muß also mit einer mechanische Arbeit aufnehmenden, nicht mit einer Arbeit liefernden Vorrichtung verbunden sein. Zu den Formeln (5) gelangt man natürlich auch, wenn man in (3) $w_3 = \infty$ setzt. In der Tat wird dann

$$A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = \frac{1}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}\,,$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{w}\,.$$

## Gleichstrommotoren[3].

**Motor und Dynamo.** In bezug auf die wechselseitige Umsetzung von mechanischer Arbeit und elektrischer Energie ist die Gleichstromdynamo ein vollkommen reversibel funktionierender Apparat. Abweichende Verhältnisse treten nur beim „Angehen“ und „Abstellen“ ein durch Hinzukommen der Veränderung zweier neuer Energiearten: der lebendigen Kraft der bewegten Teile und der magnetischen

---

[1] G. KAPP, Dynamomasch., 2. Aufl., 305, Berlin 1897. — [2] Siehe unten S. 762. — [3] Heinkes Handbuch 9; Elektromotoren und Arbeitsübertragungen von F. NIETHAMMER und E. SCHULZ und Elektromotoren für Gleichstrom von RÖSSLER, Leipzig 1901.

Energie des die elektromotorische Gegenkraft bedingenden Feldes. Es werden demgemäß nicht nur die besten Motoren nach denselben Prinzipien gebaut, wie sie für die besten Dynamomaschinen gelten, sondern man verwendet für gleiche Leistungsstärken direkt die Dynamos als Motoren. Während aber technische Stromerzeugung nur in mehrpferdigen Maschinen einen Sinn hat, geht bei Motoren das Bedürfnis bis zu kleinen Bruchteilen einer Pferdekraft herunter. Da bei solch kleinen Maschinen der magnetische Widerstand der Luftspalte zwischen Feldmagnet und Anker ohnehin einen großen Bruchteil des Gesamtwiderstandes beträgt, die Ökonomie überhaupt geringer ist, so bemißt man im Interesse des kleinen Gesamtgewichtes der Maschine die Eisenquerschnitte hier sparsamer. Bei den Antriebsmotoren für Fahrzeuge wird das Eisengestell überdies zum Schutz gegen Schmutz als umschließende Kapsel ausgebildet (Kapselmotoren).

**Umlaufssinn und Umsteuerung.** Wie ein Blick auf die Schemata Figur 305 und 306, S. 730 lehrt, muß sich eine Hauptstrommaschine als Motor entgegengesetzt drehen wie als Stromerzeuger; bei Nebenschlußschaltung ist der Drehsinn der gleiche, mag die Maschine als Motor oder als Dynamo laufen[1].

Zum Umsteuern jedes Elektromotors ist eine Änderung innerer Verbindungen nötig, entweder es muß der Strom im Anker oder der Strom in den Feldmagneten umgekehrt werden. Vertauschung der äußeren Zuleitungsdrähte kann nie von Einfluß auf die Drehrichtung sein. Vor dieser Umschaltung innerer Verbindungen ist ein größerer Motor natürlich still zu setzen, d. h. sein Anlaßwiderstand auszurücken.

**Bürstenverschiebung.** Bei derselben Bürstenstellung und derselben Stromrichtung in Feldmagnet und Anker ist auch die gesamte Konfiguration des resultierenden Magnetfeldes die gleiche, einerlei ob die Maschine als Dynamo oder als Motor läuft. Beide Male haben die Ankerströme daher eine entmagnetisierende Wirkung auf die Feldmagneteisenteile. Der Umlaufsinn aber ist in beiden Fällen entgegengesetzt. Die bei der Dynamo im Sinne der Drehrichtung verschobene neutrale Zone und die Zone des Funkenminimums ist also bei Motoren entgegen der Rotation verschoben. Die Bürsten müssen beim Motor rückwärts verstellt werden, sofern das Funken in der Symmetriestellung nicht durch andere Hilfsmittel (geringe Ankerselbstinduktion, große Kollektorlamellenzahl, Kohlebürsten, Kommutationspole, s. S. 740) genügend herabgedrückt ist. Letzteres muß gefordert werden, wenn der Motor in beiden Richtungen ohne Bürstenverrückung soll laufen können. Unabhängig von der Schaltungsweise der Feldmagnete (Hauptschluß, Nebenschluß, Verbund) sind ferner noch folgende Beziehungen:

**Wirkungsgrad.** Der Wirkungsgrad $\eta$ schreibt sich

$$\eta = \frac{E \cdot I_A - v}{P \cdot I} ,$$

wo $v$ wieder die Summe von Wirbelstrom Hysteresis und mechanischen Reibungsverlusten bedeutet. Er weicht im allgemeinen nicht viel vom Verhältnis der elektromotorischen Gegenkraft $E$ des Ankers zur Klemmenspannung $P$ ab. Für große Maschinen geht er über 0,90 hinauf, bei ein und zwei Pferden kann man 0,70 bis 0,80 rechnen, bei den kleinsten Modellen für Ventilatoren beträgt er meist weniger als 0,50.

**Drehungsmoment und Feldstärke.** Die Zugkraft $D$ in Kilogrammen am Umfange einer Riemenscheibe vom Durchmesser $d$ Meter ergibt sich bei der

[1] Bei Verbundgeneratoren wirken für Motorregime beide Wicklungen in entgegengesetztem Sinne magnetisierend. Falls für vollen Betrieb der Nebenschluß den Drehsinn bestimmt, so sind beim Anlaufen verwickelte Verhältnisse zu erwarten, da hier die Hauptstromamperewindungen überwiegen können. Die Kompoundmotoren der Technik sind übrigens meist anders gewickelt als die Generatoren, nämlich so, daß Haupt- und Nebenschluß gleichsinnig wirken. Doch haben auch sie bislang niemals einen hervorragenden Platz in der Praxis zu erringen gewußt, obwohl ihre dem Nebenschlußmotor gegenüber erhöhte Anzugskraft für Fahrstühle z. B. von Wert sein kann.

Tourenzahl $u$ pro Minute aus der Leistungsgleichung in Pferdekräften

$$\frac{D \cdot \pi \cdot d \cdot u}{75 \cdot 60} = \frac{E \cdot I_A}{736}$$

$$\text{zu} \quad D = \frac{1{,}94}{d \cdot u} E \cdot I_A \quad .$$

Nun ist $I_A$ proportional $P_B - E$ der Differenz von Bürstenspannung und elektromotorischer Gegenkraft des Ankers und

$$E = \frac{z}{10^8 \cdot 60} u \cdot \Phi$$

(s. S. 735, Gl. (1)), d. h. bei konstantem $u$ proportional der Feldstärke $\Phi$. Der Proportionalitätsfaktor sei $c$, dann folgt

$$D \sim \Phi \cdot (P_B - c\,\Phi) \quad .$$

Sofern $c\,\Phi = E$ größer als $\frac{1}{2} P_B$ ist (und nur in diesem allerdings praktisch allein bedeutsamen Falle), wird bei sinkendem $\Phi$ der zweite Faktor rascher wachsen, als der erste abnimmt. D. h. bei Schwächung des Feldes steigt die Zugkraft, der Motor wird also rascher laufen, sofern das zu überwindende äußere Drehungsmoment dasselbe bleibt.

**Tourenzahländerung.** In der Tat reguliert man bei Haupt- und Nebenschlußmotoren die Tourenzahl durch Variation der Felderregung. Bei Hauptstrommotoren ist entweder den Magnetwindungen ein Widerstand als Tourenregulator parallel geschaltet, oder man verwendet die sogenannte „Spulenschaltung“, d. h. die Feldwindungen lassen sich bald hintereinander, bald in passenden Kombinationen teilweise parallel schalten. Die heutigen Straßenbahnmotoren haben meist vier getrennte Magnetspulen, und der Schaltapparat, der sogenannte „Kontroller,“ gestattet die drei Schaltungen: alle Spulen hintereinander für kleinste, je zwei parallel für mittlere und alle vier parallel für größte Geschwindigkeit.

Zur Erhöhung der Tourenzahl von Nebenschlußmotoren ist ein regulierbarer Widerstand (Nebenschlußregulator) in den Stromkreis der Magnetwicklung eingeschaltet. Als zulässige Grenze kann Verdoppelung der Tourenzahl gelten. Darüber hinaus beginnen durch Überwiegen der Ankeramperewindungen über die Feldamperewindungen auch gut dimensionierte Nebenschlußmotore im allgemeinen zu funken.

**Tourenzahl und Belastung, Verwendungsgebiet von Haupt- und Nebenschlußmotoren.** Für die praktische Verwendung eines Motors ist maßgebend die Abhängigkeit der Umdrehungszahl von der Belastung. Graphische Darstellungen mit der Tourenzahl als Abszisse und Leistungen bzw. Nutzeffekten als Ordinate sind von KAPP unter dem Namen Geschwindigkeitscharakteristiken eingeführt worden[1].

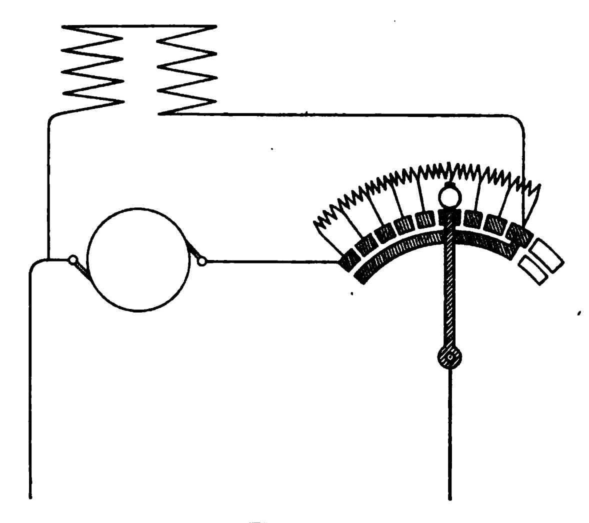
Es handle sich um den heutzutage praktisch meist vorliegenden Betrieb bei konstanter Klemmenspannung, d. h. Anschluß an ein Zentralennetz oder an eine leistungsfähige Akkumulatorenbatterie. Beim Hauptstrommotor steigt die Tourenzahl, wenn die Belastung abnimmt. Kleiner Tourenzahl entspricht große Belastung. Der Hauptstrommotor hat außerordentlich hohe Anzugskraft. Bei Leerlauf geht er durch, d. h. er erreicht gefahrdrohende Geschwindigkeiten. Sein Verwendungsgebiet sind demgemäß Fahrzeuge aller Art, Kräne und Aufzüge. Ausgeschlossen ist er bei Riemenübertragung oder wo sonst durch ein Mißgeschick völlige Entlastung eintreten kann.

Da beim Nebenschlußmotor für konstante Klemmenspannung in erster Annäherung die Feldstärke konstant bleibt, so folgt entsprechend der konstanten

[1] Electrician 29. Dez. 1883.

Bürstenspannung mit derselben Annäherung auch für die Tourenzahl Konstanz und Unabhängigkeit von der Belastung. In der Tat beträgt bei nicht gar zu kleinen Nebenschlußmotoren die Geschwindigkeitsschwankung zwischen Leerlauf nnd Normallast selten mehr als 5 $^0/_0$. Diese Eigenschaft macht den Nebenschlußmotor so wertvoll für alle Betriebe, wo bei wechselndem Kraftbedarf eine gewisse Tourenkonstanz gefordert wird, z. B. Antrieb von Werkzeugmaschinen oder von Pumpen.

**Anlasser.** Beim Ingangsetzen eines Elektromotors fehlt zunächst eine elektromotorische Gegenkraft. Damit der Anlaufstrom gewisse Grenzen nicht überschreitet, muß mit Ausnahme ganz kleiner Maschinen ein in Stufen ausschaltbarer Widerstand in den Ankerkreis eingeschaltet werden. Beim Hauptstrommotor schwächt dieser „Anlasser" zugleich ein sonst ruckweises Einsetzen des zu großen Drehungsmomentes ab. Bei Nebenschlußmotoren umgekehrt hat der Anlaßwiderstand praktisch die weitere Aufgabe, das Anzugsmoment zu erhöhen. Zuleitungen, die für den normalen Betriebsstrom reichlich bemessen sein mögen, werden nämlich

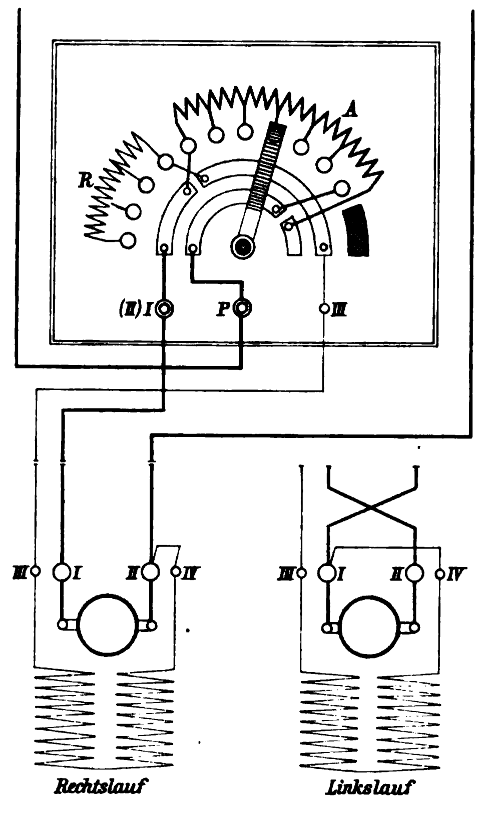


Figur 354.

trotzdem für den ohne Anlaßwiderstand enormen Anfangsstrom erheblichen Spannungsabfall bewirken. Der verminderten Klemmenspannung entspricht eine zu geringe Erregung der Feldmagnete, und so kann es vorkommen, daß ein guter Nebenschlußmotor zwar ohne Belastung leicht, mit Belastung aber schwer oder gar nicht anläuft, wenn nicht durch einen Anlaßwiderstand

$$W = \frac{P}{I_{\text{norm}}}$$

der Ankerstrom im ersten Moment auf die Stärke $I_{\text{norm}}$ des normalen Betriebsstromes herabgedrückt wird. Der Anlasser für einen Nebenschlußmotor muß überdies so konstruiert sein, daß er vor dem Anker den Feldmagneten einschaltet, und daß bei plötzlicher Abschaltung der Stromquelle durch Zurückschlagen des Anlaßhebels die Feldmagnetwicklung nicht unterbrochen wird, da sonst infolge der großen Selbstinduktion isolationsgefährdende Überspannung eintreten würde. Die gebräuchlichste Schaltungsart zeigt Figur 354. Bei Unterbrechung des äußeren Stromkreises bilden Feldmagnetwicklung, Anker und Anlaßwiderstand noch einen in sich geschlossenen Stromkreis, in dem der Feldmagnetextrastrom abfließen kann. Vielfach wird Anlaßwiderstand $A$ und Tourenregulierwiderstand $R$ in der aus




Figur 355.

Figur 355 ersichtlichen Weise zu einem Apparate vereinigt. Man baut wohl auch noch automatische Ausschaltvorrichtungen zum Schutze gegen Stromüberlastung in den Anlaßapparat ein.

## Synchronmotoren[1].

Da Umkehr der Augenblickswerte des Ankerstromes zugleich das instantane Drehungsmoment zwischen Stator und Rotor umkehrt, so muß ebenso, wie eine sondererregte Gleichstromdynamo, auch ein Wechselstromgenerator durch Ankerstromumkehr caeteris paribus als Elektromotor laufen können[2]. Das caeteris paribus heißt: den entgegengesetzt gleichen Stromwerten muß jeweils die gleiche Ankerstellung entsprechen, wie bei Generatorbetrieb. Im Gleichstrommotor besorgt die Stromumkehr in den Ankerdrähten der Kollektor immer bei der gleichen Ankerstellung, also unabhängig von der Tourenzahl. In einem mit Wechselstrom beschickten Anker einer Wechselstromdynamo erfolgt der Stromwechsel dagegen unabhängig von der jeweiligen Ankerposition im Tempo der von außen zugeführten Spannung.

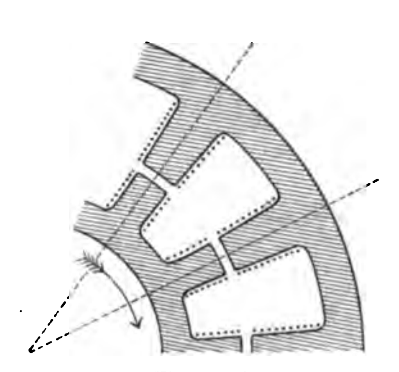
Ein an eine Wechselspannung gelegter ruhender Anker wird sich demgemäß nicht von selbst in Bewegung setzen, weil anziehende und abstoßende Wirkungen schnell aufeinanderfolgen und sich daher aufheben. Ist der Anker aber in Rotation versetzt, und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daß eine Ankerspule in derselben Zeit an Stelle der vorhergehenden getreten ist, in welcher ein Stromwechsel stattfindet, und treten überdies die Stromwechsel in den Momenten und in dem Sinne ein, den die Stellung der Ankerspulen im Felde verlangt, so üben jetzt die Feldmagnete eine Triebkraft aus, welche die Bewegung dauernd im Gange hält. Mit änderen Worten: eine Wechselstrommaschine kann nur als Motor dienen, wenn ihr Gang synchron mit demjenigen des den Strom liefernden Generators ist. Die Tourenzahl des Synchronmotors ist gleich der Periodenzahl des Wechselstromes dividiert durch die Zahl der Polpaare des Motorfeldes. Interessant an dem Betriebe einer Wechselstrommaschine als Synchronmotor ist besonders, wie die Maschine bei Konstanthaltung von Felderregung und von äußerer Klemmenspannung sich trotzdem von selbst einem Belastungswechsel in weiten Grenzen anpaßt, obwohl die Tourenzahl streng konstant bleiben muß.

Der in Gang befindliche Motor sei zunächst unbelastet und nur die Achsenreibung zu überwinden. In diesem Falle wird ganz kurz vor den Zeitpunkten, wo

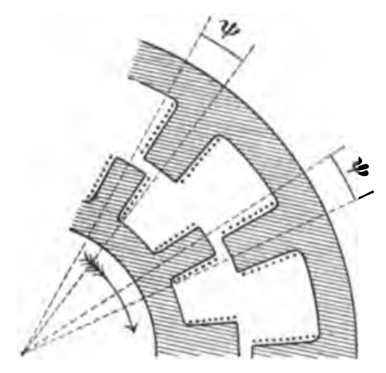
[1] G. OSSANNA, Elektrotechn. Zeitschr. **17**. 300. 1896. — F. NIETHAMMER, Elektromotoren. — Heinkes Handb. **9**. 72. 1901. — P. STEINMETZ, Starkstromtechnik 146. Braunschweig 1903. — G. KAPP, Dynamomaschinen, 4. Aufl., 496, Berlin 1904. — E. ARNOLD und LA COUR, Die Synchronen-Wechselstrommaschinen 411. Berlin 1904. — [2] Gleichgültig, ob er für Ein- oder für Mehrphasenstrom gebaut ist, im letzteren Falle ist er bei Funktionieren als Motor natürlich auch mit Mehrphasenstrom zu beschicken.

die Ankerpole symmetrisch vor den Feldpolen stehen, der Wechselstrom seine Maxima haben (Figur 356). Mit steigender Belastung bleibt der Anker immer mehr zurück. Ein Ankerpol hat seinen Maximalmagnetismus, ehe er die ungleichnamigen Pole des Feldes passiert (Figur 357).

Einem Wachsen des Winkels $\psi$ entspricht ein immer stärkeres Überwiegen der im Sinne der Rotation wirkenden ponderomotorischen Kräfte. Es gilt dies



Figur 356.

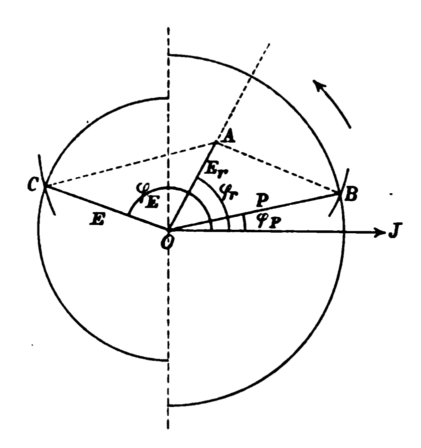



Figur 357.

offenbar bis zu einem gewissen Maximalwerte von $\psi$, der kleiner als der halbe Winkelabstand zwei aufeinanderfolgender Feldpole sein muß. Wird das diesem Werte von $\psi$ entsprechende maximale Drehungsmoment von der mechanischen Belastung überschritten, so bleibt der Anker plötzlich stehen und zittert im Tempo des Wechselstromes, ohne etwa bei Wegnahme der Belastung von selbst wieder in Gang zu kommen.

## Theoretisches.

Wir nehmen die Strom- und Spannungskurven sinusförmig an und ersetzen das Zusammenwirken von Ankerreaktion und der mit dem Winkel $\psi$ (Figur 357) veränderlichen Selbstinduktion des Ankers durch eine ideale Ankerselbstinduktion $L$ (siehe oben S. 756). Da die Periodenzahl $n$ konstant und unabhängig von Beschaffenheit und Betriebsmodus des Motors gegeben ist, so hat man mit der Felderregung bzw. der Feldstärke immer zugleich auch die im Motor induzierte elektromotorische Gegenkraft $E_{eff}$. Außerdem besteht zwischen den an die Achse abgegebenen Leistungen $A$ in Watt und dem Drehungsmoment $D$ in absolutem Maße die Proportionalität




Figur 358.

$$D = \frac{\Pi}{4\pi n} \cdot 10^7 A \quad , \tag{1}$$

wo $n$ die Periodenzahl des Stromes in der Sekunde, $\Pi$ die Feldpolzahl ist. Man nennt demgemäß $A$ wohl auch das „Drehmoment in synchronen Watt". Diagramm Figur 358, in dem der Stromvektor horizontal nach rechts gelegt ist, zeigt den Zusammenhang zwischen der Netzspannung (Klemmenspannung) $P$ der elektromotorischen Gegenkraft $E$ der Stromstärke $I$ und den Phasendifferenzen $\varphi_P = \widehat{IP}$ und $\varphi_E = \widehat{IE}$. Aus einem gegebenen $I$ folgt zunächst die resultierende elektromotorische Kraft $E_r$ gleich $I$ mal der Ankerimpedanz.

(2) $$E_r = I\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} \quad .$$

Sie ist im Winkel

(3) $$\varphi_r = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{w}$$

anzutragen. $B$ und damit Winkel $\varphi_P$ erhält man als Schnittpunkt eines von $A$ aus geschlagenen Kreisbogens vom Radius $E$ mit dem Halbkreis vom Radius $P$ um $O$. $C$ durch Vervollständigung des Parallelogrammes oder, indem man mit $P$ im Zirkel von $A$ aus in den Halbkreis der elektromotorischen Gegenkraft $E$ einschneidet. Aus $\varphi_P$ und $\varphi_E$ berechnet sich die vom Motor aus dem Netz empfangene Arbeit

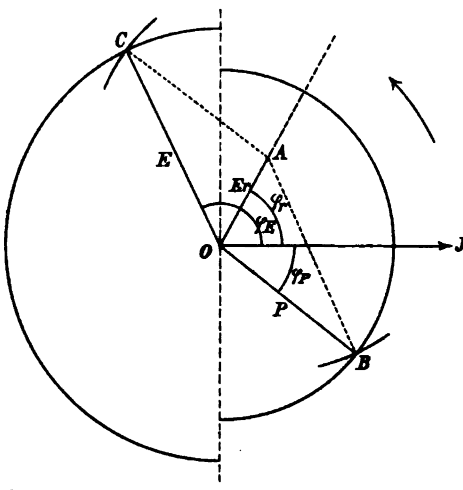
(4) $$A_0 = \tfrac{1}{2} I \cdot P \cdot \cos\varphi_P = I_{\text{eff}} \cdot P_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi_P \quad ,$$

und die von ihm an die Achse abgegebene nutzbare Leistung

(5) $$A = -\tfrac{1}{2} I \cdot E \cdot \cos\varphi_E - v = -I_{\text{eff}} \cdot E_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi_E - v \quad ,$$

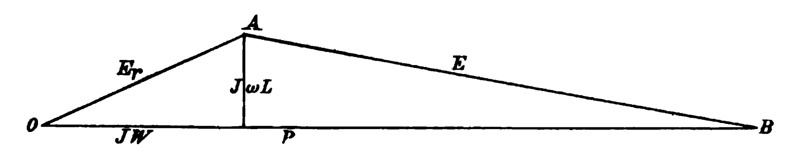
wo $v$ die Korrektion wegen der Achsenreibung und der Verluste im Eisen darstellt. Das elektrische Güteverhältnis ist daher

(6) $$\eta = \frac{E_{\text{eff}} \cos\varphi_E - \frac{v}{I_{\text{eff}}}}{P_{\text{eff}} \cos\varphi_P} \quad .$$




Figur 359.

Figur 359 bezieht sich auf Betrieb desselben Motors mit derselben Klemmenspannung bei derselben Stromstärke, wie er Figur 347 zugrunde liegt. Nur ist durch Verstärkung der Felderregung $E$ erhöht, so daß $E > P$ ist. Man sieht, ein Synchronmotor kann auch mit einer äußeren Netzspannung betrieben werden, die kleiner ist als die gegenelektromotorische Kraft seines Ankers, d. h. kleiner als die gegenelektromotorische Kraft der Maschine, wenn sie bei gleicher Felderregung und Tourenzahl als Generator läuft. Außerdem sieht man, daß $\varphi_P$ dann negativ ist. Der Strom eilt der Netzspannung voraus. Ein übererregter Synchronmotor wirkt also wie ein Kondensator in bezug auf das Vorschieben der Stromphase. Maschinen dieser Art werden in der Tat benutzt, um die durch andere Apparate bewirkte Phasenverschiebung mehr oder weniger auszugleichen[1]. In einzelnen Fällen kann sogar die Ökonomie einer Anlage durch Einschaltung von vollständig leerlaufenden Synchronmotoren als „Phasenreglern" erhöht werden.




Figur 360.

Die Diagramme lehren auch, daß durch passende Wahl der Felderregung der Leistungsfaktor $\cos\varphi_P$ gleich seinem Maximalwerte eins gemacht werden kann. Es muß dann $OB$ horizontale Richtung haben, d. h. es muß gemäß Figur 360

[1] I. E. BERG, El. World **28**. 622. 1896.

$$(7) \qquad E^2 = (P - I \cdot w)^2 + (I \omega L)^2$$

werden. Praktisch bedeutet dies wegen der Kleinheit von $Iw$ und $I\omega L$ gegenüber $P$ bei den heutigen Maschinen: $E$ ist gleich $P$ zu wählen.

Meistens wird außer $E$ und $P$ nicht die Stromstärke, sondern das an der Motorachse zu überwindende Drehungsmoment gegeben sein. Es möge in synchrone Watt umgerechnet werden, so daß es gleich der Leistung $\Lambda$ wird. Unter Anwendung des Satzes, daß die Projektion eines resultierenden Vektors $E_r$ gleich der Summe der Projektionen seiner Komponenten $E$ und $P$ ist, entnehmen wir aus den Diagrammen

$$2(\Lambda + v) = -E \cdot I \cdot \cos\varphi_E = -E \frac{E_r}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \cos\varphi_E$$

$$= \frac{-E}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} (P \cos[\varphi_r + \varphi_E - \varphi_P] + E \cos\varphi_r)$$

$$(8) \quad 2(\Lambda + v) = \frac{-E}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} P \cos\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{w} + \varphi_E - \varphi_P\right) - E^2 \frac{w}{w^2 + (\omega L)^2},$$

wo $v$, wie gesagt, den meist prozentual kleinen Verlust durch Achsenreibung magnetische Hysterese und Wirbelströme bedeutet. Damit ist der Winkel $\varphi_E - \varphi_P$ zwischen $E$ und $P$ gegeben. Es konstruiert oder berechnet sich mit seiner Hilfe einfach $E_r$ und daraus

$$I = \frac{E_r}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \quad .$$

Die maximale Leistung des Motors tritt nach (8) für $\varphi_r = 180^0 + \varphi_P - \varphi_E$ ein und beträgt

$$\Lambda_{\max} = \frac{EP - E^2 \cos\varphi_r}{2\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} - v \quad .$$

Wird diese äußere Belastung überschritten, so bleibt der Motor stehen.

Gleichung (8) ist ein spezieller Fall der für das Zusammenarbeiten von Wechselstrommaschinen abgeleiteten Formeln (3) und (5) oben S. 757 u. 758. Die dortigen Bemerkungen über synchronisierende Kraft und über das „Pendeln“, d. h. die periodischen Schwankungen von $\varphi_E - \varphi_P$ und die damit parallel gehenden Strompulsationen gelten auch für den Anschluß eines Synchronmotors an ein größeres Netz, dessen Wechselspannung durch den kleinen Motor nicht merklich beeinflußt wird.

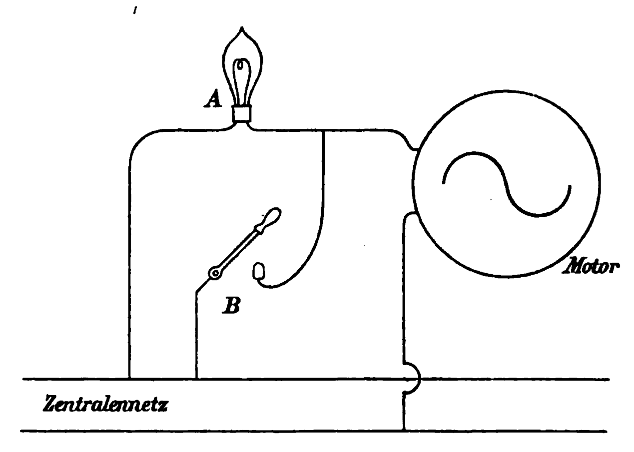
Bei der Verwendung synchroner Wechselstromkraftübertragung zur Erzielung des identischen Ganges zweier Achsen im physikalischen Laboratorium ist daher zu beachten, daß ein durch derartige Koppelung erzielter „Synchronismus“ folgenden Charakter hat: Bei gleicher Polzahl $\Pi$ beider Maschinen kann der eine Anker bei noch so langem Betriebe den anderen nie um auch nur $\frac{1}{\Pi}$ Umdrehung überholen. Innerhalb des Winkelbereiches $\frac{2\pi}{\Pi}$ ist man jedoch vor wechselnden Stellungsdifferenzen beider Achsen durch Reibungsstörungen oder sonstige Belastungsschwankungen durchaus nicht geschützt. Gegen den Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung eines Synchronenmotors während der einzelnen Stromperioden $T = \frac{1}{n}$ ist nur durch genügend große mitbewegte Schwungmassen anzukämpfen.

Die zum

Anlassen von Synchronmotoren

nötige äußere Kraft kann durch eine von anderen Kraftmaschinen betriebene Transmission geliefert werden. Oder eine mit dem Motor gekuppelte Gleichstrommaschine wird durch Akkumulatoren gespeist. Um den Wechselstrom der Betriebsleitung selbst verwenden zu können, setzt man, besonders wenn es sich um Mehrphasenstrom handelt, auf die Achse des Synchronmotors einen kleinen Asynchronmotor, der aber zwei Pole weniger als der Synchronmotor haben muß, da er nur bei Untersynchronismus Arbeit leisten kann (siehe unten S. 770). Dagegen haben sich Einrichtungen, welche gestatten, den Synchronmotor selbst nach einem der Asynchronmotorprinzipien anzulassen, weniger bewährt.

Um festzustellen, ob der Motor die für Anschaltung der äußeren Spannung richtige Periodenzahl und Phase hat, benutzt man gewöhnlich eine Glühlampe, die sogenannte Phasenlampe. Figur 361 gibt die Anordnung für den einfachsten Fall gewöhnlichen (einphasigen) Wechselstromes so niedriger Spannung wieder, daß die Lampe ohne Transformation direkt eingeschaltet werden kann. Der eine




Figur 361.

Maschinenpol ist unmittelbar mit dem einen Netzleiter verbunden, der zweite mit dem anderen Netzleiter durch die Phasenlampe $A$. Solange die Motorspannung $E$ und die Netzspannung $P$ noch sehr verschiedene Frequenz haben, leuchtet die Lampe mit mittlerer Helligkeit. Nähern sich die Periodenzahlen einander, so wird sie schwebungsartig heller und dunkler. Man wählt die Motorfelderregung so, daß bei Synchronismus Motorspannung $E =$ Betriebsspannung $P$ ist. Einmal weil dann die Helligkeitsminima gleich Null werden, zum anderen weil nach Formel (5) S. 758 nur in diesem Falle für Leerlaufregime des Motors $E$ und $P$ entgegengesetzt gleiche Phase haben. Da den Helligkeitsmaximis die Spannung $E + P$ entspricht, muß die Lampe doppelte Netzspannung vertragen. Sind die Schwebungen genügend langsam geworden, so stellt man während einer Periode des Lampenerlöschens durch Hebel $B$ den direkten Anschluß an das Netz her und dann die Hilfsantriebsvorrichtung für den Motor ab. Statt der einfachen Glühlampen können auch Voltmeter oder akustische Vorrichtungen als Phasenindikatoren benutzt werden. Für Mehrphasenstrom hat man Synchronismusanzeiger mit vielen zum Teil bunten Lampen konstruiert, die „sehr sehenswerte Ausstattungsstücke für die betreffende Anlage“ darstellen[1].

---

[1] H. MÜLLER, Elektrotechn. Zeitschr. **20**. 416. 1899.

## Die asynchronen Motore.

Während ein Synchronmotor außer des Wechselstromes für den Anker noch einer Gleichstromquelle zur Felderregung bedarf, arbeiten die asynchronen Motoren mit nur einer Stromquelle von ein- oder mehrphasigem Wechselstrom.

**Konduktionsmotoren**[1]. Da die Umdrehungsrichtung eines Gleichstrommotors unabhängig von der Richtung des zugeführten Stromes ist, so kann prinzipiell ein Gleichstrommotor auch mit Wechselstrom betrieben werden, sofern, um Wirbelströme zu vermeiden, auch das Feldmagneteisen gut lamelliert ist. Wegen der hohen Selbstinduktion und darum großen Phasenverschiebung $\varphi$ zwischen Strom und Klemmenspannung wird der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ eines solchen nach ATKINSONS Vorschlag sogenannten Konduktionsmotors aber immer nur gering sein. Zweiter Hauptfehler ist die verderbliche Funkenbildung am Kollektor[2]. Man hat diese Übelstände auf mannigfache Weise bekämpft, lange Zeit ohne besondere Erfolge. GANZ & Co.[3] beispielsweise versuchten es mit automatischer Gleichrichtung des Wechselstromes durch einen rotierenden Kommutator. Mehr Glück scheinen in den letzten Jahren WESTINGHOUSE (LAMMEs Motor)[4] und die Siemens-Schuckert-Werke[5] gehabt zu haben. Sie kompensieren das die schädliche Selbstinduktion bedingende (gestreute) Ankerfeld mittels Hilfswicklungen auf dem Stator nach analogen Prinzipien, nach denen die Selbstinduktion der Primärspule eines Transformators durch Kurzschluß der Sekundärwicklung aufgehoben wird. Außerdem geht man besonders für Bahnbetrieb mit der Periodenzahl möglichst herunter.

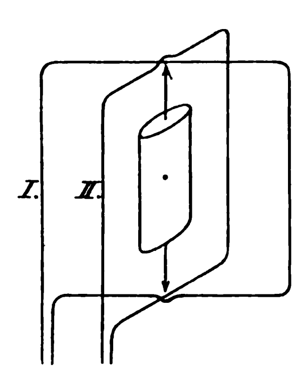
Handelt es sich um die Speisung eines Nebenschlußmotors mit Wechselstrom, so tritt als neues Moment für Schwächung der Leistung hinzu, daß der Strom im Anker als nahezu Wattstrom und der Strom im Feldmagnet als größtenteils wattloser Strom zeitlich fast genau um eine viertel Periode gegeneinander verschoben sein werden und darum ebenso die beiden Felder, die darum nur ein minimales Drehungsmoment aufeinander ausüben können. Sie in gleiche Phase zu bringen, müßte der Anker statt durch dieselbe elektromotorische Kraft wie das Feld vielmehr durch die andere um 90° verschobene Phase eines Zweiphasensystems gespeist werden. Würde man überdies, statt den Strom in den Anker durch Bürsten und Kollektor einzuleiten, die kurzgeschlossene Ankerwicklung durch eine rechtwinklig zur Felderregerwicklung gestellte Spule induktiv erregen, so wäre man zu einer Anordnung gelangt, die man als mehrphasigen Induktionsmotor bezeichnen müßte. Auf diesen stetigen Übergang von Gleichstrommaschine zu mehrphasigem Induktionsmotor hat STEINMETZ gelegentlich hingewiesen.[6]

**Induktionsmotoren.** Bei den Induktionsmotoren wird nur feststehenden Maschinenteilen, dem sogenannten Stator, Strom von außen zugeführt. Das veränderliche Statorfeld induziert im Rotor einen Sekundärstrom, und die ponderomotorische Wirkung zwischen induziertem Rotor- und primärem Statorfeld erzeugt die Drehung, leistet die mechanische Arbeit. Schleifkontakte für die Zuführung des Primärstromes fallen demgemäß fort. In wirtschaftlicher und theoretischer Hinsicht typischer Repräsentant der Induktionsmotoren ist der Mehrphasen- oder

---

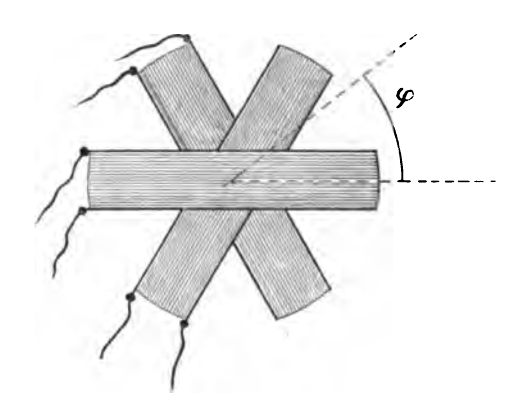
[1] P. STEINMETZ, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen, § 199—202. Berlin 1900. — I. HEUBACH, Der Wechselstromserienmotor, Samml. elektrotechn. Vortr. 4, Stuttgart 1903. — [2] Vgl. z. B. A. DU BOIS-REYMOND, Elektrotechn. Zeitschr. **10**. 1. 1889. — F. PUNGA, Das Funken der Kommutationsmotore, Hannover 1905. — M. BRESLAUER, Elektrotechn. Zeitschr. **27**. 406. 1906. — [3] Elektrotechn. Zeitschr. **11**. 158. 1890. — [4] Elektrotechn. Zeitschr. **22**. 983. 1902. — [5] R. RICHTER, Elektrotechn. Zeitschr. **27**. 537. 1906. — F. EICHBERG, **25**. 75. 1904. — [6] Zur Klassifikation und Genese der Asynchronmotoren siehe besonders auch den lehrreichen Vortrag von H. GÖRGES auf der XV. Jahresvers. d. V. Deutscher Elektrotechn. in Hamburg: „Das Verhalten der Wechselstrommotoren in einheitlicher Betrachtungsweise", Elektrotechn. Zeitschr. **28**. 730. 1907. — Ferner M. OSNOS, ibid. **25**. 1. 1904.

**Drehstrommotor.** Der Grundgedanke, dessen Weiterentwicklung zum heutigen Drehstrommotor geführt hat, ist zuerst von FERRARIS[1] ausgesprochen worden: Durch passende Kombination in der Phase verschobener Wechselströme wird ein rotierendes Magnetfeld erzeugt[2], und durch dieses „Drehfeld" werden kurzgeschlossene Spulen nach dem Prinzip des sogenannten „Rotationsmagnetismus"[3] mitgenommen. Die Ebenen von $z$-Spulen mögen den Winkel $\frac{\pi}{z}$ miteinander bilden, wie es Figur 362 für $z = 2$, Figur 363 für $z = 3$ zeigt. Die Phasendifferenz der in den Spulen fließenden Sinusströme gleicher Intensität betrage ebenfalls $\frac{\pi}{z}$.





Figur 362.




Figur 363.

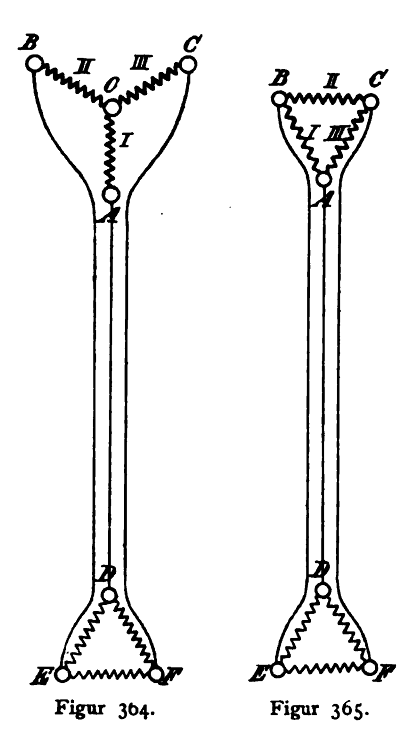
Bezeichnet $h$ die Amplitude des von einer einzelnen Spule herrührenden Wechselfeldes im gemeinsamen Mittelpunkte der Spulen, so beträgt die resultierende Feldstärke zur Zeit $t$ in der Richtung $\varphi$

$$H = h \sum_{0}^{z-1} {}_{\nu} \sin\left(\omega t + \nu \frac{\pi}{z}\right) \cos\left(\varphi + \nu \frac{\pi}{z}\right) \equiv h \frac{z}{2} \sin(\omega t - \varphi) \quad .$$

Das ist ein Feld konstanter Stärke $h \cdot \frac{z}{2}$, welches mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotiert. Bei den Drehfeldern der Technik tritt wegen der Stromdeformation durch das Eisen und wegen der geometrischen Verhältnisse der Kraftlinienpfade zur Rotation des Feldes noch eine Pulsation. Der prozentige Betrag dieser Pulsation nimmt naturgemäß mit wachsender Phasenzahl ab, ist aber schon bei Zweiphasenstrom kein praktisch ins Gewicht fallender Übelstand. Wenn man trotzdem in Europa wenigstens allgemein dreiphasigen Drehstrom bevorzugt, so liegt das an den mannigfaltigeren Schaltungsmöglichkeiten der verketteten Dreiphasenströme und an der ökonomischeren Fernleitung bei gleichen für die Isolationssicherheit ja allein maßgebenden maximalen Spannungsdifferenzen. Die Beschickung der drei Feldspulen kann in Dreiecks, Figur 364, oder in Sternschaltung, Figur 365 (DOBROWOLSKIS offene und geschlossene Verkettung) erfolgen, unabhängig von den Schaltungen in der Drehstromgeneratormaschine. Kombinationen beider Schaltungsweisen, wie die „gemischte Schaltung" Figur 366, gestatten überdies mittels Dreiphasenstromes im Netz ein Drehfeld aus sechs Phasen zusammenzusetzen.

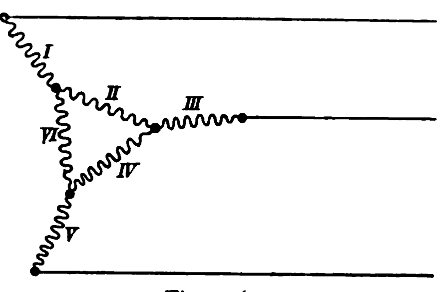
---

[1] Atti di Torino **23**. 360. 18. März 1888; Elektrotechn. Zeitschr. **9**. 568. 1888. — Beachte aber auch einen Vortrag TESLAS vor dem Institute of Electrical Engineers in New York Mai 1888. — N. TESLAS Untersuchungen über Mehrphasenströme, zusammengestellt von TH. C. MARTIN, deutsch von H. MASER. Halle 1895. — [2] M. DEPREZ, C. R. **97**. 1193. 1883. — [3] Handbuch **5**. 568.



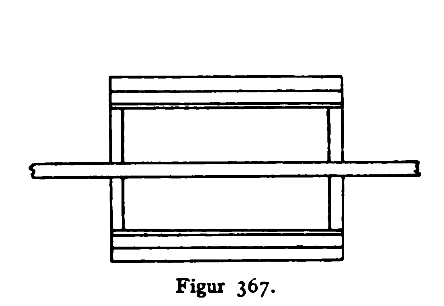

Figur 364. Figur 365.

Was die praktischen Ausführungsformen der heutigen Drehstrommotoren angeht, so besteht der Stator meist aus einem unterteilten, eisernen Hohlzylinder ohne sichtbare Pole, an dessen Innenmantel die Drehfelderregung als Trommelwicklung in Nuten untergebracht ist. Die zylindrische Eisenmasse des Rotors füllt den Statorhohlraum mit Rücksicht auf ein Minimum des magnetischen Widerstandes so vollkommen als möglich aus. Man hat bei $^1/_4$ PS Maschinen bis 0,2 mm Luftspalt herabgehen können. Im übrigen ist der Rotor

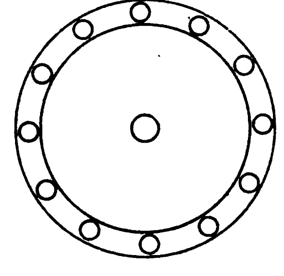



Figur 366.

bei kleinen Maschinen als sogenannter Trillerkäfiganker ausgebildet, Figur 367 und 368. Dicke Kupferdrähte durchbohren den Zylinder in der Längsrichtung und sind an jeder Stirnseite durch „Kurzschlußringe" verbunden. Vermöge dieser



Figur 367.



Figur 368.

einfachen gedrungenen Gestaltung Figur 369 eignet sich keine andere Maschine so sehr zur Massenfabrikation wie der Induktionsmotor in Größen von $^1/_4$ bis etwa 50 PS[1].

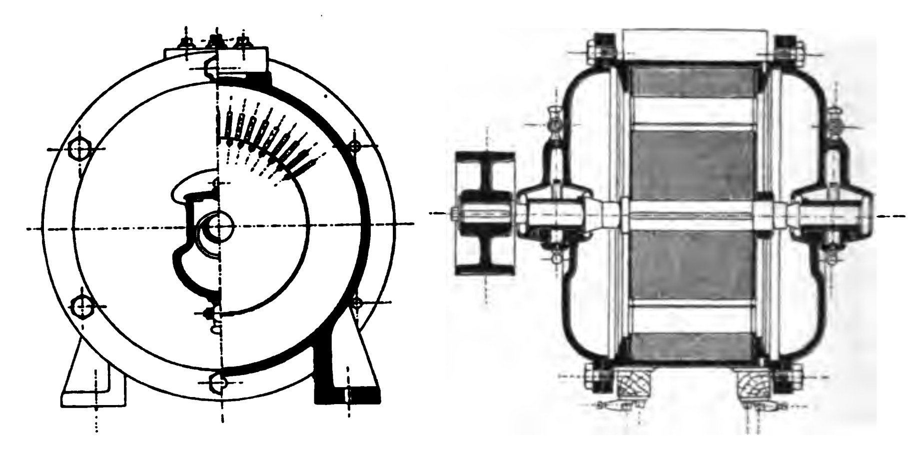
Andererseits ist auch die Theorie des Drehstrommotors, sowohl was die vorteilhafteste Einzeldimensionierung der Teile als was das Verhalten im Betriebe angeht, aufs Vollkommenste durchgearbeitet[2]. KAPP faßt das Prinzip in den Worten zusammen: „Daß die elektrischen Verhältnisse eines Motors nicht ge-

---

[1] E. SCHULZ, Entwurf und Berechnung elektrischer Maschinen für Massenfabrikation. Hannover 1905. — [2] P. STEINMETZ, l. c. § 140 und ff. — BEHN ESCHENBURG, Elektrotechn. Zeitschr. **17**. 10 u. 86. 1896. — A. HEILAND, Samml. elektrotechn. Vorträge **2**. 39—76, Stuttgart 1899. — B. BEHREND, Elektrotechn. Zeitschr. **17**. 63. 1896. — A. ROTHERT, Elektrotechn. Zeitschr. **19**. 730. 1898. — Siehe auch die neueren Monographien von I. HEUBACH, „Der Drehstrommotor", Berlin 1903 und E. SCHULZ, „Die Induktionsmotore", Zürich 1904.

ändert werden, wenn man den Rotor festhält und seinen Widerstand durch Einschalten eines Reostaten gleichzeitig um so viel vergrößert, daß der Rotorstrom denselben Wert behält wie beim normalen Lauf. Die im Reostaten aufgezehrte Leistung ist dann genau gleich der mechanischen Leistung, die im normalen Betrieb abgegeben wird.“ Der Vorteil dieser Anschauungsweise liegt darin, daß der Motor wie ein ruhender Transformator berechnet werden kann.

Denken wir uns andererseits das mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 2\pi n_1$ umlaufende Statorfeld durch einen mechanisch angetriebenen permanenten Magneten ersetzt, und ist $\omega_2 = 2\pi n_2$ die Rotationsgeschwindigkeit des Ankers, so folgt aus



Figur 369.

dem Prinzipe der Gleichheit von Aktio und Reaktio für das Verhältnis der dem Feldmagneten zugeführten und der vom Rotor geleisteten Arbeit

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

oder

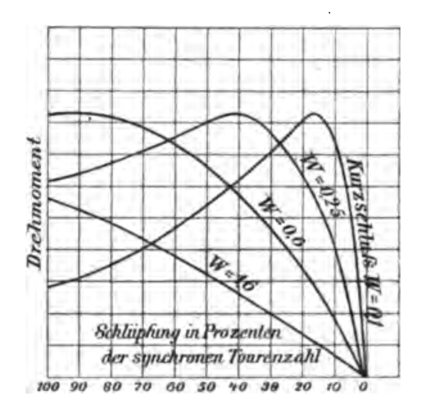
$$\frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{A}{A_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = \frac{n}{n_1} \quad .$$

Die im Anker verloren gehende Leistung ist proportional dem Tourenverluste $n = n_1 - n_2$ oder der sogenannten Schlüpfung des Ankers. Hoher Wirkungsgrad ist nur bei geringer Schlüpfung möglich. Diese Notwendigkeit, auch für asynchronen Motorbetrieb dem Synchronismus stets nahe bleiben zu müssen, ist der Grund, warum selbst bei kleinen Motoren nicht zwei-, sondern mehrpolige Drehfelder verwandt werden, d. h. man verteilt die drei Phasen nicht einmal, sondern $\Pi$-mal auf die Statorperipherie, so daß $n$-Stromperioden nur $\frac{n}{\Pi}$ Umläufe des Feldes entsprechen. Dadurch wird es möglich, trotz der bei uns gewöhnlichen Frequenz $n = 50$ unzweckmäßig hohe Betriebstourenzahlen des Rotors zu vermeiden. Bei strengem Synchronismus $n_1 = n_2$, d. h. der Schlüpfung Null entsteht in den Ankerleitern überhaupt keine elektromotorische Kraft und kein Strom. Soll schon bei kleinen Werten von $n$ der Läuferstrom und damit das Drehungsmoment erheblich werden, so muß der Ankerwiderstand klein sein. Wie steht es aber dann um die Zugkraft bei stärkerem Zurückbleiben des Läufers speziell um das Anzugsmoment beim Stillstande $n_2 = 0$, also $n = n_1$? Die elektromotorische Kraft im Anker steigt proportional $n$, zugleich aber steigt auch die Impedanz $\sqrt{W^2 + (2\pi n L)^2}$, der Strom nimmt also bei kleinem $W$ nur für sehr kleine Schlüpfung $n$ mit dieser erheblich zu. Außerdem wächst mit der Schlüpfung $n$ die Phasen-

verschiebung $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\pi n L}{W}$ zwischen Strom und Spannung und damit auch der Winkel, um den die Strommaxima im Rotor räumlich gegen die Orte stärksten Feldes verschoben sind. Bei kleinem $W$ muß also für größeres $n$ die dem Produkte von Strom und Feld proportionale ponderomotorische Kraft wieder sinken. Die Rechnung ergiebt im Einklange mit diesen Betrachtungen das Drehungsmoment

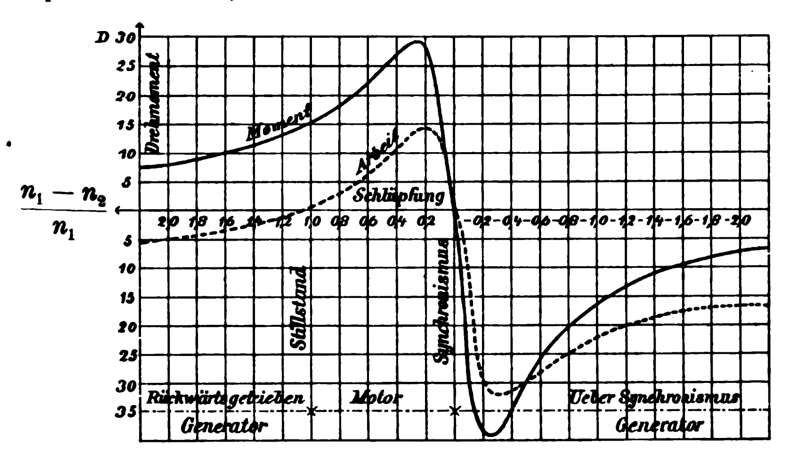
$$D \sim \frac{n W}{W^2 + (2\pi n)^2 L^2} \quad .$$

Für kräftiges „Angehen" müßte $W$ groß, für ökonomischen Dauerbetrieb klein sein. Daher ersetzt man den Käfiganker durch einen aus lamelliertem Eisen mit einer vom Eisen isolierten Dreiphasenwicklung, die mit drei Schleifringen verbunden ist, zwischen denen beim Anlassen zur Erhöhung der Zugkraft Widerstände eingeschaltet werden. Die Steinmetz entnommene Figur 370 zeigt, wie durch Veränderung des Ankerwiderstandes die maximale Zugkraft auf eine beliebige untersynchrone Tourenzahl verlegt werden kann.




Figur 370.

Automatische Anlasser für Drehstrommotoren hat man in der Weise konstruiert, daß die Anlaßwiderstände im Rotor selbst angebracht sind und sich bei bestimmter Tourenzahl durch Zentrifugalkraft kurz schließen. Unsere Formel für die Beziehung zwischen Zugkraft $D$ und Schlüpfung $n$ gilt für jeden positiven oder negativen Wert von $n$. Aus ihrer graphischen Darstellung Figur 371 ist ersichtlich, daß ein Drehstrommotor bei $n > n_1$, d. h. umgekehrt angetrieben und bei $n_2 > n_1$, d. h. bei übersynchron umlaufendem Anker als Generator wirken muß,




Figur 371.

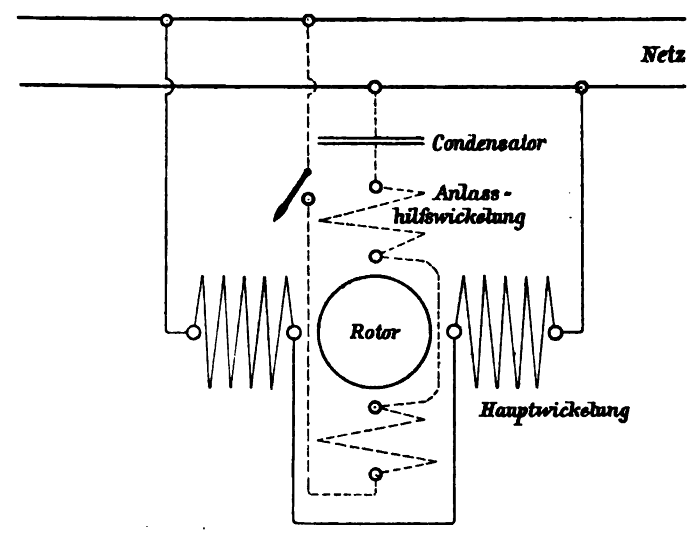
natürlich nur, wenn er sich mit einem anderen Wechselstromerzeuger in einem Stromkreise befindet. In der Tat hat man die Generatorarbeitsweise des Induktionsmotors bei übersynchronem Gange praktisch zu verwenden gelernt. Und zwar dient der sogenannte Induktionsgenerator[1] entweder zur Regulierung der Phasenverschiebung oder als Spannungserhöher.

[1] C. L. Feldmann, Asynchrone Generatoren. Berlin 1903.

Weitere Verbesserungen der als Motor oder Generator laufenden Induktionsmaschinen durch „Kompensierung" der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung streben die sogenannten kompoundierten Motoren und Generatoren an. Sie verwenden meist nach Art von Gleichstromankern ausgebildete Rotoren mit Bürsten oder auch Kombinationen von Kurzschluß- und Gleichstromankerwicklungen [1].

**Einphasenmotor.** Befindet sich ein Drehstrommotorkurzschlußanker in einem einfachen magnetischen Wechselfelde, so kann er aus Symmetriegründen kein Drehungsmoment erfahren. Setzen wir ihn aber im einen oder anderen Sinne in genügend schnelle Rotation, so läuft er nicht nur weiter, er beschleunigt sich bis in die Nähe des Synchronismus mit dem Wechselfelde und ist jetzt sogar imstande, erhebliche Arbeit zu leisten. Die klassische Theorie des Einphaseninduktionsmotors hat im Prinzip FERRARIS gegeben [2].

Wie man zur Erklärung des optischen Drehungsvermögens aktiver Substanzen das linear polarisierte Licht in zwei entgegengesetzt rotierende Komponenten zerlegt denkt, so kann auch jedes magnetische Wechselfeld konstanter Kraftlinienrichtung aufgefaßt werden als die Übereinanderlagerung in entgegengesetztem Sinne rotierender Felder von halber Intensität der maximalen Stärke des linearen Wechselfeldes. Hat der Anker gegen das eine Drehfeld eine mäßige Schüpfung, so beträgt seine Schlüpfung gegen das andere herumlaufende Feld nahezu 200 %. Danach überwiegt von den beiden entgegengesetzt gerichteten Drehungsmomenten




Figur 372.

bei weitem das erstere. Es ist verständlich, daß Einphasenmotoren mit etwa 8 % geringerem Wirkungsgrade arbeiten als Drehstrommotoren. Hauptnachteil des Einphasenmotors aber ist, daß er nicht mit Belastung und nicht von selbst in Gang kommt.

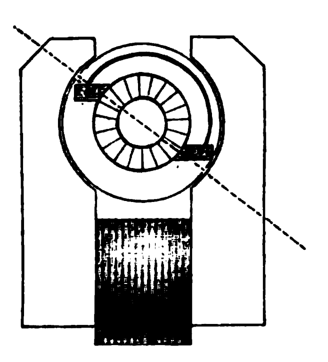
Zum Anlassen mechanische Hilfe entbehren zu können, versieht man den Stator außer der Hauptwicklung noch mit einer zweiten um den halben Polabstand entfernten Wicklung. Durch diese Hilfswicklung wird ein vom Betriebsstrom ab-

[1] Siehe darüber z. B. H. GÖRGES, D. R. P. Nr. 61951; Elektrotechn. Zeitschr. **12**. 699. 1891; A. HEILAND, Elektrotechn. Zeitschr. **22**. 633. 1901 und **23**. 560. 1902; M. LATOUR, ibid. **23**. 463 u. 600. 1902; sowie C. L. FELDMANN, l. c. — [2] G. FERRARIS, Nuovo Cimento (3) **35**. 99. 1894. — Von exakteren Behandlungen seien genannt F. EICHBERG, Elektrotechn. Zeitschr. **21**. 484. 1900 und H. GÖRGES, Elektrotechn. Zeitschr. **24**. 271. 1903.

gezweigter Bruchteil geschickt, dessen Phase man mittels vorgeschalteter Induktionsspule oder mittels einer meist elektrolytischen „Kapazität“ (Sodalösung mit Eisenblechelektroden) im einen oder anderen Sinne verschoben hat. („Kunstphase“.) Die Verwendung eines Anlaßkondensators zeigt Figur 372. Auf diese Weise kann dem pulsierenden Felde eine rotierende Komponente hinzugefügt werden, stark genug, um den unbelasteten Motor auf die normale Tourenzahl zu beschleunigen. Der Motor läuft als Zweiphasenmotor an. Die zweite Phase wird nach Erreichung der Tourenzahl ausgeschaltet.

Die Bemühungen, dem einphasigen Induktionsmotor Anzugsmoment zu verleihen, haben zu sehr verschiedenartigen Konstruktionen geführt, über die noch nicht das letzte Wort gesprochen ist. STEINMETZ, BLONDEL, LATOUR, EICHBERG, WINTER, FINZI, LAMME, OSNOS, HEUBACH, SCHÜLER u. a. haben hier gearbeitet. Einige ihrer Maschinen charakterisiert man wohl als

**Repulsionsmotoren.** Figur 373 zeigt das schon 1887 von E. THOMSON[1] angegebene Prinzip. Der Rotor ist nach Art eines Gleichstromankers hergestellt. Die Bürsten, deren Verbindungslinie unter 45° gegen die Feldachse verschoben liegt, werden beim Anlaufen durch einen Widerstand verbunden, nachher kurz geschlossen[2]. Das Drehungsmoment kommt durch Wechselwirkung zwischen den Feldpolen und den in Verbindungsrichtung der Bürsten entstehenden Ankerpolen zustande.



Figur 373.

Werden Vorrichtungen zu Kompensation der Selbstinduktionen hinzugefügt, so bekommt man einen fast stetigen Übergang zu den sogenannten

**Reaktionsmotoren.** Sie benutzen mit mehr oder weniger Glück die von E. THOMSON entdeckten Rotationserscheinungen im magnetischen Wechselfelde, das teilweise durch die Wirbelströme in körperlichen Leitern oder kurz geschlossene Spulen abgeschirmt ist. (Handbuch 5. 589.)[3]

Nie das Stadium von Demonstrationsapparaten überschritten haben dagegen der Hysterismotor[4] und der thermomagnetische Motor[5].

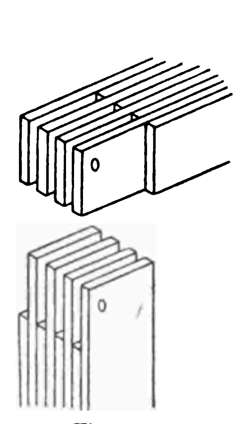
## Transformatoren.

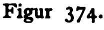
Von den zylindrischen Funkeninduktoren des physikalischen Laboratoriums, bei denen es sich in erster Linie um die Erreichung hoher Spannungen handelt, unterscheiden sich die technischen Vorrichtungen zu möglichst ökonomischer Änderung der Spannung von Wechselströmen dadurch, daß bei ihnen der magnetische Kreis vollständig durch Eisen geschlossen ist. Zwischenformen von einem mittleren magnetischen Widerstande für besondere Zwecke sind der Igeltransformator[6] und die sogenannten Funkentransformatoren[7].

Beim heutigen Starkstromtransformator erfüllen das Kupfer für die Stromleitung und das aus dünnen Blechen bestehende Eisen für den magnetischen Kraftfluß, mathematisch gesprochen, mehrfach zusammenhängende, miteinander verkettete Räume. Im Interesse leichterer Herstellung und um Material zu sparen, baut man jedoch die Eisenkörper nicht aus Blechen mit eingestanzten Löchern auf, sondern setzt jeden Elementarring aus einzelnen Stücken zusammen und

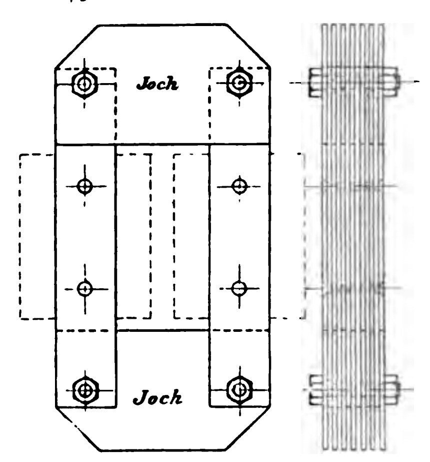
[1] ELIHU THOMSON, Electrical World. New York 28. Mai 1887. — [2] Siehe z. B. G. KAPP, Dynamomaschinen 134. 1904. — M. OSNOS, Elektrotechn. Zeitschr. 25. 1 und 25. 1904. BROWN, BOVERI & Co. ibid. 28. 818. 1907. — [3] F. UPPENBORN, Elektrotechn. Zeitschr. 12. 707. 1891. — H. GÖRGES, ibid. 23. 730. 1907. — [4] Heinkes Handbuch 9. § 141. — [5] Heinkes Handbuch 9. § 157; Kittelers Handbuch 2. LIPPMANN Cours de Thermodynamique 113. Paris 1889. — [6] I. SWINBURNE, Engl. Patent Nr. 12237; Elektrotechn. Zeitschr. 11. 65, 515, 575. 1890. — [7] FR. KLINGELFUSS, Drudes Ann. 5. 837. 1901; siehe auch Elektrotechn. Zeitschr. 26. 869. 1905.

vermeidet den magnetischen Widerstand der stumpfen „Stoßfugen" meist durch Verzapfung Figur 374 oder Überlappung Figur 375. Die Dicke der marktgängigen Transformatorbleche beträgt etwa $^1/_3$ mm.



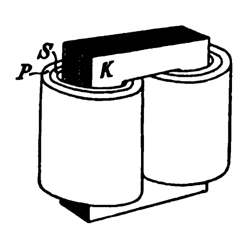


Figur 374.



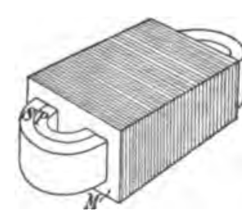

Figur 375.

Man unterscheidet Kerntransformatoren und Manteltransformatoren. Bei der Kerntype Figur 376 ist ein Eisenring ($K$) mit den primären ($P$) und sekundären Windungen ($S$) bedeckt. Bei den Manteltransformatoren Figur 377 werden von den primären ($P$) und sekundären Wicklungen ($S$) zwei eng aneinandergrenzende Ringe gebildet und vollständig von äußeren Eisenmassen ($M$) umschlossen. Ein Unterschied in der Wirkungsweise beider Typen macht sich nur insofern geltend, als einmal beim Kerntransformator meist das Kupfervolumen, beim Manteltransformator das Eisen relativ überwiegt und als andererseits beim Kerntransformator das Kupfer, beim Manteltransformator das Eisen besser gekühlt wird. Es kann dies für die Ökonomie bei verschiedenen Verwendungsweisen von Bedeutung sein (siehe unten S. 778). Mathematisch steckt die




Figur 376.

**Theorie** des Wechselstromtransformators zum großen Teile in der an anderem Orte (Handbuch 5. 580) behandelten Aufgabe: Zwei Stromkreise wirken durch Induktion aufeinander. Die dortigen Gleichungen




Figur 377.

$$w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = e_1 \quad ,$$

$$w_2 i_2 + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$$

wären zur Berücksichtigung von Hysteresis und Wirbelströmen in der Weise zu erweitern, daß man noch einen dritten fingierten Stromkreis hinzunimmt, welcher durch Induktion mit dem ersten und zweiten Stromkreise in Wechselwirkung steht. Die Endformeln würden dadurch allerdings naturgemäß noch verwickelter werden und trotzdem der durch die Anwesenheit des Eisens bedingten Abhängigkeit der Induktionskoeffizienten $L$ von den Stromstärken nicht Rechnung tragen.

Um eine anschauliche Übersicht über die physikalische Wirkungsweise von Transformatoren zu gewinnen, hält man sich zweckmäßiger an die Betrachtungsweise der Techniker und ihre graphischen Darstellungsmethoden (siehe außer den

oben S. 729 genannten Werken besonders C. P. FELDMANN, Wirkungsweise, Prüfung und Berechnung der Wechselstromtransformatoren, Leipzig, 1894/95. E. ARNOLD und J. L. LA COUR, die Transformatoren, Berlin, 1904. G. KAPP, Transformatoren für Wechelstrom und Drehstrom, Berlin, 3. Auflage 1907).

Ein Transformator hat an vier Punkten Energieverkehr mit der Außenwelt, an den beiden Enden der primären und an denen der sekundären Wicklungen. Im allgemeinen sind gegeben die primäre Klemmenspannungsdifferenz $p_1$ und die Beschaffenheit des äußeren sekundären Stromkreises, d. h. seine Belastung mit Widerständen, Lampen, Motoren. Gefragt wird nach der sekundären Klemmenspannung $p_2$, den Strömen $i_1$, $i_2$, ihren Leistungen $A_1$ und $A_2$.

Nehmen wir zunächst an, der Transformator habe keine Streuung, d. h. der gesamte Kraftfluß $\Phi$ durchsetze alle $n_1$ primären und alle $n_2$ sekundären Drahtwindungen. Außerdem mögen die Wicklungen verschwindend kleinen Widerstand haben, so daß die Klemmenspannungen $p_1$, $p_2$ gleich den elektromotorischen Kräften $e_1$ und $e_2$ gesetzt werden können. Im Falle harmonisch veränderlicher primärer Klemmenspannung

$$P_1 \sin(\omega t) \text{ Volt}$$

gilt dann

$$p_1 = P_1 \sin(\omega t) = n_1 \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8}\,; \qquad \Phi = \frac{-P_1}{n_1 \cdot \omega} \cos(\omega t) \cdot 10^8$$

$$p_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} = -\frac{n_2}{n_1} p_1 = -\frac{n_2}{n_1} P_1 \sin(\omega t)$$

$$\Phi = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{M} \quad ,$$

wo $M$ den magnetischen Widerstand bezeichnet. Man sieht hieraus:

1. ungestört durch Strombelastung, ungestört durch die Abhängigkeit des $M$ von der magnetmotorischen Kraft, ungestört durch Komplikationen wie Hysteresis und Wirbelströme sind Kraftfluß und sekundäre Klemmenspannung harmonische Funktionen der Zeit, falls die primäre Klemmenspannung eine Sinusfunktion der Zeit ist;
2. die Maximalwerte und demnach auch die Effektivwerte beider Größen hängen nur von der effektiven Primärspannung ab. Der Kraftfluß bleibt um $90^0$, die elektromotorische Kraft der Sekundärwicklung bleibt um $180^0$ gegen die primäre Spannung zurück;
3. das Übersetzungsverhältnis $U$ ist gleich dem Verhältnis der Windungszahlen
$$P_2 = P_1 \frac{n_2}{n_1} = P_1 U \quad ;$$
4. die Summe von primären und sekundären Amperewindungen ist in jedem Moment gleich den für offenen Sekundärkreis (d. h. $i_2$ gleich Null) herrschenden primären Leerlauf-Amperewindungen
$$n_1 i_0 \quad .$$

Der Leerlauf- oder Magnetisierungsstrom $i_0$ ergibt sich gemäß Formel (2) S. 735 aus Gleichung

$$i_0 = \Phi \frac{M}{n_1} = -\frac{P_1 \cos(\omega t) \cdot 10^8}{n_1^2 \omega} \cdot \frac{10}{4\pi} \left(\frac{l}{q\mu} + \delta\right) \quad .$$

Es bedeutet $l$ die mittlere Länge des Kraftlinienweges; $q$ den mittleren Querschnitt des Eisenkörpers abzüglich der von der Isolation zwischen den Blechen eingenommenen Fläche (meist $10\,^0/_0$); $\delta$ die Korrektion wegen etwaiger

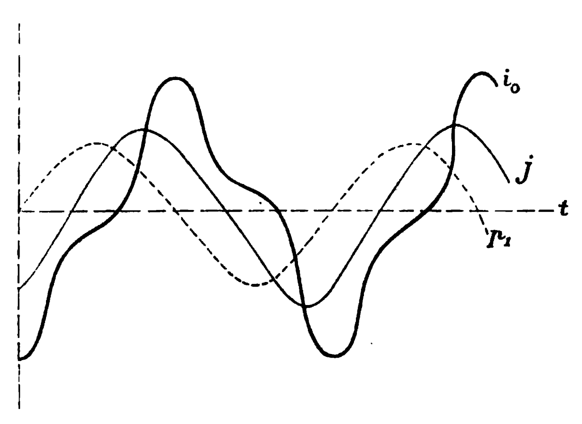
Stoßfugen (pro Fuge ungefähr 0,005 cm). Der Faktor von $q$

$$\mu = \frac{B_{(t)}}{H_t}$$

ist für die einzelnen Zeitmonente einer Periode aus derjenigen Hysteresis-$BH$-Kurve des Eisenmateriales zu entnehmen, welche für Zyklen der Induktionsamplitude

$$B = \pm \frac{P_1 \cdot 10^8}{n_1 \omega q}$$

gilt und deren Form stark vom Primärspannungsscheitelwerte $P_1$ abhängt. Soll zugleich der Einfluß der Wirbelströme im Eisen berücksichtigt werden, so haben wir an Stelle der statischen $BH$-Kurve eine etwa mit dem Oszillographen bei der Periodenzahl $\frac{\omega}{2\pi}$ aufgenommene „dynamische" Hysteresisschleife der Berechnung von $\mu$ und $i_0$ zugrunde zu legen. Die so punktweise ermittelte Magnetisierungsstromkurve ist weder sinusförmig, noch symmetrisch in bezug auf die Maximalordinaten. Ihre aus Figur 378 ersichtlichen Spitzen werden um so steiler, je mehr sich bei den Strommaximis das Eisen der Sättigung nähert. Behufs Widergabe des Leerlaufstromes $i_0$ in Vektordiagrammen muß man ihn durch einen äquivalenten rein sinusförmigen Strom $j = J_0 \cos(\omega t + \alpha)$ ersetzen. Seine Amplitude $J_0$ und Phasenvoreilung $\alpha$ gegen $\Phi$ ist durch die Forderungen bestimmt, daß Effektivwert sowohl als Arbeitsverbrauch im magnetischen Kreise für äquivalenten und deformierten Strom gleich sind. Einfacher als aus den $i_{0(t)}$ und $\Phi_{(t)}$ Kurven ergeben sich beide Werte experimentell in folgender Weise. Man mißt mit dem Amperemeter $i_{0\,\mathrm{eff}}$, mit dem Voltmeter $p_{1\,\mathrm{eff}}$, mit dem Wattmeter $A_0$ und hat so




Figur 378.

$$J_0 = \sqrt{2} \cdot i_{0\,\mathrm{eff}} \qquad \cos\alpha = \frac{A_0}{i_{0\,\mathrm{eff}}\, p_{1\,\mathrm{eff}}} \quad .$$

Zerlegung des äquivalenten Leerlaufstromes $j_0$ gibt die als nur „magnetisierend" gedachte wattlose Komponente

$$J_L = J \cos\alpha$$

und die Hysteresis und Wirbelstromarbeit leistende Wattkomponente

$$J_w = J \sin\alpha \quad .$$

Das Fundamentaldiagramm Figur 379 für den idealen Transformator ohne Streuung und ohne OHMschen Spulenwiderstand bedarf kaum der Erläuterung. Für gegebenes $P_1$ folgen $P_2$, $\Phi$, $n_1 J_0$, $\alpha$ gemäß den vorstehenden Formeln unabhängig von der Strombelastung der sekundären Wicklung. $I_2$ und $\varphi_2$ sind durch $P_2$ und durch Widerstand $W$ und Selbstinduktion $L$ (eventuell auch Kapazität) des sekundären äußeren Stromkreises bestimmt und variieren mit diesen Größen nach dem OHMschen Gesetz für Wechselströme. $n_1 I_1$ endlich konstruiert sich nach Größe und Richtung auf Grund der Forderung mit $n_2 I_2$ zusammen, $n_1 J_0$ als Resultante zu geben

Es sei jetzt Streuung vorhanden. Die Primärwicklung durchsetze der Kraftfluß

$$\Phi_1 = \Phi + \psi_1 \quad .$$

die sekundäre entsprechend

$$\Phi_2 = \Phi + \psi_2 \quad ;$$

die gestreuten Kraftlinien $\psi_1$ und $\psi_2$ verlaufen größtenteils in Luft und sind darum den Strömen $i_1$, $i_2$ proportional.

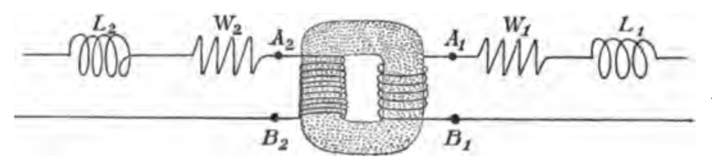
Den Faktor, mit dem ein Strom multipliziert werden muß, um die Zahl der von ihm erzeugten Kraftlinien zu geben (jede Kraftlinie so oft gerechnet, als sie den Strom umschlingt), nennen wir aber Selbstinduktion. Ein Transformator mit den Streuflüssen $\psi_1$, $\psi_2$ wirkt daher wie ein idealer Transformator, dessen primärer und sekundärer Wicklung widerstandslose Spulen von den Selbstinduktionen

$$L_1 = \frac{\psi_1}{i_1} n_1 \quad \text{und} \quad L_2 = \frac{\psi_1}{i_2} n_2$$

vorgeschaltet sind. Die mit $n_1$ resp. $n_2$ multiplizierten Streuflüsse pro Stromeinheit nennt man darum wohl auch Ergänzungsselbstinduktionskoeffizienten von primärer und sekundärer Wicklung. Analog können die Ohmschen Widerstände $w_1$ und $w_2$ der primären und sekundären Wicklung dem idealen Transformator vorgeschaltet gedacht werden (Figur 380).

Figur 379.

Die Spannung an den primären Klemmen eines gegebenen Transformators ist darum gleich der Spannung an den Klemmen $A_1$, $B_1$ des entsprechenden




Figur 380.

idealen Transformators ohne Streuung und Kupferdrahtwiderstand, nennen wir sie $E_1$ plus dem Spannungsabfall in der vorgeschalteten aus $w_1$ und $L_1$ zusammengesetzten Impedanz

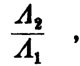
$$\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2} \quad .$$

Analog bei dem sekundären Stromkreis. Figur 379 erweitert sich demgemäß zu Figur 381. Man nimmt in erster Annäherung für $E_1$ das gegebene $P_1$, leitet daraus wie oben der Reihe nach $E_2$, $\Phi$, $n_1 I_0$, $\alpha$, $n_2 I_2$, $\varphi$ ab und konstruiert schließlich $n_1 I_1$. Alsdann wird $I_1 w$ in Richtung von $I_1$, es wird $I_1 \omega L$ rechtwinklig dazu an $E_1$ angetragen. Das so gefundene zu große $P_1$ liefert den Faktor, um welchen $E_1$ verkleinert werden muß, um eine zweite und praktisch immer genügende Annäherung für $E_1$, und für alle übrigen Größen zu geben. Für konstantes $P_1$ nimmt die sekundäre Spannung $P_2$ bis Vollbelastung bei Transformatoren von einigen Kilowatt

nur um weniger als 2 bis 3% ab. Anblick des Schemas 381 lehrt, daß bei induktiver Belastung (großem $\varphi_2$) dieser Abfall wesentlich von der Streuung, bei nicht induktiver Belastung (kleinem $\varphi_2$) wesentlich vom OHMschen Widerstande herrührt. Ebenso lehrt sie, daß Primär- und Sekundärstrom bei einigermaßen erheblicher Belastung für beliebiges $\varphi_2$ fast genau entgegengesetzt gleiche Phase haben.

Figur 381.

Der Wirkungsgrad



$$\frac{A_2}{A_1},$$

das Verhältnis der abgegebenen zur aufgenommenen Leistung, wird am einfachsten durch Bestimmung der Verluste

$$v = v_0 + i_{1\,\mathrm{eff}}^2 w_1 + i_{2\,\mathrm{eff}}^2 w_2$$

ermittelt. $v_0$ die Hysteresis und Wirbelstromwärme im Eisen ist gleich den leicht beobachtbaren primären Leerlaufwatt minus den sehr kleinen $i_{0\,\mathrm{eff}}^2 w_1$ und bei konstantem $P_1$ unabhängig von der Belastung $A_2$. Dagegen sind $i_1$ und $i_2$ bei stärkerer Belastung, wie aus dem Diagramm ersichtlich ist, proportional $A_2$. Wir können daher schreiben

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A_2 + v_0 + i_{1\,\mathrm{eff}}^2 w_1 + i_{2\,\mathrm{eff}}^2 w_2} = \frac{A_2}{A_2 + v_0 + c A_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{v_0}{A_2} + c A_2}.$$

Dies wird ein Maximum für

$$v_0 = c A_2^2 = i_{1\,\mathrm{eff}}^2 w_1 + i_{2\,\mathrm{eff}}^2 w_2 ,$$

d. h. bei derjenigen Belastung, bei der die Verluste im Eisen gleich den Verlusten im Kupfer sind. Analoge Ansätze lehren, daß bei gegebenem Gesamtvolumen des Kupfers es am vorteilhaftesten ist, die Querschnitte der Drähte so zu wählen und das Kupfer so zwischen Primärwicklung und Sekundärwicklung zu verteilen, daß bei normaler Belastung

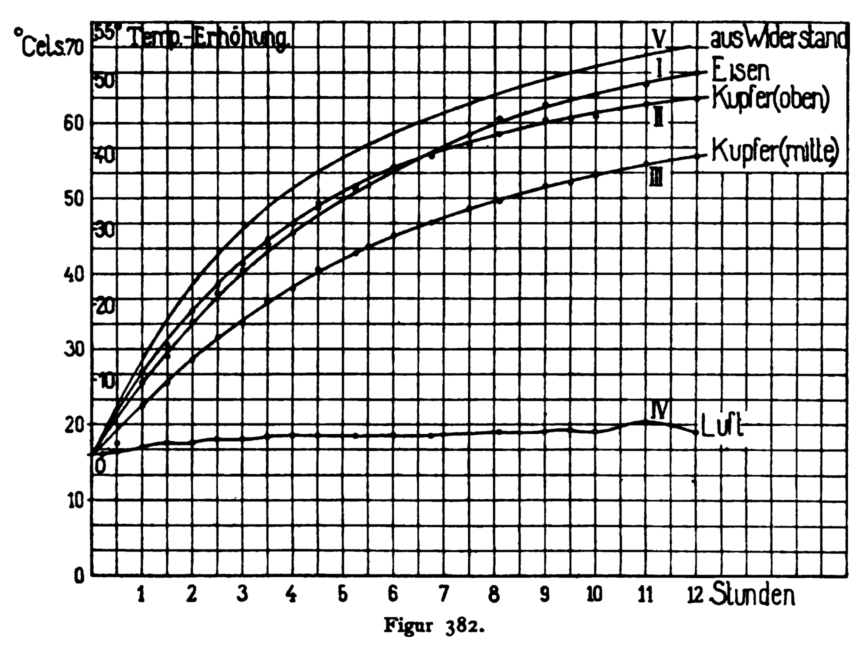
$$i_{1\,\mathrm{eff}}^2 w_1 = i_{2\,\mathrm{eff}}^2 w_2$$

wird. Die Anwendung dieser Prinzipien führt zu wesentlich verschiedenen Dimensionierungen von Eisen und Kupfer, je nachdem es sich um Transformatoren handelt, die Motoren speisen und die darum, wenn überhaupt im Betrieb, dann meist nahezu voll belastet sind, oder um Lichttransformatoren für Dauerbetrieb aber eine geringe durchschnittliche Belastung, da sie während des Tages ja meist ganz leer laufen. In letzterem Falle wird man die Verluste im Kupfer, die täglich nur wenige Stunden in voller Größe auftreten, verhältnismäßig groß machen, die Eisenverluste aber durch genügend reichliche Eisenquerschnitte und damit Verminderung von $B$ möglichst herabdrücken. Für die Hysteresiswärme $V_h$ pro Zyklus und pro Volumeinheit gilt die empirische STEINMETZsche Formel[1]

$$V_h = \mathrm{prop}\, B^{1,6} .$$

[1] Näheres etwa bei R. POHL und U. BODE, Elektrotechn. Zeitschr. **26**. 897. 1905.

Die Belastbarkeit eines Transformators für Dauerbetrieb ist (wie die einer jeden stromdurchflossenen Vorrichtung) durch die Größe seiner Oberfläche bestimmt. Die Verlustwatt müssen an die Umgebung abgegeben werden, ohne daß die Temperaturerhöhung das Isolationsmaterial gefährdet oder das Eisen allmählich in der Weise umwandelt, daß die Hysteresis sehr stark (auf über das Doppelte) steigt. Als zulässige Grenze für die Temperaturerhöhung rechnet man 60 bis 70° C, und dies erfordert für die gewöhnliche Luftkühlung 25 bis 30 cm² Kühlfläche pro Watt Verlust. Wie bei den Maschinen gestalten sich die Verhältnisse mit dem Größerwerden der Transformatoren immer ungünstiger, da die Oberflächen nur quadratisch wachsen, wenn die Volumina kubisch zunehmen. Um hier die Ausnutzbarkeit zu steigern, verwendet man künstliche Kühlmethoden. Selbst kostspielige Anordnungen wie Luftgebläse, Einbettung der Transformatoren in Öl und mechanische Zirkulationsvorrichtungen für das Öl, oder Anordnung von Wasserkühlschlangen im Öl verlohnen sich.



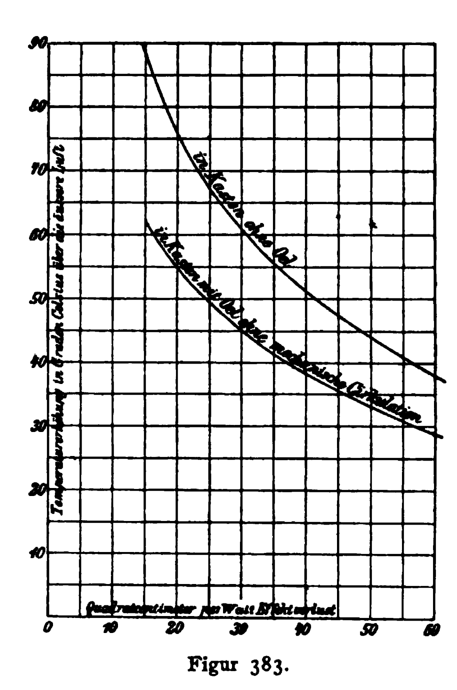

Figur 382.

Für kürzere Zeit (Experimentierzwecke) kann umgekehrt der große Transformator wegen seiner größeren Wärmekapazität stärker überlastet werden. Figur 382 veranschaulicht den zeitlichen Temperaturanstieg der verschiedenen Teile eines 20 Kilowatt-Kerntransformators mit natürlicher Luftkühlung auf Grund ARNOLDscher Versuche. Figur 383 gibt KAPPsche Messungen wieder über die Endtemperatur, welche Transformatoren in gußeisernen Gefäßen mit oder ohne Ölfüllung erreichen, in ihrer Abhängigkeit von der Abkühlungsfläche per Watt Verlust.

Sollen Diagramme, wie Figur 381 nicht nur als Grundlage für trigonometrische Berechnung, sondern zur quantitativen Wiedergabe oder zeichnerischen Lösung praktischer Aufgaben verwandt werden, so stört meist die verschiedene Größenordnung der Strecken $E_1$ und $E_2$, wie sie aus einigermaßen erheblichem Übersetzungsverhältnis

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1} = U$$

folgt. Für alle magnetischen und alle Wärmewirkungen einer Spule und darum auch für die Arbeitsleistung und die Verluste ist es aber gleichgültig, ob die


Figur 383.

Windungen parallel oder hintereinandergeschaltet sind, wenn nur in beiden Fällen in jeder Windung derselbe Strom fließt. Man kann darum den gegebenen Transformator für Diagrammdarstellungen durch einen Transformator ersetzen, bei dem immer $U$ der $n_2$ sekundären Windungen des gegebenen Transformators parallel geschaltet sind oder zu einer Windung von $U$fachem Querschnitt vereinigt werden [1]. — Dieser äquivalente Transformator hat dann also das Umsetzungsverhältnis 1. Der sekundäre Strom wird $U$mal größer, die Klemmenspannung $U$mal kleiner; an Stelle von $w_2$ tritt

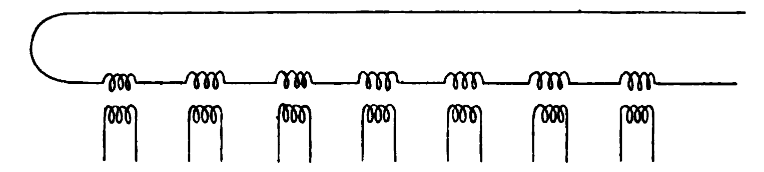
$$w_2^1 = \frac{w_2}{U^2} \quad ,$$

an Stelle von $L_2$

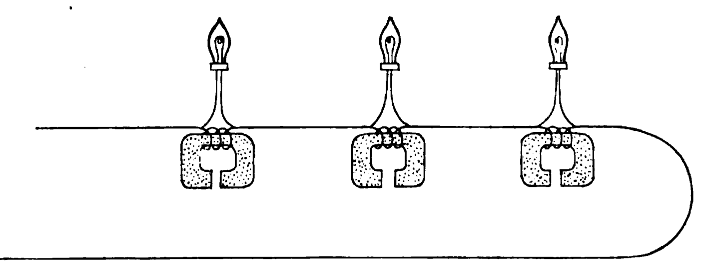
$$L_2^1 = \frac{L_2}{U^2} \quad .$$

Das Verhältnis der sekundären und primären Amperewindungen ist direkt das Verhältnis der Ströme selbst.

Praktische Ausführung wird, nebenbei bemerkt, ein Transformationsverhältnis 1 nur bei Serienschaltung Figur 384 einer größeren Anzahl von Transforma-


Figur 384.

toren finden. Man kann in diesem letzteren Falle aber noch einen Schritt weiter gehen und statt $n_1$ gleich $n_2$ zu machen, die primäre und sekundäre Spule viel-

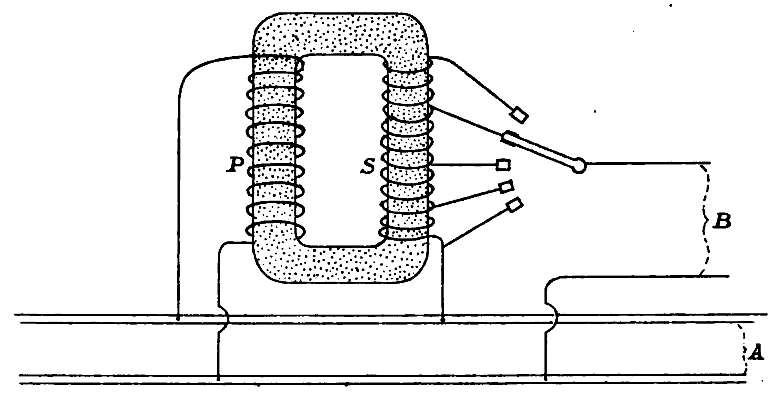

Figur 385.

mehr zusammenfallen lassen und wie Figur 385 schalten. Dieser Übergang von eigentlichen Transformatoren zu den Verbrauchsstellen parallel geschalteten Drosselspulen entspricht dem Schritt vom Zweispuleninduktorium zum Extrastrominduktor.

[1] Für Heruntertransformationen $n_1 > n_2$ sind natürlich einfach die Worte sekundär und primär überall zu vertauschen.

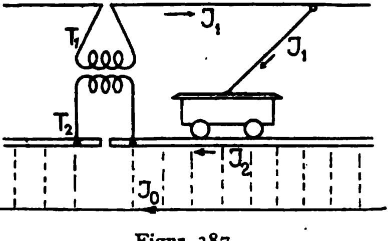
Die Anordnung Figur 385 ist angewandt bei der 1895 von der Firma HELIOS eingerichteten Beleuchtung des Nordostseekanals mit Glühlampen[1]. Es dürfte dies noch immer die einzige große elektrische Serienanlage in Europa sein.

Weniger der technischen Bedeutung als des physikalischen Interesses wegen, mag hier auch noch genannt werden die Verwendung von Transformatoren als




Figur 386.

Spannungserhöher oder Booster zur Kompensation des Spannungsabfalles in Speiseleitungen. (Siehe S. 785.) Wie Figur 386 zeigt, sind dabei sozusagen primäre $P$ und sekundäre Wicklung $S$ parallel geschaltet. Die sekundäre Wicklung, deren Windungszahl mittels Schalthebels nach Maßgabe der Belastung reguliert werden kann, befindet sich in der Speiseleitung $B$. Die primäre Wicklung liegt parallel zu den Sammelschienen $A$ der Dynamos in der Zentrale.




Figur 387.

Als analogen Kunstgriff zur Kompensation des Spannungsverlustes in den Schienen von Wechselstrombahnen hat G. KAPP[2] sogenannte Saugtransformatoren angegeben. Ihre Primärwicklungen sind in gewissen Zwischenräumen in die Oberleitung eingeschaltet, während die Sekundärwicklungen in Serie mit der Schienenleitung liegen. Figur 387 veranschaulicht, daß in dem Maße, als der Hinstrom $I_1$ in $T_1$ anwächst, auch $T_2$ in Aktion tritt und im Sinne eines Spannungsausgleiches zwischen Schienen und Erde wirkt[3].

Werden an einem Transformator Spannungen angelegt, die sich nicht nach einem Sinusgesetz ändern, so hat man mit den einzelnen Gliedern der FOURIERschen Reihe zu rechnen, und die Theorie muß auf verwickelte Annäherungsformeln hinauslaufen. Nur darauf sei zum Schlusse hingewiesen, daß die aus den Grundgleichungen eines Transformators ohne Streuung

$$p_1 - w_1 i_1 = n_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$p_2 - w_2 i_2 = - n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

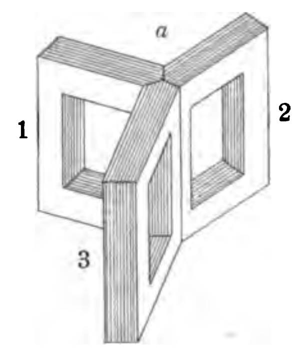
bei genügend kleinem $w_1$ und $w_2$ und genügend geringer Belastung folgende Beziehung

$$p_2 = -p_1 \frac{n_2}{n_1}$$

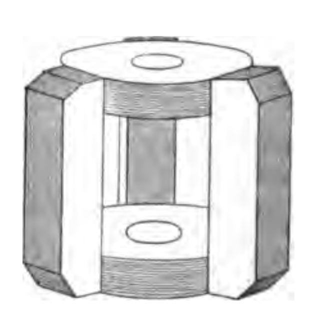
[1] A. ROTHERT, Elektrotechn. Zeitschr. **17**. 142. 1896. — [2] Elektrotechn. Zeitschr. **23**. 19. 1902. — [3] Vgl. auch BEHN ESCHENBURG, Elektrotechn. Zeitschr. **25**. 311. 1904.

zwischen den Instantanwerten $p_1$ und $p_2$ der Klemmenspannungen unabhängig von der Primärspannungskurvenform gilt, was für die Verwendung von Transformatoren zu Meßzwecken z. B. bei Oszillographen oder Voltmetern von Bedeutung ist (Meßtransformatoren).

**Drehstromtransformatoren.** Statt bei Transformation von Mehrphasenstrom für jede Phase einen besonderen Einzeltransformator zu benutzen, wendet man auf die magnetischen Kraftflüsse der einzelnen Phasen analoge Überlegungen an, wie bei Schaltung der elektrischen Stromkreise selbst. Zunächst kann man beim Dreiphasentransformator beispielsweise den drei Eisenkreisen 1, 2, 3 (Figur 388) die gemeinsame magnetische Rückleitung *a* geben. Da aber in einem Drehstromsystem ohne neutrale Rückleitung die algebraische Summe der Momentanwerte der drei Ströme stets gleich Null ist, so gilt dies bei symmetrischer Windungsanordnung auch von den magnetomotorischen Kräften. Die Eisenrückleitung wird kraftflußlos und kann fortgelassen werden. Eine magnetische Verkettung, wie sie




Figur 388.



Figur 389.

Figur 389 darstellt, spart nicht nur Eisenmaterial, sondern wirkt bei unsymmetrischer Belastung auch ausgleichend auf die elektromotorischen Kräfte. Was die Bewicklungsweise angeht, so sind da für primären, wie sekundären Kreis sowohl Stern- als Dreiecks- oder gemischte Schaltungen ausführbar. Es besteht also eine übergroße Zahl von Kombinationsmöglichkeiten.

## Gleichstrom und Wechselstrom-Gleichstromumformer.

Die Änderung der Spannung von Gleichstrom und die gegenseitige Umwandlung von ein- oder mehrphasigem Wechselstrom und Gleichstrom geschehen meist mittels zwei auf einer Achse sitzender getrennter Maschinen, von denen die eine als Motor, die andere als Dynamo läuft. Auch können die beiden Gleichstromwicklungen von verschiedener Windungszahl bzw. die Wechselstrom- und die Gleichstromwicklung, auf demselben Anker angebracht, zwischen denselben Feldmagneten rotieren. Bei Gleichstrom-Wechselstromumformung endlich kann die Ineinanderarbeitung der beiden Maschinen noch einen Schritt weitergehen. Dieselbe Ankerwicklung wird mit Kollektor für Gleichstrom und zugleich mit Schleifringen für Wechselstrom versehen. Allerdings ist man dann bei gewöhnlichem Wechselstrom an das Klemmenspannungsverhältnis

$$\frac{P\,\text{Gleichstrom}}{P_{\text{eff}}\,\text{Wechselstrom}} = \sqrt{2}$$

gebunden und muß, wenn von diesem Verhältnis abgewichen werden soll, die Wechselstromseite noch mit einem Wechselstromtransformator versehen werden. Im Falle *n*-phasigen Drehstroms werden *n*-Gleitringe symmetrisch am Anker an-

gebracht, und zwischen zwei benachbarten Ringen besteht dann die Effektivspannung $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{2}}$ von der Spannung der Gleichstromseite.

Endlich kann wie der Anker eines Gleichstrom- oder eines synchronen Wechselstrommotors, so auch der Anker eines Induktionsmotors mit einem äußeren Verbrauchskreise verbunden werden. Wir haben dann einen Periodenzahlumformer vor uns, welcher Strom von der Frequenz der Schlüpfung abgibt, oder wie man sich auch ausdrückt, wir haben einen allgemeinen Wechselstromtransformator, d. h. einen Wechselstromtransformator mit beweglicher Sekundärspule. Auch als Phasenumformer[1] zur Erzeugung von „Kunstphasen“ kann ein leerlaufender Induktionsmotor verwendet werden.

## Leitung und Verteilung.

**Leitungsmaterial.** Abgesehen von Luftleitungen, bei denen der größeren Tragfähigkeit wegen Bronze verwandt wird, geschieht der Transport elektrischer Leistung meist in Kupferdrähten oder -Kabeln. Als Normalkupfer von 100% Leitfähigkeit gilt Kupfer, dessen Leitfähigkeit 60 beträgt, d. h. bei dem Draht von 1 mm Querschnitt für 15° C auf 60 m Länge ein Ohm Widerstand hat. Kupfer geringerer Leitfähigkeit als 57 ist nach den Kupfernormalien des Verbandes Deutscher Elektrotechniker[2] vom 18. Juni 1896 als Leitungskupfer nicht annehmbar.

**Wirtschaftlicher Querschnitt.** Die auf einer Leitung pro Längeneinheit durch JOULEsche Wärme verlorene Energie ist umgekehrt proportional dem Drahtquerschnitte. Die Kosten des Meters Leitung und damit Verzinsung und Amortisation wachsen dem Kupferquerschnitte teilweise direkt proportional.

Der Ausdruck

$$\frac{c_1}{q} + c_2 q + c_3$$

kann also die gesamten jährlichen Unkosten einer elektrischen Leitung darstellen.

Er wird ein Minimum für $q = q_r$, wenn

$$\frac{c_1}{q_r} = c_2 q_r$$

gilt. Folglich ist am wirtschaftlichsten ein Querschnitt, bei dem der von der Drahtstärke abhängige Anteil der Leitungsverzinsung und Amortisation ebensoviel beträgt als der Geldwert der in der Leitung verwüsteten Energie (THOMSONs Satz)[3]. Letzteren berechnet man in der Technik nach der Formel[4]

$$\frac{m\varrho}{500}\int i^2\,dt \cdot \frac{l}{q} \text{ Mark.}$$

$m$ sind die Kosten der Pferdekraftstunde, die hier, um den Reibungsverlusten Rechnung zu tragen, nur zu 500 Watt angenommen wird, $\varrho$ ist die Leitfähigkeit des verwandten Kupfers, $l$ die Länge der Leitung, $i^2$ das Quadrat der jeweiligen Stromstärke, $dt$ die Zeit in Stunden, während deren sie herrscht. Das Integral ist über ein Jahr auszudehnen. Betragen die Anlagekosten $l\,(aq + b)$ Mark, wo $a$ und $b$ von der gewählten Isolation abhängen, und werden $z$% als Zins und Tilgungsbetrag eingesetzt, so folgt gemäß den jährlichen Gesamtkosten der Leitung

$$\frac{\varrho m}{500} T J^2 \frac{l}{q} + z\,l(aq + b)$$

---

[1] P. STEINMETZ, Transactions of the American Inst. of Electr. Engineers 38. 1900. — [2] Sicherheitsvorschriften d. V. D. E., Anhang A. Berlin, Springer. — [3] Brit. Assoc. 1881; Engineering 32. 374. 1881. — [4] G. GRAHWINKEL-K. STRECKER, Hilfsbuch, 3. Teil, Abschnitt IV, 6. Aufl., § 497, Berlin 1900.

für den vorteilhaftesten Querschnitt

$$q_r = J\sqrt{\frac{\varrho m T}{500 z a}}\,, \quad \text{wo} \quad T = \int\left(\frac{i}{J}\right)^2 dt$$

die auf Vollbelastung $J$ reduzierte Betriebsstundenzahl bezeichnet.

**Rentable Spannung.** Der wirtschaftliche Spannungsverlust, d. h. der Spannungsverlust $p_r$ beim wirtschaftlichen Querschnitte beträgt

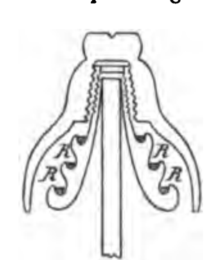
$$p_r = J \cdot \varrho \frac{l}{q_r} = l\sqrt{\frac{500 z a \varrho}{m T}}\,\text{Volt} \quad ,$$

der Wirkungsgrad der elektrischen Energieübertragung demgemäß

$$\eta = \frac{P - p_r}{P} \quad .$$

Da $p_r$ unabhängig von der Betriebsspannung $P$ und proportional der Entfernung $\frac{l}{2}$ von Erzeugungs- und Verbrauchsort ist, so wird die Rentabilität einer elektrischen Energieübertragungsanlage (der Wirkungsgrad) um so größer, je höher man die Spannung wählt, und man muß mit um so höherer Spannung arbeiten, um je längere Strecken $l$ es sich handelt.

Den Kollektoren und Bürsten von Gleichstromdynamo und Gleichstrommotor mutet man zurzeit bis 1000 Volt zu. Als Grenze für Wechselstrombetrieb ohne Transformatoren können 5000 Volt gelten. Darüber hinaus wird doppelte Transformation nötig: geringe Spannung in den Erzeugungs- und Verbrauchsapparaten, hohe Spannung in der Leitung. Mit der letzteren ist man über 60 000 Volt hinausgegangen, besonders in Amerika[1], ja bei Kabeln umsichtigster Isolierung bis 100 000 Volt[2] hinauf. Doch beginnt in Luft schon bei 40 000 Volt merklicher Energieverlust durch Strahlung aus den Drähten.




Figur 390.

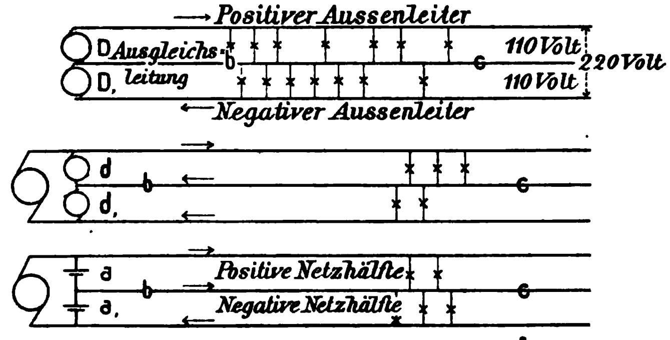
Die zur Isolation hoher Spannungen bei der Laufen-Frankfurter Übertragung angewandten Ölisolatoren (Figur 390) haben sich nicht bewährt. Das Öl in den kreisförmigen Rinnen $R$ erhöht die Oberflächenisolation überhaupt nur so lange, als sich kein Wasser auf ihm kondensiert hat. Vor allem aber kommt es beim Hochspannungsisolator auf Durchschlagsfestigkeit und Sicherheit gegen Randenladungen an, während der Verluststrom eines Isolators größtenteils Ladestrom ist. Diese Gesichtspunkte sind auch bei Hochspannungsversuchen im Laboratorium zu beachten[3].

Anders als bei Kraftübertragungsanlagen oder den ihnen gleichwertigen Sekundärstationen mit rotierenden Umformern liegen die Verhältnisse bei der Stromverwendung direkt für Beleuchtungszwecke. Da sich brauchbare Glühlampen nur bis 250 Volt haben herstellen lassen, und man vielfach solche von 110 Volt bevorzugt, so würde dies auch die obere Grenze für das EDISONsche System einfacher Parallelschaltung sein. Bei den mit Dampf- oder Gasmaschinen betriebenen Zentralen unserer Städte bedeutet dies aber nur ein bis zwei Kilometer rentabler direkter Verteilungsmöglichkeit. Man griff daher zu den

**Mehrleitersystemen.** Ihr Zweck ist: mit einem Vielfachen der Spannung der einzelnen Lampe arbeiten zu können, ohne die wenigstens bedingte sogenannte Elastizität der Anlage aufzugeben, d. h. die Möglichkeit, Verbrauchsstellen ein-

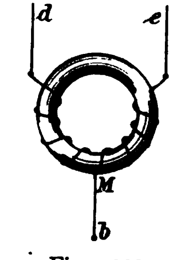
[1] Siehe z. B. Elektrotechn. Zeitschr. **26**. 1081. 1905. — [2] Elektrotechn. Zeitschr. **27**. 731. 1906. — [3] Siehe R. N. FRIESE, Das Porzellan als Isolier- und Konstruktionsmaterial in der Elektrotechnik 76—99. 1904. Porzellanfabrik Hermsdorf, Klosterlausnitz, S.-A. Ferner W. WEICKER, Elektrotechn. Zeitschr. **28**. 283. 1907; außerdem das Referat über einen Vortrag „Über amerikanische Erfahrungen" von M. H. GERRY jr., Elektrotechn. Zeitschr. **28**. 223. 1907.

und ausschalten zu können, ohne die anderen zu beeinflussen[1]. Figur 391 der drei Leiteranordnungen zeigt, wie im Mittelleiter *bc* immer nur die Differenz der Belastungsströme beider Netzhälften fließt. Der Ausgleichleiter wird darum auch meist entsprechend schwächer gewählt und vielfach als blanker „Nullleiter" an Erde gelegt. Die beiden großen Maschinen $DD_1$ kann man durch eine Maschine




Figur 391.

von der doppelten Spannung ersetzen, wenn durch zwei kleine Hilfsmaschinen $d$, $d_1$ oder durch Akkumulatoren dafür gesorgt wird, daß die Spannung der Außenleiter auch bei unsymmetrischer Belastung durch den Mittelleiter halbiert wird. Die Hilfsmaschinen resp. Akkumulatoren brauchen nur so groß zu sein, um den Ausgleichleitungsstrom aufnehmen zu können. Derselbe Zweck ist in einfacherer und wohlfeilerer Weise auch durch den Dobrowolkyschen Spannungsteiler[2] zu erreichen. Er besteht in einer Drosselspule, deren Enden *d* und *e* (Figur 392) zu zwei an der Gleichstromdynamo außerdem angebrachten Wechselstromschleifringen führen, während die Mitte *M* mit dem Ausgleichleiter *b* verbunden ist. Auf die mehr als drei Leitersysteme, etwa die Verdoppelung des Dreileitersystems, das schon recht selten angewandte Fünfleitersystem (in der Stadt Königsberg z. B.) können die vorstehenden Bemerkungen einfach übertragen werden.



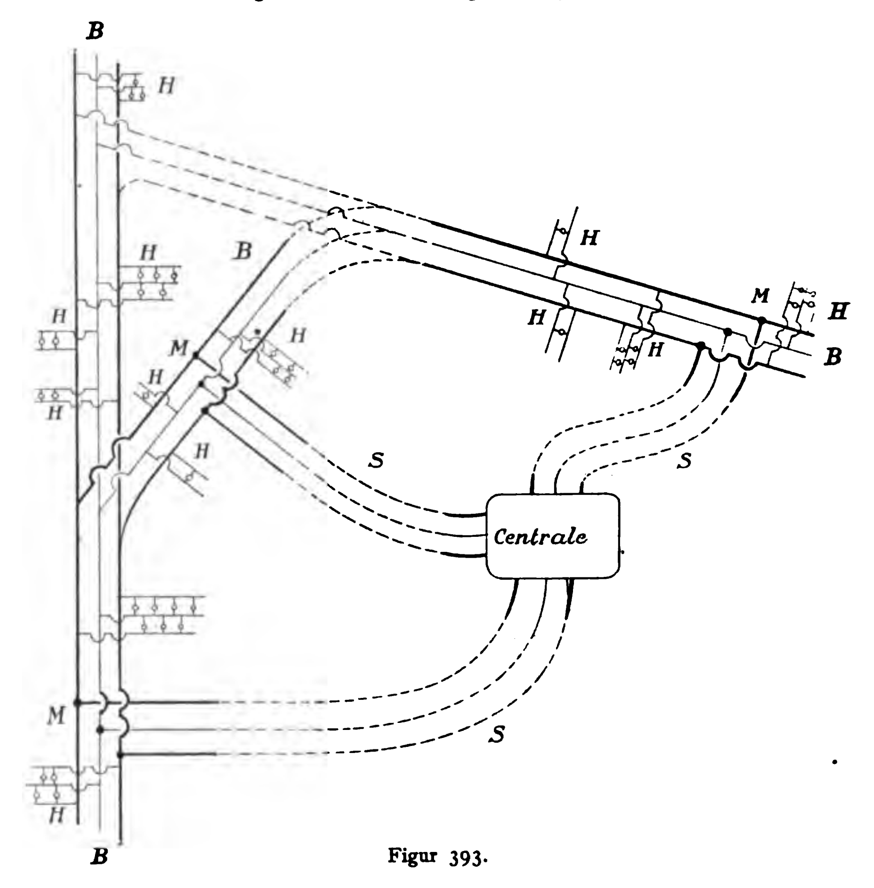

Figur 392.

Verteilt man zwischen den drei Leitern eines Drehstromsystems die Lampen einer Beleuchtungsanlage, so bedeutet auch dies Kupferersparnis gegenüber einfachem Wechselstrom. Die Ausnahmestellung eines der drei Leiter als Mittelleiter fällt weg. An Stelle der algebraischen Summen tritt die Vektorsumme der einzelnen Ströme[3].

**Verteilungsnetze.** Wegen der Empfindlichkeit von Glühlampen und Nernstlampen gegen Spannungsschwankungen und wegen der praktischen Notwendigkeit, in allen Teilen einer Anlage dieselben Lampen brennen zu müssen, darf der zwischen den einzelnen Verbrauchsstellen im sogenannten Verteilungsnetze bei Volllast stattfindende Spannungsabfall nicht nach dem Grundsatze der Wirtschaftlichkeit bemessen werden, sondern er darf nur bis zu etwa 3 % betragen. Figur 393 gibt einen Teil des Dreileitersystemnetzes einer städtischen Zentrale wieder. Die in die einzelnen Grundstücke führenden Abzweigungen *H* gehen von dem mehr oder weniger zusammenhängenden und behufs Spannungsausgleich mannigfach verflochtenen Verteilungsnetze *B* aus. Diesem Verteilungsnetze wird der Strom durch sogenannte Speiseleitungen (Feeders) *S* in den Speisepunkten *M* zugeführt. Für die Speiseleitungen wählt man den wirtschaftlichen Querschnitt, und je nach ihrer Länge kommen 10—20 % Spannungsverlust vor, während für

[1] Siehe z. B. L. Finzi, Elektrotechn. Zeitschr. **27**. 283. 1906. — [2] Elektrotechn. Zeitschr. **15**. 323. 1894. — [3] Siehe A. Blondel, Lum. Electr. **50**. 351, 473, 516, 605. 1893.

das Verteilungsnetz nur bis zu $2^0/_0$, für die Abzweigungen bis zu $1^0/_0$ Spannungsabfall als zulässig gelten. Um dem zentralen Ende jeder Speiseleitung stets die richtige Überspannung gegenüber der Netzspannung geben zu können, führen zu den Speisepunkten mit den Feeders noch sogenannte Prüfdrähte, welche die in jedem Speisepunkte jeweils herrschende Spannung von der Zentrale aus mit Voltmetern zu kontrollieren gestatten. Die Regulierung der Spannung der einzelnen




Figur 393.

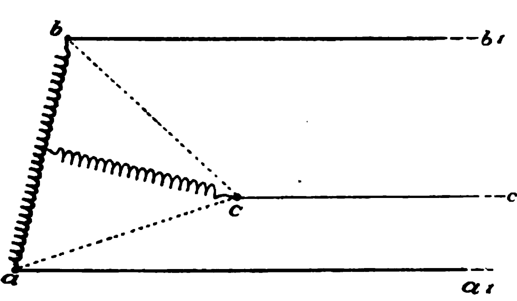
Speiseleitungen ist besonders einfach bei Zentralen mit Akkumulatorenbatterien. Die bei Städtegebieten größeren Umfanges nötig werdende

**Indirekte Verteilung** mit Hilfe von Umformern oder Akkumulatoren in Sekundärstationen oder für Wechselstrom mittels Transformatoren läßt große Mannigfaltigkeit der Ausführungen zu — besonders Drehstrom zur Speisung der Unterstationen und dort Umwandlung in Gleichstrom hat sich bewährt —. Sie bieten aber physikalisch kein spezielles Interesse dar. Dagegen sind interessante Anordnungen ersonnen worden, um in kupfersparender Weise den Bedürfnissen entgegenzukommen, welche bei Wechselstromanlagen auftreten, sobald diese zu gleicher Zeit Licht und Kraft an ein Netz abgeben sollen. Zwei von ihnen mögen wenigstens kurz genannt werden.

**Das monozyklische System** von PROTEUS STEINMETZ[1] (ausgeführt z. B. in der Zentrale Koblenz). Für Motorenbetrieb ist des einfacheren Angehens wegen Mehrphasenstrom vorzuziehen. Für Lichtbetrieb dagegen bietet Einphasenstrom den Vorteil besserer Spannungsregulierung und einfacherer Isolation. Wird in

[1] Elektrotechn. Zeitschr. **16**. 586. 1895; Electr. Engin. **19**. 486. 1895.

einer Anlage hauptsächlich Beleuchtungsstrom und nur in untergeordnetem Maße Kraftstrom verlangt, so kann folgende Anordnung am Platze sein. Auf dem Anker der Wechselstromdynamo befindet sich außer der Hauptwicklung noch eine zweite Wicklung aus dünnerem Drahte, deren eines Ende an die Mitte der Hauptwicklung angeschlossen ist. Die zweite Spule sei so angeordnet und bemessen, daß die in ihr erzeugte elektromotorische Kraft um 90° gegen die der Hauptwicklung in Phase verschoben ist, und daß deren Amplitude $\sqrt{\frac{3}{4}}$ von der Hauptwicklung beträgt. Dann bilden die an den drei Klemmen *a*, *b*, *c* Figur 394 herrschenden Wechselpotentiale in vektorieller Darstellung ein gleichseitiges Dreieck. Es kann ihnen also gewöhnlicher Drehstrom für Motorbetrieb entnommen werden, während zwischen *a* und *b* das Beleuchtungsnetz anzuschließen ist. Die Stromquelle des monozyklischen Systems läßt sich auch als einen Dreiphasenanker mit besonderer unsymmetrischer Sternschaltung ansehen. Entsprechend den geringeren Kraftstrombedürfnissen wird der an *c* anschließende dritte Leiter entsprechend schwächer gewählt werden als die zugleich den Beleuchtungsstrom führenden Drähte $aa^1$, $bb^1$.




Figur 394.

**Das polyzyklische System**[1]. Das System bezweckt, elektrische Energie mittels Strömen verschiedener Spannungen und verschiedener Periodenzahl unter Zuhilfenahme nur eines neuen Drahtes durch dasselbe Leitungsnetz gleichzeitig zu übertragen und zu verteilen, ohne daß diese Ströme sich gegenseitig beeinflussen. Es kann dies bei solchen Kraftzentralen praktisch sein, die nebenbei Beleuchtungsstrom in beschränktem Maße abzugeben haben. Denn Motoren werden besser für niedrige Frequenzen gebaut, die Niagarawerke z. B. arbeiten darum wie schon erwähnt auf Lord KELVINS Gutachten hin mit 25 Perioden. Ruhiges Licht dagegen ist nur mit höherer Periodenzahl zu erreichen.

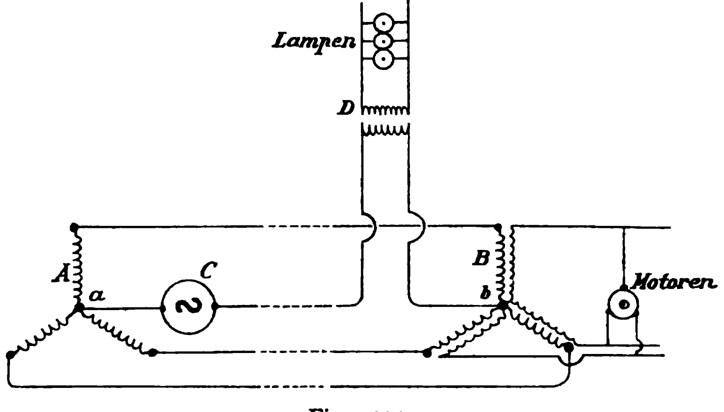
Die Unabhängigkeit von Strömen verschiedener Frequenz, die in demselben Drahte fließen, können wir so formulieren: 1. Die Effektivwerte der Stromstärken und Spannungen setzen sich zusammen wie Ströme und Spannungen gleicher Frequenzen, aber mit einer Phasenverschiebung von 90°. 2. Die Gesamtleistung ist gleich der algebraischen Summe der Leistungen der einzelnen Ströme. In Buchstaben

$$J_{\text{eff}} = \sqrt{J_{1\,\text{eff}}^2 + J_{2\,\text{eff}}^2} \qquad E_{\text{eff}} = \sqrt{E_{1\,\text{eff}}^2 + E_{2\,\text{eff}}^2}$$

$$A = E_{1\text{eff}} J_{1\text{eff}} \cos\varphi_1 + E_{2\text{eff}} J_{2\text{eff}} \cos\varphi_2 \quad .$$

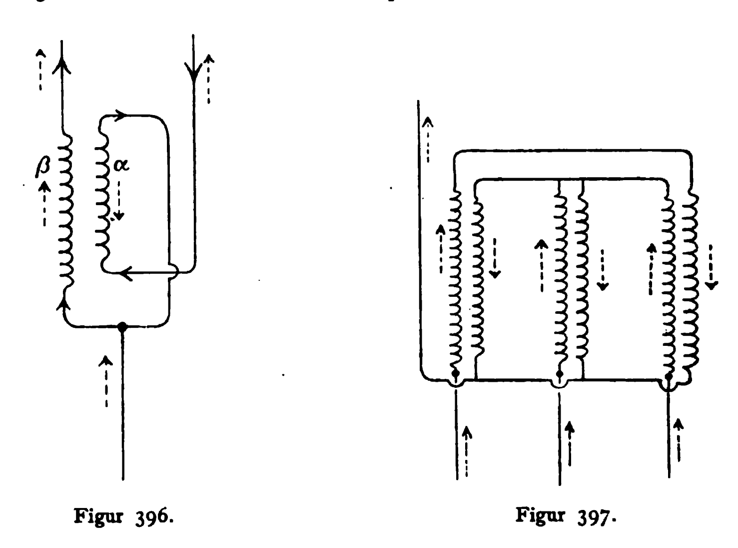
Das Prinzip des monozyklischen Systems besteht darin, daß man den zweiten Strom in Punkten von gleichem Potential des ersten Stromsystems hinein- und hinausleitet. Figur 395 zeigt eine von FR. BEDELL angegebene Ausführungsform dieses Gedankens. Der in den neutralen Punkten *a b* der Dreiphasendrehstromanlage *A*, *B* angeschlossene Wechselstrom der Maschine *C* speist die bei *D* induktiv angeschlossene Beleuchtung. Für die Praxis ist diese einfachste Anordnung allerdings darum nicht brauchbar, weil der superponierte Wechselstrom in den Wicklungen des Generators *A* und des zur Speisung der Motoren *E* dienenden Dreiphasentransformators *B* einen sehr großen induktiven Spannungsabfall erleiden muß. Diesen Umstand haben ARNOLD, BRAGSTAD und LA COUR auf zwei verschiedene Weisen[2]

[1] E. ARNOLD, Elektrotechn. Zeitschr. **23**. 569 und 584. 1902. — F. MARGUERRE, Samml. elektrotechn. Vorträge **5**. Stuttgart 1904. — [2] D. R. P. Nr. 127792 und 131550.




Figur 395.

zu überwinden gelehrt. Der eine Kunstgriff besteht darin, sämtliche Wicklungen, deren Selbstinduktion für den überlagerten Strom vom Übel ist, nach Art des Schemas Figur 396 auszuführen. Vom Hauptstrom werden die bifilar nebeneinander




Figur 396. Figur 397.

gewickelten Windungen $\alpha$ und $\beta$ in gleichem Sinne durchflossen. Ihre induktiven Wirkungen summieren sich, während der superponierte Strom, auf den sich die gestrichelten Pfeile beziehen, in beiden Hälften die entgegengesetzte Richtung hat, so daß sich für ihn die induktiven Wirkungen gegenseitig aufheben. Figur 397 stellt die analoge Anordnung für Dreiphasenstrom dar.

# II. Telephonie.

Von L. Rellstab.

---

Die Fernübertragung des Schalles und der menschlichen Stimme mit Hilfe des elektrischen Stromes ist als eine der größten Erfindungen des 19. Jahrhunderts anzusehen. In das Verdienst derselben teilen sich Männer der verschiedensten Nationen. Der Franzose Ch. Bourseuil hat wohl zuerst, im Jahre 1854, den Grundgedanken der telephonischen Übertragung in klarer Weise zum Ausdruck gebracht und veröffentlicht, ohne jedoch jemals an die Verwirklichung seiner Idee durch das Experiment herangetreten zu sein. Dies ist vielmehr unstreitig das Verdienst von Philipp Reis aus Friedrichsdorf bei Frankfurt a. M., der im Jahre 1861 mittels sinnreicher elektromagnetischer Apparate die Fernübertragung von Musik und Sprachlauten verwirklichte. Die Reisschen Erfindungen wurden aber zunächst weiteren Kreisen nicht bekannt und gaben nicht eigentlich den Anstoß zur Entwicklung des Fernsprechwesens. Dies war vielmehr den Bemühungen einer Reihe von Männern zu verdanken, die in den Jahren 1876—78 nahezu gleichzeitig die wesentlichsten Apparate des Fernsprechverkehrs schufen. Alexander Graham Bell in Baltimore, ein Schotte von Geburt, erfand das Telephon und verwirklichte mit zwei als Geber und Empfänger zusammengeschalteten Telephonen das Grundprinzip der reinen elektromagnetischen Schwingungsübertragung. Die Amerikaner Thomas A. Edison und Elisha Gray, der Deutschamerikaner Emile Berliner, sowie der auch durch seinen Typendruck-Telegraphen in der Geschichte der Telegraphie hochbedeutende Amerikaner David Edward Hughes erkannten nahezu gleichzeitig die Möglichkeit, mittels eines variablen, stromdurchflossenen elektrischen Kontaktes, der durch eine schwingende Membrane beeinflußt wird, einen Geber zu schaffen, der unter dem Namen Mikrophon für die praktische Fernsprechtechnik von derselben fundamentalen Bedeutung geworden ist wie das Telephon. Die Elemente dieser Erfindungen lagen allerdings teilweise bereits in den von Philipp Reis getroffenen Anordnungen.

Sogleich, nachdem das Telephon von Bell bekannt geworden war, begann man in den verschiedensten Ländern mit der Einführung des neuen Verkehrsmittels, und überraschend schnell entstanden in allen Kulturstaaten städtische Fernsprechnetze und bald auch Fernlinien für den Verkehr von einer Stadt zur anderen. Wenn auch die ersten Ausführungsformen des Fernsprechers einen Verkehr auf große Entfernungen noch nicht gestatteten, und man zunächst die richtige Anlage und Bemessung der Leitungen für Fernsprechzwecke noch nicht erkannte, so dehnte sich doch der Wirkungsbereich des Telephons überraschend schnell aus. Heutzutage sieht man keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr darin, Fernsprechleitungen für 2000 km Länge in befriedigender Weise herzustellen. Allerdings wachsen die Herstellungskosten derselben in solchem Maße, daß derartige Linien nur zwischen sehr großen Verkehrszentren, wie beispielsweise Berlin und Paris, Paris und Rom, rentabel sind. Die weitesten Entfernungen sind in Amerika telephonisch überbrückt worden. Große Schwierigkeiten boten bis jetzt die Meere für den telephonischen Verkehr. Die Unterseekabel besitzen für schnelle Schwingungen ein so starkes Dämpfungsvermögen, daß

selbst die kurzen Kabel durch die Nord- und Ostsee bisher nur eine mäßige Verständigung zuließen. Allmählich scheint man aber auch diese Schwierigkeiten durch die genauere Erkenntnis der Bedingungen der telephonischen Übertragung zu überwinden.

Vom rein physikalischen Standpunkte aus betrachtet ist der Fernsprecher lediglich eine Vorrichtung, um Schallwellen verschiedenster Stärke und Tonhöhe in elektrische Schwingungen entsprechender Frequenz und gleicher relativer Amplitude zu verwandeln. Es handelt sich dabei um das Bereich von etwa 40—40000 sekundlichen Schwingungen. Die entsprechenden elektrischen Schwingungen müssen in einer solchen Stärke erzeugt werden und im Fernorte zur Wirkung kommen, daß sie dort eine elektrisch-mechanische Vorrichtung hinreichend stark beeinflussen, um genau dieselben Schallschwingungen, welche am Geberorte vorhanden waren, wieder zu erzeugen. Die Intensität dieser Schallschwingungen muß ausreichen, um vom menschlichen Ohre noch wahrgenommen zu werden. Dies Problem enthält also zwei Energie-Transformationen, einmal von mechanischer zu elektrischer Energie, dann von elektrischer zu mechanischer Energie. Hierbei soll jedesmal Frequenz und relative Amplitude der Schwingungen unverändert bleiben. Ist dies auch nicht in aller Strenge möglich, so muß jedenfalls eine hinreichende Ähnlichkeit zwischen dem erzeugenden und dem erzeugten Schall vorhanden sein; Tatsache ist, daß beim Fernsprechen gewisse Buchstaben schlecht übertragen und daher meist aus dem Zusammenhange erraten werden.

Außer den eigentlichen Fernsprechapparaten, Telephon und Mikrophon, benötigt die heutige Fernsprechtechnik zahlreiche, komplizierte Organe und besondere Konstruktionen und Schaltungsformen für ihre vielgestaltigen Anlagen. Insofern hierbei überall physikalische Probleme und Aufgaben der experimentellen Elektrizitätslehre auftreten, erschien es wünschenswert, im Rahmen dieses Handbuches eine kurze Übersicht über das gesamte Gebiet des Fernsprechwesens zu geben.

## 1. Telephon, Mikrophon und verwandte Apparate.

### A) Telephon.

Das Telephon wird heutzutage nur noch als Empfänger benutzt, seine Wirksamkeit als Geber ist zu gering im Vergleich zu der mit dem Mikrophon erzielten.

Das BELLsche Telephon besteht aus einem ca. 10 cm langen Stabmagnet, dessen Ende einen Polschuh aus Weicheisen und eine denselben umgebende Drehtspule trägt. Die kreisförmige Schallplatte befindet sich, senkrecht zur Magnetachse angeordnet, in etwa $^1/_2$ mm Entfernung vor dem Polschuh. Das Gehäuse (aus Holz, Hartgummi, Preßmasse usw.) dient als Lager sowohl für den Stabmagnet, wie für die Schallplatte. In der Regel ist der Magnet durch eine Schraube in seiner Längsachse verschiebbar, um die Entfernung von der Membrane regulierbar zu machen. Die Membrane wird bedeckt von einer Hörmuschel aus Hartgummi oder dgl., welche nur etwa $^1/_4$ der Membrane frei läßt und durch ihre Form die feste Anlegung des Telephons an das Ohr erleichtert. Heutzutage werden die Telephone allgemein zweipolig ausgeführt: Das Magnetsystem hat Hufeisenform, und jeder der beiden Pole trägt Polschule mit Drahtspulen, die bis dicht an die Mitte der Schallplatte heranreichen. Vielfach bevorzugt man dis sogenannten Löffeltelephone, bei denen das Magnetsystem nicht senkrecht, sondern parallel zur Ebene der Schallplatte gelagert ist; ferner die Dosentelephone, bei denen das Magnetsystem in einer flachen Metalldose montiert ist. Im letzteren Falle besteht das Magnetsystem aus einem oder zwei halbkreisförmigen Magneten, die flach auf dem Boden der Dose liegen; die Polschuhe sind nach oben gerichtet und tragen die Spulen, die Schallplatte ist gewöhnlich auf dem Rande der Dose gelagert. Darüber wird die Hörmuschel befestigt. In Deutschland sehr verbreitet ist das gestielte Dosentelephon, welches in

der Handhabung und Form dem Löffeltelephon ziemlich nahekommt. Das Dosentelephon findet ferner Verwendung beim sogenannten Mikrotelephon, einer Vereinigung von Telephon und Mikrophon durch einen als Handgriff dienenden Bügel. Auch die sogenannten Kopftelephone der Telephonistinnen, welche an einem Bügel dauernd am Ohr getragen werden, sind als Dosentelephone ausgebildet. Unter den ersten Konstrukteuren von Telephonen sind namentlich Ader, d'Arsonval, Böttcher, Gray und Phelps zu nennen, deren Konstruktionen jedoch allmählich gegenüber den eben beschriebenen Normaltypen in den Hintergrund getreten sind.

Die Stromempfindlichkeit des Telephons hängt ab von der Stärke des Magnetsystems, von der Regulierung des Polabstandes, von der Dicke, der Permeabilität und dem Sättigungsgrad der Eisenmembrane und von der Windungszahl (Widerstand) der Spule. Die Polschuhe sind durch Einschnitte möglichst zu unterteilen, um den Wirbelstromverlust im Eisen zu verringern. Wirbelstromverlust und Selbstinduktion sind bei verschiedenen Telephonen für hohe und niedere Frequenzen von M. Wien genau untersucht worden. Die Empfindlichkeit der Telephone als Funktion der Stromfrequenz ist häufig untersucht worden u. a. von Warren de la Rue, Beibl. 3, S. 47, von Pellat, Beibl. 5, S. 624, 1881, von Ferraris, Atti di Torino 13, 1878, Beibl. 3, S. 43, Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5), S. 285—295, 1894, R. Franke, Elektrotechn. Zeitschr. 1898, M. Wien, Drudes Annalen der Physik 4, S. 450, 1901.

R. Kempf-Hartmann hat die Eigenschwingungen der Telephonmembranen auf photographischem Wege eingehend untersucht[1].

Telephone mit Membranen aus unmagnetischem Metall tönen durch die Wirkung der Wirbelströme. Auch ohne Membrane tönen die Polenden der Telephone bei starker Erregung, da sich das Eisen unter wechselnder Magnetisierung ausdehnt und verkürzt. Auf diesen Wirkungen beruhte das erste Telephon von Reis und später das Eisendrahttelephon von Ader.

Der permanente Magnet des Telephons kann fehlen, da das Eisen immer einigen remanenten Magnetismus besitzt, doch schlägt der Ton bei sehr kräftigen Schwingungen leicht in die höhere Oktave um.

Die Schwingungsweite der Telephonmembrane beträgt bei den schwächsten Bewegungen, bei welchen eben noch der Schall wahrnehmbar ist, nach A. Franke[2] ungefähr 1/1000000 mm.

Die sogenannten lautsprechenden Telephone zeichnen sich durch größere Schallplatte und sehr starkes Magnetsystem aus.

Zur Schallverstärkung werden häufig Schalltrichter aus Pappe oder Metall verwendet wie bei Phonographen. Die gleichzeitige Anwendung von zwei Telephonen bewirkt in erster Linie den guten Abschluß der Außengeräusche. Durch Anbringung von Gummipolstern auf den Hörmuscheln kann dies noch vollkommener erreicht werden.

Eine mathematische Theorie des Telephons hat Wietlisbach unter vereinfachenden Annahmen gegeben.

## B) Mikrophon.

Das Mikrophon besteht im wesentlichen aus der Schallplatte, dem an der Schallplatte befestigten Kontaktstück, dem hinter der Schallplatte liegenden festen Kontakt und einigen oder vielen losen Kontaktstücken zwischen den festen Elektroden. Ein dosen- oder kapselartiges Gehäuse hält das hintere Kontaktstück und die Schallplatte in ihrer gegenseitigen Lage fest. Die Zwischenkontaktstücke sind entweder durch die besondere Form der beiden Kontaktplatten (Nuten, Höhlungen usw.) oder mit Hilfe von elastischen Hülsen zwischen den

[1] R. Kempf-Hartmann, Ann. d. Phys. 8. 481. 1902. — [2] A. Franke, Elektrotechn. Zeitschr. 11. 289. 1890.

beiden Elektroden lose aufgeschichtet und festgehalten. Eine der Hörmuschel des Telephons ähnliche Schutzplatte mit kreisrundem Ausschnitt bedeckt die Schallplatte. Diese Deckplatte trägt noch einen kleinen Schalltrichter, in den hineingesprochen wird.

Die ältesten Mikrophone von Hughes, Blake-Bell, Berliner u. a. hatten einen oder wenige wirksame Kontaktpunkte, deren dauernd zuverlässige Einstellung schwierig war. Sicherer arbeiteten die Walzenmikrophone, bei denen auf der Schallplatte Kohlenwalzen in Lagerböcken und Kohle lose gelagert waren (Mikrophon von Ader, Gower, Walzenmikrophone Mix & Genest u. a.).

Durch Anwendung von Kohlenkörnern oder Kugeln aus Kohle wird eine sehr große Zahl von Berührungsstellen erzielt, die sämtlich mikrophonisch wirksam sind; diese Kontakte sind zu vielen in Reihe und parallel geschaltet, alle aber haben die Eigenschaft, ihren Widerstand im gleichen Sinne zu ändern, wenn die Schallplatte nach innen oder nach außen durchgebogen wird (Körner- und Kugelmikrophone von Berliner, Siemens & Halske, Vielhaben, Mix & Genest, Deckert & Homolka u. a.). Besonderen Wert haben die Konstrukteure darauf gelegt, die Kohlenkörner gleichmäßig und ohne Druck über die ganze Fläche der Kontaktstücke zu verteilen. Beim Berliner-Transmitter wird dies durch horizontale Anordnung der Schallplatte, oberhalb welcher das Kohlenpulver ruht, erreicht; bei den meisten anderen, die vertikal angeordnete Schallplatten benutzen, durch Vertiefungen auf dem hinteren Kohlenkontaktstück (Nuten-, Zellen-, Hohlpyramiden). Häufig ist die Kohlenkörnerkammer durch weiche Stoffe ringsum abgedichtet, damit die Körner nicht herausfallen (Seidenbeutelmikrophone Siemens & Halske; Filzringe, Tuchringe, Asbestringe, bei anderen Konstruktionen). Bei Anwendung größerer Kohlenkugeln können diese weichen Abschlußstücke fehlen (Mikrophone Vielhaben u. a.).

Als wesentlich für das Mikrophon muß die Herstellung mindestens eines der Kontaktteile aus Kohle gelten. Mikrophone mit reinen Metallelektroden oder Metallkörnern geben keine praktisch brauchbaren Lautwirkungen.

Die Schallplatte war anfänglich meist eine dünne Holzplatte, später wurden Membranen aus Metall und Preßkohle bevorzugt. Letztere hat namentlich den Vorteil, gleichzeitig als Kontaktstück zu dienen. Bei Metallmembranen empfiehlt es sich nicht, den Strom unmittelbar vom Metall auf die Kohlenkörner zu leiten, man befestigt besser Kohlenplatten an den Metallmembranen oder vergoldete resp. platinierte Elektroden. Wichtig ist die Dämpfung der Schwingungen der Platte. Sie erfolgt entweder durch weiche Zwischenlagen oder durch besondere Dämpferfedern, Bürsten, Pinsel usw.

Der Widerstand der Mikrophone richtet sich nach dem Verwendungszweck, er schwankt in der Praxis etwa zwischen 5 Ohm und 200 Ohm. Die Mikrophone mit sehr hohen Widerständen werden für sogenannte Zentralbatterieschaltungen benötigt, bei welchen der Widerstand einer längeren Leitung mit dem Mikrophon in Reihe geschaltet ist. Besonders weite Verbreitung hat eine amerikanische Konstruktion für diese Betriebsart, der sogenannte Solid-Back-Transmitter, erlangt.

In den weitaus meisten Fällen besitzt jede Sprechstelle eine eigene kleine Mikrophonbatterie von 2—3 Volt (1 Sammler oder 2 Braunstein-Zink- oder ähnliche Elemente.

Die Übertragung der Schwingungen auf die Leitung erfolgt alsdann durch kleine Transformatoren. Bei diesen Stationen werden gewöhnlich Mikrophone von 10—30 Ohm Widerstand benutzt.

Der Widerstand eines Mikrophons variiert beim Sprechen in sehr weiten Grenzen. Der durchschnittliche Widerstandswert ist auch abhängig von der Strombelastung. Bei Überlastung treten starke Nebengeräusche, Kochen und Sausen im Mikrophon, auf. Häufig backen die Körner zusammen, und die Schallübertragung hört ganz auf.

Zur Speisung von Mikrophonen kann in der Regel nur der Strom von galvanischen Elementen verwendet werden. Maschinenstrom gibt infolge des beständigen Kurzschließens der Kollektorsegmente zu Nebengeräuschen Veranlassung. Durch geeignete Kombinationen von Drosselspulen und Kondensatoren können aber die Undulationen des Dynamostromes so weit gedämpft werden, daß man denselben auch zum Sprechen benutzen kann.

Eine reichhaltige Übersicht über die Literatur geben CHR. JENSEN und H. SIEVEKING in „Anwendungen des Mikrophonprinzips". Hamburg 1906.

## C) Sonstige Vorrichtungen, welche wie Mikrophone und Telephone wirken.

Die durch das Zusammenwirken von Telephon und Mikrophon bewirkte Übertragung der Sprache kann auch durch völlig anders geartete Apparate bewirkt werden, denen eine technische Bedeutung vorläufig allerdings nicht zukommt, die aber doch erhebliches physikalisches Interesse bieten. In erster Linie ist hier der sprechende Kondensator (BERLINER, DOLBEAR, POLLARD und GARNIER) zu nennen. Schichtet man aus einigen Blättern Stanniol und Seidenpapier einen kleinen Kondensator lose auf, ladet denselben auf ein konstantes hohes Potential und sendet die von einem Mikrophon erzeugten Sprechwechselströme hindurch, erfährt die zwischen den Stanniolblättern wirksame elektrostatische Anziehungskraft periodische Änderungen, der Kondensator zieht sich zusammen und dehnt sich aus und erzeugt somit Schwingungen und Sprechlaute wie ein Telephon, unter günstigen Bedingungen sogar von ähnlicher Intensität. Die konstante Ladebatterie entspricht dabei dem permanenten Magneten eines Telephons. Auch ein Mikrophonkontakt kann telephonische Wirkungen hervorbringen, wenn er von Sprechwechselströmen durchflossen wird (E. BERLINER 1877).

Schwieriger zu erklären, jedoch wahrscheinlich von verwandter Wirkungsweise ist BRÉGUETs Kapillartelephon. Befestigt man an einer Schallplatte und senkrecht zu derselben ein kleines Kapillarelektrometerröhrchen mit Quecksilberelektrode und sendet Sprechwechselströme, die von einem Mikrophon erzeugt sind, hindurch, so wird die Schallplatte, wahrscheinlich durch die Massenbeschleunigung des hin- und herbewegten Quecksilbers, in Schwingung versetzt und spricht wie ein Telephon. Die gleiche Vorrichtung ist auch als Mikrophon brauchbar.

Spannt man einen dünnen Draht zwischen einen festen Punkt und den Mittelpunkt einer dünnen Schallplatte, und leitet man kräftige Sprechwechselströme durch den Draht, so verlängert und verkürzt sich der Draht durch die periodisch veränderliche Stromwärme und bringt die Schallplatte zum Tönen. (Thermophon von PREECE.)

Die Erscheinung des sprechenden und singenden Flammenbogens (SIMON 1898) gehört ebenfalls hierher. Leitet man Sprechwechselströme in einen Gleichstrom-Flammenbogen, so wird das Volumen desselben periodisch vergrößert oder verkleinert, und es entsteht so eine sehr laute und klare Schallwirkung. Auch diese Anordnung ist als Mikrophon verwendbar. — Auf die Erscheinung des sprechenden Flammenbogens ist von SIMON eine Telephonie ohne Drahtleitung begründet worden (vgl. S. 808).

Nach Versuchen von MOSLER kann auch die Funkenentladung eines Induktoriums in ähnlicher Weise wie der Flammenbogen durch Einleiten von Sprechwechselströmen zum Tönen und zur Wiedergabe der Sprache gebracht werden. Eine interessante Variante dieses Versuches stammt von SIMON (vgl. Phys. Zeitschr. 1905).

EDISONs chemisches Telephon (Elektromotograph) beruht auf der Erscheinung, daß durch den elektrischen Strom die Reibung zwischen mit Kalilauge befeuchtetem Papier und einem auf dem Papier schleifenden Platinstift vermindert wird. EDISON befestigte eine Feder mit Platinkontakt an einer Schallplatte

und ließ den Kontakt auf einer konstant rotierenden Walze, die mit alkalisch befeuchtetem Papier bezogen war, schleifen. Die Walze nahm dann durch Reibung den Kontakt ein wenig mit und spannte so die Membran mit konstanter Kraft. Wurden nun Sprechströme durch den Schleifkontakt geschickt, so änderte sich die Reibung und damit auch die Spannung der Platte im Tempo der Stromschwankungen, und die Platte erzeugte entsprechende Schallschwingungen.

## 2. Hilfsapparate und Schaltungselemente der telephonischen Sprechstellen.

Für den Verkehr der Telephonstationen sind Anrufsignale erforderlich. Dieselben werden erzeugt:

1. durch das Telephon (pfeifendes Geräusch),
2. durch Wecker für Gleichstrombetrieb,
3. durch Wecker für Wechselstrombetrieb.

Als Geber dient im ersten Falle der Summer, gewöhnlich als ein kleines Induktorium mit Primär- und Sekundärspule ausgebildet. Neuere Formen sind der Mikrophonsummer von Siemens & Halske und der Differentialsummer von Mix & Genest. In den Anfängen der Telephonie, als das Telephon noch als Geber benutzt wurde, setzte man auf das Telephon die sogenannte Rasseltrompete (von Siemens & Halske) und erzeugte durch Anblasen derselben das Anrufgeräusch.

Der Summeranruf (phonischer Anruf) ist im gewöhnlichen Fernsprechverkehr durchaus ungebräuchlich, hat sich dagegen in der Militärtelephonie und beim gleichzeitigen Telegraphieren und Telephonieren auf einer Leitung in Gebrauch erhalten.

Der Gleichstrom-Wecker-Anruf ist dagegen allgemein gebräuchlich für telephonische Hausanlagen; in einigen öffentlichen Telephonnetzen ist er auch noch in Gebrauch, verschwindet dort aber mehr und mehr.

Der Wechselstrom-Wecker-Anruf ist für öffentliche Fernsprechnetze allgemein üblich geworden. Der Wechselstromwecker (polarisierte Wecker) besitzt einen Anker, der wechselweise von zwei Elektromagnetspulen angezogen werden kann; der Anker sowie die Elektromagnetspulen sind durch einen kleinen permanenten Magneten polarisiert, und zwar derart, daß die den beiden Elektromagneten gegenüberstehenden Enden des Ankers gleichnamig magnetisch sind. Umgekehrte Polarität besitzen die beiden Elektromagnetkerne. Der Strom wirkt so, daß er den Magnetismus des einen Kernes schwächt, des anderen verstärkt; folglich legt sich der Anker auf die Seite des verstärkten Elektromagnetpoles. Kehrt der Strom seine Richtung um, so wird der zuvor verstärkte Pol geschwächt und der geschwächte verstärkt; der Anker und mit ihm der Klöppel wird umgelegt. Die Entfernung des Ankers von den Polen pflegt einstellbar zu sein, ebenfalls kann der permanente Magnet dem Anker genähert oder entfernt werden. Polarisierte Wecker sind sehr stromempfindlich und betriebssicher, da sie keine Kontakte besitzen.

Als Wechselstromerzeuger für telephonische Anrufzwecke dienen die Induktoren, kleine magnetelektrische Maschinen mit Doppel-T-Anker. Durch das Drehen einer Kurbel wird in diesen eine Wechselspannung von 30 bis 50 Volt bei ca. 16 Perioden per Sekunde erzeugt, wenn der Anker 200 bis 300 Ohm Widerstand besitzt. Die Induktoren sind gewöhnlich so eingerichtet, daß der Anker durch eine mechanische Vorrichtung im Ruhezustand kurzgeschlossen ist, und daß dieser Kurzschluß beim Kurbeln automatisch beseitigt wird, damit der Widerstand und die Selbstinduktion des Induktors nicht dauernd in die Sprechlinie eingeschaltet sei.

In neuerer Zeit verzichtet man vielfach darauf, den einzelnen Fernsprechstellen einen Anrufinduktor zu geben; man läßt das Anrufen der Station von der

Vermittlungsstelle (Zentrale, Amt) aus besorgen und benutzt dort den Wechselstrom einer größeren Wechselstromdynamo.

Ein wichtiges Hilfsorgan der Telephonstation ist der automatische Umschalter. Im Ruhezustande der Station muß der Wecker an der Leitung liegen; beim Sprechen muß dieser aus- und dafür Telephon und Mikrophon eingeschaltet werden. Damit dies selbsttätig erfolge, läßt man die Umschaltung durch einen zugleich als Aufhängehaken des Telephons ausgebildeten Schalthebel ausführen.

Meist ist eine der Sprechleitungen an den Schalthebel geführt, welcher im Ruhezustand einen Kontakt schließt, der zum Stationswecker führt; im Arbeitszustande schließt der Umschaltehebel einen zweiten Kontakt, der zum Telephon führt; ferner wird in dieser Lage der Primärstromkreis des Mikrophons geschlossen.

Bei neueren Telephonstationen vermittelt der Hakenumschalter auch den automatischen Anruf der Telephonzentrale sowie ein automatisches Gesprächsbeendigungszeichen in derselben. Hierzu ist erforderlich, daß der Stromkreis der Station in der Ruhe- und in der Arbeitslage wesentlich verschiedene elektrische Eigenschaften besitze. Beispielsweise kann die Station in der Ruhelage einen sehr hohen Widerstand (z. B. Wecker mit mehr als 2000 $\Omega$), in der Arbeitslage einen sehr geringen Widerstand (Sprechapparate mit weniger als 200 $\Omega$) haben: dann wird eine in der Zentrale an die Leitung gelegte Batterie einmal wenig, einmal viel Strom abgeben. Sicherer ist es, den einen der beiden Stromwege für Gleichstrom völlig zu sperren, indem man einen Kondensator in den Sprech- oder Weckstromkreis schaltet. Die letztere Schaltungsart ist zurzeit am weitesten verbreitet.

An Stelle der Kondensatoren können auch Polarisationszellen treten.

Endlich kann man mit drei Leitungswegen von der Zentrale zur Telephonstation arbeiten, beispielsweise Telephon und Mikrophon zwischen die Zweige der Doppelleitung, den Wecker aber zwischen eine Leitung und Erde schalten. Alsdann gibt eine in der Zentrale zwischen die Zweige der Doppelleitung geschaltete Batterie Strom ab, solange der Hakenumschalter in Arbeitslage ist, dagegen keinen Strom, sofern das Telephon angehängt und die Schleife unterbrochen ist.

Als Schaltungselemente der Telephonstation sind weiterhin die Mikrophontransformatoren zu nennen. Die gebräuchlichen Mikrophone haben meist einen geringen Widerstand von der Größenordnung von 10 $\Omega$ und bedürfen eines Speisestromes von der Ordnung 0,1 Ampere. Die Widerstandsänderungen beim Sprechen sind naturgemäß noch um eine Größenordnung geringer. Schaltet man solche Mikrophone unmittelbar in eine längere Sprechleitung von einigen Hundert Ohm, so würde man erstens sehr große Batterien brauchen, um die erforderliche Stromstärke zu erzielen, und zweitens würden die Widerstandsänderungen des Mikrophons sehr klein ausfallen im Verhältnis zum Gesamtwiderstande der Leitung. Daher würden auch nur geringe Sprechwechselströme erzeugt werden können. Diese Schwierigkeit wird umgangen, indem man das Mikrophon mit einer kleinen Batterie (2—3 Volt) und einer niederohmigen Primärwicklung des Mikrophontransformators in Reihe schaltet; in diesem Kreise können dann sehr kräftige Schwingungen entstehen. Sie werden auf höhere Spannung transformiert, da die Sekundärspule etwa 10—20 mal höhere Windungszahl besitzt.

In neuerer Zeit hat man, namentlich im öffentlichen Verkehr, das System der Einzel-Mikrophonbatterie verlassen und das Mikrophon wieder direkt in die Sprechlinie eingeschaltet. Die Speisung der Mikrophone erfolgt durch eine große gemeinsame Batterie des Fernsprechamtes. Dadurch sind ganz besondere Schaltungen der Teilnehmerstation entstanden, und auch die Mikrophone werden in der Regel hinsichtlich ihres Widerstandes anders ausgeführt. Der Zentral-Mikrophonbatterie-Betrieb erfordert Mikrophone von höherem Widerstand (Größen-

ordnung 100 $\Omega$ und mehr), oder es müssen besondere Schaltungen angewendet werden, durch welche die Vorteile der niedervoltigen Einzelbatterie mit Transformation einigermaßen wiederhergestellt werden.

Weitere Schaltungselemente, die in telephonischen Sprechstellen gelegentlich Verwendung finden, sind die allgemeinen Wechselstromwiderstände (positive und negative Induktanzen) in Form von Drosselspulen, Kondensatoren und Polarisationszellen.

Die ersteren sind bestimmt, einen Stromweg für Gleichstrom herzustellen, der gegen Wechselströme hoher Frequenz (Sprechwechselströme, Rufwechselströme) so gut wie verriegelt ist. Umgekehrt erreicht man durch Einschaltung eines Kondensators oder einer Polarisationszelle, daß ein Stromweg für Gleichstrom verriegelt ist, während Rufwechselströme und erst recht Sprechwechselströme keinen erheblichen Widerstand erfahren (Gleichstromsperren und Wechselstromsperren). Diese Verwertung der beiden gegensätzlichen Schaltungselemente spielt in der Telephonie eine sehr große Rolle.

Drosselspulen werden gewöhnlich mit Drahtkernen oder lamellierten Eisenblechkernen hergestellt, um die Wirbelstromverluste, die bei telephonischen Frequenzen sehr bedeutend sein können, möglichst zu vermeiden. Da die Drosselspulen meist in gleichstromdurchflossenen Stromkreisen angewandt werden, so ist auf die magnetische Sättigung und die dadurch bedingte Verringerung der Selbstinduktion Rücksicht zu nehmen.

Die in der Telephonie verwandten Kondensatoren haben paraffiniertes Papier als Dielektrikum. Die allgemein gebräuchliche Größe ist der Zwei-Mikrofarad-Kondensator.

Bevor man lernte, billige und gute trockene Kondensatoren herzustellen, spielten die Flüssigkeits-Kondensatoren oder Polarisationszellen eine große Rolle. Ein kleines Glasröhrchen, welches mit Elektrolyt (Schwefelsäure, verdünnt, oder Natronlösung) gefüllt, und in das zwei winzige Platinelektroden eingeschmolzen sind, repräsentiert einen Kondensator von 40—60 Mikrofarad (gemessen bei telephonischen Frequenzen). Allerdings verriegelt derselbe nur sehr niedrige Spannungen (1,8—2,7 Volt, je nach Wahl des Elektrolyten), weshalb zur Verriegelung der gebräuchlichen Spannungen von 6—30 Volt eine mehr oder weniger große Zahl von Zellen in Reihe geschaltet werden muß. Bei zehn Zellen in Reihe ist die Kapazität des Zellensatzes daher nur noch 4—6 Mikrofarad.

In der Praxis haben die Zellen manche Übelstände gezeigt (Platzen, Undichtwerden), dennoch sind sie ein schätzenswertes Hilfsmittel zur Verriegelung geringer Spannungen.

Sicherungselemente. Telephonapparate haben Blitz- und Starkstrom-Schutzvorrichtungen. Die Blitzsicherung ist eine Spannungssicherung, eine kleine Funkenstrecke, deren einer Pol geerdet ist. Meistens sind die Elektrodenplatten ausgezackt oder gerieft oder sonstwie mit Spitzen versehen. Häufig verwendet werden zwei mit sehr geringem Abstand (0,1 mm) übereinander gelegte Platten aus Preßkohle; ferner Metallplatten, die durch ein Seidenband voneinander getrennt sind. Bisweilen wird ein derartiger Blitzableiter in eine evakuierte Röhre eingeschlossen.

Die Schmelzsicherungen werden als Grob- und Feinsicherungen unterschieden; sie bestehen aus in Glasröhren eingeschlossenen, ca. 40—80 mm langen Schmelzdrähten (aus Silber, Konstantan Rheothan u. dgl.), manchmal mit funkenlöschendem Pulver umgeben. Als Feinsicherungen werden auch Sicherungen verwendet, bei welchen die Stromwärme zur Loslötung eines kleinen Sperrstiftes benutzt wird, der unter Einwirkung einer Federkraft steht. Sobald der Stift gelöst ist, zieht die Feder denselben mit beträchtlicher Kraft fort und öffnet damit den Stromkreis sehr schnell und weit, so daß Lichtbögen ausgelöscht werden.

## 3. Aufbau der telephonischen Sprechstelle.

Die Vereinigung der vorstehend beschriebenen Elemente zur telephonischen Sprechstelle erfolgt in verschiedener Weise, je nachdem die Sprechstelle für Hausbetrieb oder für den öffentlichen Verkehr dienen, und je nachdem sie als Tischstation oder als Wandstation ausgebildet werden soll.

Bei den Hausstationen begnügt man sich in der Regel mit Telephonen und Mikrophonen, welche bei abgehängtem Telephon in Reihe in die Leitung geschaltet sind, während bei angehängtem Telephon an Stelle dieser Apparate ein Gleichstromwecker an der Leitung liegt. Das Anrufen einer anderen Station erfolgt durch einen einfachen Druckknopf, durch welchen eine Gleichstrombatterie an die Leitung gelegt wird.

Bei den Stationen für den öffentlichen Verkehr, welche mit eigener Mikrophonbatterie arbeiten, treten hinzu die Blitzschutzvorrichtungen, der Anrufinduktor und an Stelle des Gleichstromweckers ein Wechselstromwecker. Die Schwingungen des Mikrophonstromes werden durch die Induktionsspule auf die Leitung übertragen. Solange das Telephon am Haken hängt, ist der Wecker eingeschaltet. Durch Abnehmen des Hörers wird das Telephon und die sekundäre Spule des Mikrophontransformators an die Leitung gelegt und gleichzeitig der primäre Stromkreis des Mikrophons eingeschaltet. Am Induktor ist eine automatische Schaltvorrichtung vorgesehen, welche bewirkt, daß der Induktor im Ruhezustande kurz geschlossen ist, während er beim Drehen der Kurbel in die Leitung eingeschaltet wird, unter gleichzeitiger Ausschließung oder Kurzschließung der übrigen Apparate. Soll die Station ein automatisches Schlußzeichen im Fernsprechamte hervorbringen, so ist entweder in den Weckerstromkreis oder in den Sprechstromkreis ein Gleichstromverriegelungselement (Kondensator, Polarisationszelle) einzuschalten.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Schaltung der Stationen für Zentralbatteriebetrieb. Der Induktor fällt fort. Der Anruf des Amtes erfolgt durch Abheben des Hörers vom Haken, indem durch diese Operation der durch einen Kondensator gesperrte Wecker ausgeschaltet und dafür Telephon und Mikrophon in die Leitung eingeschaltet werden. Gewöhnlich wird allerdings auch hier ein Mikrophontransformator benutzt. Bei den neuesten Schaltungen dieser Art ist dieser Mikrophontransformator mit dem Wecker zu einem Ganzen verschmolzen, so daß die Station lediglich Mikrophon, Telephon, Wecker und Kondensator enthält.

Bei Tischstationen zieht man es meistens vor, daß Mikrophon und Telephon zu einem Mikrotelephon verbunden werden. Man hat dann lediglich diesen einen Apparat zu handhaben, der an einem beweglichen Arm oder Träger, welcher als Umschaltehaken wirkt, aufgehängt wird. Bisweilen wird auch das Mikrophon auf einer kleinen Säule für sich montiert, während das Telephon seitlich an dieser Säule am Umschaltehaken aufgehängt wird. Der Wecker wird hierbei meist von der Station getrennt und an irgend einer passenden Stelle im Zimmer untergebracht.

An öffentlichen Fernsprechstationen richtet man manchmal sogenannte Automaten ein, bei welchen die Benutzung erst nach Einwurf eines Geldstückes möglich ist.

L i n i e n w ä h l e r. Für den Verkehr mehrerer Stationen untereinander, welcher ohne eine vermittelnde Zentralstelle durchgeführt werden soll, dient der L i n i e n w ä h l e r. Für den Linienwählerverkehr müssen mindestens so viele Leitungen, als getrennte Sprechstellen vorhanden sind, zwischen den letzteren gezogen werden, außerdem gewöhnlich noch eine gemeinsame Rückleitung und Batterieleitung für alle Stationen. Jede Station erhält ein kleines Schaltbrett, in welchem Anschlußkontakte für sämtliche Leitungen vorgesehen sind; jeder

Sprechapparat kann durch eine Schaltkurbel oder Stöpselschnur mit jeder beliebigen Leitung des Linienwählersystems verbunden werden. Die Ausführung der Linienwähler ist äußerst mannigfaltig, man unterscheidet: Einfachleitungslinienwähler, Doppelleitungslinienwähler (für Geheimverkehr), Linienwähler mit automatischer Rückstellung des Schaltorgans in die Ruhelage usw.

## 4. Schaltungselemente der Telephonzentralen.

Die in einer Fernsprechzentrale zusammenlaufenden Leitungen der Teilnehmer endigen in Schaltorganen, „Klinken" genannt, durch welche die Verbindung beliebiger Teilnehmer untereinander erfolgt. Da eine sehr große Zahl von Anschlußkontakten auf eine kleine Fläche zusammengedrängt werden muß, so werden die Klinken in Streifen zu zehn oder zwanzig zusammengefaßt und solche Klinkenstreifen in großer Anzahl übereinander aufgeschichtet; das so entstandene Klinkenfeld zeigt in der Front so viele kreisförmige Öffnungen, als Teilnehmerlinien vorhanden sind; in dieselben können Stöpsel gesteckt werden, deren Metallteile mit den hinter den Klinkenöffnungen liegenden Kontaktfedern Kontakt herstellen. Jeder Stöpsel bildet das Ende einer mehradrigen biegsamen Leitungsschnur, deren Adern an die einzelnen isolierten Metallteile des Stöpsels angeschlossen sind.

Das Prinzip der Teilnehmerverbindung durch Klinken und zwei Stöpselschnüre ist bei weitem das einfachste und ermöglicht mit den geringsten technischen Mitteln die Herstellung einer beliebigen von Millionen möglichen Verbindungen. Es hat das ältere System, bei welchem jede Teilnehmerleitung in einer Klinke und einer Schnur endigte (Einschnursystem), ganz und gar verdrängt, da die Unterbringung so vieler Schnüre schwierig ist. Bei sehr geringer Teilnehmerzahl ist es besser, statt der Klinken und Stöpselschnur feste Schalter anzuwenden; es sind aber dann so viele Schalter nötig, als Verbindungsmöglichkeiten zu zweien existieren. Bei den automatischen Fernsprechämtern erfolgt die Verbindung zweier Teilnehmer durch elektromagnetische Schaltmaschinen.

Die in der Telephonie verwendeten festen Schalter werden meistens aus biegsamen Neusilberblattfedern hergestellt, deren eines Ende fest eingespannt ist, während das andere durch den Schalthebel oder die Drucktaste des Schalters hin- und herbewegt werden kann. Die Befestigung der Federn entspricht derjenigen in den Klinken. Diese Schalter werden entweder als Hebelschalter oder als Druckknopfschalter ausgebildet.

Die Relais können als Schalter bezeichnet werden, welche durch ein motorisches Organ, das in den allermeisten Fällen ein Elektromagnet ist, bewegt werden.

Ihrer äußeren Form nach sind die Relais entweder zweischenklige Hufeisenelektromagnete mit vorgelagertem Anker, ein- oder zweispulig bewickelt, oder einspulige Topfmagnete. Bisweilen wird das Magneteisen lamelliert oder sonstwie unterteilt, um die Wirbelstromverluste zu verringern oder die Selbstinduktion zu erhöhen. Die Anker werden entweder in Stiften oder Spitzen gelagert oder sind auf messerartigen Schneiden drehbar. Als rückstellende Kräfte dienen entweder Federn (Blatt- oder Spiralfedern) oder das Eigengewicht des Ankers. Der Ankerhub wird meist doppelseitig, häufig regelbar, begrenzt, damit weder zu große noch zu kleine Luftspalte (im letzteren Falle zu starker permanenter Magnetismus und daher „Kleben") vorkommen können.

Relais für Fernsprechzwecke, welche in Aggregaten von Hunderten und Tausenden vorkommen, müssen meist robuster und unempfindlicher (aber auch billiger) hergestellt werden als die in der Telegraphie benutzten, mehr als feinmechanische Instrumente ausgeführten Relais.

Die Relaiskontakte werden besonders sorgfältig ausgebildet (gewöhnlich Platinspitze gegen Platinplättchen, bei geringeren Ausführungen Silber). Häufig wird

der Kontakt federnd ausgebildet, damit er bei leichten Vibrationen nicht zu leicht unterbrochen wird. Der Kontakt oder auch das ganze Relais oder ganze Gruppen von Relais werden durch dicht schließende Schutzkappen gegen Staub und fahrlässige Eingriffe geschützt. Der im Minimum erforderliche Kontaktdruck wird häufig vorgeschrieben.

Die vom Relais herzustellenden Kontakte sind entweder am Anker selbst befestigt, oder der Anker wirkt wie ein Schalthebel auf eine oder mehrere Blattfedern, welche wie bei Klinken und festen Schaltern angeordnet sind.

Die mannigfaltigsten Kontakte finden sich bei den Relais der automatischen Telephonämter.

Eine wichtige Betätigungsform eines Relais ist der „Selbstschluß". Wenn der Anker eines Relais durch einen von diesem selben Anker hergestellten Kontakt („Haltekontakt") festgehalten wird, so sagt man, das Relais liegt unter Selbstschluß. Häufig besitzt das Relais für diesen Zweck auch eine besondere Wicklung (Haltewicklung).

Die Erregung eines Relais kann im wesentlichen auf drei Arten aufgehoben werden: durch Ausschaltung, durch Kurzschließung oder durch magnetische oder elektrische Gegenwirkung (Differentialwicklung, Kompensation der an den Klemmen der Wicklung auftretenden Spannung durch eine Gegenspannung). Hieraus resultiert, daß eine große Anzahl von Schaltungsaufgaben auf mehreren Wegen gelöst werden kann.

Die Relais leiten zu neuen Konstruktionselementen der Fernsprechvermittlungsämter hinüber: zu den Signalelektromagneten. Dieselben haben die Aufgabe, ein deutlich wahrnehmbares, in erster Linie ein optisches Signal (Schauzeichen) hervorzubringen. Sehr häufig sind damit Relaisfunktionen verbunden.

Die Signalelektromagnete zerfallen in zwei Klassen: 1. Stromanzeiger, 2. Auslösungssignale. Die ersteren zeigen eine Signalscheibe, solange sie vom Signalstrom durchflossen werden; sie unterscheiden sich prinzipiell nicht von in der Meßtechnik benutzten Galvanoskopen; technisch nur insofern, als ihre Form und Größe der massenweisen Anbringung in Signalschränken günstig sein muß.

Diese Schauzeichen werden meist in Schutzkästen mit Fenstern eingebaut, hinter welchen in der Arbeitslage eine weiße oder bunte Signalscheibe erscheint (Gitteranzeiger, Sternschauzeichen).

Das gebräuchlichste Auslösungssignal ist der Fallklappenelektromagnet: ein Elektromagnet, an dessen Anker ein Sperrhaken befestigt ist, welcher eine kleine drehbare Metallklappe in der Ruhestellung festhält und bei der kleinsten Bewegung des Ankers herabfallen läßt. Die herabfallende Klappe gibt ein Signalfeld mit Nummer usw. frei. Nach erfolgter Wahrnehmung des Signals muß die Klappe mit der Hand wieder aufgerichtet werden.

Häufig wird die Einrichtung getroffen, daß die Klappe, wenn zur Beantwortung des Signals ein Stöpsel in eine Klinke gesteckt werden muß, eben durch diese Operation mittelst einer mechanischen oder elektromagnetischen Vorrichtung selbsttätig wieder aufgerichtet wird (sog. selbsthebende Klappen).

Allen diesen Rufzeichen hat sich in neuerer Zeit das Glühlampensignal überlegen gezeigt. Der Signalstrom erregt ein Relais, welches eine kleine, von einer Lokalbatterie gespeiste, niedervoltige Glühlampe einschaltet. Die Lampen sind von zylindrischer Form, ca. 8 mm Durchmesser und 30—40 mm lang, mit zwei Kontaktplättchen auf der Mantelfläche des Zylinders; sie werden in klinkenartig ausgebildete Fassungen eingeschoben, und über die Stirnfläche wird eine kleine kreisförmige, matte oder farbige Linse gesetzt, welche ein gleichmäßiges und angenehmes Licht erzeugt. Die Lampen sind leicht auswechselbar und beanspruchen auf der Signalfläche nicht mehr Raum als eine Klinkenöffnung, während Klappen und Schauzeichen beinahe den zehnfachen Raum erfordern. Die elektrischen Daten einer gebräuchlichen Telephonlampe sind z. B.: Spannung

20 Volt, Stromstärke 0,12 Ampere, Lichtstärke 0,3 Kerzen, Lebensdauer über 1000 Stunden.

Zur Speisung der Lampen werden entweder Akkumulatoren oder Gleichstromumformer verwendet.

Besondere Einrichtungen, die an dieser Stelle erwähnt werden müssen, erfordern auch die Rufstromquellen eines Fernsprechamtes. Ein Kurbelinduktor wird nur in kleinen Zentralen angewendet. Man benutzt meist die sogenannten Polwechsler, elektromagnetisch betätigte doppelpolige Umschalter, welche den Strom einer Batterie von ca. 30 Volt in schneller Folge kommutieren. In größeren Ämtern verwendet man neuerdings kleine Wechselstromerzeuger, die durch Elektromotoren angetrieben werden. Mit solchen Rufstrommaschinen ist häufig auch eine Vorrichtung verbunden, um mittels rotierender Kollektoren Wechselströme höherer Periodenzahl zu erzeugen, welche zu verschiedenen akustischen Signalen benutzt werden.

Neuerdings werden zur Zählung der von den Teilnehmern geführten Gespräche elektromagnetische Registrierapparate auf den Zentralen aufgestellt, die mit den Klinken der Teilnehmerleitung in Verbindung stehen und halb- oder vollautomatisch beim Betriebe betätigt werden (Gesprächszähler).

## 5. Zentralumschalter.

Nach dieser Übersicht über die Konstruktionselemente der Zentralen führen wir die hauptsächlichsten Typen auf.

Für die kleinsten Fernsprechnetze bis zu 20—30 Teilnehmern bedient man sich der Wandzentralen, kleiner Wandschränkchen, auf deren Front die Anrufklappen und Klinken der Teilnehmer angeordnet sind. Die Verbindungen erfolgen meist durch Einsetzen eines Stöpsels (ohne Schnur) in eine Klinke. Jede Verbindungsmöglichkeit ist durch eine besondere Klinke, welche die Anschlußfedern je zweier Teilnehmer enthält, vorgebildet: durch Einsetzen des Stöpsels werden nur die entsprechenden Federn beider Teilnehmer untereinander verbunden. Da bei $n$ Teilnehmern $\frac{1}{2}(n-1)n$ Verbindungsmöglicheiten existieren, so ist das Prinzip des „schnurlosen Umschalters" wegen der rasch wachsenden Klinkenzahl nur bis zu etwa 20 Teilnehmern rationell anwendbar.

Die Bedienung eines solchen kleinen Umschalters vollzieht sich folgendermaßen:

Die Anrufklappe des Teilnehmers fällt. Die Bedienungsperson (Telephonistin) richtet die Klappe wieder auf und steckt einen Stöpsel in die Klinke (Abfrageklinke) des anrufenden Teilnehmers, wodurch der Teilnehmer mit dem Sprechapparat der Telephonistin verbunden wird („Abfragen"). Nachdem der Teilnehmer mitgeteilt hat, mit wem er verbunden zu werden wünscht, zieht die Telephonistin den Stöpsel aus der Abfrageklinke und setzt ihn in diejenige „Verbindungsklinke", in welcher die betreffende Verbindung bereits vorgebildet ist, ein. Darauf ruft der anrufende Teilnehmer mittels Kurbelinduktors den verlangten Teilnehmer auf. Die Anrufklappe des einen Teilnehmers ist während des Gesprächs als Schlußzeichen in Brücke zwischen die verbundenen Leitungen beider Teilnehmer geschaltet. Nach Beendigung des Gesprächs kurbelt der anrufende Teilnehmer abermals („Abklingeln"), worauf die Schlußklappe in der Zentrale fällt. Hierauf wird die Verbindung von der Telephonistin gelöst.

Dieser primitive Betrieb wird zunächst etwas übersichtlicher durch die Anwendung des Zweischnursystems, wobei jedem Schnurpaar eine besondere Schlußklappe zugeordnet ist, während die Anrufklappen beider Teilnehmer während des Gesprächs ausgeschaltet sind. Jedes Schnurpaar pflegt dann auch einen besonderen festen Schalter („Abfrageschlüssel") zu erhalten, durch welchen sich die Telephonistin mit den Teilnehmern jederzeit in Verbindung setzen kann.

Ganz erhebliche Betriebsverbesserungen werden erzielt, wenn die Schlußzeichengabe nicht durch einen willkürlichen Akt des Teilnehmers (der leicht versäumt werden kann), sondern selbsttätig erfolgt. Als signalgebende Handlung wirkt dann das Wiederanhängen des Telephons an den Umschaltehaken.

Auf dem Amt wird in Brücke zu den Leitungen des Schnurpaares ein Schauzeichen oder Glühlampenrelais und eine Batterie geschaltet, deren Strom je nach dem Zustande der Teilnehmerstation geöffnet oder geschlossen ist. Ist während des Sprechzustandes der Teilnehmerstation ein Kondensator eingeschaltet, so ist die Teilnehmerlinie während des Gesprächs stromlos, und das Schauzeichen bzw. Relais im Amte spricht nicht an. Sobald aber der Teilnehmer anhängt, fließt ein Strom von der Amtsbatterie über das Schlußzeichen, die Teilnehmerlinie, den Wecker der Teilnehmerstelle und zum Amt zur Schlußzeichenbatterie zurück; das Schlußzeichen im Amte erscheint dann.

Eine weitere Verbesserung des Betriebes ist das doppelseitige automatische Schlußzeichen. Ordnet man in jedem Schnurpaar für jeden der verbundenen Teilnehmer ein besonderes Schlußzeichen an, welches unabhängig vom anderen den Zustand der einzelnen Teilnehmerstation anzeigt, so erhält die Telephonistin ein noch deutlicheres Bild von dem Zustand der von ihr zu überwachenden Verbindungen. Dazu ist erforderlich, daß das Schnurpaar aus zwei galvanisch voneinander unabhängigen Teilen besteht, zu welchem Zweck die Verkuppelung der Schnurpaarhälften häufig durch Kondensatoren oder Transformatoren erfolgt. Beim doppelseitigen Schlußzeichen ersieht die Telephonistin vor allem auch, wann der verlangte Teilnehmer, dem Weckruf Folge leistend, an den Apparat kommt; erforderlichenfalls ist sie in der Lage, einen zweiten oder dritten Weckruf ergehen zu lassen. Hierdurch wird es auch einwandsfrei möglich, das Anrufen lediglich der Zentrale zu überlassen und von der Anordnung eines Induktors auf der Teilnehmerstelle abzusehen. Das sogenannte „Durchrufen“ fällt dann fort.

Bedeutenden Einfluß auf die Betriebsart hat die Zahl der an eine Zentrale anzuschließenden Teilnehmer. Man rechnet, daß eine Telephonistin bei mittlerer Verkehrsstärke 100—150 Teilnehmer bedienen kann. Sobald die Teilnehmerzahl einer Zentrale diesen Wert mehrfach übersteigt, ist es nicht ohne weiteres mehr möglich, daß eine Telephonistin alle vorkommenden Verbindungen herstellt. Das einfachste und meistangewandte Mittel, um diese Schwierigkeit zu beheben, ist der Vielfachumschalterbetrieb. Jeder Teilnehmer erhält eine Klappe, dagegen so viele Klinken in der Zentrale, daß jede Telephonistin in der Lage ist, von ihrem Platz aus die Klinken aller Teilnehmer zu erreichen. Im Gegensatz zu der einen, dicht bei der Klappe anzubringenden Klinke, an welcher der Teilnehmer abgefragt wird („Abfrageklinke“), heißen die anderen, an jedem Umschalteschrank sich wiederholenden Klinken „Vielfachklinken“.

Gewöhnlich werden die Vielfachumschalter in Form von Schränken ausgeführt, deren unterer Teil die Anruforgane, Schnurpaare und Hörschlüssel enthält, während im oberen Teil der Schränke das Vielfachklinkenfeld angeordnet ist. Jeder Vielfachschrank umfaßt gewöhnlich die Arbeitsplätze dreier Telephonistinnen. Diese Schränke werden zu einer langen Reihe aneinandergesetzt. Jeder Schrank enthält die Vielfachklinken aller Teilnehmer der Zentrale. Jede Telephonistin kann mit den Stöpseln die Vielfachklinken oberhalb ihres eigenen und des Nachbarplatzes rechts und links mit den Schnurstöpseln bequem erreichen.

Die Zahl der Vielfachklinken (und der zugehörigen Kabeladern) wächst für eine gegebene Schranktype proportional dem Quadrate der Teilnehmerzahl des Amtes.

Der Aufwand für Anruflampen und Relais, für Abfrageklinken, Hörschlüssel, Stöpselschnüre, Schlußzeichen kann dagegen näherungsweise der Teilnehmerzahl proportional gesetzt werden.

Eine wichtige Größe für ein Vielfachamt ist das Fassungsvermögen des Vielfachfeldes (Amtskapazität). Es ist schwierig, mehr als 10000 Klinken im Handbereich einer Telephonistin unterzubringen. Indem man den Durchmesser der Klinken und Stöpsel aufs äußerste reduziert, kann man etwa 20000 Klinken anordnen. Damit ist aber, auch aus anderen, wirtschaftlichen Gründen, die Grenze erreicht, bei welcher der Vielfachumschalterbetrieb unzweckmäßig wird.

Das sogenannte Kellogg-System ermöglicht eine Steigerung der Amtskapazität um das Mehrfache. Jeder Teilnehmer erhält zwei (oder mehr) Anrufrelais, die er nach Wahl betätigen kann. Das Amt ist in zwei (oder mehr) Abteilungen geteilt; jeder Teilnehmer kann in jeder Abteilung anrufen, besitzt aber Vielfachklinken nur in einer Abteilung des Amtes. Wenn man jemanden anrufen will, hat man zuvor dem Verzeichnis zu entnehmen, in welcher Abteilung des Amtes derselbe im Vielfachfelde verbunden werden kann. — Große praktische Erfolge hat das Kellogg-System bislang nicht gehabt.

Die sogenannten Transfer- und Verteilungssysteme brechen mit dem Prinzip, daß jede Verbindung nur durch eine einzige Telephonistin hergestellt wird; sie bestimmen zwei, bisweilen auch drei Beamte für jeden Verbindungsvorgang, welche sich in die erforderlichen Funktionen teilen. Eine Kategorie von Beamten übernimmt das Abfragen, die andere das Aufsuchen der Klinke des verlangten Teilnehmers. Der Benachrichtigungsdienst zwischen diesen Beamten ist so vorzüglich organisiert, daß die Herstellung einer solchen Verbindung kaum mehr Zeit erfordert als beim Vielfachbetrieb. Keins dieser Systeme hat aber bislang allgemeinere Verbreitung erlangt.

## 6. Automatische Zentralen.

Eine bedeutende Rolle beginnen neuerdings die automatischen Telephonämter zu spielen. Die Bestrebungen, den ganzen Vermittlungsdienst automatisch zu machen, sind schon älter als ein Jahrzehnt, aber das einzige System, welches es über das Stadium des Experimentes hinaus zu praktischen Erfolgen gebracht hat, ist das des Amerikaners Almon B. Strowger.

Dasselbe sieht besondere Einrichtungen an den Teilnehmerstationen vor, welche gestatten, die beiden Zweige der Teilnehmerleitung zum Zweck des Anrufes mehrfach für kurze Zeit an Erde zu legen und damit eine Zahl von Stromstößen, die den Ziffern der gewünschten Anschlußnummer entsprechen, im Amte zu erzeugen. Jeder Teilnehmerlinie ist ein besonderer Schaltmechanismus („Wähler“) zugeordnet, der unter dem Einfluß dieser Stromstöße in Bewegung versetzt wird. Der bewegliche Kontaktarm des Wählers, welcher funktionell einer Stöpselschnur entspricht, gerät in schrittweise, translatorische und rotierende Bewegung und bestreicht dabei ein Feld von Anschlußkontakten der übrigen Teilnehmer, die auf der Innenseite einer Zylindermantelfläche angeordnet sind. Diese Anschlußkontakte entsprechen funktionell den Vielfachklinken eines gewöhnlichen Umschalters.

Das Strowger-System verkörpert daher ein „Einschnursystem“, bei welchem der Kontaktarm (Stöpsel) vor einem zylindrisch angeordneten Vielfachklinkenfeld unter der Einwirkung des Teilnehmers sich in zwei Koordinatenrichtungen bewegt, bis er die Anschlußkontakte (Klinken) des gewünschten Teilnehmers erreicht hat.

Die Bewegung nach jeder Koordinatenrichtung wird dabei durch je einen, in einen der Leitungszweige eingeschalteten oder besser durch Relais betätigten Elektromagneten bewirkt. Es sind so viele Kontaktarme und Klinkenfelder nötig, als Teilnehmer vorhanden sind.

Dieses Grundprinzip ist indes nur bis zu einer Zahl von etwa 100 Teilnehmern durchführbar. Um eine größere Anzahl in einem automatischen Amt

zu vereinigen, muß der Wahlvorgang wiederholt werden. Außer den jedem Teilnehmer zugeordneten Wählern sind noch weitere Wähler vorhanden. Der erste Wähler wählt einen zweiten Wähler, der nur die Anschlußkontakte einer bestimmten Teilnehmergruppe enthält, und dieser wählt erst einen bestimmten Teilnehmer. Dies Verfahren kann fortgesetzt werden.

Die automatischen Telephonämter sind außerordentlich komplizierte Schaltungssysteme. Außer den eben skizzierten Grundprinzipien sind zahllose Nebenbedingungen zu erfüllen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann. Trotz der Unsumme von Arbeit und Scharfsinn, die auf dies Problem verwendet sind, ist der endgültige Erfolg der automatischen Ämter über die von Telephonistinnen bedienten vorläufig noch zweifelhaft. Die Anlagekosten sind eben sehr viel höhere, und die Gefahr der Störungen wird allseitig noch für sehr bedeutend gehalten. In Amerika arbeitet bereits eine ganze Anzahl bedeutender Telephonnetze nach dem automatischen System.

## 7. Haupt- und Nebenstellen.

### Nebenstellensysteme. Sekundärzentralen.

Das öffentliche Fernsprechnetz muß sich von einer Teilnehmerstelle aus häufig noch weiter verzweigen, sei es, daß mehrere andere Stationen auch noch an dieselbe, zum Amt führende Leitung gelegt werden sollen, sei es, daß ein ganzes Privatfernsprechnetz, z. B. einer Bank oder Fabrik, besteht, welches über die eine öffentliche Fernsprechleitung hinweg mit dem öffentlichen Netz verkehren soll.

Häufig wird es gestattet, an eine öffentliche Fernsprechleitung eine größere Anzahl Sprechstellen, parallel oder in serie, anzuschließen. Bei einem derartigen System, das als Gesellschaftsleitung (partyline) bezeichnet wird, ist keine Station vor der anderen wesentlich bevorzugt.

Dagegen besteht ein gewisser Vorrang einer Station, wenn die öffentliche Fernsprechleitung normal in einer Sprechstelle endigt und erst von dieser aus durch besondere Umschalter mit einer oder mehreren anderen Stationen verbunden werden kann. Die erstgenannte Station heißt dann Hauptstelle, die abhängigen Stationen Nebenstellen.

Gesellschaftsleitungen und Nebenstellen bringen manche Betriebsnachteile für das öffentliche Netz mit sich, und auch das Interesse der Teilnehmer wird nur unvollkommen durch solche Einrichtungen wahrgenommen. Die Geheimhaltung der Gespräche ist meist nicht genügend verbürgt, die Bedienung der Hauptstellen läßt häufig sehr zu wünschen übrig, und das einfache System der automatischen Schlußzeichengabe auf dem Amt gerät in Verwirrung, falls nicht besondere, komplizierte Einrichtungen dafür geschaffen werden.

Eine Besserung dieser Verhältnisse wird durch die sogenannten automatischen Nebenstellensysteme angestrebt. Durch besondere Einrichtungen ist zunächst zu ermöglichen, daß das Amt jeden beliebigen Teilnehmer für sich anrufen kann, ohne daß die anderen Teilnehmer gestört werden; desgleichen, wenn ein Teilnehmer das Amt anrufen will. Wünschenswert ist ferner die Verriegelung der übrigen Sprechstellen, sobald eine Stelle ein Gespräch begonnen hat, ferner ein Signal auf jeder Stelle, welches das Frei- oder Besetztsein anzeigt, endlich eine Möglichkeit, die Verriegelung aufzuheben, wenn ein Teilnehmer die gemeinsame Leitung über Gebühr in Anspruch nimmt. Obwohl auf diese Probleme viel Mühe und Scharfsinn verwendet worden sind, hat kein System bisher eine allgemeinere Verbreitung und Anerkennung gefunden.

An den vorgeschlagenen Systemen ist der interessanteste Punkt der Anruf einer einzelnen unter vielen an eine Leitung geschalteten Stationen. Es tritt hier

in spezieller Form ein allgemeines Problem der Telegraphie wieder auf. Die bisherigen Lösungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Erstens verwandte man Schaltwerke, die durch Stromstöße Schritt für Schritt weitergetrieben wurden, von derselben Art bei automatischen Ämtern. Zweitens benutzte man Ströme verschiedener Richtung und Stärke, die auf Relais oder Wecker verschiedenartige Wirkungen ausüben, wie bei der Quaduplex-Telegraphie. Drittens verwandte man die Resonanzerscheinungen, sei es mechanischer, sei es elektrischer Art, welche mit Wechselströmen verschiedener Frequenz erzielt werden können.

Das Problem der Gesellschaftsleitung erfährt noch eine weitere Komplikation, wenn die einzelnen Sprechstellen außer mit der öffentlichen Fernsprechleitung noch mit beliebig vielen Sprechstellen eines privaten Netzes verkehren sollen, die ihrerseits aber nicht in der Lage sein sollen, das öffentliche Fernsprechnetz zu benutzen. Diese Frage ist praktisch von großer Bedeutung. Über eine weitverbreitete Lösung siehe ZOPKE, Elektrotechn. Zeitschr. 1902.

## 8. Verkehr zwischen Zentralen.

### Fernverkehr.

Ähnliche technische Schwierigkeiten wie bei dem Verkehr eines Privatnetzes mit dem öffentlichen Netze erwachsen auch, wenn zwei öffentliche Stadtfernsprechnetze miteinander in Verkehr treten sollen. Liegen diese zwei Ämter in der gleichen Stadt oder in benachbarten Städten (Nachbarorts- oder Vorortsverkehr), so pflegt der Verkehr sehr lebhaft zu sein, und es sind zahlreiche „Amtsverbindungsleitungen" vorzusehen. Für solchen Verkehr haben sich folgende Normen entwickelt unter der Voraussetzung, daß beide Ämter moderne Umschaltvorrichtungen mit automatischer Schlußzeichengabe besitzen.

Die Amtsverbindungsleitungen werden in jeder Zentrale in „ankommende" und „abgehende" geteilt. Die letzteren sind an allen Arbeitsplätzen jedes Ortsamtes in hinreichender Zahl durch Klinken vertreten. Die „ankommenden" Leitungen sind an besonderen Umschalteschränken, an denen Anruflampen der Ortsteilnehmer nicht vertreten sind, auf Anruflampen gelegt. Die Beamten an diesen Schränken haben sich daher nur mit der Entgegennahme der aus dem anderen Stadtnetz kommenden Gesprächsaufträge zu beschäftigen. An diesen Umschaltern sind aber Klinken aller Teilnehmer des eigenen Stadtnetzes vorhanden, so daß jeder einlaufende Anruf an diesen besonderen Vorortsschränken erledigt werden kann. — Die Überwachung des Gesprächs liegt in der Regel bei dem Amte des anrufenden Teilnehmers. Das Schlußzeichen des angerufenen Teilnehmers wird am besten über das zweite Amt hinweg, ohne dort zur Erscheinung zu kommen, zum ersten Amt hinübergeleitet. Nachdem im ersten Amt doppelseitiges Schlußzeichen erschienen ist, trennt dieses Amt die Verbindung, wodurch im zweiten Amt ebenfalls Schlußzeichen gegeben wird, so daß das zweite Amt (am Vorortschranke) nun ebenfalls die Verbindung lösen kann.

Für den eigentlichen telephonischen Fernverkehr hat man einen solchen Dienst nicht organisieren können. Es liegt dies einmal an dem Mangel an Leitungen, da die Fernlinien enorm kostspielig sind, zweitens an der Notwendigkeit, eine besondere und zwar sehr hohe Gebühr für das (zeitlich limitierte) Gespräch erheben zu müssen, endlich an der häufig erforderlichen Inanspruchnahme mehrerer Ämter hintereinander.

Den größeren Stadtfernsprechämtern sind in der Regel besondere Fernämter zugeordnet. Diese zerfallen wiederum in zwei Abteilungen, ein „Meldeamt", welches die Gesprächsaufträge von dem Ortsamt her entgegennimmt, und ein eigentliches „Fernamt", welches die Verbindung zwischen der Fernleitung und einer besonderen, nach dem Ortsamt laufenden Leitung (Ortsverbindungsleitung) im richtigen

Augenblick herstellt und überwacht. Im Ortsamt erfolgt die Verbindung des Teilnehmers mit der „Ortsverbindungsleitung". Es gilt als Regel, daß bei einer Fernverbindung die erste Klinke des Teilnehmers im Ortsamt, unter gleichzeitiger vollständiger Abschaltung aller übrigen Vielfachklinken und Anruforgane, benutzt wird.

## 9. Spezialgebiete der Telephonie.

Der Wirkungskreis des Fernsprechers ist nicht auf das große öffentliche Fernsprechnetz, das jetzt alle Kulturstaaten mehr oder weniger dicht bedeckt, beschränkt. Für Geschäfte, Fabriken und Banken, für Verwaltungsinstitute, Krankenhäuser, namentlich aber für Eisenbahnen, Bergwerke und Schiffe werden jetzt ausgedehnte telephonische Anlagen geschaffen, deren Form und Wirkungsweise den besonderen Bedürfnissen aller dieser Gebiete angepaßt wird. Im Bergwerks- und Fabrikbetriebe macht sich das Bedürfnis nach lautsprechenden Apparaten geltend, welches Erfordernis auch dem Schiffstelephon sein besonderes Gepräge gibt.

Das Problem des Lautsprechers ist von den Anfängen der Telephonie an bearbeitet worden, hat aber erst in neuerer Zeit wirklich technische Lösungen gefunden, die ein dauernd gutes Funktionieren solcher Apparate gewährleisten. Vorbedingung ist dabei naturgemäß eine kurze Linie mit kleinem Widerstand und geringer Kapazität, Fortlassung aller nicht unbedingt nötigen Apparate aus dem Linienstromkreise; man wendet daher meist getrennte Sprechkreise für jede Sprechrichtung an (Dreileitersystem). Die Telephone sind groß und kräftig zu disponieren, ein möglichst starkes Magnetsystem wird empfohlen. Die Mikrophone müssen möglichst stark belastbar sein; die durch den Speisestrom hervorgebrachte Erwärmung muß gut abgeleitet werden, die Menge, Kornstärke und Schichtungsweise des Kohlenpulvers ausprobiert werden.

Besondere Rücksicht ist auf die Gestaltung und gegenseitige Lage der Schalltrichter für Telephon und Mikrophon zu nehmen, um eine wechselseitige Erregung zu vermeiden.

Die lautsprechenden Kommandoapparate, wie sie namentlich an Bord von Kriegsschiffen Anwendung finden, bestehen aus wasserdichten, äußerst starken und soliden Metallgehäusen, in welche die empfindlichen Apparate möglichst geschützt eingebaut sind. Gewöhnlich befinden sich die Schallöffnungen für Telephon und Mikrophon übereinander auf der Vorderseite des Gehäuses; häufig sind außerdem noch metallene, niederklappbare Schallrohre, die mit dem Telephon in Verbindung stehen, angebracht, welche der Hörende ans Ohr legen kann.

Näheres über alle diese Spezialkonstruktionen und Schaltungen siehe in ZOPKE, „Das Telephon im Seewesen", Jahrbuch der Deutschen schiffbautechnischen Gesellschaft, 1903.

Über Anwendungen des Mikrophons und des Telephons in der Medizin, Erdbebenforschung, Astronomie etc. siehe CHR. JENSEN und H. SIEVEKING, l. c.

Auch im Heere hat das Telephon weitgehende Anwendung gefunden (siehe E. RAMDOHR, Kriegstechnische Zeitschrift, 1903).

### Fixierung von Telephongesprächen.

Obwohl es möglich ist, ein Telephongespräch mittels des EDISONschen Phonographen zu fixieren und reproduzierbar zu machen, so wäre diese Methode doch zu umständlich, um für den Telephonverkehr irgend eine Rolle spielen zu können. Auf einfache und sinnreiche Weise, jedoch vorläufig auch ohne praktischen Erfolg, hat der Däne V. POULSEN (1900) in dem von ihm „Telegraphon" genanten Apparat die Aufzeichnung und spätere Wiedergabe von Telephongesprächen ermöglicht. Durch diesen Apparat werden die magnetisierenden

Wirkungen der Telephonwechselströme auf einem raschbewegten Stahldraht gewissermaßen zum Abdruck gebracht. Man leitet die Sprechwechselströme, welche von einem Mikrophon erzeugt werden, durch einen kleinen Elektromagneten, über welchen mit großer Geschwindigkeit ein Stahldraht oder ein Stahlband hingleitet. Auf dem Drahte bilden sich abwechselnd Nord- und Südpole aus, den wechselnden Magnetisierungen des Elektromagneten entsprechend, die vermöge der Remanenz des Stahldrahtes nebeneinander erhalten bleiben. Der zeitliche Verlauf der Sprechwechselströme wird somit auf dem Stahldraht magnetisch abgebildet; je nach der Tonhöhe des erzeugenden Schalles folgen die Wechselpole bald schneller, bald langsamer aufeinander, und je nach der Stärke des erzeugenden Wechselstromes sind die Magnetisierungen stärker oder schwächer. Führt man nun zu beliebiger späterer Zeit den Elektromagneten wiederum über den mit magnetischen Polen bedeckten Draht, so bewirkt die Annäherung und Entfernung dieser Pole im Kern des Elektromagneten magnetische Induktionen, welche elektromotorische Kräfte in den Windungen des Elektromagneten erregen. Man erkennt leicht, daß hierbei Wechselströme derselben Form erzeugt werden müssen, wie sie vorher bei der Fixierung der Magnetpole gewirkt haben. Verbindet man daher ein Telephon mit der Wicklung des Elektromagneten, so wird die auf dem Stahldraht fixierte Sprache, Musik usw. genau wiedergegeben.

Ein derartiger Apparat gestattet auch in sehr einfacher Weise die Wiederauslöschung des fixierten Gesprächs, um den Stahldraht für eine neue Gesprächsfixierung brauchbar zu machen. Man braucht nur mit einem kräftigen Magneten über den Stahldrat hinzustreichen oder den Aufschreibelektromagneten, während derselbe von Gleichstrom durchflossen wird, über den Draht hingleiten zu lassen, so werden durch die starke Magnetisierung die Spuren des vorher aufgenommenen Gesprächs vollkommen ausgelöscht. Nichtsdestoweniger ist der Draht sofort wieder geeignet, ein neues Gespräch aufzunehmen und dauernd festzuhalten. Näheres über das POULSENsche Prinzip und dessen Ausführungsformen findet man in folgenden Veröffentlichungen:

V. POULSEN, Drudes Ann. d. Phys. 3. 754. 1900. — H. ZOPKE, Der Telephonograph. 1900. — . BLONDIN, L'Eclairage electrique. 1900. — L. RELLSTAB, Elektrotechn. Zeitschr. 1901.

Eine dem Telegraphon analoge Vorrichtung, bei welcher die Lichtschwankungen einer singenden oder sprechenden Bogenlampe auf einem photographischen Film fixiert und später mit Hilfe einer Selenzelle im Telephon wieder hörbar gemacht werden, ist das Photographophon von RUHMER (vgl. Ann. d. Phys. 5. 803. 1901).

Eine dem remanenten Magnetismus analoge Erscheinung ist die galvanische Polarisation. Auf Grund dieser Überlegung haben W. NERNST und R. v. LIEBEN ein Seitenstück zu dem Telegraphon konstruiert, indem sie auf einem Platindraht einen mit Elektrolyt getränkten Holzkeil schleifen ließen, durch welchen Sprechwechselströme geleitet wurden. Dadurch wird der Platindraht variabel polarisiert; führt man später den Holzteil in Verbindung mit einem Telephon und einem Element über den Draht hin, so werden wieder entsprechende Wechselströme wahrnehmbar gemacht.

### Telephonie ohne Draht.

Ein Fernsprechen ohne Hilfe einer metallischen Leitung ist bisher auf zwei wesentlich verschiedene Arten versucht worden. Es ist gelungen, periodische Schwankungen einer Lichtquelle, welche durch ein Mikrophon beeinflußt wurde, auf einige Kilometer Entfernung zu übertragen und am Fernorte die aufgefangenen Lichtstrahlen mit Hilfe einer Selenzelle in solcher Weise wirksam zu machen, daß ein Telephon entsprechend erregt wurde.

Die ersten Versuche dieser Art stammen von BELL, welcher das Licht einer starken Lichtquelle auf eine hohlspiegelartig ausgebildete Membrane fallen ließ.

Indem man gegen diese Membrane sprach, wurde deren Krümmungsradius periodisch verändert. Diesen Veränderungen entsprachen Helligkeitsschwankungen des durch den Hohlspiegel konzentrierten Lichtfleckes; wurde dieser Lichtfleck auf eine Selenzelle, die mit einer Batterie und einem Telephon in Reihe geschaltet war, gerichtet, so ließen sich die Schwankungen des Lichtes in Stromschwankungen umsetzen und im Telephon hörbar machen. Eine wesentliche Verbesserung dieser Anordnung gelang Professor SIMON im Jahre 1898, indem er auf der Geberstelle den sprechenden Flammenbogen, welchen wir bereits auf S. 798 beschrieben haben, im Brennpunkte eines großen Parabolspiegels (Scheinwerfers) anordnete. Der durch ein Mikrophon beeinflußte Flammenbogen ändert seine Helligkeit sehr beträchtlich mit jeder Schwankung des Stromes, und diese Helligkeitsschwankungen lassen sich auf große Entfernungen (nach Versuchen von RUHMER auf 15 km) wirksam übertragen.

Eine lebhafte Erfindertätigkeit hat sich darauf gerichtet, die bisher für die Telegraphie ohne Draht so erfolgreich benutzten schnellen Schwingungen auch zur Übermittlung telephonischer Wirkungen zu benutzen. Man ging dabei meistens von der Vorstellung aus, die in dem eben beschriebenen Versuch der drahtlosen Lichttelephonie dem Lichte zugewiesene Rolle den elektrischen Schwingungen höherer Frequenz zu übertragen. Gelingt es, ununterbrochene Serien elektrischer Wellen von so hoher Frequenz, daß jede akustische Wirkung derselben ausgeschlossen ist, herzustellen und die Aussendung dieser Wellen durch langsame Schwingungen von der Art der Telephonströme bald zu begünstigen, bald zu behindern, so würde am Empfangsorte nicht ein kontinuierlicher Fluß elektrischer Strahlung aufgenommen werden, sondern ein in langsamem Tempo bald anschwellender, bald wieder fallender Zustrom elektrischer Energie, dessen langsame Änderungen vielleicht im Telephon zur Wirkung gebracht werden könnten. Es liegt in der Tat eine Reihe von Phänomenen vor, welche die Durchführung dieses Grundgedankens als möglich erscheinen lassen; vergleiche z. B. hierüber SIMON und REICH, Physikalische Zeitschrift 1903; ZOPKE, Das Telephon im Seewesen. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1903.

Während der Drucklegung dieser Zeilen ist V. POULSEN die Erzeugung kontinuierlicher elektrischer Wellenzüge durch Anwendung eines in Wasserstoff erzeugten Flammenbogens gelungen; unmittelbar darauf folgte auch die Verwirklichung des Fernsprechens mittelst solcher Wellen durch E. RUHMER. (Vgl. Elektrotechn. Zeitschr. 1906.)

## 10. Telephonleitungen.

Während STEINHEILS berühmte Entdeckung der Rückleitung des elektrischen Stromes durch die Erde für die Gestaltung der Telegraphennetze auf der ganzen Erde bis heute maßgebend geblieben ist, war eben diese Vereinfachung des Leitungskreises für die Entwicklung der Telephonie verhängnisvoll. Es hat jahrzehntelanger Arbeit bedurft, um den Fehler wieder gut zu machen, daß man die ältesten und bestentwickelten Telephonnetze aus Einfachleitungen hergestellt hatte. Der Hauptgrund, aus dem man für die telephonische Übertragung jetzt unter allen Umständen eine Doppelleitung vorzieht, liegt darin, daß alle Arten von induktiven Störungen, welche auf eine Einfachleitung mit Erdrückleitung wirken, voll zur Geltung kommen, während die auf die dicht aneinander liegenden Zweige einer Doppelleitung ausgeübten Induktionswirkungen sich gegenseitig aufheben. Dies gilt in ganz besonderem Maße von der von einer zweiten Telephonlinie am gleichen Gestänge ausgehenden Induktionswirkung: die dieselbe durchfließenden Sprechströme werden auf die benachbarte Linie übertragen und als sogenanntes Mithören lästig empfunden, sofern beide Linien als Einfachleitungen mit Erdrückleitung geschaltet sind; sind sie dagegen beide als Doppelleitungen ausgeführt, so hebt sich der größte Teil der induzierten elektromag-

netischen Kräfte gegenseitig auf. Da sich nun in allen verkehrsreichen Städten die Parallelführung der Linien auf weite Strecken nicht vermeiden läßt, so war man zur Einführung der Doppelleitung gezwungen.

Noch in einem zweiten Punkte war man anfangs den Überlieferungen der Telegraphie gefolgt und mußte später reformieren: in der Wahl des Drahtmaterials. Schon sehr bald erkannte man aber, daß die Anwendung eiserner Drähte für Telephonleitungen einen zu hohen Leitungswiderstand mit sich brachte und daher verlassen werden mußte.

Für telephonische Freileitungen wird heutzutage allgemein Bronze benutzt, und zwar Siliziumbronze. Der Reinkupfergehalt und damit die Leitfähigkeit wird um so mehr beschränkt, je größere Zugfestigkeit des Drahtes verlangt wird. Für Fernsprechkabel verwendet man reines Kupfer. Folgende Drahtstärken sind gebräuchlich: für die Systemkabel der Vielfachumschalter 0,6 mm, für die Kabel der Stadtfernsprechnetze 0,6—0,8 mm, für Freileitungen der Stadtfernsprechnetze 1,5—2 mm, für Fernleitungen je nach der Länge 3—5 mm.

Bei der Übertragung der Telephonströme kommt nächst dem Widerstand der Leitungen vor allem die Kapazität derselben in Frage. War dieser Einfluß bei den gewöhnlichen Telegraphenleitungen bereits deutlich hervorgetreten und in der Geschichte der transatlantischen Kabellegungen von hoher Bedeutung geworden, so erwies er sich geradezu als ausschlaggebend für das ganze Problem der Ferntelephonie. Der Begriff der Kapazität einer Leitung und einer Doppelleitung bietet gewisse Schwierigkeiten. Gewöhnlich bezieht man die Kapazität auf die Längeneinheit der Leitung, d. h. auf 1 km. Die kilometrische Kapazität der normalen Freileitungen ist von der Größenordnung eines Hundertstel Mikrofarad; bei Kabeln ist sie beträchtlich größer. In der modernen Kabeltechnik wird alles aufgeboten, um die Kapazität soviel wie nur möglich zu verringern. Das erfolgreichste Mittel ist die Verwendung der sogenannten Papier-Luftisolation, d. h. der Kupferdraht ist mit Papierstreifen derart umwickelt, daß große Zwischenräume frei bleiben, so daß das isolierende Dielektrikum größtenteils Luft ist. Da Luft eine viel geringere Dielektrizitätskonstante besitzt als die meisten festen Isolierstoffe, so wird das spezifische Ladungsvermögen des Drahtes durch die Papier-Luftisolation verringert. Bei diesen Kabelleitungen wird daher eine kilometrische Kapazität von etwa vier Hundertstel Mikrofarad und weniger erreicht, während z. B. die Seetelephonkabel mit festem Isolierstoff etwa zwei Zehntel Mikrofarad erreichen.

Die Selbstinduktion der Leitungen spielt ebenfalls eine Rolle bei der Fortleitung schneller Schwingungen.

Eine vierte charakteristische Eigenschaft der Telephonleitungen ist der Verlust durch Ableitung. Der Isolationswiderstand zwischen Leitung und Erde oder zwischen den Zweigen einer Doppelleitung ist niemals unendlich, sondern meist sehr bequem meßbar. Auch wenn kein direkter Isolationsfehler vorhanden ist, bestehen zahllose Stromwege von einer Leitung zur anderen. Man bezieht auch den Isolationswiderstand und seinen reziproken Wert, die Ableitung, auf das Kilometer Leitungslänge. Bei Kabeln verlangt man Isolationen von 100—300 Megohm, bei Freileitungen erachtet man 5—10 Megohm als gute Werte.

Fünftens ist ein Verlust an Stromenergie durch Wirbelströme und Induktion in Nachbarleitungen, sowie durch Hysteresis in Eisendrähten oder eisenarmierten Spulen zu berücksichtigen. Diese Verluste wirken wie eine Vermehrung des ohmischen Widerstandes der Leitung und wachsen sehr stark mit der Frequenz der Schwingungen.

Diese Umstände bedingen, daß die in eine sehr lange Telephonleitung hineingesandte Wechselstromwelle eine starke Dämpfung erfährt. Bezeichnen wir den Strom mit $i$, die zyklische Periodenzahl mit $\omega$, die Zeit mit $t$ und die Länge der Leitung, vom abgehenden Ende gerechnet, mit $x$, so ist die Strom-

stärke näherungsweise von der Form

$$i = J_0 \cdot \sin \omega t \cdot e^{-\beta x} \cdot \sin \gamma x \quad .$$

Darin ist $\beta$ die Dämpfungskonstante der Leitung, $\gamma$ die die Wellenlänge charakterisierende Größe. Die Größen $\beta$ und $\gamma$ sind Funktionen des kilometrischen Widerstandes $R$, der kilometrischen Kapazität $C$ und Selbstinduktion $L$, der Ableitung und des Wirbelstromverlustes.

Berücksichtigt man nur die Größen $C$ und $R$, so reduziert sich der Ausdruck für $\beta$ auf die einfache Form

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega C R}{2}} \quad .$$

Man erkennt, daß das Produkt Widerstand mal Kapazität eine charakteristische Größe für die Leitung ist. (Sogenanntes „KR-Gesetz" von PREECE.)

Es ergibt sich weiter aus der vollständigen Theorie dieser Erscheinungen, daß die Selbstinduktion der Leitung die Dämpfungskonstante vermindert, also die Übertragung der Telephonströme erleichtert. Dies war lange bekannt, ohne daß man den richtigen Weg für die technische Ausnutzung dieses Resultates erkannte. Es war das große Verdienst des Amerikaners Professor PUPIN, das Mittel hierfür theoretisch aufgefunden und seine Anwendbarkeit experimentell erwiesen zu haben. Die Dämpfungskonstante einer Leitung wird vermindert, wenn man eine große Anzahl von Selbstinduktionsspulen in die Telephonleitung einschaltet — jedoch nur, sofern die Spulen derart verteilt sind, daß auf jede halbe Wellenlänge der Stromwelle mehrere Spulen entfallen. Sind dagegen die Spulen in wesentlich geringerer Anzahl vorhanden, so wirken sie gewissermaßen reflektierend auf die Stromwellen und schwächen die Übertragung. Hinsichtlich des Wirbelstromverlustes und der Ableitung müssen hierbei auch gewisse Bedingungen erfüllt sein, sonst kommt die günstige Wirkung der Selbstinduktion nicht zur Geltung (BREISIG).

Nach PUPINS Verfahren sind in den letzten Jahren zahlreiche Telephonleitungen konstruiert worden, bei denen eine vorzügliche Wirksamkeit dieser sogenannten Induktanzspulen beobachtet worden ist. Man erreicht jetzt mit sehr viel dünneren Drahtleitungen als bisher den gleichen Wirkungsgrad der telephonischen Übertragung.

Über die sehr interessanten Einzelheiten der Theorie siehe:

WIETLISBACH, Lehrbuch der Telephonie 1899. — PUPIN, Transactions of the American Institute of electrical Engineers 1899, 1900. — F. BREISIG, Elektrotechn. Zeitschr. 1902. — F. DOLEZALEK u. A. EBELING, Elektrotechn. Zeitschr. 1903. — L. RELLSTAB, Phys. Zeitschr. 1903.

## Telephonische Meßtechnik.

Nur kurz soll an dieser Stelle auf einige Meßmethoden eingegangen werden, welche speziell in der Fernsprechtechnik zur Untersuchung der telephonischen Apparate und Leitungen Anwendung finden. Auf die allgemeine Bedeutung des Telephons als Nullinstrument in Brücken- und Differentialschaltungen, welche bei den verschiedensten physikalischen Meßmethoden zutage tritt, sei hier nur verwiesen.

Die Intensität der Telephonströme messend zu verfolgen, bereitet insofern große Schwierigkeiten, als es sich ja beim Sprechen um ganz unregelmäßige, von langen Zwischenräumen unterbrochene Wellenserien handelt. Immerhin kann man sich die Aufgabe stellen, den Mittelwert des Quadrates der Stromstärke innerhalb einer bestimmten Zeit zu ermitteln, also diejenige Größe, die in der Technik als effektive Stromstärke bezeichnet wird. Für die Messung derselben kommen in Betracht Spiegeldynamometer, Dynamobolometer, Elektrometer und Thermoelemente, also im wesentlichen dieselben integrierenden Instrumente, welche auch bei der Untersuchung HERTZscher Schwingungen Anwendung ge-

funden haben. Da die zu messende Wirkung dem Quadrate der Stromstärke proportional ist, so versagen diese Methoden fast alle, wenn die Intensität des Stromes wesentlich unter die Größenordnung eines Milliampere herabgeht. Als das empfindlichste Instrument dieser Art kann gegenwärtig wohl eine von Duddel angegebene Anordnung angesehen werden, bei welcher ein überaus feiner Heizdraht, der von dem zu messenden Telephonstrom durchflossen wird, in unmittelbarster Nähe eines beweglich aufgehängten, an die Spule eines Deprez-Galvanometers angeschlossenen Thermoelementes angebracht ist. Die Strahlung des Heizdrahtes erwärmt dann die Lötstelle des Thermoelementes, welche einen schwachen Gleichstrom erzeugt, der eine Spulendrehung hervorbringt.

Das optische Telephon von Max Wien (Ann. d. Phys. 44. 681 und 42. 593) ist ein als Meßinstrument ausgebildetes Telephon, dessen Membranbewegung auf einen Spiegel übertragen wird. Fällt ein schmales Lichtbündel auf diesen Spiegel, so wird das reflektierte Strahlenbündel durch die schnellen Vibrationen verbreitert erscheinen, diese Verbreiterung ist ein Maß der Maximalamplitude des schwingenden Systems. Dieses Instrument mißt also eine Größe, welche der Stromstärke der Schwingungen in erster Annäherung direkt proportional ist.

Wesentlich genauere Messungen lassen sich erzielen, wenn man an Stelle des natürlichen Sprechstromes künstlich und regelmäßig erzeugte Ströme substituiert, die hinsichtlich ihrer Intensität und Frequenz den Sprechströmen etwa gleichkommen. Dies empfiehlt sich zum Beispiel, wenn man den Wirkungsgrad der Übertragung auf einer telephonischen Linie prüfen will. Man erzeugt dann zweckmäßigerweise konstante Wechselströme etwa von 200, von 500, von 800, von 1000 und von 1500 sekundlichen Perioden und untersucht die Übertragung jeder einzelnen dieser Schwingungsarten.

Die Erzeugung derartiger Schwingungen zu Meßzwecken erfolgt am besten mittels der zuerst wohl von Max Wien (Ann. d. Phys. 4. 425. 1901) methodisch ausgebildeten Wechselstromsirene; dieselbe besteht aus einer von einem Motor konstant angetriebenen Eisenscheibe, deren Umfang zahnradartig geteilt ist. Gegenüber den Zähnen der Scheibe sind feststehend angeordnet Elektromagnete, welche durch permanente Magnete oder durch eine Gleichstromspeisung polarisiert sind. Indem die Zähne der rotierenden Scheibe den magnetischen Schluß dieser Elektromagnetkreise abwechselnd verbessern und verschlechtern, werden Schwankungen des magnetischen Flusses erzeugt, welcher in den Spulen Wechselstrom induziert. Die Sirene für telephonische Meßzwecke ist von Dolezalek vervollkommnet worden.

Von Wichtigkeit ist es, ganz reine Sinusschwingungen zu erhalten, da man meist nur mit einer Frequenz arbeiten will; dies kann bis zu einem gewissen Grade durch die Form der Zähne der rotierenden Scheibe erreicht werden. Sicherer ist es, den von der Sirene erzeugten Strom zuerst in einen auf die Frequenz der Maschine abgestimmten besonderen Schwingungskreis zu leiten und den Meßstrom erst diesem Schwingungskreise durch Transformation zu entnehmen. Hierbei werden alle nicht mit der Grundfrequenz übereinstimmenden Oberschwingungen so stark gedämpft, daß der dem Resonanzkreise entnommene Meßstrom als rein sinusförmig angesehen werden kann (M. Wien).

Die bereits auf Seite 794 erwähnten Mikrophonsummer eignen sich, wie F. Dolezalek gezeigt hat, besonders zu Meßzwecken an Telephonapparaten, da sie sehr reine Sinusschwingungen ergeben. Alle anderen Summer, Saitenunterbrecher usw. mit metallischen Kontakten, an welchen sehr plötzlich Stromschließungen und Öffnungen stattfinden, eignen sich wegen der auftretenden Oberschwingungen zu telephonischen Meßzwecken nur dann, wenn diese Oberschwingungen durch besondere Resonanzkreise wieder eliminiert werden.

Eine völlig exakte Messung der elektrischen Schwingungen von der Größenordnung der Sprechströme ist erreichbar durch ein Instrument von A. Franke,

welches unter dem Namen „Wellenmesser“ beschrieben worden ist. Dasselbe verwirklicht gewissermaßen das Prinzip der mit dem Kompensator erzielbaren Spannungsvergleichung für Wechselströme höherer Frequenz. Denken wir uns zwei Wechselstromsirenen von der gleichen Achse angetrieben und die stromempfangenden Elektromagnete verschiebbar angeordnet, so wird in beiden Elektromagneten ein Wechselstrom von derselben Frequenz erzeugt, die Phase beider Ströme kann aber durch Verschiebung der Elektromagnete längs des Umkreises des Ankerrades beliebig verschoben werden. Durch Änderung des Abstandes des Elektromagneten von dem Zahnradanker kann außerdem die Intensität des Wechselstromes in beliebig weiten Grenzen variiert werden. Denkt man sich den Magneten der einen Sirene fest angeordnet, den der anderen Sirene durch zwei Mikrometerverschiebungen hinsichtlich Phase und Intensität verstellbar, so kann man dem zweiten Elektromagneten einen Wechselstrom entnehmen, der zur Kompensation des dem ersten Elektromagneten entnommenen Wechselstromes dienen kann, welche Veränderung auch immer dieser letztere durch irgendwelche Leitungsanordnungen oder Apparate hinsichtlich seiner Intensität oder Phase erlitten haben mag. Sendet man daher den aus dem ersten Elektromagneten entnommenen Strom in irgend ein kompliziertes Leitungssystem hinein, und beabsichtigt man, den am anderen Ende der Leitung durch irgendwelche Apparate empfangenen Strom zu messen, so kann dieses in der Weise geschehen, daß man die am Empfangsapparate auftretende elektromotorische Kraft des Wechselstromes durch eine variable elektromotorische Kraft, welche man dem zweiten Elektromagneten entnimmt, kompensiert, wobei ein Telephon als Nullinstrument dienen kann. Nach dieser Methode sind interessante Versuche an telephonischen Fernleitungen von F. Breisig ausgeführt worden (Elektrotechn. Zeitschr. 1902).

Eine ideale Meßmethode für Sprechwechselströme müßte den gesamten zeitlichen Verlauf jedes einem gewissen Sprachlaut entsprechenden Stromes ermitteln lassen. Die ersten umfangreichen Versuche, die den Sprachlauten entsprechenden Schwingungsserien aufzuzeichnen, stammen von Fröhlich (Elektrotechn. Zeitschr. 65. 1889). Neuerdings scheint das Saitengalvanometer (von Einthoven, vereinfachte Form von Edelmann) der für diesen Zweck geeignetste Oszillograph mit photographischer Registrierung zu sein.

# Die Theorien der elektrischen Erscheinungen.

Von L. GRAETZ.

(Die Literatur ist bis 1906 berücksichtigt.)

## A) Allgemeine Betrachtungen.

### § 1. Fernkräfte und vermittelte Kräfte.

**1.** Seitdem die Kenntnis der elektrischen und magnetischen Erscheinungen bis zu der Entdeckung der Induktionserscheinungen vorgedrungen war, ist dieses Gebiet in theoretischer Hinsicht der Schauplatz prinzipieller Streitfragen geworden. Eine ganze Anzahl von Tatsachen ließen sich durch ganz verschiedenartige Auffassungen nahezu gleich gut erklären, so daß durch sie eine Entscheidung nicht geboten werden konnte, und nur weitere Erfahrungen konnten das Übergewicht der einen über die andere Anschauung begründen.

Die eine dieser prinzipiellen Streitfragen ist die Frage, ob die mechanischen Kräfte, die wir in einem elektrostatischen oder elektromagnetischen Felde auftreten sehen, direkte Fernkräfte oder ob sie vermittelte Kräfte sind. Vor MAXWELL suchte man alle Erscheinungen auf Fernkräfte zurückzuführen, erst FARADAY und nach ihm MAXWELL versuchten alle auftretenden Wirkungen auf Vorgänge in der unmittelbaren Nachbarschaft derselben zurückzuführen. Eine Folge der zweiten Auffassung ist die, daß stets ein Medium angenommen werden muß, in welchem die unsichtbaren Vorgänge, die zur Übermittlung der sichtbaren Wirkung von einer Stelle zu einer anderen dienen, ihren Sitz haben und eine weitere Folge ist, daß diese Wirkungen Zeit zu ihrer Fortpflanzung brauchen. Seitdem durch HERTZ diese letztere Folgerung experimentell bewiesen ist, werden die Fernkräfte in der Elektrizitätslehre als scheinbare angesehen und die alten Theorien, die diese Fernkräfte als wirkliche ansehen, haben nur mehr die Bedeutung, daß sie in gewissen Gebieten die tatsächlichen Gesetze dieser Kräfte richtig und in möglichst einfacher Form geben. Indes muß gesagt werden, daß der Begriff der vermittelten Kräfte kein ganz klarer ist. Er hängt unmittelbar mit der Vorstellung kontinuierlicher oder diskreter Verteilung der Materie resp. des kraftvermittelnden Mediums zusammen. Eine innere Bewegung eines wirklich kontinuierlichen Stoffes, also eine Bewegung, durch welche nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Spannungen oder Drucke ausgeübt werden, dürfte kaum vorstellbar sein. Alle Dilatationen und Kompressionen, Druck und Zugwirkungen verlangen, wie es scheint, diskrete Teile. Wenn man aber diskrete Anordnungen für das kraftvermittelnde Medium zugibt (für die Materie ist das lange die allein geltende Vorstellung, während man für den Äther bisher noch meistenteils Kontinuität annimmt), dann sind nur zwei Möglichkeiten vorhanden, entweder die diskreten Teile sind und bleiben getrennt, dann sind die Kräfte, die zwischen ihnen auftreten, auch Fernkräfte, wenn sie auch nur auf sehr geringe Entfernung wirken, oder aber die diskreten Teile sind nicht in dauernder Trennung, sondern sie bewegen sich und stoßen aneinander, wie es die kinetische Gastheorie annimmt. In diesem letzteren Fall allein scheinen alle Schwierigkeiten gehoben zu sein, und wer von vermittelten Kräften spricht, wird schließlich dem ver-

mittelnden Medium die Eigenschaften der diskreten Anordnung und der Bewegung dieser diskreten Teile zuschreiben müssen. Indes ist heute die Fragestellung noch nicht ganz bis zu dieser Grenze vorgedrungen, vielmehr wird dem vermittelnden Medium noch allgemein, wenn man überhaupt über dasselbe Spekulationen machen will, kontinuierlicher Zusammenhang beigelegt, was eine mehr summarische, nicht ins einzelne gehende, also die Feinheiten verwischende Betrachtung ist.

## § 2. Stoff und Feld.

**2.** Die zweite der oben erwähnten prinzipiellen Streitfragen ist folgende. Die Erscheinungen der Elektrostatik und der elektrischen Ströme lassen sich einfach so auffassen, als ob dasjenige, was wir Elektrizitätsmenge nennen, etwas sei, was einem Stoff, einer Materie ähnlich ist. Es entspricht in vieler Beziehung einem gewöhnlichen, chemischen Stoff, es hat manche Eigenschaften mit ihm gemein; dieser Stoff, resp. diese zwei Stoffe, da positive und negative Elektrizität entgegengesetzte Eigenschaften haben, können im Gleichgewicht in bestimmter Weise verharren und sie können sich bewegen. Gleichgültig, ob man die Kräfte zwischen ihnen als Fernkräfte oder vermittelte Kräfte ansieht, die Annahme der stofflichen Natur der Elektrizität ist in den eben erwähnten Gebieten eine brauchbare und natürliche Hypothese. Andererseits aber besitzen elektrische Ströme ein magnetisches Feld, und in dieser Hinsicht weicht die Elektrizität ganz wesentlich ab von jedem sonst bekannten Stoff. Daher wird in der MAXWELLschen Theorie die stoffliche Natur der Elektrizität, trotz allen Anscheines, ganz geleugnet. Bei ihr ist der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Verschiebungen eines kontinuierlichen Mediums das allgemein gültige Prinzip und unter speziellen Umständen können diese Verschiebungen so angeordnet sein, daß ihre Eigenschaften den Eindruck eines Stoffes, eines stofflichen Trägers machen. Die Elektrizitätsmengen sind in dieser Theorie kein Stoff, sondern Konvergenz- oder Divergenzstellen von Kraftlinien. Dieser Teil ist der unbefriedigendste der MAXWELLschen Theorie. Insbesondere gibt die MAXWELLsche Theorie gar keine Rechenschaft über die Erscheinungen und Gesetze der Elektrolyse, während diese nach der Stofftheorie sich in sehr einfacher Weise zusammenfassen lassen, nämlich so, daß dieser Stoff, die „Elektrizität", in diskrete Teile, Atome, geteilt erscheint, welche unabhängige Existenz besitzen und welche mit der gewöhnlichen Materie in bestimmte atomistische Verbindungen treten können. Diese Vorstellung der Elektrizitätsatome hat sich nun weiter als sehr fruchtbar erwiesen im Gebiet der Theorie der Kathodenstrahlen, überhaupt im Gebiet der Gasentladungen, wie auch im Gebiet der Becquerel-Strahlen, bei den magneto-optischen Erscheinungen usw. Und zwar lassen sich die Erscheinungen dieser Gebiete qualitativ und auch quantitativ zusammenfassen, indem man die Elektrizität in kleinste Teile geteilt annimmt, Elektronen, positive oder negative, welche mit der gewöhnlichen Materie atomistische Verbindungen eingehen können, welche aber auch (nach der bisherigen Kenntnis nur die negativen) unter Umständen frei existieren und sich frei bewegen können. Unter der Annahme der „Divergenz von Kraftlinien" sind die erwähnten Erscheinungen nicht wohl einfach zusammenzufassen.

**3.** Diese zwei verschiedenen Vorstellungsreihen, von denen die letztere eine schärfere Umgrenzung der Vor-MAXWELLschen Anschauungen, die erstere die MAXWELLsche ist, verknüpft nun die neuere Elektronentheorie, wie sie insbesondere von H. A. LORENTZ[1] und von WIECHERT[2] aufgestellt wurde. In dieser werden die Elektronen als selbständige, für sich bestehende Individuen betrachtet,

[1] H. A. LORENTZ, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinung in bewegten Körpern. Leyden 1893. — [2] E. WIECHERT, Abh. d. phys.-ökon. Ges. zu Königsberg 1894. 4; 1896. 1; Wied. Ann. **59**. 283. 1896.

welche auch selbständige Bewegung haben können. Andererseits wird der Äther als vorhanden angenommen, der in bestimmter Weise auch da elektrische und magnetische Verschiebungen zeigt, wo keine Elektronen vorhanden sind. Und endlich werden die Elektronen mit dem Äther in einen bestimmten Zusammenhang gebracht, wodurch ruhende und bewegte Elektronen ihr Feld erhalten, wodurch also die Felderscheinungen der Elektrizität hervorgebracht werden.

## § 3. Übersicht der Theorien.

**4.** Die Theorien der Elektrizität vor MAXWELL nahmen die Elektrizität als etwas Stoffliches an und erklärten ihre Wirkungen als Fernwirkungen. Die MAXWELLsche Theorie dagegen und die Elektronentheorie, die heute allein von Bedeutung sind, betrachten alle Wirkungen der Elektrizität als vermittelte. Die Elektronentheorie dagegen hat wieder vielfache Ähnlichkeit mit den Vor-MAXWELLschen Theorien, weil sie die Elektrizität selbst als einen Stoff annimmt, was die MAXWELLsche Theorie nicht tut. Es werden daher die alten Vorstellungen, welche man sich vor MAXWELL gebildet hatte, in der Elektronentheorie wieder angewendet.

**5.** Was man aber nach dem Vorgang von HERTZ[1] jetzt unter der „MAXWELLschen Theorie" versteht, ist etwas Allgemeineres. Nach HERTZ ist die MAXWELLsche Theorie das System der MAXWELLschen Differentialgleichungen und als solches ist sie unabhängig von jeder Vorstellung über den mechanischen Zusammenhang der in ihr auftretenden Größen, unabhängig von jedem Bild, das man sich von den Erscheinungen machen will, also auch unabhängig von der Annahme eines Äthers, ja auch unabhängig von der Annahme oder Ablehnung der Elektronen. Man kann in dem Fall der ruhenden Körper die Elektronentheorie als einen speziellen Fall der MAXWELLschen Theorie ansehen, speziell insofern, als sie zwar die MAXWELLschen Gleichungen ebenfalls besitzt, den in diesen auftretenden Größen, Elektrizitätsmengen, Dielektrizitätskonstante, Leitungsfähigkeit aber eine spezielle Veranschaulichung unterlegt.

Anders ist es mit der Theorie der Elektrizität in bewegten Körpern. In diesen sind die MAXWELLsche Theorie, wie sie von HERTZ explizite dargestellt wurde, die Elektronentheorie von LORENTZ (in der ursprünglichen Form) und die Theorie von COHN auch inhaltlich verschieden.

Für ruhende Körper sind also die tatsächlichen Zusammenhänge, wenn man von dem permanenten Magnetismus und der Dispersion absieht, ohne daß irgend welche besondere Vorstellungen notwendig sind, durch die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen gegeben, für bewegte Körper ist auch der definitive tatsächliche Zusammenhang zum Teil noch unbestimmt.

**6.** Alle Theorien, welche nur tatsächliche Zusammenhänge geben, können als phänomenologische bezeichnet werden, im Gegensatz zu den mechanischen, welche spezielle mechanische Bilder von diesen Zusammenhängen geben. Die MAXWELLsche Theorie im HERTZschen Sinne ist danach eine phänomenologische. Die Elektronentheorie bildet auch hierbei einen Übergang, indem sie, durch die Annahme bestimmter, für sich bestehender Elektronen, schon eine spezielle Vorstellung einführt. Die Theorie von COHN ist eine rein phänomenologische.

Die phänomenologischen Theorien beschränken sich also rein auf die Darstellung der tatsächlich beobachteten oder beobachtbaren Erscheinungen. Da diese immer an materiellen Körpern gewonnen sind, da alle beobachtbaren Erscheinungen an materiellen Körpern auftreten, so braucht diese Methode in dieser strengen Form gar keine Vorstellungen von unsichtbaren Dingen, die den Erscheinungen erst untergelegt werden, wie von Elektrizitätsmenge, Magnetismusmenge, Äther u. dgl. Sie definiert einfach aus den beobachteten Gesetzen die-

[1] H. HERTZ, Ausbreitung der elektrischen Kraft 23. 1892.

jenigen von diesen Begriffen, welche sie zur einfachen Darstellung der Erscheinungen braucht, ohne irgend welche speziellen Vorstellungen diesen Begriffen zugrunde legen zu müssen.

Indes ist eine ganz strenge Durchführung dieser Methode nicht möglich. Denn da die beobachtbaren Erscheinungen immer an ausgedehnten Körpern auftreten, also je nach der Form dieser Körper von verschiedener Größe und auch Art sind (Translationskräfte, Drehungsmomente), so muß man, um nicht jeden Fall einzeln zu behandeln, sondern um alle Fälle einer Erscheinungsklasse zusammenzufassen, auf die Elemente, auf die kleinsten materiellen Teile zurückgehen und insofern geht man auch schon über die reine Erfahrung hinaus. Das wesentliche ist aber bei dieser Methode, daß sie ohne Rücksicht auf mechanische Möglichkeiten die Zusammenhänge einfach aus der Erfahrung entnimmt.

7. Die mechanischen Theorien suchen umgekehrt für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen eine vollständige mechanische Erklärung zu geben. Sie stellen ein mechanisches Körpersystem auf, dessen einzelne Teile in angebbarer Weise miteinander zusammenhängen und sie identifizieren gewisse Zustände oder Bewegungen desselben mit entsprechend elektrischen oder mechanischen Größen. Natürlich muß das System so gewählt sein, daß wenigstens zum Teil in ihm die Zustände und Bewegungen dieselben Zusammenhänge zeigen, wie es erfahrungsgemäß die elektrischen und magnetischen Erscheinungen tun. Diese Methode stellt also ein mechanisches Bild der elektromagnetischen Erscheinungen auf. Sie begnügt sich zu diesem Zwecke nicht, und kann sich nicht begnügen, mit den erfahrungsgemäß festgestellten Beziehungen, deren Ausdruck zum Teil nach der ersten Methode gewonnen wurde, sondern sie muß unsichtbare, unbeweisbare Zwischenglieder und Zwischenmedien supponieren, um ihr Ziel erreichen zu können, aber Zwischenmedien, denen sie möglichst die in der allgemeinen Mechanik als gültig angenommenen Eigenschaften beilegt. Diese Methode greift also weit über die unmittelbare Erfahrung hinaus. Da sich dieselben tatsächlichen Zusammenhänge durch eine Reihe von verschiedenen Mechanismen erzeugen lassen — schon bei unseren gewöhnlichen Maschinen können wir gewissen Maschinenteilen bestimmte Bewegungen durch verschiedene Mittel, Seile, Kegelräder, Exzenter, auferlegen —, so kann es eine Reihe von verschiedenen Bildern geben, welche die elektrischen und magnetischen Erscheinungen mechanisch darstellen. Jedes dieser Bilder wird nun außer den bekannten noch andere Zusammenhänge zeigen müssen oder können, so weit es nämlich über die bloße Erfahrung hinausgeht. Zum Teil werden diese neuen Zusammenhänge über den Wert der einzelnen Bilder entscheiden lassen, zum Teil werden sie nur die größere oder geringere Einfachheit derselben zu klassifizieren gestatten.

8. Der Standpunkt der phänomenologischen Theorien ist derjenige der klassischen Arbeiten von Green, Ampère, F. Neumann, W. Thomson, W. Weber, Kirchhoff, Helmholtz. Die Grundelemente, die hierbei ins Auge gefaßt sind, sind Elektrizitätsmengen und Stromelemente. Auch die Maxwellsche Theorie in der Form, wie sie Hertz ihr gegeben hat, gehört zu dieser Klasse. Hier spielen allerdings nicht mehr die Elektrizitätsmengen und Stromelemente die Rolle der Grundelemente, sondern die elektrischen und magnetischen Kräfte. Die Maxwellsche Theorie, als phänomenologische genommen, ist umfassender als die alten, weil sie auch die Tatsache enthält, die erst durch Hertz bewiesen, obwohl schon vorher von Maxwell erkannt wurde, daß die elektrischen Wirkungen sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Die Theorien, die vor Maxwell aufgestellt wurden, sind daher naturgemäß unvollständig. Die Fernwirkungstheorie von Helmholtz, welche die älteren Theorien erweiterte, umfaßt zwar die Maxwellsche Theorie als speziellen Fall, sie beruht aber ganz auf der Vorstellung der Fernwirkungen.

Für den heutigen Stand der Physik kommt also als phänomenologische Theorie nur die MAXWELLsche Theorie in Betracht, soweit es sich um ruhende Körper handelt.

**9.** Die Einführung der Elektronen in die MAXWELLsche Theorie durch H. A. LORENTZ bietet einen Übergang von den phänomenologischen Theorien zu den mechanischen. Da sie eben den Elektronen selbst noch ein Feld zuschreiben muß, und der Zusammenhang zwischen der Bewegung der Elektronen und dem Feld, ohne mechanische Begründung, rein phänomenologisch angenommen wird, so gehört sie zum Teil noch in die Klasse der phänomenologischen. Immerhin aber ist sie durch die Annahme von Elektronen selbst schon mechanisch.

Die Annahme von individuellen Elektronen kann als eine Umbildung der alten Vorstellung der elektrischen Fluida angesehen werden. Jedoch enthält sie bedeutend mehr als jene. Die Fluida waren besondere Materien, deren Teile durch wirkliche Fernkräfte aufeinander wirken. Den Elektronen werden dagegen keine Fernkräfte beigelegt. Die Elektronen brauchen, um die Wirkungen in die Ferne, die sie tatsächlich haben, auszuüben, als vermittelndes Medium den Äther, der bei den alten Fluida keine Rolle spielte. Die Teilung des elektrischen Fluidums in diskrete Teile, wie die Elektronentheorie sie annimmt, scheint denselben Fortschritt zu involvieren, wie ihn die Atomistik in der Untersuchung und Auffassung der körperlichen Materie hervorgebracht hat.

## B) Die Vor-MAXWELLschen Theorien.

### § 4. Die Fluidumtheorien.

**10.** Eine große Anzahl elektrischer Erscheinungen läßt sich durch die Annahme verständlich machen, daß dasjenige, was wir Elektrizität nennen, ein sehr feiner, leicht beweglicher Stoff sei, der so geringe Masse hat, daß sein Gewicht mit unseren Methoden nicht meßbar ist, der also als frei von Gravitation angesehen werden kann, d. h. daß die Elektrizität ein ganz oder fast gewichtsloses Fluidum sei. Dabei aber verlangt der polare Unterschied zwischen positiver und negativer Elektrizität zunächst sofort zwei solche Fluida. Ein unelektrischer Körper ist danach ein solcher, welcher gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität (gebunden) enthält. Diese Mengen müssen so groß angenommen werden, daß es nicht möglich ist, einem Körper die eine Art Elektrizität ganz zu entziehen. Diese Hypothese, die *Hypothese zweier Fluida*, rührt von SYMMER (1759) her[1]. Einen Körper positiv elektrisieren, heißt danach eine gewisse Menge positiven Fluidums von einem anderen Körper auf ihn übertragen, oder eine gewisse Menge negativen Fluidums ihm wegnehmen und auf einen anderen Körper überführen. Von den kleinsten Teilchen dieser Fluida wird zunächst angenommen, daß sie sich nach dem COULOMBschen Gesetz abstoßen oder anziehen. Wenn zwei Körper $A$ und $B$ zunächst neutral sind und man entzieht dem Körper $A$ $P$ Einheiten positiver Elektrizität und bringt sie nach $B$, entzieht ebenso dem Körper $B$ $N$ Einheiten negativer Elektrizität und bringt sie nach $A$, so ist das Resultat, daß der Körper $B$ $P+N$ Einheiten positiver Elektrizität frei besitzt, daß dagegen seine gebundene Elektrizität sich um $N$ Einheiten von $+$ und $-$ Elektrizität vermindert hat. Entsprechendes gilt für $A$. Wenn man dagegen, was zu demselben Resultat führt, $P+N$ positive Einheiten von $A$ nach $B$ führt, so ist Körper $B$ ebenso positiv elektrisch, aber seine gebundene Elektrizität hat sich nicht vermindert. Bringt man drittens $P+N$ negative Einheiten von $B$ nach $A$, so ist die gebundene Elektrizität von $B$ um $P+N$ positive und negative Einheiten vermindert. Die Hypothese setzt also voraus, daß bei

[1] J. PRIESTLEY, Geschichte d. Elektrizität 166 ff. 1767.

jeder Elektrisierung auch die Menge der gebundenen Elektrizität geändert werden kann. Man kann die Tatsache, daß sich das größere oder geringere Quantum gebundener Elektrizität durch nichts kenntlich macht, nur so verstehen, daß man das absolute Quantum gebundener Elektrizität in jedem, auch dem kleinsten, Körper als ungeheuer groß ansieht. Auch in der Elektronentheorie, welche dieselben Vorstellungen benutzt, muß die Zahl der Elektronen selbst in den kleinsten Mengen wägbarer Körper als sehr groß angesehen werden, was nach dem Vorgang der Gastheorie keine erhebliche Schwierigkeit hat.

**11.** Eine andere Hypothese ist von FRANKLIN[1] aufgestellt worden, die Hypothese eines einzigen Fluidums. Das eine von den beiden obigen Fluida wird beibehalten, z. B. das negative. Ein Körper ist dann negativ, wenn er mehr von diesem Fluidum enthält als im normalen Zustande, positiv, wenn er weniger enthält. Man muß bei dieser Hypothese auch die wägbare Materie mit in Rechnung ziehen und hat dann eigentlich die Hypothese zweier Fluida, nur daß das eine, etwa das positive, durch die Materie ersetzt ist oder mit der Materie fest verbunden ist. Zwei Teilchen des Fluidums stoßen sich nach dem COULOMBschen Gesetz ab, ebenso zwei Teilchen der Materie. Dagegen ziehen sich Fluidumteilchen und Materienteilchen nach demselben Gesetz an. Dabei kann man, um die gewöhnliche Gravitation mit zu erklären, annehmen, daß die Anziehung zwischen Fluidum und Materie *caeteris paribus* größer ist als die Abstoßung zwischen Fluidum und Fluidum, oder zwischen Materie und Materie. Ein zusammengesetztes Element, aus einem Körperteilchen und Fluidum bestehend, zieht daher ein ebensolches Element an. Daher erklärt sich die gewöhnliche Attraktion (eine ähnliche Annahme macht die Gravitationstheorie von H. A. LORENTZ s. unten Nr. 157). Die normale Ladung mit Fluidum hat ein Körper dann, wenn sein Fluidum ein außerhalb des Körpers befindliches Fluidumteilchen ebenso stark abstößt, wie seine Materie es anzieht. MAXWELL[2] macht darauf aufmerksam, daß nach dieser Hypothese sehr viel elektrisches Fluidum zur normalen Ladung eines Gramms Materie gehöre. Denn 1 g Gold, zu einem Blatt von 1 qm ausgewalzt, kann mindestens noch 60000 elektrostatische Einheiten negativer Elektrizität fassen. Seine normale Ladung muß also noch viel größer sein. Übrigens ändert keine noch so hohe Elektrisierung das Gewicht eines Körpers um meßbare Beträge.

## § 5. Elektrostatik und elektrische Ströme.

**12.** Die beiden Hypothesen erklären an sich die rein elektrostatischen Erscheinungen gleich gut[3]. Die Ladung eines Körpers durch Mitteilung von Elektrizität beruht einfach auf einer Zuführung resp. Wegnahme von Fluidum. Die Influenzwirkungen auf einem neutralen Leiter kommen durch die fernwirkenden Kräfte der Fluida zustande. Die Eigenschaften der Dielektra werden durch Trennung der Elektrizitäten in den Molekülen der dielektrischen Körper erklärt, was noch in verschiedener Weise geschehen kann, wie in Bd. 4 dieses Handbuchs S. 78 ff. ausgeführt ist. Die ganze ältere mathematische Theorie der Elektrostatik spricht stets von solchen Elektrizitätsteilchen, ohne daß jedoch ihre Folgerungen mit dieser Hypothese fallen. Denn im Grunde beruht sie nur auf dem erfahrungsmäßig bekannten COULOMBschen Gesetz. Zur Erklärung der Kontaktelektrizität wird nur noch die Erfahrungstatsache hinzugenommen, daß an der Grenzfläche zweier heterogener Körper eine Kraft auftritt, welche die Elektrizitäten scheidet. Diese läßt sich durch eine verschieden starke Anziehung der verschiedenen Körpermaterien auf die Elektrizität erklären[4]. Der Unterschied von

---

[1] B. FRANKLIN, s. PRIESTLEY, a. a. O. — [2] CL. MAXWELL, Elektr. u. Magnetismus, 1. § 37. — [3] Bei der translatorischen Bewegung von Strömen ergeben sich dagegen Unterschiede, siehe A. FÖPPL, Wied. Ann. 27. 410. 1886. — E. L. NICHOLS und W. S. FRANKLIN, Sill. Journ. (3) 37. 103. 1889. — [4] H. v. HELMHOLTZ, Gesamm. Abhandl. 1. 858.

Leitern und Nichtleitern wird auf eine freie Beweglichkeit des Fluidums in den ersten, und ein Festhaften derselben an den Molekülen in den zweiten geschoben.

**13.** Was den elektrischen Strom, der dem OHMschen Gesetz folgt, betrifft, so legt zunächst die Tatsache, daß der Strom eine Richtung hat (was sich speziell aus den elektrolytischen Erscheinungen ergibt), die Annahme nahe, daß das elektrische Fluidum selbst in den Leitern strömt. Da aber anderseits die Theorie zeigt[1], daß im Innern eines konstanten Stromes keine freie Elektrizität vorhanden sein kann, so folgt notwendig bei der Theorie zweier Fluida, daß die beiden Elektrizitäten in gleichen Beträgen nach entgegengesetzten Seiten durch jeden Querschnitt fließen. Der zuerst kompliziert erscheinende Mechanismus einer solchen Doppelbewegung wird anschaulicher gemacht durch die elektrolytische Leitung, bei der die Elektrizität an den Ionen haftet und sich mit ihnen bewegt. Bei dieser geht aus den Versuchen von HITTORF und anderen hervor, daß die Ionen sich tatsächlich in einer solchen Doppelbewegung befinden, daß die Anionen nach der einen Seite, die Kationen nach der anderen Seite im Stromkreis wandern. Der früher oft gegen die dualistische Theorie erhobene Einwand infolge der Unverständlichkeit dieser Doppelbewegung ist also nicht stichhaltig, allerdings nur dann nicht, wenn man die Fluida nicht als kontinuierliche Körper, sondern als in diskrete Teile geteilt auffaßt.

Die KIRCHHOFFsche Theorie, die für das Innere eines konstanten Stromes keine freie Elektrizität ergibt, beruht übrigens auf einer Reihe von mechanischen Grundlagen, die BUDDE[2] erörtert hat.

**14.** Da ein elektrischer Strom in einem Leiter in einer Doppelbewegung der beiden Elektrizitäten besteht, so ist von vornherein nicht zu sagen, ob die Bewegung einer einzigen Elektrizität durch Konvektion, also mit ihrem Träger, dieselben Wirkungen hat wie ein galvanischer Strom. Versuche darüber hat zunächst ROWLAND[3] angestellt, indem er zeigte, daß ein geladener Sektor einer Kreisscheibe bei der Rotation dieser Kreisscheibe auf eine Magnetnadel ebenso wirkt wie ein im Kreise fließender Strom. Ähnliche Versuche hat LECHER[4] mit negativem Erfolg wiederholt, dann aber wurden dieselben ausführlich von HIMSTEDT[5] und nochmals von ROWLAND und HUTCHINSON[6] mit unzweifelhaft bejahender Antwort von neuem angestellt. Es hat danach die konvektive Fortführung der Elektrizität einer Art dieselben elektromagnetischen Wirkungen wie ein elektrischer Strom[7]. Man kann aber natürlich aus dieser Tatsache nicht etwa schließen, daß nun tatsächlich in einem galvanischen Strom das elektrische Fluidum strömt.

**15.** Der Widerstand, den die Leiter einem elektrischen Strom entgegensetzen, wird in der einfachsten Weise als ein Reibungswiderstand aufgefaßt, den

---

[1] G. KIRCHHOFF, Gesamm. Abh., 49. — [2] E. BUDDE, Wied. Ann. **15**. 558. 1882. — S. a. A. LEDIEU, C. R. **95**. 619. 1882. — A. FÖPPL, Wied. Ann. **29**. 591. 1886; **31**. 306. 1887 — [3] H. A. ROWLAND, Pogg. Ann. **158**. 487. 1875. — [4] E. LECHER, Rep. d. Phys. **20**. 151. 1884. — [5] F. HIMSTEDT, Wied. Ann. **38**. 560. 1889; **40**. 720. 1890; s. W. C. RÖNTGEN, Berl. Ber. 1885. 198; Wied. Ann. **40**. 93. 1890. — [6] H. A. ROWLAND und C. T. HUTCHINSON, Phil. Mag. **27**. 445. 1889. — [7] Die Anzweiflung des ROWLANDschen Resultates durch V. CREMIEU hat eine große Anzahl von Arbeiten über die Konvektionsströme hervorgerufen, die aber alle das ROWLANDsche Resultat bestätigt haben, welchem Resultat sich schließlich auch CREMIEU anschloß. Die einschlägige Literatur ist folgende: V. CREMIEU, C. R. **130**. 1544; **131**. 578. 797. 1900. — H. A. WILSON, Phil. Mag. (6) **2**. 144. 319. 1901. — V. CREMIEU, ibid. 235. 1901. — A. POTIER, L'éclair él. **25**. 352. 1900. — V. CREMIEU, Journ. de phys. (3) **10**. 453. 1901; Ann. de chim. et phys. (7) **24**. 25. 85. 146. 1901; C. R. **132**. 327. 1108. — H. C. POCKLINGTON, Phil. Mag. (6) **1**. 325. 1901. — H. PENDER, ibid. (6) **2**. 179. 1901; **5**. 34. 1903.. — A. EICHENWALD, Phys. Zeitschr. **2**. 703. 1901; Drudes Ann. **11**. 1, 421, 872. 1903. — E. P. ADAMS, Phil. Mag. (6) **2**. 285. 1901; Phys. Zeitschr. **3**. 41. 1903. — A. RIGHI, N. Cim. (5) **2**. 223. 1901; Phys. Zeitschr. **3**. 409. 449. 1902. — F. HIMSTEDT, Drudes Ann. **13**. 100. 1904. — Abschließend: V. CREMIEU und H. PENDER, Phil. Mag. (6) **6**. 442. 1903.

etwa die Körpermoleküle der Bewegung des elektrischen Fluidums entgegensetzen. Bei den Elektrolyten, bei welchen sich die Elektrizitäten eben zugleich mit den körperlichen Atomen bewegen, muß dann der elektrische Widerstand direkt gleich dem Reibungswiderstand sein, oder die elektrolytische Reibung muß gleich der kapillaren Reibung sein. Nachdem schon lange Beziehungen zwischen elektrolytischem und Reibungswiderstand gefunden waren [1], hat F. KOHLRAUSCH [2] gezeigt, daß in der Tat, wenn man zu Schichten von molekularer Dicke übergeht, die kapillare Reibung von derselben Größenordnung ist wie die elektrolytische. Für den metallischen Leitungswiderstand dasselbe anzunehmen, würde direkt aussagen, daß der Widerstand der körperlichen Materie, welchen sie dem Strömen des Fluidums (das nach der Elektronentheorie in diskrete Atome geteilt ist) entgegensetzt, gleich dem Leitungswiderstand sei. Indes kann man sich auch andere Vorstellungen über die Natur des Leitungswiderstandes bilden.

So hat zuerst L. LORENZ [3] die bestechende Ansicht ausgesprochen, daß in jedem auch scheinbar homogenen Körper innere Diskontinuitäten vorhanden sind, welche Veranlassung zu thermoelektrischen Differenzen und dadurch zum Peltier-Phänomen geben. Durch diese würde aber, wie man sofort übersieht, einerseits in einem an sich widerstandslosen Material ein scheinbarer OHMscher Widerstand erzeugt werden, andererseits würde ein solcher Körper das WIEDEMANN-FRANZsche Gesetz befolgen müssen. Der Gedanke von LORENZ wurde später aber unabhängig von ihm, auch von OSTWALD [4] und LIEBENOW [5] gefunden und letzterer hat dieser Hypothese eine ausführliche Behandlung gewidmet.

Weniger anschaulich sind zunächst die Vorstellungen, welche einen elektrischen Strom stets mit einem Wärmestrom verknüpft annehmen. Diese Annahme ist zuerst von F. KOHLRAUSCH [6] gemacht worden, in anderer Weise auch von LIEBENOW [7]. Eine Veranschaulichung erhält sie durch die neuere Elektronentheorie der Metalle, welche unten (Nr. 125 f.) behandelt wird.

Man kann auch den spezifischen Widerstand der Leiter dadurch erklären, daß man die Leiter als Gemenge von vollkommen adielektrischen und dielektrischen Molekülen annimmt, von denen die ersteren absolut leiten [8].

**16.** Das OHMsche Gesetz setzt nun weiter die Intensität des Stromes in jedem Moment proportional der in diesem Moment wirkenden elektromotorischen Kraft. Wenn tatsächlich der Strom durch Strömung eines Fluidums hervorgebracht wird, so kann dieses Fluidum danach keine Trägheit besitzen, da sonst die Stromintensität nicht der augenblicklich herrschenden Kraft proportional wäre. Zu den wirkenden elektromotorischen Kräften muß man aber dabei auch die bei veränderlichem Strom etwa wirkenden Induktionskräfte hinzurechnen. Würden sich Abweichungen der so berechneten elektromotorischen Kräfte von den beobachteten ergeben, so würde das auf eine Trägheit der Elektrizität schließen lassen [9]. Diese Frage wurde von HERTZ [10] untersucht. Er zeigte, daß, wenn die Elektrizität träge Masse habe, daß dann die elektromotorische Kraft der Extraströme ebensowenig wie die Integralströme der fremden Induktion durch solche Trägheit beeinflußt werden können, daß dagegen die Integralintensität des Extrastromes (die durchgehende Elektrizitätsmenge) dadurch größer sein müsse, als sie ohne diese Annahme berechnet wäre. Wenn in der Volumeneinheit eines Leiters $\lambda$ Einheiten

---

[1] G. WIEDEMANN, Pogg. Ann. **99**. 230. 1851. — A. GROTRIAN, Pogg. Ann. **157**. 130. 1876; **160**. 238. 1878. — [2] F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **6**. 209. 1879. — [3] L. LORENZ, Wied. Ann. **13**. 600. 1881. — [4] W. OSTWALD, Zeitschr. f. phys. Chemie. **11**. 310. 1893. — [5] C. LIEBENOW, Der elektrische Widerstand der Metalle. Halle bei G. Knapp. 1898; Zeitschr. f. Elektrochemie **4**. 515. 1898. — [6] F. KOHLRAUSCH, Pogg. Ann. **156**. 601. 1875; Wied. Ann. **67**. 630. 1899. — [7] C. LIEBENOW, Wied. Ann. **68**. 316; Drudes Ann. **2**. 636. 647. — [8] C. V. BURTON, Phil. Mag. (5) **38**. 55. 1894. — L. SILBERSTEIN, Elektrochem. Zeitschr. **3**. 191. 215. 1896; **4**. 145. 1897. — Ähnlich: R. REIFF, Wied. Ann. **56**. 42. 1895. — [9] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. Ber. d. sächs. Ges. **6**. 710. 1864. — [10] H. HERTZ, Wied. Ann. **10**. 414. 1880; **14**. 581. 1881.

positiver Elektrizität vorhanden sind und jede Einheit $\varrho$ mg wiegt, so ist die ganze in einem Leiter vom Querschnitt $q$ und der Länge $l$ bewegte träge Masse $= \varrho q \lambda l$ mg. Fließt ein Strom von der Intensität $i$ durch den Draht, so ist die Zahl der elektrostatischen Einheiten, welche durch jeden Querschnitt fließt, einerseits $= 155\,370 \cdot 10^6\, i$ (bei der WEBERschen Meßmethode für den elektrischen Strom), andererseits $= \lambda q$ mal der Geschwindigkeit $v$ der Strömung. Also ist

$$v = \frac{155\,370 \cdot 10^6 i}{q \lambda}$$

und die kinetische Energie $T$ der Strömung ist:

$$T = \frac{1}{2} l \varrho q \lambda \left(\frac{155\,370 \cdot 10^6}{\lambda}\right)^2 \frac{i^2}{q^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l i^2}{q} \varrho \frac{155370^2 \cdot 10^{12}}{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \frac{l i^2}{q} \quad .$$

Die Größe $\frac{l i^2}{q}$ ist meßbar, $\mu = \frac{\varrho \cdot 155370^2 \cdot 10^{12}}{\lambda}$ ist diejenige Größe, welche zu bestimmen ist. Hat die Elektrizität keine Trägheit, so ist $\mu = 0$, anderenfalls ist $\mu$ von Null verschieden. $\mu$ (in mg/mm) ist die kinetische Energie der Strömung in 1 mm³ eines Leiters, in welchem die magnetisch gemessene Stromdichtigkeit 1 herrscht. Aus seinen ersten Versuchen mit Kupferdrähten erhielt HERTZ für $\mu$ den Wert $< 0{,}008$ mg/mm, d. h.:

Die kinetische Energie der elektrischen Strömung in einem mm³ eines kupfernen Leiters, welcher von einem Strome von der Dichtigkeit 1 (im magnetischen Maß) durchflossen wird, ist kleiner als 0,008 mg/mm. Da man über die Geschwindigkeit $v$ der Strömung nichts weiß, so kann man daraus auch nicht etwa auf die Masse eines Elektrizitätsteilchens schließen. Während dieser Wert von $\mu$ aus der Integralintensität von Extraströmen abgeleitet war und nur unter gewissen Annahmen richtig war, ergab sich bei einer zweiten ganz anderen Versuchsanordnung (über die die Originalarbeit nachzusehen ist) das bestimmte Resultat, daß $\mu < 0{,}000\,185$ mg/mm ist. HERTZ macht übrigens darauf aufmerksam, daß in Elektrolyten die elektrischen Ströme zweifellos erhebliche Trägheit besitzen, da die Elektrizität sich bei diesen nur mit träger Masse zugleich bewegt[1]. Die obere Grenze, die von HERTZ festgestellt wurde, ist so groß, daß sie den neueren Ansichten der Elektronentheorie nicht widerspricht.

## § 6. Das Feld von Strömen. Elementargesetze.

**17.** Die Erscheinungen des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik sind zunächst nicht auf Fernwirkungen bewegter Elektrizität, sondern auf Elementarwirkungen der Stromelemente zurückgeführt worden.

Das BIOT-SAVARTsche Gesetz, welches die mechanische Kraft herrührend von einem Stromelement von der Länge $dl$ und der Stromstärke $i$ (elektromagnetisch gemessen) und angreifend an einem Magnetpol von der Stärke $m$ in der Entfernung $r$ gleich setzt

$$K = \frac{i\, dl\, m \sin(r, dl)}{r^2}$$

und welches dieser Kraft die Richtung senkrecht zu der durch $dl$ und $r$ be-

[1] Versuche über dieselbe Frage s. L. LORENZ, Wied. Ann. 7. 161. 1879.

stimmten Ebene, entsprechend der AMPÈREschen Schwimmerregel zuschreibt, dieses Elementargesetz ist naturgemäß nur gewonnen aus Beobachtungen an geschlossenen Strömen. Seine einfachste Form gewinnt es, wenn man es anwendet auf einen gradlinigen, unendlich langen Strom. Dann folgt aus ihm, daß die mechanische Kraft desselben an dem Magnetpole in der Entfernung $\varrho$ von der Achse

$$K = \frac{2\,i\,m}{\varrho}$$

ist, ein Resultat, welches in der MAXWELLschen als allgemein gültig angesehen wird, nämlich für einen beliebig kurzen Strom in dessen unmittelbarer Umgebung (s. unten S. 833).

**18.** Die elektrodynamischen Anziehungen, Abstoßungen und Rotationen sind von AMPÈRE in ein Elementargesetz gebracht worden, welches aber auch abgeleitet wurde aus Versuchen an geschlossenen Strömen. Das AMPÈREsche Gesetz sagt aus, daß die mechanische Kraft zwischen zwei Stromelementen $dl$ und $dl'$ mit den Stromstärken $i$ und $i'$ (elektromagnetisch gemessen) gleich ist

$$K = -\frac{2\,i\,i'\,dl\,dl'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) \quad .$$

Darin ist $\varepsilon$ der Winkel zwischen den beiden Stromelementen, $\vartheta$ und $\vartheta'$ sind die Winkel, welche $dl$ resp. $dl'$ mit $r$ bilden, und $K$ ist eine abstoßende Kraft, wenn es positiv, eine anziehende, wenn es negativ ist. Da indes diese Formel aus Experimenten an geschlossenen Strömen abgeleitet wurde und man aus dem Wert einer Summe nicht auf die Werte der einzelnen Summanden schließen kann, so ist die AMPÈREsche Formel zwar eine zulässige und mögliche, aber nicht die einzige mögliche Form des Elementargesetzes, selbst im Sinne der Fernkraftstheorie. Alle wirkliche Erfahrung an geschlossenen Strömen läßt sich auf das F. NEUMANNsche Potential zurückführen, welches aussagt, daß die elektrodynamischen Kräfte, sowohl die Translationskräfte wie die Drehungsmomente, welche ein System starrer Stromleiter angreifen, sich als Differentialquotienten des elektrodynamischen Potentials darstellen

$$Q = -i\,i'\iint\frac{dl\,dl'\cos\varepsilon}{r} \quad .$$

Die von AMPÈRE seiner Ableitung zugrunde gelegte Annahme, daß die Kräfte zwischen zwei Elementen notwendig nur in Attraktions- und Repulsionskräften bestehen, ist, selbst wenn man die ganze Betrachtung der Elementarkräfte selbst zuläßt, nicht notwendig. Man kann versuchen, außer der AMPÈREschen Abstoßungskraft noch Kräftepaare an den Stromelementen anzunehmen. Derartige Untersuchungen sind von STEFAN[1], KORTEWEG[2], LORENTZ[3], MARGULES[4], RIGHI[5] u. a.[6] angestellt worden.

Das GRASSMANNsche Kraftgesetz lautet:

$$K = \frac{i\,i'\,dl\,dl'}{r^2}\sin\vartheta\sin(n\,,\,dl') \quad .$$

[1] J. STEFAN, Wien. Ber. **59.** 693. 1869. — [2] D. J. KORTEWEG, Crelle Journ. **90.** 49. 1880; Beibl. **4.** 686. 1880. — [3] H. A. LORENTZ, Arch. néerl. **17.** 85. 1882. — [4] M. MARGULES, Wien. Anzeiger 1878. 195. — [5] A. RIGHI, Mem. di Bologna (4) **10.** 217. 1889; (5) **1.** 1. 1890. — [6] H. GRASSMANN, Pogg. Ann. **64.** 1. 1845. — J. FARKAS, Math.-naturw. Ber. aus Ungarn **11.** 161. 1893; Beibl. **18.** 590. 947. — C. NEUMANN, Sächs. Ber. 1896. 221. — F. KERNTLER, Beibl. **21.** 538. 1897; **22.** 618. 1898; Das AMPÈREsche elektrodynamische Potential, Budapest 1903. 17 pp. — L. HOULLEVIGUE, Journ. de phys. (3) **7.** 465. 1898. — M. RAVEAU, Journ. de phys. (3) **9.** 150. 1900.

Darin ist $n$ die Normale zu der durch $dl$ und $r$ gelegten Ebene und die Richtung der Kraft steht senkrecht auf der durch $dl$ und $n$ gelegten Ebene. Dieses Kraftgesetz ergibt sich, wenn man die Wirkung eines geschlossenen Stromes $L$ mit dem Element $dl$ auf ein Stromelement $dl'$ bildet, nach dem AMPÈREschen Gesetz, und dann die ganze Kraft auf die Elemente so verteilt, daß das Argument des Integrals die Kraft des Elements ist.

HELMHOLTZ[1] hat ein erweitertes Elementargesetz in der Form aufgestellt, daß die Kräfte ein Potential $Q$ haben, welches gleich ist:

$$Q = -\frac{1}{2}\,\frac{i\,i'}{r}\,dl\,dl'(1+k)\cos\varepsilon + (1-k)\cos\vartheta\cos\vartheta') \quad .$$

In diesem Ausdruck tritt eine noch unbestimmte neue Konstante $k$ auf[2].

Alle diese Ausdrücke geben, auf geschlossene Ströme angewendet, die gleichen Resultate.

Die Stromelemente, die man bei den elektrodynamischen Rotationen vor sich zu haben glaubte, sind tatsächlich keine solchen, sondern sind durch Gleitstellen verbundene Teile geschlossener Ströme, so daß Elementarwirkungen sich nur direkt aus Experimenten an ungeschlossenen Strömen ableiten ließen. Für diese aber gibt die MAXWELLsche Theorie ganz andere Resultate, weil bei dieser stets eine Mitwirkung des Dielektrikums auftritt, die die Fernkrafttheorien ausschließen. Die elektrodynamischen Elementargesetze in der alten Form haben also heute nur noch Bedeutung für geschlossene, stationäre Ströme. Und für diese sind sie überflüssig, da das NEUMANNsche Potentialgesetz diese allein schon vollständig umfaßt und einfacher ist, wie sie.

**19.** Die elektrodynamischen Gesetze haben zu einer Zurückführung der magnetischen Erscheinungen auf elektrodynamische geführt durch die Theorie der magnetischen Molekularströme, wie in anderen Abschnitten dieses Werkes ausgeführt ist (Kapitel: Magnetismus).

**20.** Die Zurückführung der elektrodynamischen Erscheinungen auf Elementargesetze zwischen Stromelementen ist unabhängig von jeder Vorstellung über die Art des elektrischen Stromes und seiner Feldwirkung. Wenn man den Versuch macht, die elektrodynamischen Erscheinungen auf Grund der Annahme der zwei Fluida (von welcher die Hypothese eines Fluidums nach dem Obigen nur ein spezieller Fall ist) und auf Grund der Annahme des COULOMBschen Gesetzes als des Grundgesetzes der Wirkung zwischen zwei Teilchen dieser Fluida zu erklären, so gelingt dieser Versuch nicht. Wenn es sich um zwei Stromelemente handelt, so hat man in jedem eine doppelte Bewegung der Elektrizität anzunehmen, und man hat dann vier Wechselwirkungen zwischen den Elektrizitätsmengen, zwei abstoßende zwischen den beiden positiven und den beiden negativen und zwei anziehende zwischen der positiven Masse im ersten und der negativen im zweiten und zwischen der negativen im ersten und der positiven im zweiten Stromelement. Diese anziehenden und abstoßenden Kräfte sind aber einander gleich und entgegengesetzt nach dem COULOMBschen Gesetz, und daher würden zwei Stromelemente keine Kraft aufeinander ausüben, entgegen der Erfahrung, welche in dem AMPÈREschen Gesetz niedergelegt ist. Will man also den elektrischen Strom

---

[1] H. v. HELMHOLTZ, Crelle Journ. **72**. 57. 1870; **75**. 35. 1873; **78**. 273. 1874; Ges. Abh. I. 545—763. — [2] Über das HELMHOLTZsche Potentialgesetz s. die Arbeiten von J. BERTRAND, C. R. **73**. 965. 1871; C. R. **75**. 861. 1872; **79**. 337. 1874. — C. NEUMANN, Sächs. Ges. d. Wiss. 1872. 148; Pogg. Ann. **153**. 226. 1875. — F. ZÖLLNER, Wissensch. Abh. **3**. § 158. — F. LIPPICH, Pogg. Ann. **153**. 616. 1874. — H. HERWIG, Pogg. Ann. **153**. 263. 1874. — H. v. HELMHOLTZ, Ges. Abh. I. 545—763. — Ferner P. DUHEM, Ann. de Toulouse **7**. 1. 1893; Beibl. **18**. 479. 1894; **19**. 252. 1895; Ann. de Toulouse **10**. 87. 1896; Fortschr. d. Phys. 1896. 382. — C. NEUMANN, Die elektrischen Kräfte. 2. Teil. Leipzig, Teubner 1898. — P. DUHEM, Arch. néerl. (2) **5**. 227. 1900. — P. DUHEM, Les théories électriques de CL. MAXWELL. Paris, A. Hermann 1902.

durch die Bewegung der elektrischen Fluida erklären, so muß man annehmen, daß die Kraft zwischen den Teilchen derselben nicht bloß von ihrer Ladung und ihrer Entfernung, sondern auch von ihrer Bewegung abhängt, und man kommt so folgerichtig zu dem WEBERschen Grundgesetz[1], welcher das COULOMBsche als speziellen Fall enthält.

Es ist dabei noch auf folgendes aufmerksam zu machen. Die AMPÈREschen Gesetze beziehen sich auf die an den Stromträgern angreifenden Kräfte, die elektrostatischen Kräfte auf die Elektrizitäten. Die Resultante der elektrostatischen Kräfte wird an dem Stromträger angreifen, wenn die Elektrizität mit diesem fest verbunden ist. Das ist aber im galvanischen Strom nicht der Fall. Aber, wenn auch die Elektrizitäten in der Richtung des Leitungsdrahtes verschiebbar sind, so sind sie doch in dieser Richtung nicht frei beweglich. Denn sonst müßte der Strom auch bei Ausschaltung der elektromotorischen Kraft dauernd fortbestehen. Der Träger der Elektrizitäten übt also tatsächlich einen Widerstand gegen die Bewegung der Elektrizitäten aus und infolge dieses Widerstandes werden die Kräfte, die auf die Elektrizitäten wirken, mittelbar auf den Träger übertragen.

## § 7. Punktgesetze.

**21.** Aus den elektrodynamischen Erscheinungen folgt nach W. WEBER unter der Annahme der elektrischen Fernkräfte, daß die Kraft zwischen zwei elektrischen Massen nicht bloß von den Elektrizitätsmengen, sondern auch von ihrer relativen Geschwindigkeit und sogar von ihrer relativen Beschleunigung abhängt. Er findet, daß die Kraft, mit der zwei elektrische Massen $e e'$ in der Entfernung $r$ aufeinander wirken, ist[2]

$$K = \frac{e e'}{r^2}\left[1 - \frac{A^2}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A^2 r \frac{d^2 r}{dt^2}\right] \quad .$$

Diese Formel, die das WEBERsche Gesetz ausdrückt, gibt also die Kraft zwischen zwei Elektrizitätsmengen ganz allgemein. $K$ ist eine abstoßende Kraft, wenn es positiv ist.

Daß durch diese Annahme über die Kraft das AMPÈREsche Gesetz sich ableiten läßt, hat WEBER in folgender Weise am einfachsten gezeigt.

Die AMPÈREsche Formel für die abstoßende Kraft zweier Stromelemente ist

$$-\frac{2\, i i'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta \cos\vartheta')\, dl\, dl' \quad ,$$

worin $dl$, $dl'$ die Längen der Stromelemente, $i$, $i'$ die Stromstärke, $r$ die Entfernung, $\varepsilon$ den Winkel $(dl, dl')$, $\vartheta$ den Winkel $(r, dl)$ und $\vartheta'$ den Winkel $(r, dl')$ bedeuten.

Es sei nun $e$ die Menge positiver Elektrizität, welche in einer Längeneinheit des Drahtes enthalten ist, also $e\,dl$ die im Element $dl$. Es sei $u$ die Geschwindigkeit der positiven Elektrizität im Strom von der Stärke $i$. Ferner sei $-e$ die negative Elektrizität im Element $dl$ mit der Geschwindigkeit $-u$. Endlich seien $+e'$ und $-e'$ die Elektrizitäten im Element $dl'$, mit den Geschwindigkeiten $+u'$ und $-u'$.

Nach dem WEBERschen Gesetz ist die Kraft zwischen $+e$ und $+e'$

$$K = \frac{e e'}{r^2}\left[1 - \frac{A^2}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A^2 r \frac{d^2 r}{dt^2}\right] \quad .$$

---

[1] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen I. 1846; zweiter Abdruck Leipzig 1890. —
[2] Statt der WEBERschen Konstanten ist in dieser Formel die reziproke Lichtgeschwindigkeit $A$ eingeführt, während die WEBERsche Konstante der $\sqrt{2}$te Teil derselben ist.

Dabei ist $n$ die Normale zu der durch $di$ und $r$
Richtung der Kraft steht senkrecht auf der durch
Biotschen Kraftgesetz ergibt sich, wenn man die W
Stromes $L$ mit dem Element $dl$ auf ein Stromel
Savartschen Gesetz, und dann die ganze Kraft
daß das Argument des Integrals die Kraft des El

Helmholtz[1] hat ein erweitertes Elementar
daß die Kräfte ein Potential $Q$ haben, welches

$$Q \quad \frac{1}{2} \frac{ii'}{r} dl\,dl'(1+k)\cos\varepsilon$$

In diesem Ausdruck tritt eine noch unbestim

Alle diese Ausdrücke geben, auf ges
gleichen Resultate.

Die Stromelemente, die man bei d
sich zu haben glaubte, sind tatsächlich k
stellen verbundene Teile geschlossener
nur direkt aus Experimenten an unge
diese aber gibt die Maxwellsche Th
stets eine Mitwirkung des Dielektrik
schließen. Die elektrodynamischen
also heute nur noch Bedeutung
diese sind sie überflüssig, da das
vollständig umfaßt und einfache

**19.** Die elektrodynamisch
magnetischen Erscheinungen
magnetischen Molekularstrom
geführt ist (Kapitel: Magn

**20.** Die Zurückführ
gesetze zwischen Strome
Art des elektrischen S
macht, die elektrody
Fluida (von welcher
spezieller Fall ist) u
des Grundgesetzes
so gelingt dieser V
so hat man in jede
man hat dann vier W
stoßende zwischen
ziehende zwischen
und zwischen
Diese
entgegengesetz
strömen



$$\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial l'}\,,\qquad \cos\vartheta' = -\frac{\partial r}{\partial l'}\quad ,$$

$$= \frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'}\quad ,$$

$$\frac{dl\,dl'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\quad ,$$

... als Folge des **Weber**schen sich ergibt. Zugleich ...etisch gemessen,

$$= 2Aeu = A(eu + e'u')$$

...erhältnis der elektrostatischen und elektromagnetischen ... reziproken Lichtgeschwindigkeit ist.

... dieses Weberschen Gesetzes ergab sich sofort daraus, ...ang, ganz allgemein die Gesetze der Voltainduktion ... abzuleiten. Er brauchte zu diesem Zwecke nur die ...windigkeiten der beiden Elektrizitätsarten in Rechnung ...erseits durch Veränderung der Stromstärke, d. h. durch ...chwindigkeiten der Elektrizitäten im Leiter, andererseits ...des Stromleiters, der die Elektrizitäten mit sich führt, her-

... die elektromotorische Kraft gesucht, die in einem Strom- ... hervorgebracht wird, daß ein Stromelement $dl$ sich im ... zugleich Änderungen in seiner Stromstärke unterworfen ist. ...anische Kraft von der Summe der Wirkungen auf die beiden ...angegriffenen Elements abhängt, hängt die elektromotorische ...ifferenz ab.

...ive und negative Elektrizität enthält, so ist die elektromotorische ...die Differenz der Wirkungen von $dl$ auf die beiden Elektrizitäten, ...irkungen in der Verbindungslinie von $dl$ und $dl'$ stattfinden, so ...samtwirkung ebenfalls in derselben Richtung statt. Die elektro- ...raft in $dl'$ erhält man dann durch Projektion dieser Wirkung auf ...von $dl'$. Bezeichnet man wieder die Geschwindigkeit der Elek- ...sten Element mit $u$, die im zweiten mit $u'$, wobei beide für die ...zität $+$, für die andere $-$ zu nehmen sind, und entwickelt man $\frac{d^2 r}{dl^2}$, so erhält man Glieder, welche von $u^2$, $u'^2$, $uu'$, $u$, $u'$ abhängen ..., welche weder $u$ noch $u'$ enthalten. Bildet man dann die vier Kräfte, 1. von $+e$ auf $+e'$, 2. von $+e$ auf $-e'$, 3. von $-e$ auf $+e'$ und 4. von ... $-e'$ und kombiniert sie in der Form

$$(1) - (2) + (3) - (4)\quad ,$$

...man, daß nur dasjenige Glied einen von Null verschiedenen Wert gibt, ...t $uee'$ multipliziert ist. Dieses gibt nämlich den vierfachen Wert von (1). ...ie Rechnung auszuführen, haben wir $\left(\frac{dr}{dl}\right)^2$ und $\frac{d^2 r}{dt^2}$ zu bilden.

...ist

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{\partial r}{\partial l} + u'\frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{\partial r}{\partial t}\quad ,$$

Und es ist darin

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial l}\frac{dl}{dt} + \frac{\partial r}{\partial l'}\frac{dl'}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial l^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'}\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{\partial^2 r}{\partial l'^2}\left(\frac{\partial l'}{dt}\right)^2 + \frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial^2 l}{dt^2} + \frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial^2 l'}{dt^2} .$$

Die Größen $\frac{dl}{dt}$ und $\frac{dl'}{dt}$ bedeuten die Geschwindigkeiten $u$ und $u'$ der positiven Elektrizität in den beiden Elementen.

Für die Kraft zwischen $+e$ und $-e'$ haben wir nun zu ersetzen

$$+e' \quad \text{durch} \quad -e'$$

$$+\frac{dl'}{dt} \quad \text{durch} \quad -\frac{dl'}{dt}$$

$$+\frac{d^2 l'}{dt^2} \quad \text{durch} \quad -\frac{d^2 l'}{dt^2} .$$

Für die Kraft zwischen $-e$ und $+e'$ haben wir zu ersetzen

$$+e \quad \text{durch} \quad -e$$

$$+\frac{dl}{dt} \quad \text{durch} \quad -\frac{dl}{dt}$$

$$+\frac{d^2 l}{dt^2} \quad \text{durch} \quad -\frac{d^2 l}{dt^2} .$$

Endlich für die Kraft zwischen $-e$ und $-e'$ haben wir zu ersetzen

$$+e \quad \text{durch} \quad -e \quad \text{und} \quad +e' \quad \text{durch} \quad -e'$$

$$+\frac{dl}{dt} \quad \text{durch} \quad -\frac{dl}{dt} \quad \text{und} \quad +\frac{dl'}{dt} \quad \text{durch} \quad -\frac{dl'}{dt}$$

$$+\frac{d^2 l}{dt^2} \quad \text{durch} \quad -\frac{d^2 l}{dt^2} \quad \text{und} \quad +\frac{d^2 l'}{dt^2} \quad \text{durch} \quad -\frac{d^2 l'}{dt^2} .$$

Addieren wir die vier Kräfte zusammen, so wird das Glied, welches in der Klammer den Faktor 1 enthält, gleich Null. Das zweite Glied

$$\frac{e e'}{r^2} A^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

wird

$$4 A^2 \frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} .$$

Das dritte Glied wird

$$8 A^2 \frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'}\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} .$$

Folglich wird

$$K = \frac{8 A^2 e e'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} .$$

Setzen wir nun

$$i\,dl = 2 e A \frac{dl}{dt} = 2 e A u \quad ,$$

$$i'\,dl' = 2 e' A \frac{dl'}{dt} = 2 e' A u' \quad ,$$

so wird

$$K = \frac{2ii'dl\,dl'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}\right)$$

und da

$$\cos\vartheta = \frac{\partial r}{\partial l}, \quad \cos\vartheta' = -\frac{\partial r}{\partial l'} \quad ,$$

$$-\cos\varepsilon = \frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'} \quad ,$$

so ist

$$K = -\frac{2ii'dl\,dl'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta') \quad ,$$

womit das AMPÈREsche Gesetz als Folge des WEBERschen sich ergibt. Zugleich ergibt sich, da $i$ elektromagnetisch gemessen,

$$= 2Aeu = A(eu + e'u')$$

ist, daß $A$ das reziproke Verhältnis der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten, also gleich der reziproken Lichtgeschwindigkeit ist.

**22.** Der hohe Wert dieses WEBERschen Gesetzes ergab sich sofort daraus, daß es WEBER auch gelang, ganz allgemein die Gesetze der Voltainduktion aus diesem Grundgesetz abzuleiten. Er brauchte zu diesem Zwecke nur die Änderungen der Geschwindigkeiten der beiden Elektrizitätsarten in Rechnung zu ziehen, welche einerseits durch Veränderung der Stromstärke, d. h. durch Veränderung der Geschwindigkeiten der Elektrizitäten im Leiter, andererseits durch die Bewegung des Stromleiters, der die Elektrizitäten mit sich führt, hervorgebracht wurden.

Es wird also z. B. die elektromotorische Kraft gesucht, die in einem Stromelement $dl'$ dadurch hervorgebracht wird, daß ein Stromelement $dl$ sich im Raume bewegt und zugleich Änderungen in seiner Stromstärke unterworfen ist. Während die mechanische Kraft von der Summe der Wirkungen auf die beiden Elektrizitäten des angegriffenen Elements abhängt, hängt die elektromotorische Kraft von ihrer Differenz ab.

Da $dl'$ positive und negative Elektrizität enthält, so ist die elektromotorische Wirkung auf $dl'$ die Differenz der Wirkungen von $dl$ auf die beiden Elektrizitäten, und da diese Wirkungen in der Verbindungslinie von $dl$ und $dl'$ stattfinden, so findet die Gesamtwirkung ebenfalls in derselben Richtung statt. Die elektromotorische Kraft in $dl'$ erhält man dann durch Projektion dieser Wirkung auf die Richtung von $dl'$. Bezeichnet man wieder die Geschwindigkeit der Elektrizität im ersten Element mit $u$, die im zweiten mit $u'$, wobei beide für die eine Elektrizität $+$, für die andere $-$ zu nehmen sind, und entwickelt man $\left(\frac{dr}{dl}\right)^2$ und $\frac{d^2r}{dl^2}$, so erhält man Glieder, welche von $u^2$, $u'^2$, $uu'$, $u$, $u'$ abhängen und solche, welche weder $u$ noch $u'$ enthalten. Bildet man dann die vier Kräfte, nämlich 1. von $+e$ auf $+e'$, 2. von $+e$ auf $-e'$, 3. von $-e$ auf $+e'$ und 4. von $-e$ auf $-e'$ und kombiniert sie in der Form

$$(1) - (2) + (3) - (4) \quad ,$$

so findet man, daß nur dasjenige Glied einen von Null verschiedenen Wert gibt, welches mit $uee'$ multipliziert ist. Dieses gibt nämlich den vierfachen Wert von (1).

Um die Rechnung auszuführen, haben wir $\left(\frac{dr}{dl}\right)^2$ und $\frac{d^2r}{dt^2}$ zu bilden.

Nun ist

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{\partial r}{\partial l} + u'\frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{\partial r}{\partial t} \quad ,$$

(wo $\frac{\partial r}{\partial t}$ die in der Zeit $dt$ stattfindende Entfernungsänderung der beiden Elemente bedeutet, die von der Richtung der beiden Elemente unabhängig ist).

Also ist

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = u^2\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)^2 + u'^2\left(\frac{\partial r}{\partial l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + 2uu'\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'} + 2u\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial t} + 2u'\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial t} .$$

Die elektromotorische Kraftwirkung hängt also nur ab von dem Gliede $2u\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial t}$.

Ferner ist

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dt^2} &= u\frac{\partial}{\partial l}\left(u\frac{\partial r}{\partial l} + u'\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\\ &+ u'\frac{\partial}{\partial l'}\left(u\frac{\partial r}{\partial l} + u'\frac{\partial r}{\partial l'}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial r}{\partial l} + u'\frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{\partial r}{\partial t}\right) .\end{aligned}$$

Die elektromotorische Wirkung hängt daher nur ab von $\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial l}$.

Es wird dann nach der Weberschen Formel die in $dl'$ erzeugte elektromotorische Kraft (Differenz der Kräfte auf die Elektrizitätsmenge $e' = 2$ elektrostatisch oder $e' = 2A$ elektromagnetisch)

$$dE = 2Ae\frac{1}{r^2}dl'\left(r\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial l'}$$

oder

$$dE = 2Ae\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{r}\right)dl' .$$

Wird wieder $2Aeu = i\,dl$ (Stromstärke, elektromagnetisch gemessen) gesetzt, so ist

$$dE = \frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{r}\right)dl\,dl' .$$

Ist der Strom $dl$ geschlossen, während $dl'$ ein Element bleibt, so ist die elektromotorische Kraft

$$E = dl'\frac{\partial}{\partial t}\left[i\int\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'}dl\right] .$$

Fügt man dazu noch

$$\int\limits_S \frac{\partial^2 r}{dl\,dl'}dl = 0$$

und beachtet, daß

$$\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial l'}\right)dl = -\int\frac{\cos\varepsilon\,dl}{r} ,$$

so ist:

$$E = -dl'\frac{\partial}{\partial t}\left[i\int\frac{\cos\varepsilon\,dl}{r}\right] .$$

Ist der Kreis mit dem Element $dl'$ ebenfalls geschlossen und setzt man

$$\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}dl\,dl' = P ,$$

so ist die gesamte elektromotorische Kraft in dem Stromkreis $C'$ (mit dem Element $dl'$)

$$E = -\frac{\partial}{\partial t}(iP)$$

und das ist der erfahrungsmäßige Ausdruck für $E$. Es ist $P$ das gegenseitige Potential der beiden Stromkreise[1].

Im Falle, daß in einem Stromkreise Gleitstellen vorhanden sind, erfordert das WEBERsche Gesetz besondere Aufmerksamkeit, weil an den Gleitstellen die Geschwindigkeiten der Teilchen sich ändern[2].

Es ist dabei jedoch zu bemerken, daß, während man anfangs die Ableitung der Induktionsgesetze aus dem auf die AMPÈREsche Formel aufgebauten WEBERschen Gesetz für ein ausgezeichnetes Argument für die Richtigkeit dieses Gesetzes betrachtete, man jetzt einsieht, daß die Induktion in dieser Form sich durch das Prinzip der Erhaltung der Energie direkt aus der AMPÈREschen Formel ergeben muß. Da die aus dem WEBERschen Gesetz folgende Kraft ein Potential besitzt, so ist die Tatsache, daß das WEBERsche Gesetz die Induktion umfaßt, kein neues Argument für seine Richtigkeit.

**23.** Das WEBERsche Gesetz umfaßt also tatsächlich alle zur damaligen Zeit bekannten elektrischen Erscheinungen der Elektrostatik, Elektrodynamik und Induktion. Dagegen ist es mit den Erscheinungen, welche von HERTZ und seinen Nachfolgern beobachtet wurden, zunächst nicht in Einklang[3].

WEBER selbst hatte bei seiner Ableitung die Theorie der zwei Fluida und der elektrischen Doppelbewegung im Strome zugrunde gelegt. Doch läßt sich, wie C. NEUMANN[4] gezeigt hat, dasselbe Gesetz auch ableiten, wenn man annimmt, daß nur die eine der beiden Elektrizitäten sich bewegt, die andere aber nicht. Wenn man dabei die ruhende Elektrizität mit der Körpermaterie identifiziert, so daß man die Theorie eines Fluidums hat, so läßt sich die Ableitung dabei natürlich ganz ebenso machen, wie bei WEBER, aber es ist möglich, ja sogar wahrscheinlich[5], daß man dabei zu Widersprüchen mit der Erfahrung gelangt speziell bei den Konvektionsströmen[6].

Übrigens ist durch die Einwände von HELMHOLTZ und die sich daran anschließende Diskussion gezeigt worden, daß das WEBERsche Gesetz an sich, als Punktgesetz, auf gewisse unwahrscheinliche Folgerungen führt. Der Einwand von HELMHOLTZ, daß das WEBERsche Gesetz der Erhaltung der Energie widerspreche, ist allerdings von WEBER zunächst dadurch widerlegt worden, daß er zeigte, daß die Kräfte nach seinem Gesetz ein Potential haben. Dieses Potential ist

$$\varphi = -\frac{ee'}{r}\left[1 - A^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \quad .$$

Da aber dieses Potential nicht wie die Potentiale der Mechanik nur von den Koordinaten, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängt, so ergeben sich aus den WEBERschen Kräften trotzdem unzulässige Folgerungen. Diese Erörterungen, die heute mehr historisches Interesse haben, sind in den unten zitierten Aufsätzen enthalten[7]. Sie hatten seinerzeit eine sehr große Bedeutung,

[1] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen 1. 126. 1846. — E. SCHERING, Pogg. Ann. **104**. 266. 1858; s. ferner E. RIECKE, Wied. Ann. **11**. 299. 1880. — [2] W. WEBER, Elektrodyn. Maßbestimmungen **2**. 323. 1852. — [3] H. HERTZ, Ausbreitung der el. Kraft, 19. — [4] C. NEUMANN, Sächs. Berichte 1871. 386. — [5] R. CLAUSIUS, Mechan. Wärmetheorie **2**. 232. — [6] L. BOLTZMANN, Wied. Ann. **29**. 598. — H. LORBERG, Wied. Ann. **27**. 666. 1886; **31**. 131. 1887 — E. AULINGER, Wied. Ann. **27**. 119. 1886. — [7] H. v. HELMHOLTZ, Ges. Abhandl. **1**. 545. 1870; 647. 1872; 702. 1874; 763. 1874; 774. 1875; 687. 1881. — W. WEBER, Abh. d. sächs. Akad. **10**. 1. 1871; Pogg. Ann. **156**. 21. 1875; Abh. d. sächs. Akad. **11**. 688. 1878; Wied. Ann. **4**. 366. 1879. — C. NEUMANN, Abh. d. sächs. Akad. 1871; Pogg. Ann. **155**. 211. 1875; Abh. d. sächs. Ges. **11**. 77. 1875; Ber. d. sächs. Akad. 162. 1872; 132. 1874; 1. 1875; 35. 1880; Abh. d. sächs. Akad. **10**. 417; Mathem. Annal. **5**. 602. 1872; **6**. 350. 1873. — E. RIECKE, Gött. Nachr. 1873. Juli; Wied. Ann. **11**. 298. 1880. — R. CLAUSIUS, Crelle Journ. **82** (2). 83. 1876. — F. ZÖLLNER, Pogg. Ann. **110**. 514. 1877 u. Wissensch. Abh. **1**. **2**. **3**. S. ferner H. POINCARÉ, C. R. **110**. 825. 1890. — H. LORBERG, Wied. Ann. **49**. 392. 1893. — C. DELIN, Acta Univ. Lund. **34**. 30. 1898; Fortschr. d. Phys. 1899. 428. — P. DUHEM, Boltzmann-Festschrift 1904. 13.

da sie das Vertrauen auf das WEBERsche Gesetz und damit das Vertrauen auf die Fernkräfte überhaupt erschütterten und so den Boden für die Annahme der MAXWELLschen Theorie bereiteten.

**24.** Von demselben Gedanken wie WEBER ausgehend, hatte GAUSS ein ähnliches Punktgesetz gefunden, welches aber erst nach seinem Tode veröffentlicht wurde[1]. Sein Gesetz steht aber mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie nicht in Einklang[2]. Ein anderes elementares Punktgesetz ist von RIEMANN aufgestellt worden[3], welches ebenfalls auf der dualistischen Theorie beruht und mit der Theorie eines Fluidums nach CLAUSIUS[4] nicht vereinbar ist[5]. C. NEUMANN[6] hat ein Punktgesetz, und zwar einen Ausdruck für das Potential der Kräfte zweier bewegter Elektrizitätsmengen, aufgestellt, unter der Annahme, daß das Potential Zeit brauche, um von einem Ort zu einem andern zu gelangen. Schon vorher hatte RIEMANN[7] das Potential zweier Elektrizitätsmengen so bestimmt, daß eine Fortpflanzung des Potentials mit bestimmter Geschwindigkeit eingeführt wurde. Die Differentialgleichung des Potentials ist die sogenannte Gleichung des retardierten Potentials. Dadurch wird dieser Ausdruck sehr ähnlich dem, den die Elektronentheorie findet. Die RIEMANNsche Auffassung, wie die von C. NEUMANN berühren sich also mit neueren Versuchen, die von der Elektronentheorie ausgehen. (S. unten Nr. 103.)

**25.** CLAUSIUS[8] hat ein auf der unitarischen Theorie basiertes Grundgesetz aus den bis dahin bekannten Erfahrungen abgeleitet, welches für die Kraft zwischen zwei Elektrizitätsteilchen einen von ihrer absoluten Geschwindigkeit im Raume abhängigen Wert gibt. Es ist das bei jedem derartigen Gesetz, welches die unitarische Theorie anwendet, eine notwendige Folge. Denn wenn man das elektrische Fluidum mit dem Äther identifiziert, so bewegt sich nach der unitarischen Theorie der Äther in einem gewissen Körper gegen den übrigen, als ruhig angenommenen Äther. Absolute Bewegung ist aber eine solche, welche auf einen im Raume festen, d. h. in dem mit Äther angefüllten Raume festen Punkt sich bezieht. Daher muß das CLAUSIUSsche Gesetz und es müßte auch das der unitarischen Theorie adaptierte WEBERsche Gesetz die absoluten Geschwindigkeiten enthalten[9].

Das CLAUSIUSsche Gesetz gibt für die elektrodynamischen Wirkungen (abgesehen von den statischen) zweier Elektrizitätsmengen $e$ und $e'$, die die absoluten Geschwindigkeiten $v$ und $v'$ haben, das Potential

$$Q = A^2 \frac{e e'}{r} v v' \cos(v, v') \quad ,$$

wenn $A$ die reziproke Lichtgeschwindigkeit ist.

Eine Reihe von experimentellen Kombinationen, durch welche man zwischen den drei Punktgesetzen von WEBER, RIEMANN, CLAUSIUS entscheiden könnte, hat BUDDE[10] angegeben. Aus seiner Untersuchung seien folgende Resultate mitgeteilt:

Es gibt eine Anzahl von Versuchen, die zwischen den drei Grundgesetzen zu entscheiden gestatten.

[1] C. F. GAUSS Werke, **5**. 616. 1867. — [2] CL. MAXWELL, Elektrizität und Magnetismus **2**. § 852. — [3] B. RIEMANN, Schwere, Elektrizität und Magnetismus 1876. — [4] R. CLAUSIUS, Pogg. Ann. **135**. 612. 1868. — J. FRÖHLICH, Wied. Ann. **9**. 261. 1886. — [5] Andere Punktgesetze und einschlägige Betrachtungen, die heute nur historische Bedeutung haben, mögen nur zitiert werden. BETTI, Nuov. Cim. **27**. 1868. — TH. WAND, Pogg. Ann. **159**. 94. 1876. — L. LORENZ, Pogg. Ann. **118**. 111. 1863; **121**. 579. 1864; **131**. 243. 1867; Wied. Ann. **7**. 161. 1879. — [6] C. NEUMANN, Math. Ann. **1**. 317. 1869. — [7] B. RIEMANN, Pogg. Ann. **131**. 237. 1867; Ges. Werke, 2. Aufl., 288. 1892. — [8] R. CLAUSIUS, Pogg. Ann. **156**. 657. 1875; Wied. Ann. **1**. 14. 1877; **4**. 217. 1878; **11**. 604. 1880; Mechan. Wärmetheorie. **2**. 227. — [9] Einwände gegen das CLAUSIUSsche Gesetz: F. ZÖLLNER, Wied. Ann. **2**. 604. 1877. — J. FRÖHLICH, Wied. Ann. **9**. 261. 1880; **12**. 121. 1881. In Betreff der Theorie eines oder zweier Fluida s. H. LORBERG, Pogg. Ann. Erg. **8**. 599. 1871. — [10] E. BUDDE, Wied. Ann. **29**. 488. 1886; **30**. 100. 1887.

Die besten sind folgende:

a) Ladung und Entladung eines metallischen Hohlkörpers, in dem ein Magnet an einem Kokonfaden so suspendiert ist, daß seine magnetische Achse vertikal hängt. Der Magnet erleidet nach CLAUSIUS keine Wirkung, nach WEBER einen sehr schwachen, nach RIEMANN einen dreimal stärkeren rotatorischen Stoß.

b) Rotatorische Schwingungen eines möglichst großen isolierten Magnets und Ableitung desselben von dem Punkt, wo die Rotationsachse seine Oberfläche schneidet, in dem Augenblick, wo er seine Maximalgeschwindigkeit hat. Wenn er zur Ruhe kommt, findet man ihn nach RIEMANN geladen, nach den beiden andern Gesetzen ungeladen.

Weniger gut, aber mit außerordentlichen Mitteln vielleicht noch erreichbar, sind folgende Versuche:

c) Rotation einer stark elektrisierten Scheibe, wie bei dem ROWLANDschen Versuch, während ein ruhender Drahtring so befestigt ist, daß seine Ebene durch die Rotationsachse geht. Nach WEBER entsteht in dem Ring ein stationärer Strom, nach den beiden andern Gesetzen nicht.

d) Rotation eines kreisförmigen Multiplikators, entweder in einem magnetischen Feld oder mit einem Kommutator, der den im Ring fließenden galvanischen Strom nach jeder halben Drehung umkehrt. Die Achse der Drehung ist horizontal zu legen, und in der Horizontalebene, welche durch die Achse geht, ein fein suspendierter, polarelektrischer Körper anzubringen. Nach WEBER wird derselbe abgelenkt, nach RIEMANN und CLAUSIUS nicht.

Als hoffnungslos sind zu verwerfen: 1. Alle Versuche über geokinetische Wirkungen nach dem CLAUSIUSschen Gesetz; 2. alle Versuche, in denen bloß freie Elektrizität vorkommt[1].

## § 8. Fluidum gleich Äther.

**26.** Die Theorie der Elektrizität, die EDLUND[2] aufgestellt hat, ist eine Fernkrafttheorie, die ganz auf den bisher besprochenen Anschauungen beruht, nur nimmt sie den Lichtäther als denjenigen Stoff an, dessen größere oder geringere Menge in einem Körper die Elektrisierung, dessen Strömung den elektrischen Strom bedingt. Der Lichtäther soll also das elektrische Fluidum sein. Ein Körper besteht aus materiellen Molekülen mit Ätherhüllen und freiem Äther. Ein Überschuß an letzterem über den normalen Betrag macht den Körper positiv elektrisch, ein geringerer Betrag negativ elektrisch. Die Anziehungen und die dadurch hervorgebrachten Bewegungen zwischen zwei Körpern finden nicht im leeren Raume, sondern im Äther statt, müssen also nach dem ARCHIMEDIschen Prinzip berechnet werden.

Der galvanische Strom entsteht durch Fortbewegung des Äthers. Die Stromstärke ist der Äthermenge proportional, die durch einen Querschnitt pro Sekunde hindurchgeht. Die elektromotorische Kraft wirkt wie eine Pumpe, die den Äther durch den Leitungskreis treibt. Der Widerstand wird durch den hydrostatischen Druck erklärt, nicht etwa durch eine Reibung zwischen den Molekülen. Der so definierte Widerstand ist der Stromstärke proportional. Es ergibt sich dann, daß der Widerstand eines Leiters von seiner absoluten Geschwindigkeit abhängen muß, ein Resultat, welches wieder zeigt, daß bei unitarischen Theorien — und eine solche ist die EDLUNDsche — die absolute Geschwindigkeit im Raume eine wesentliche Rolle spielt. Die elektrodynamischen Wirkungen werden dadurch erklärt, daß die Kraft, die zwischen zwei Körpern

[1] Ähnliche Untersuchungen: J. FRÖHLICH, Wied. Ann. **9**. 261. 1880; **12**. 121. 1881. — DELSAULX, Beibl. **5**. 891. 1881. — H. LORBERG, Pogg. Ann. Erg. **8**. 599. 1877. — SCHATZ, Über das Grundgesetz der Elektrodynamik. Bonn, Dissert. 1880. — [2] E. EDLUND, Arch. sc. phys. nat. Nouv. Sér. **43**. 209. 1871; Pogg. Ann. Erg. **6**. 95. 1873; Kongl. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar **12**, Nr. 8. **16**, Nr. 1; Pogg. Ann. **148**. 421; **149**. 87. 1873; **156**. 590. 1875; Wied. Ann. **2**. 347. 1877; **15**. 165. 1882.

wirkt, Zeit braucht, um vom ersten zum zweiten zu gelangen. Daher hängt diese Kraft ab von der Bewegung der beiden Teilchen. Entwickelt man den Ausdruck für diese Kraft nach dem TAYLORschen Lehrsatz, so müssen dann die relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen und eventuell noch höhere Potenzen auftreten. Die bei dieser Entwicklung sich ergebenden Konstanten bestimmt EDLUND aus dem AMPÈREschen Gesetz.

Im wesentlichen ist also die EDLUNDsche Theorie — bis auf Einzelheiten — eine unitarische Stofftheorie, bei welcher das positive Fluidum mit dem Äther identifiziert wird. Die wesentliche Frage, ob die Kraft, die von einem elektrisierten Körper ausgeht, in der Zwischenzeit, bis sie zu einem zweiten Körper gelangt, in dem Zwischenmedium etwa Veränderungen hervorbringt und welcher Art diese sind, wird nicht berührt und nicht beantwortet[1].

Einwände gegen die EDLUNDsche Theorie sind von BAUMGARTNER[2], CHWOLSON[3], HERWIG[4], ROITI[5], LECHER[6], RUOSS[7] erhoben worden und zum Teil von EDLUND widerlegt worden. ROITI hat eine Entscheidung der Frage, ob der elektrische Strom ein Ätherstrom ist, dadurch zu finden gesucht, daß er zeigte, es müsse der Durchgang des Lichtes durch leitende Körper im bejahenden Fall geändert werden. Seine Versuche zeigten das nicht, ebensowenig die von LECHER. Doch hat EDLUND dieses Experiment mit Recht überhaupt nicht als entscheidend anerkannt.

Zusammenfassend ergibt sich also, daß die Fernkrafthypothesen der elektrischen Fluida, um alle Erscheinungen der Elektrizität zu erklären, zwischen zwei Teilchen des elektrischen Fluidums Kräfte annehmen müssen, die von der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Teilchen abhängen. Dabei macht die dualistische Theorie diese Kraft abhängig von den relativen Bewegungen, während die unitarische Theorie sie von den absoluten Bewegungen abhängen läßt. Die Frage nach der Zulässigkeit der Fernkrafttheorien kommt also hinaus auf die Frage nach der Richtigkeit dieser elektrodynamischen Kraftgesetze. Abgesehen von den Einwänden, welche v. HELMHOLTZ gegen das WEBERsche Gesetz erhoben hat, ist durch die HERTZschen Versuche eine definitive Entscheidung gegen diese Gesetze gegeben, insofern als diese Versuche sich aus diesen Gesetzen nicht theoretisch ableiten lassen.

## C) Die MAXWELLsche Theorie für ruhende Körper[8].

### § 9. Tatsachen und Hypothesen und Ableitung der MAXWELLschen Gleichungen.

**27.** Die reinen Fernkrafttheorien der Elektrizität erwiesen sich als unvollständig, als von HERTZ nachgewiesen war, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte Zeit brauchen, um sich durch den Raum fortzupflanzen, daß also in der

[1] So wie bei EDLUND die elektrodynamischen Kräfte nur aus der Annahme abgeleitet werden, daß die Kraft Zeit braucht, um sich fortzupflanzen, ohne daß näher untersucht wird, wie diese Fortpflanzung geschieht, ebenso geschieht dies nicht bei einigen andern Theorien, die hier nur zitiert werden können. Die oben erwähnten Formeln von GAUSS (Werke **5**. 616. 1867) und RIEMANN (Pogg. Ann. **131**. 237. 1867); C. NEUMANN (Math. Ann. **1**. 317. 1869, Die elektrischen Kräfte. Leipzig, Teubner 1875) gehören dazu und ferner die Arbeiten von L. LORENZ, Pogg. Ann. **118**. 111. 1863; **121**. 579. 1864; **131**. 243. 1867; Wied. Ann. **7**. 161. 1879. — LOSCHMIDT, Wien. Ber. **58**. 17. 1868. Die Betrachtungen von LORENZ sind zum Teil in den neuesten Theorien wieder aufgenommen. — [2] G. BAUMGARTNER, Pogg. Ann. **154**. 305. 1875. — [3] O. CHWOLSON, Pogg. Ann. Erg. **8**. 140. 478. 1876. — E. EDLUND, Pogg. Ann. **151**. 133. 1874; **152**. 643. 1874; **153**. 612. 1874. — [4] H. HERWIG, Pogg. Ann. **150**. 623. 1873. — [5] A. ROITI, Pogg. Ann. **150**. 164. 1873; s. H. WILBERFORCE, Trans. Cambr. Phil. Soc. **14**. 170. 1887. — [6] E. LECHER, Rep. d. Phys. **20**. 151. 1884. — [7] RUOSS, Schlömilchs Zeitschr. **37** (2). 125. 1892; Beibl. **16**. 751.

[8] Größere Werke und Abhandlungen über die MAXWELLsche Theorie und die Elektronentheorie sind folgende: J. CL. MAXWELL, A treatise on electricity and magnetism. 2 Bde. Oxford. 1. Aufl. 1873. 2. Aufl. 1881. 3. Aufl. 1892. Deutsch von B. WEINSTEIN. 2 Bände. — L. BOLTZMANN, Vor-

Zwischenzeit, während ein elektrischer Vorgang von einer Stelle $A$ ausgeht und bis er zu einer Stelle $B$ gelangt, in dem Zwischenraum irgend eine Veränderung vorhanden ist. Obwohl für die Tatsache der Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Störungen noch kein experimenteller Beweis vorlag, sondern nur eine Andeutung darin, daß die kritische Geschwindigkeit, das Verhältnis der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten, sich gleich der Lichtgeschwindigkeit erwies, hatte MAXWELL in seinem großen Werke und in Einzelabhandlungen auf Grund FARADAYscher Vorstellungen diese Ausbreitung behauptet. Zunächst nicht im Gegensatz zu den Fernkrafttheorien, sondern in Verbindung mit ihnen. Man kann nämlich die Fortpflanzung solcher Wirkungen durch den Raum auch als durch allmählich fortschreitende dielektrische und magnetische Polarisierung des Zwischenmediums, die aber selbst durch Fernkräfte bewirkt wird, verursacht ansehen. Die verschiedenen Auffassungen, die dabei möglich sind, hat HERTZ[1] in der Einleitung zu der Sammlung seiner Arbeiten über die Ausbreitung der elektrischen Kraft in fesselnder Weise dargelegt. Man kann danach auch das ganze MAXWELL-HERTZsche Gleichungssystem erhalten, indem man Fernkräfte annimmt[2]. In der Tat hat HELMHOLTZ[3] ganz allgemein die verschiedenen möglichen Theorien (Fernkrafttheorien) kritisch zusammengefaßt durch Einführung einer neuen Konstante $k$, der HELMHOLTZschen Konstanten, wie man sie wohl nennt, und hat gezeigt, daß unter der Voraussetzung der Polarisierung des Zwischenmediums im allgemeinen Falle sowohl transversale als longitudinale Wellen möglich sind. Für einen speziellen Fall dieser Konstanten, $k = 0$, gehen die Gleichungen von HELMHOLTZ in das MAXWELLsche Gleichungssystem über, welches keine longitudinalen, sondern nur transversale Wellen kennt. Die eigentliche Meinung aber der MAXWELLschen Theorie ist, wie sie heute aufgefaßt wird und wie sie wohl auch MAXWELL meinte, die, daß alle Fernkräfte überhaupt fortfallen sollen und daß nicht die Kräfte eine Polarisierung der Zwischenmedien bewirken, sondern daß die Bewegungen des Zwischenmediums allererst die beobachtbaren Kräfte hervorbringen: dieses ist der Standpunkt der reinen Theorie der vermittelten Kräfte. Danach ist überall in einem Raume, in welchem elektrische und magnetische Erscheinungen vor sich gehen, das gesamte Medium, das den Raum erfüllt, und zwar sowohl in ponderablen Körpern, seien es Leiter oder Nichtleiter, als auch im von Materie freien Raum, Sitz von Bewegungen oder Zuständen, welche uns unter Umständen durch ihre mechanischen Bewegungen oder durch von ihnen ausgehende Kräfte — denn nur diese beobachten wir — zur Kenntnis kommen. Die Vorgänge in diesem Medium, obwohl wir sie nicht direkt sehen,

lesungen über MAXWELLs Theorie der Elektrizität 1. Leipzig 1891; 2. 1893. — H. HERTZ, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig 1892. — H. POINCARÉ, Electricité et optique. 1. Aufl. 1890. 2. Aufl. 1901. Paris. — O. HEAVISIDE, Electrical papers 2 Bände. London 1892; Electromagnetic theorie. 2 Bde. London 1893. 1899. — H. A. LORENTZ, La theorie électromagnétique de MAXWELL et son application aux corps mouvants. Leiden 1892; Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895; MAXWELLs elektromagnetische Theorie. Enzyklopädie d. math. Wissenschaften **5** (2). 64. 1904; Elektronentheorie, ibidem. 174. 1904. — J. J. THOMSON, Notes on recent researches in electricity and magnetism. Oxford 1893. — A. FÖPPL, Einführung in die MAXWELLsche Theorie. 1894 (2. Aufl. siehe unten: ABRAHAM). — P. DRUDE, Physik des Äthers. Stuttgart 1894. — R. REIFF, Theorie molekular-elektrischer Vorgänge. Freiburg i. B. und Leipzig 1896. — A. GRAY, A treatise on magnetism and electricity 1. London 1898. — E. WIECHERT, Grundlagen der Elektrodynamik. Leipzig 1899. (Festschrift zur Feier der Enthüllung des GAUSS-WEBER-Denkmals in Göttingen.) — J. LARMOR, Aether and matter. Cambridge 1900. — S. T. WALKER, Aberration and some other problems connected with the electromagnetic field. Cambridge 1900. — E. COHN, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900. — C. NEUMANN, Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss., 1. Abh. **27**. 213. 1901; 2. Abh. **27**. 753. 1902; 3. Abh. **28**. 75. 1903. — P. DUHEM, Les théories électriques de MAXWELL. Paris 1902. — A. H. BUCHERER, Math. Einführung in die Elektronentheorie. Leipzig 1904. — M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität Bd. I und II. Leipzig 1905. (Bd. I von M. ABRAHAM und A. FÖPPL.)

[1] H. HERTZ, Ausbreitung der elektr. Kraft, Einleitung. 1892. — [2] Siehe H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissenschaften **5** (2). 143. 1904. — [3] H. v. HELMHOLTZ, Ges. Abhandl. 1. 556 ff.

sind also das primäre, die beobachteten Kräfte sind das sekundäre. Wenn ein Magnet bewegt wird, so entstehen dadurch primär direkte Veränderungen in den Zuständen des raumerfüllenden Mediums und dadurch erst etwa sekundär in einem stromleitenden Draht die Induktionsströme.

**28.** Bei dieser Anschauung ist nun der Lichtäther im allgemeinen dasjenige Medium, in welchem die elektromagnetischen Vorgänge sich abspielen, denn es gehen diese Wirkungen durch den luftleeren Raum hindurch von einer Stelle zur andern. Nach den Anschauungen, wie sie FRESNEL in die Optik eingeführt hat, muß man den freien Äther und den Äther in den Körpern unterscheiden. Der freie Äther wird direkt als ein Kontinuum aufgefaßt. In den Körpern würden natürlich streng die ponderablen Moleküle und der Äther unterschieden werden müssen. Für viele Erscheinungen des Lichtes aber, nämlich für alle Erscheinungen, bei denen Absorption, Dispersion und Metallreflexion keine Rolle spielen, genügt es bekanntlich, den Äther allein zu betrachten und ihm auch dieselben Eigenschaften zuzuschreiben wie dem freien Äther, nur in anderen quantitativen Verhältnissen, d. h. ihm andere Konstanten beizulegen. In derselben Weise lassen sich viele Erscheinungen der Elektrizität auch in den ponderablen Körpern behandeln, wenn man in diesen auf die molekulare Konstitution keine Rücksicht nimmt, sondern nur dem Äther in ihnen andere Konstanten beilegt wie dem freien Äther. Eine Anzahl anderer Erscheinungen, wie insbesondere den permanenten Magnetismus, kann man aber auf diese Weise nicht behandeln. Diese beiden Konstanten, die also von Körper zu Körper verschiedene Werte haben, sind die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ und die magnetische Permeabilität $\mu$. Außerdem aber sind die Leiter noch durch eine weitere Konstante $\lambda$, die Leitfähigkeit, unterschieden. Für den freien Äther werden $\varepsilon$ und $\mu$ je gleich 1 gesetzt, während $\lambda = 0$ ist.

**29.** Dieser Äther nun kann in allen Körpern zweierlei verschiedene Verschiebungen ausführen, elektrische Verschiebungen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und magnetische Verschiebungen $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ (beide auf die Volumeneinheit bezogen). Diese Verschiebungen sind elastischer Natur, indem sie nämlich elastische Kräfte entwickeln und durch deren Einfluß zurückgehen, wenn die äußeren sie bedingenden Ursachen aufgehört haben. Die elastischen Kräfte, welche durch die elektrischen Verschiebungen entwickelt werden, seien $XYZ$, diejenigen, die durch die magnetischen Verschiebungen entwickelt werden, $LMN$, und es bestehen dann für isotrope Körper die Beziehungen, daß

$$\mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z,$$
$$\mathfrak{L} = \mu L, \quad \mathfrak{M} = \mu M, \quad \mathfrak{N} = \mu N$$

ist. In den Leitern ruft eine Kraft $XYZ$ einen Strom hervor, dessen Dichtigkeit die Komponenten

$$u = \lambda X, \quad v = \lambda Y, \quad w = \lambda Z$$

hat. Durch die Verschiebungen wird daher in jedem Volumenelement $d\tau$ eine gewisse Energie aufgespeichert (siehe Handbuch Bd. 4, S. 86), nämlich die elektrische Energie $S_e$ und die magnetische Energie $S_m$,

$$S_e = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z)\,d\tau \quad ,$$

$$S_m = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\,d\tau \quad .$$

Die wesentliche, bei MAXWELL stets in den Vordergrund gerückte Behauptung ist nun die, daß die zeitliche Änderung einer Verschiebung, also die Größe mit den Komponenten $\frac{d\mathfrak{X}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}$ analog ist dem elektrischen Strom in Leitern,

also insbesondere dieselben magnetischen Kräfte um sich herum erzeugt wie ein solcher. Wenn in einem Dielektrikum an einem Querschnitt $d\omega$ die Größen $\frac{d\mathfrak{X}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}$ von Null verschiedene Werte haben, so werden die Größen $\frac{d\mathfrak{X}}{dt}d\omega$, $\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}d\omega$, $\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}d\omega$ die Komponenten des elektrischen Verschiebungsstromes durch diesen Querschnitt genannt. Ein solcher findet nicht allein in vollkommenen Dielektrika statt, sondern ist auch in den Leitern neben dem eigentlichen Leitungsstrom vorhanden. Dieser Verschiebungsstrom wird im allgemeinen nur sehr kurze Zeit dauern und zu schwach sein, um merkliche magnetische Wirkungen hervorzubringen. Erst bei raschen Oszillationen tritt er zutage und bedingt dabei nicht bloß die Fortpflanzung solcher Oszillationen durch den Raum, sondern macht sich auch direkt durch seine Induktionswirkungen bemerkbar, wie HERTZ zuerst gezeigt hat[1]. Immerhin ist dadurch der Beweis für das Auftreten solcher Verschiebungsströme nur indirekt geführt, wenn sie auch sogar vom Standpunkt der alten Theorien vollkommen plausibel erscheinen[2]. (Über direkte Nachweise s. unten Nr. 33.)

**30.** Der Zusammenhang zwischen einem elektrischen Strom und den in seiner Umgebung auftretenden magnetischen Kräften (die aber zunächst hier als elastische Kräfte aufgefaßt werden sollen) ist durch das BIOT-SAVARTsche Gesetz gegeben, welches also als Grundlage für die MAXWELLsche Theorie dient. Allerdings ist dieses als Fernwirkungsgesetz aufgestellt, während es in der MAXWELLschen Theorie nur den Zusammenhang zwischen Stromkomponenten und magnetischen Kräften in einem und demselben Stromelement angeben soll. Sind die Komponenten der Stromdichtigkeit in einem Element eines Körpers $u$, $v$, $w$ (die Stromdichtigkeit ist gleich der Stromstärke dividiert durch den Querschnitt des Elementes senkrecht zu der Stromrichtung), so läßt sich aus dem BIOT-SAVARTschen Gesetz leicht beweisen[3], daß bei einem Koordinatensystem, bei welchem man von der $x$- zur $y$- zur $z$-Achse durch Drehung im Sinne des Uhrzeigers gelangt, diese Beziehungen folgende sind:

$$4\pi A u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad ,$$

$$4\pi A v = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \quad ,$$

$$4\pi A w = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \quad .$$

Darin ist $A$ eine allgemeine Konstante, welche sich als die reziproke Lichtgeschwindigkeit im freien Äther erweisen wird. Ein Element also, in welchem zugleich Leitungsstrom $(u\,v\,w)$ und Verschiebungsstrom $\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt}, \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}, \frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right)$ herrscht, besitzt die magnetischen (elastischen) Kräfte

$$A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + 4\pi A u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

und zwei entsprechende. Der Faktor $4\pi$ ist in dem ersten Glied in den Ausdruck für $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ hineingenommen.

**31.** Ein zweites System von Gleichungen wird abgeleitet aus den Induktionserscheinungen. Wenn die magnetischen Verschiebungen an einer Stelle sich mit

[1] H. HERTZ, Wied. Ann. **34**. 273. 1887. Ausbr. d. el. Kraft, 102. 1892. — [2] S. auch VASCHY, C. R. **120**. 255. 1895. — DE NICOLAJEVE, Journ. de phys. (3) **4**. 245. 1895. — R. BLONDLOT, C. R. **133**. 778. 848. 1901. — [3] Eine einfache Ableitung der folgenden Gleichungen ist in HELMHOLTZ' Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts, Leipzig 1897, S. 34, enthalten.

der Zeit ändern, so entsteht entsprechend ein magnetischer Verschiebungsstrom mit den Komponenten $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}, \frac{d\mathfrak{M}}{dt}, \frac{d\mathfrak{N}}{dt}$ pro Flächeneinheit. Rings um einen solchen Verschiebungsstrom entsteht in einem Draht ein Induktionsstrom, und der mit $A$ multiplizierte magnetische Verschiebungsstrom ist gleich der elektromotorischen Kraft desselben. Geht der magnetische Verschiebungsstrom nach der $x$-Achse, so fließt der erzeugte Strom in der $yz$-Ebene, und es ist, wenn $\omega$ die kleine Fläche ist, die von dem Draht umfaßt wird,

$$A\frac{d\mathfrak{L}}{dt}\omega = E = iW = i\int\frac{dl}{\lambda q} \quad ,$$

wenn $q$ der Querschnitt des Drahtes, $W$ der Widerstand ist. Da $\frac{i}{q}$ gleich der Stromdichtigkeit $\sigma$ mit den Komponenten $u, v, w$ ist, und da $\frac{v}{\lambda}, \frac{w}{\lambda}$ gleich den elektrischen Kräften $Y$ und $Z$ sind, so ist

$$A\frac{d\mathfrak{L}}{dt}\omega = \int\frac{\sigma\,dl}{\lambda} = \int\frac{v\,dy + w\,dz}{\lambda} = \int(Y dy + Z dz)$$

und das letztere Integral ist nach dem STOKESschen Satz

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\omega \quad .$$

Indem man diese Gleichungen auf die einzelnen Richtungen anwendet, erhält man

$$A\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad ,$$

$$A\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ,$$

$$A\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \quad ,$$

das zweite System der MAXWELL-HERTZschen Gleichungen, welche als Nahewirkungsgleichungen den Zusammenhang zwischen den magnetischen Verschiebungen $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ und den elektrischen Kräften $XYZ$ an einer Stelle des Raumes angeben. Das Hypothetische dabei ist, daß das Auftreten solcher elektrischer Kräfte in der Nähe eines magnetischen Verschiebungsstromes nicht bloß für die Leiter, sondern auch für die Isolatoren angenommen wird.

**32.** Die MAXWELLschen Gleichungen geben nur den Verlauf der elektromagnetischen Bewegungen an, wenn diese einmal eingeleitet sind. Über die Ursache der Bewegungen sagen sie nichts aus. Diese Ursachen werden, wie in der Mechanik als äußere, unabhängig gegebene Kräfte angenommen; die Art der Bewegungen oder Zustände, welche sie hervorrufen, ist aber durch die Gleichungen bestimmt. Daß in einem elektrostatischen Feld Elektrizitätsmengen vorhanden sind, die durch Reibung oder auf andere Weise entstanden sind, wird als gegeben angenommen. Nur die Verteilung der elektrischen Kräfte bei gegebener Elektrizitätsmenge folgt aus den Gleichungen. Ebenso ist es mit permanenten Magneten, deren Vorhandensein unabhängig postuliert wird. Die Tatsache, daß durch chemische oder thermische Einflüsse in einem Drahtkreis ein Strom fließt, ist in den obigen Gleichungen nicht enthalten. Auch diese thermischen und chemischen Prozesse sind als äußere Ursachen, oder wie es HEAVISIDE[1] bezeichnet, als impressed forces (eingeprägte Kräfte), zu betrachten. Man kann die letzteren

[1] O. HEAVISIDE, Electrical papers 1. 1892.

in die Gleichungen als Konstanten einführen, die aus der Erfahrung zu bestimmen sind. Bedenkt man nämlich, daß beim Kontakt zweier verschiedener Leiter eine Potentialdifferenz entsteht, also eine äußere Kraft, so sieht man, daß der Strom in einem Leiter nicht bloß durch die elektrischen Kräfte entsteht, welche vermöge der MAXWELLschen Gleichungen in ihm auftreten können, sondern auch vermöge der konstanten elektrischen Kräfte, welche durch die Natur des Leiters selber bedingt sind. Bezeichnen wir diese konstanten elektrischen Kräfte (eingeprägte Kräfte) mit $-X'$, $-Y'$, $-Z'$, so sind die Gleichungen für die Stromkomponenten

$$u = \lambda(X - X'), \quad v = \lambda(Y - Y'), \quad w = \lambda(Z - Z') \quad .$$

**33.** Die obige Ableitung der MAXWELLschen Gleichungen nahm eine Reihe von Erfahrungstatsachen an und interpretierte den Zusammenhang zwischen den dabei auftretenden elektrischen und magnetischen Größen im Sinne der Nahewirkungshypothesen. Sie ging ferner über die Erfahrung hinaus, indem sie noch hypothetische Zusatzglieder annahm, die zunächst nicht direkt experimentell bestätigt werden können, sondern nur durch gewisse Folgerungen sich als richtig ergeben.

Man kann übrigens jetzt den Satz über die magnetischen Wirkungen elektrischer Verschiebungsströme durch die Versuche von EICHENWALD[1] und von WHITEHEAD[2] als experimentell bewiesen ansehen. Der letztere bemühte sich auch, die zweite Hypothese, nämlich von den elektrischen Kräften magnetischer Verschiebungsströme zu beweisen, doch wegen der Kleinheit der Wirkungen ohne Erfolg[3].

Man kann die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen auch auf anderen Wegen gewinnen. Abgesehen von den mechanischen Theorien, welche bereits so gewählt sein müssen, daß die beiden erwähnten Gleichungssysteme herauskommen, sind andere Versuche zur Gewinnung der Gleichungen gemacht worden. KETTELER[4] hat versucht, aus den Tatsachen der Kristalloptik direkt zu den MAXWELLschen Gleichungen zu gelangen.

GARBASSO[5] nimmt für seine Ableitung das COULOMBsche Gesetz für elektrische und magnetische Kräfte, das BIOT-SAVARTsche Gesetz und den Satz von POYNTING in spezieller Form zu Hilfe.

Ebenso kann man auch von anderen als den erwähnten Erfahrungstatsachen ausgehen[6] und kann auch natürlich die obigen Gleichungen in andere Formen bringen[7].

Aus dem einen Tripel kann man das andere durch Zuhilfenahme des Energieprinzips erhalten[8].

## § 10. Die Gleichungen für ruhende isotrope und nicht isotrope Körper.

**34.** Wie man auch immer zu den eben abgeleiteten Gleichungen kommen mag, sie enthalten jedenfalls die meisten Erscheinungen der elektrischen und magnetischen Zustände in ruhenden Körpern. Man kann auch, wie es HERTZ getan hat, die Gleichungen einfach an die Spitze stellen und sie als erfahrungsgemäßen Ausdruck der Tatsachen bezeichnen, die ihre Richtigkeit eben aus ihren Erfolgen beweisen können. In übersichtlicher Weise lautet das System der MAXWELLschen Gleichungen für isotrope ruhende Körper in der Bezeichnungsweise von HERTZ[9] folgendermaßen:

[1] A. EICHENWALD, Drudes Ann. **11**. 1, 421, 872. 1903. — [2] J. B. WHITEHEAD, Phys. Zeitschr. **6**. 474. 1905; s. H. A. LORENTZ, Proc. Amsterdam **5**. 608. 1903. — F. KOLACZEK, Phys. Zeitschr. **5**. 45, 455. 1904. — J. B. WHITEHEAD, ibid. **5**. 300. 1904. — R. GANS, ibid. **5**. 162, 192, 627. 1904. — [3] S. auch A. H. BUCHERER und A. PFLÜGER, Phys. Zeitschr. **4**. 616. 1903. — [4] E. KETTELER, Wied. Ann. **55**. 525. 1895. — [5] A. GARBASSO, Beibl. **18**. 967. 1893; ähnlich N. HESEHUS, Journ. russ. phys.-chem. Ges. **27**. 239. 1895; Fortschritte der Physik 421. 1896. — [6] J. PUPIN, Sill. J. (3) **50**. 326. 1895. — E. CARVALLO, C. R. **133**. 1290. 1901. — P. DRUDE, Physik des Äthers 1894. — M. ABRAHAM und A. FÖPPL, Die MAXWELLsche Theorie I. 1904. — E. COHN, Das elektromagnetische Feld 1900. — [7] E. CARVALLO, Lum. él. **47**. 18. 1893. — C. A. MEBIUS, Beibl. **22**. 619. 1897. — [8] F. RICHARZ, Marburger Ber. 1904. 128. — [9] Die beiden Systeme von Gleichungen sind vor HERTZ schon von HEAVISIDE aus der MAXWELLschen Theorie herausgeschält worden (O. HEAVISIDE, Phil. Mag. Febr. 1888). Eine etwas andere Form ist ihnen von E. COHN gegeben worden (E. COHN, Wied. Ann. **40**. 625. 1890. Das elektromagnetische Feld, Stuttgart 1900).

1. Das System (I) (elektrische Gleichungen):

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} A\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} + 4\pi A u = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} \\[2ex] A\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt} + 4\pi A v = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} \\[2ex] A\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt} + 4\pi A w = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} \end{cases}
$$

mit den Zusatzgleichungen

$$
\text{(Ia)} \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z
$$

$$
\text{(Ib)} \qquad u = \lambda X, \quad v = \lambda Y, \quad w = \lambda Z \quad ,
$$

oder wenn man die inneren Kräfte jedes Leiters mit berücksichtigt,

$$
u = \lambda(X - X'), \quad v = \lambda(Y - Y'), \quad w = \lambda(Z = Z') \quad .
$$

Ferner das System (II) (magnetische Gleichungen):

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} A\dfrac{d\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\[2ex] A\dfrac{d\mathfrak{M}}{dt} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\[2ex] A\dfrac{d\mathfrak{N}}{dt} - \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{cases}
$$

mit den Zusatzgleichungen

$$
\text{(IIa)} \qquad \mathfrak{L} = \mu L, \quad \mathfrak{M} = \mu M, \quad \mathfrak{N} = \mu N \quad .
$$

In den Gleichungen (Ia) bedeutet $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante des Mediums, in (Ib) ist $\lambda$ die Leitungsfähigkeit des Mediums. Ein jedes Medium, auch ein leitendes, besitzt eine Dielektrizitätskonstante, $\varepsilon$ ist also nirgends Null; dagegen ist $\lambda$ für die guten Isolatoren gleich Null zu setzen. In Gleichung (IIa) ist $\mu$ die magnetische Permeabilität, welche in allen Körpern außer dem Eisen nahezu denselben Wert 1 hat.

**35.** Da in jedem Volumenelement eines elektrisch und magnetisch erregten Raumes eine gewisse elektrische Verschiebung $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und eine gewisse magnetische Verschiebung $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ vorhanden sind, die selbst elastischer Natur sind, so ist in jedem Volumenelement auch eine gewisse Energie aufgespeichert. Nach den Betrachtungen auf S. 86 des Bandes 4 ist die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit $S$ zusammengesetzt aus der elektrischen Energie $S_e$ und der magnetischen Energie $S_m$, so daß

$$
\text{(III)} \qquad \begin{cases} S = S_e + S_m \qquad \text{ist und es ist} \\[2ex] S_e = \dfrac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z) \\[2ex] S_m = \dfrac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) \quad . \end{cases}
$$

Die Gleichungen (I), (II), (III) enthalten keine Konstanten, welche auf die einzelnen Körperklassen bezüglich sind. Erst die Gleichungen (Ia), (Ib), (IIa) führen proportionalen Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den entsprechenden Kräften für isotrope Körper ein.

Die Grenzbedingungen an der Grenze zweier verschiedener Medien erhält man durch das HELMHOLTZsche Prinzip der Kontinuität der Übergänge. Es

ergibt sich für isolierende Körper, daß die tangentialen elektrischen und magnetischen Kräfte auf beiden Seiten der Grenzfläche einander gleich sein müssen, daß dagegen der magnetische Verschiebungsstrom senkrecht zur Grenzfläche auf beiden Seiten gleich ist und daß für isolierende Medien dasselbe für den elektrischen Verschiebungsstrom gilt. Bei zum Teil leitenden Körpern muß die Summe vom elektrischen Verschiebungsstrom und Leitungsstrom senkrecht zur Grenzfläche in beiden Medien einander gleich sein.

**36.** Für nicht isotrope, kristallinische Körper ist nun die einfachste Annahme, die auch, soweit Erfahrungen vorliegen, richtig ist, die, daß in diesen noch immer die Gleichungen (I), (II), (III) gültig bleiben, daß dagegen statt der Gleichungen (Ia), (Ib), (IIa), welche proportionalen Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Kräften angeben, vielmehr andere treten, die allgemeinen linearen Zusammenhang aussprechen. Es treten also für kristallinische Körper an Stelle der Gleichungen (Ia), (Ib), (IIa) folgende:

a) Für die elektrischen Verschiebungen

$$\text{(Ic)}\qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{21} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{32} Y + \varepsilon_{33} Z \end{cases} ,$$

b) für die Stromkomponenten

$$\text{(Id)}\qquad \begin{cases} u = \lambda_{11} X + \lambda_{12} Y + \lambda_{13} Z \\ v = \lambda_{21} X + \lambda_{22} Y + \lambda_{23} Z \\ w = \lambda_{31} X + \lambda_{32} Y + \lambda_{33} Z \end{cases} ,$$

c) für die magnetischen Verschiebungen

$$\text{(IIc)}\qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N \\ \mathfrak{M} = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N \\ \mathfrak{N} = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N \end{cases} .$$

Die elektrische und magnetische Energie in der Volumeneinheit eines isotropen Körpers lassen sich nach (III) schreiben

$$\text{(IIIa)}\qquad \begin{cases} S_e = \dfrac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) , \\ S_m = \dfrac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2) . \end{cases}$$

Für kristallinische Körper werden die Ausdrücke entsprechend

$$S_e = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{11} X^2 + \varepsilon_{22} Y^2 + \varepsilon_{33} Z^2 + 2\varepsilon_{12} XY + 2\varepsilon_{23} YZ + 2\varepsilon_{31} ZX)$$

$$S_m = \frac{1}{8\pi}(\mu_{11} L^2 + \mu_{22} M^2 + \mu_{33} N^2 + 2\mu_{12} LM + 2\mu_{23} MN + 2\mu_{31} NL) .$$

## § II. Allgemeine Folgerungen. Elektrizität und Magnetismus.

**37.** Indem man die Gleichungen (I) resp. (II) auf ein abgegrenztes Volumen anwendet, findet man leicht durch Integration, daß in einem isolierten Raum die Größe

$$\int\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) d\tau$$

konstant bleibt, durch elektromagnetische Vorgänge nicht geändert wird. Es entspricht diese Größe daher derjenigen, die man als die Menge der in dem Raum vorhandenen Elektrizität, als die Elektrizitätsmenge bezeichnet. Setzt man die Größe

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 4\pi k_\omega \quad ,$$

so bedeutet $k_\omega$ die Dichtigkeit (Raumdichtigkeit) der Elektrizität in einem Volumenelement. HERTZ bezeichnet sie als die Dichtigkeit der wahren Elektrizität, im Gegensatz zu der Größe $k_f$, definiert durch

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi k_f \quad ,$$

die als die Dichtigkeit der freien Elektrizität bezeichnet wird und die in einem isotropen Körper von der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ mit der wahren so zusammenhängt, daß

$$k_f = \frac{k_\omega}{\varepsilon}$$

ist.

Durch Anwendung der obigen Gleichung auf Flächenelemente findet man, daß analog die Dichtigkeit $h_\omega$ der wahren Elektrizität an einem Flächenelement durch den $4\pi$ten Teil des Sprunges gemessen wird, den die Normalkomponente $\mathfrak{S}$ der elektrischen Verschiebungen an der Fläche machen. Denkt man sich also die Normale an die Fläche von dem Medium 1 nach dem Medium 2 gezogen und sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Normalkomponenten der elektrischen Verschiebungen an der Grenzfläche in den beiden Medien, so ist

$$\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1 = 4\pi h_\omega$$

und entsprechend wird die Normalkomponente der elektrischen Kräfte $S$, wenn sie an der Grenzfläche einen Sprung macht, die Dichtigkeit der freien Elektrizität angeben, nach der Definition

$$S_2 - S_1 = 4\pi h_f \quad .$$

Diese Betrachtungen sind bereits Band 4, S. 85—88 angestellt.

**38.** Wenn ein Raum $R$, in welchem (wahre) Elektrizität vorhanden ist, nicht isoliert ist, also wenn seine Grenzfläche nicht bloß durch Isolatoren geht, so kann sich der Betrag an wahrer Elektrizität in diesem Raume ändern. Denn es geben dann die Gleichungen (I)

$$A\frac{d}{dt}\int_R d\tau\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) + 4\pi A\int_R\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau = 0 \quad ,$$

oder wenn $E_\omega$ der gesamte Betrag von wahrer Elektrizität in diesem Raume ist, und $O$ die Oberfläche dieses Raumes, $n_i$ die nach dem Innern gezogene Normale ist,

$$\frac{dE_\omega}{dt} = \int_O [u\cos(n_i x) + v\cos(n_i y) + w\cos(n_i z)]\,d\omega \quad .$$

Bezeichnet man mit $\sigma$ die Stromdichtigkeit an einem Element $d\omega$ der Grenzfläche, so ist also

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dE_\omega}{dt} = \int_O \sigma\cos(\sigma n_i)\,d\omega \quad .$$

Der Betrag von $E_\omega$ in dem Raume kann sich also mit der Zeit ändern. Ist nur ein Element der Grenzfläche $O$ leitend, so reduziert sich das Integral

rechts auf sein Argument, $\sigma \cos(\sigma, n_i)$ ist die Stromdichtigkeit senkrecht zum Element $d\omega$, also ist $\sigma \cos(\sigma n_i) d\omega$ gleich der Stromstärke $i$, die senkrecht durch das Element $d\omega$ von außen nach innen fließt und die Gleichung (IV) liefert

$$\frac{dE_\omega}{dt} = i \quad .$$

Im allgemeinen Fall bedeutet daher

$$\int\limits_O \sigma \cos(\sigma n_i) d\omega$$

die gesamte Stromstärke $J$, die durch alle (parallel geschalteten) leitenden Teile der Grenzfläche hindurchgeht und auch hier ist also

$$\frac{dE_\omega}{dt} = J \quad .$$

Daraus ergibt sich die Definition der Stromstärke $J$, daß sie gleich derjenigen (wahren) Elektrizitätsmenge ist, welche pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters hindurchgeht.

**39.** Die gleiche Behandlung der Gleichungen (II), wie es oben mit den Gleichungen (I) geschehen ist, führt zu den entsprechenden Ausdrücken für den wahren und freien Magnetismus. Die Größe

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}$$

ist $= 4\pi$ mal der Dichtigkeit des wahren Magnetismus in einem Volumenelement. Diese Größe ist aber überall gleich Null, da erfahrungsgemäß in jedem kleinsten Volumen gleich viel positiver und negativer Magnetismus vorhanden ist. Entsprechend ist auch der Sprung der magnetischen Verschiebungen normal zu einer Grenzfläche zweier verschiedener Körper

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 \quad ,$$

welche gleich $4\pi$ mal der Dichtigkeit des wahren Magnetismus an diese Grenzfläche wäre, gleich Null. Es ist also an allen Grenzflächen $\Sigma_2 = \Sigma_1$. Die entsprechenden Größen für die Dichtigkeit des freien Magnetismus werden durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 4\pi m_f$$

und

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4\pi \mu_f \quad ,$$

wo $\sigma_2$ und $\sigma_1$ die Normalkomponenten der magnetischen Kräfte sind. Der erste Ausdruck für die Raumdichte muß aber überall gleich Null sein, wenn man es mit einem homogenen Medium zu tun hat, da der wahre Magnetismus verschwindet. Dagegen ist $\mu_f$ im allgemeinen nicht Null. Es gibt eben keinen wahren, sondern nur freien Magnetismus und dieser ist nur auf Grenzflächen zweier verschiedener Körper vorhanden.

**40.** Diese Behauptung, daß freier Magnetismus nur auf Grenzflächen verteilt sei, ist scheinbar nicht richtig für die permanenten Stahlmagnete, deren Fernwirkungen sich nicht aus einer magnetischen Flächenbelegung ihrer Oberfläche herleiten lassen. Es ist aber zu beachten, daß Stahl kein homogener Körper ist, sondern daß er aus Eisen und Kohle besteht, die in variablen Verhältnissen in seinem ganzen Innern vorhanden sind. Infolgedessen besteht ein Stahlstück theoretisch aus einem System von unendlich vielen Grenzflächen, an deren jeder freier Magnetismus vorhanden ist. Man kann daher auch einen Stahlmagneten

auffassen als einen Körper, in dessen Innern freier Magnetismus in beliebiger Raumdichtigkeit $m_f$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 4\pi m_f$$

verteilt ist, jedoch so, daß auch hier für jedes Volumenelement der gesamte vorhandene freie Magnetismus Null ist[1].

## § 12. Allgemeine Folgerungen.
## Änderung der Energie und Poyntingscher Satz.

**41.** Indem man die Gleichungen (I) (S. 836) mit $X$ resp. $Y$ und $Z$, die Gleichungen (II) (S. 836) mit $L$ resp. $M$ und $N$ multipliziert, diese Produkte auf ein beliebiges Volumenelement $d\tau$ anwendet und über einen beliebigen Raum $R$ integriert, erhält man durch Umformung der Raumintegrale rechts in Oberflächenintegrale eine Gleichung

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} + \displaystyle\int_R d\tau\,(uX + vY + wZ) = -\frac{1}{4\pi A}\int_O d\omega\,\Big\{(NY - MZ)\cos(n;x) \\ \qquad\qquad + (LZ - NX)\cos(n;y) + (MX - LY)\cos(n;y)\Big\}\ , \end{cases}$$

worin $S$ die gesamte elektromagnetische Energie des Raumes $R$ bedeutet.

Aus dieser Gleichung (V) ziehen wir folgende Schlüsse:

**42.** a) Wenn das betrachtete System ein in sich abgeschlossenes ist, d. h. ein solches, welches weder von außen Energie empfängt, noch nach außen Energie abgibt, so müssen an der Grenzfläche $O$ die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ und $L$, $M$, $N$ verschwinden. Die ganze linke Seite der Gleichung (VII) wird dann gleich Null und es wird

$$\frac{dS}{dt} = -\int_R (uX + vY + wZ)\,d\tau\ .$$

Die elektromagnetische Energie des Raumes ändert sich also im allgemeinen mit der Zeit.

Sind aber im Raume $R$ keine Leiter vorhanden, in welchen elektrische Ströme fließen, so sind die $u$, $v$, $w$ gleich Null in jedem Element des Raumes und es wird dann

$$\frac{dS}{dt} = 0\ , \quad \text{also} \quad S = \text{const.}$$

In einem in sich abgeschlossenen System, in welchem keine elektrischen Ströme fließen, bleibt die elektromagnetische Energie konstant.

Wenn dagegen in dem System Ströme fließen, so ist, falls wir die inneren Kräfte $X'$, $Y'$, $Z'$ zunächst vernachlässigen, $X = \frac{u}{\lambda}$, $Y = \frac{v}{\lambda}$, $Z = \frac{w}{\lambda}$ zu setzen und es wird

$$\frac{dS}{dt} = -\int \frac{d\tau\,(u^2 + v^2 + w^2)}{\lambda}\ .$$

---

[1] Das Verhalten der permanenten Stahlmagnete ist mit den einfachen Annahmen der Maxwell-Hertzschen Gleichungen nicht zu erklären. Hertz schreibt einem Stahlmagneten die Permeabilität $\mu = 1$ und wahren Magnetismus in beliebiger Verteilung zu, was auf das obige hinauskommt. Heaviside, Electrical papers 1. 441. 449. 451—455 nimmt für Stahlmagnete eine besondere eingeprägte magnetische Kraft an. Siehe auch die angeführten Werke von Abraham-Föppl, E. Cohn und H. A. Lorentz, Enzyklopädie d. math. Wissenschaften V, 2. 101. 1904.

Da das Argument des Integrales rechts für jedes Element positiv ist, so ist $\frac{dS}{dt}$ negativ, die elektromagnetische Energie nimmt also nur ab.

Da ferner $u^2 + v^2 + w^2 = \sigma^2$ ist, wo $\sigma$ die Stromdichte ist, die eine bestimmte Richtung hat, so kann man das Element $d\tau$ in das Produkt $q\,dl$ zerlegen, wo $dl$ die Richtung von $\sigma$ hat und $q$ der Querschnitt ist. Es ist dann ferner $\sigma = \frac{i}{q}$, wo $i$ die Stromstärke in der Richtung $dl$ ist und es wird

$$\frac{dS}{dt} = -\int i^2 \frac{dl}{\lambda q} \quad .$$

Die Größe $\frac{dl}{\lambda q}$ ist der unendlich kleine Widerstand $dW$ des Leiters von der Länge $dl$, dem Querschnitt $q$, der Leitungsfähigkeit $\lambda$ und es wird

$$\frac{dS}{dt} = -\int i^2\, dW \quad ,$$

welches aussagt, daß die elektromagnetische Energie sich in den stromdurchflossenen Leitern in JOULEsche Wärme verwandelt.

**43.** Während im Innern eines Leiters $XYZ$ sich durch die dort vorhandene Strömung $u\,v\,w$ allein ausdrücken lassen, treten an der Grenzfläche zweier verschiedener Leiter noch besondere Kräfte auf, welche chemischen oder thermischen Vorgängen ihren Ursprung verdanken und die sich von einem Potential ableiten lassen. Ist $\varphi$ das Potential dieser Kräfte in der Übergangsschicht, sind $\varphi_1$ und $\varphi_2$ die Werte, die das Potential an beiden Seiten der Schicht annimmt, so wird für die unendlich dünne Schicht, die eine Grenzfläche bildet,

$$\int (u X + v Y + w Z)\, d\tau = -\int \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau$$

$$= -\int d\omega \,[u(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(n x) + v(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(n y) + w(\varphi_1 - \varphi_2)\cos(n z)] \quad ,$$

wenn $n$ die Normale von 1 nach 2 ist. (Für die $u\,v\,w$ gilt nämlich die Kontinuitätsgleichung.) Setzt man die Potentialdifferenz $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{12}$, so wird in der Grenze

$$\int (u X + v Y + w Z)\, d\tau = \int_O \varphi_{12}\,[u \cos(n x) + v \cos(n y) + w \cos(n z)]\, d\omega \quad .$$

Der letzte Ausdruck zeigt, daß an jedem Flächenelement der Übergangsschicht pro Zeiteinheit ein Betrag von elektromagnetischer Energie in andere Energieformen verwandelt wird, welcher gleich ist

$$d\omega\, \varphi_{12}\,[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos n z] \quad .$$

Da

$$[u \cos(n x) + v \cos(n y) + w \cos(n z)]\, d\omega = d\omega\, \sigma \cos(\sigma n) = i \cos(i, n) = i \quad ,$$

also gleich der Stromstärke $i$ (in der Richtung der Normale) ist, so ist dort

$$\frac{dS}{dt} = \varphi_{12}\, i \quad .$$

Je nach der Richtung der Stromstärke ist also $\frac{dS}{dt}$ positiv oder negativ. Je nach der Art der elektromotorischen Grenzschicht bedeutet $\varphi_{12}$ entweder einen thermoelektrischen oder einen galvanischen Potentialsprung, im ersten Fall ist $\varphi_{12}\, i$ die an der Grenzfläche auftretende PELTIERsche Wärme, im zweiten Fall bedeutet $\varphi_{12}\, i$ die auftretende chemische Energie.

**44.** b) Wenn das elektromagnetische System **nicht** in sich abgeschlossen ist, so ist der Betrag der Zunahme der elektromagnetischen Energie $S$ und der fremden Energie $J$ in der Zeiteinheit nach Formel (V), S. 840

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{4\pi A}\int d\omega\,[(NY - MZ)\cos(n_i x) + (LZ - NX)\cos(n_i y) + (MX - LY)\cos(n_i z)] \quad .$$

Wir führen die Bezeichnung ein

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_x = \dfrac{1}{4\pi A}(MZ - NY) \quad , \\ \mathfrak{S}_y = \dfrac{1}{4\pi A}(NX - LZ) \quad , \\ \mathfrak{S}_z = \dfrac{1}{4\pi A}(LY - MX) \end{cases}$$

und nennen $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ die Komponenten des POYNTINGschen Vektors oder des Strahlvektors (weil die Strahlrichtung in der Optik durch diesen Vektor bestimmt wird). Ist dann $\mathfrak{S}$ die Größe des Strahlvektors selbst und zugleich seine Richtung, so wird

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dJ}{dt} = \int_O d\omega\,\mathfrak{S}\cos(\mathfrak{S}, n_i) \quad ,$$

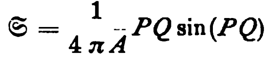
welches man nach POYNTING[1] so interpretieren kann, daß die Zunahme der Energie in einem Raume dadurch zustande kommt, daß durch jedes Flächenelement die Energie in der Richtung $\mathfrak{S}$ fließt mit einem Betrage pro Zeiteinheit, der durch die Größe von $\mathfrak{S}$ gegeben ist. Aus den Gleichungen (VI) folgt, daß

$$\mathfrak{S} \perp (XYZ)$$

und

$$\mathfrak{S} \perp (LMN)$$

steht und daß, wenn $P$ die elektrische Kraft ist, $Q$ die magnetische an einer Stelle ist, daß dann



$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi A} PQ \sin(PQ)$$

ist. Nach diesem POYNTINGschen Satz dringt die elektrische und magnetische Energie in jedes System nur durch die Oberfläche ein, in einer Richtung, welche senkrecht auf der durch $P$ und $Q$ bestimmten Ebene steht.

Figur 398.

**45.** Von diesem Satz hat POYNTING selbst sofort einige Anwendungen gemacht, von denen einige angeführt werden sollen.

$\alpha$) Ein gerader stromführender Draht. Wenn $AB$ (Figur 398) den Draht darstellt und der Strom von $A$ nach $B$ gerichtet ist, so ist die elektrische Kraft $P$ längs des Drahtes gerichtet, die magnetische Kraft bildet Kreise um $AB$. Der Strahlvektor $\mathfrak{S}$ steht deshalb senkrecht auf der Oberfläche, d. h. in der Richtung des Radius, und in dieser Richtung strömt die Energie. Durch die Enden des Drahtes geht keine Strömung, denn sie sind parallel der magnetischen Kraft. Die ganze durch die Oberfläche gehende Energie muß also gleich der im Draht in JOULEsche Wärme verwandelten sein. Es sei $r$ der Radius des Drahtes, $i$ der Strom längs des Drahtes. $\varphi_1 - \varphi_2$ die Potentialdifferenz der beiden Enden. Dann ist die Oberfläche eines Stückes von der Länge $l$ gleich

[1] J. H. POYNTING, Phil. Trans. **175**. 343. 1884.

$2\pi r l$ und es ist

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi A} PQ \quad ,$$

also

$$\text{Oberfläche} \cdot \mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi A} 2\pi r l PQ = \frac{1}{4\pi A} 2\pi r Q \cdot Pl \quad .$$

Nun ist

$$Pl = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{und} \quad 4\pi \dot{A} i = 2\pi r Q \quad ,$$

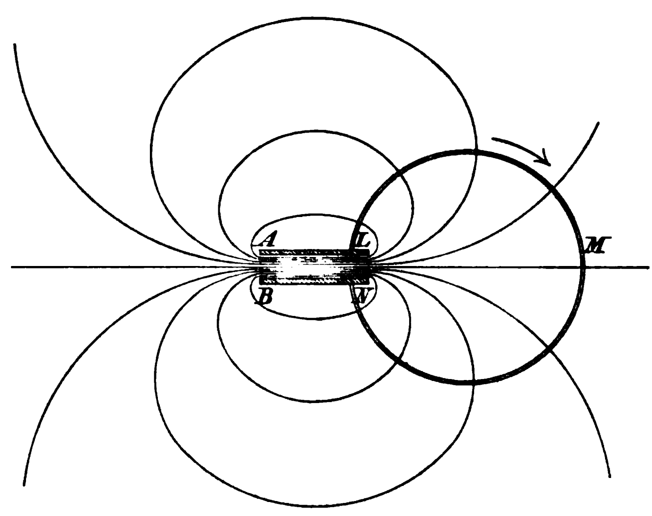
also

$$\text{Oberfläche} \cdot \mathfrak{S} = \frac{4\pi A i(\varphi_1 - \varphi_2)}{4\pi A} = i(\varphi_1 - \varphi_2) \quad .$$

Nach dem OHMschen Gesetz ist aber $\varphi_1 - \varphi_2 = iw$, also

$$\mathfrak{S} \cdot \text{Oberfläche} = i^2 w \quad .$$

**46.** $\beta$) Langsame Entladung eines Kondensators (Figur 399). Der Kondensator sei durch einen Draht $LMN$ von großem Widerstand geschlossen. Die Niveau-



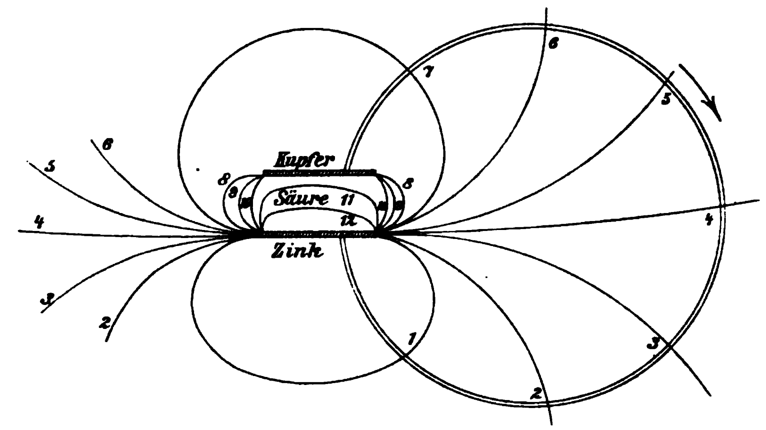

Figur 399.

flächen des Kondensators sind in der Figur richtig gezeichnet. Bei der Entladung rückt die Energie aus dem Raum zwischen der Platte heraus und dringt durch die Oberfläche in den Draht ein.

**47.** $\gamma$) Ganz ähnliche Verhältnisse liegen bei einem Stromkreis vor, der ein galvanisches Element enthält (Figur 400). Die Niveauflächen liegen dicht gedrängt zwischen Zink und Säure, weniger gedrängt zwischen Säure und Kupfer, dringen nach allen Seiten aus diesen Grenzflächen in den Raum (die Luft oder das Glasgefäß des Elementes) hinaus und treten dann senkrecht in den Draht ein, wo die Energie in Wärme verwandelt wird.

Wie in diesen Fällen, so kann man auch in andern Fällen die Richtungen, in welche die Energie wandert, graphisch konstruieren und so ein deutliches Bild der Energieströmung gewinnen[1].

[1] S. weitere Beispiele bei POYNTING, l. c.; ferner J. H. POYNTING, Phil. Trans. 1885. 277. — G. MIE, Wien. Ber. **107**. [II a] 1113. 1898; Zeitschr. f. phys. Chem. **34**. 522. 1900. — W. S. FRANKLIN, Phys. Review. **13**. 165. 348. 701. 1901. — Ferner Darstellungen und Verallgemeinerungen des POYNTINGschen Satzes: KR. BIRKELAND, Arch. sciences phys. nat. (3) **30**. 186. 1893; C. R. **116**. 803. 1893; Wied. Ann. **52**. 357. 1894. — O. HEAVISIDE, Phil. Trans. **183**. 423. 1893; Electrical papers **1**. 437, 449, 450. — W. WIEN, Wied. Ann. **45**. 685. 1892. — VASCHY, C. R. **120**. 80. 1895. — L. SILBERSTEIN, Elektrotechn. Zeitschr. **3**. 53. 1896. — H. A. LORENTZ, Ak. Vet. Amsterdam 1895/96. 38; Beibl. **22**. 59. 1898. — Einwände gegen den POYNTINGschen Satz: MAC AULAY, Phil. Trans. **183**. 686. 1893. — P. S. v. WEDELL-WEDELSBORG, Zeitschr. f. phys. Chem. **33**. 631. 1900; **35**. 604. 1900. — A. SCHEYE, ibid. **32**. 145. 1900.




Figur 400.

HERTZ[1] macht darauf aufmerksam, daß zwar der POYNTINGsche Satz eine richtige Darstellung der schließlichen Energieverhältnisse gibt, daß aber die Vorstellung von einem Strömen der Energie doch wenig Anhaltspunkte in unserer sonstigen Erfahrung hat und namentlich in der Mechanik unseren Vorstellungen widerstrebt[2].

## § 13. Elektrostatik.

**48.** In den Gleichungen der MAXWELLschen Theorie (S. 836) sind nun speziell enthalten: die statischen, stationären und variablen elektrischen und magnetischen Zustände.

Die gesamte Elektrostatik, nämlich die Verteilung der Elektrizität und die Eigenschaften der Dielektrika ergeben sich aus den allgemeinen Gleichungen, wenn $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{M}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{N}}{dt}$ allgemein gleich Null und in den Leitern $u$, $v$, $w$ ebenfalls gleich Null gesetzt werden. Die mechanischen Kräfte, welche geladene Körper ausüben und erleiden, also das COULOMBsche Gesetz ergeben sich nur, wenn man noch das Energieprinzip und die Behauptung zu Hilfe nimmt, daß die Änderung elektrischer Energie durch Änderung der Lage der geladenen Körper ihre Kompensation in der mechanischen Arbeit hat, die dabei geleistet wird. Die Folgerungen, die die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen für die Elektrostatik zu ziehen erlauben, sind in Bd. **4**, S. 84 ff. entwickelt.

## § 14. Ruhender Magnetismus.

**49.** Die Lehre vom ruhenden Magnetismus ergibt sich sehr ähnlich, wie die von der ruhenden Elektrizität. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0$$

[1] H. HERTZ, Ausbreitg. d. elektr. Kraft S. 293, Anm. 31. — [2] S. a. L. DONATI, Mem. di Bologna (5) **7**. 633. 1899.

folgt, daß die magnetischen Kräfte ein Potential $\psi$ besitzen, so daß also

$$L = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

ist.

Dieses Potential ergibt sich durch Anwendung des GREENschen Satzes, ganz wie in der Elektrostatik Bd. 4, S. 89 im allgemeinen zu

$$\psi = \int \frac{m_f \, d\tau}{r} + \int \frac{\mu_f \, d\omega}{r} \quad ,$$

wo $m_f$ die Raumdichtigkeit, $\mu_f$ die Flächendichtigkeit des freien Magnetismus ist. Da aber für jeden homogenen Körper aus der letzten Gleichung S. 844 folgt, daß

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 4 \pi m_f = 0$$

ist, so ist $\psi$ eigentlich allgemein durch ein Oberflächenintegral darzustellen.

**50.** Indes zeigt gerade der magnetische Stahl, aus den oben S. 840 erwähnten Gründen, daß diese Darstellung bei ihm nicht zutrifft. Der Stahl ist kein homogener Körper und man kann für ein magnetisiertes Stahlstück das Potential berechnen, indem man eine beliebige Anzahl freier Magnetismusmengen oder Polstärken $\pm m$ in ihm verteilt annimmt, jedoch so, daß in jedem Volumenelement die Summe aller Polstärken gleich Null ist.

Ist dann ein kleines Stück magnetischen Stahls vorhanden, ein magnetisches Molekül, und legt man in einen Punkt desselben den Anfangspunkt des Koordinatensystems der $xyz$, so daß alle Pole nur kleine Werte von $xyz$ haben, und bezeichnet man die Koordinaten desjenigen Punktes, für welchen man den Wert des Potentials berechnen will, mit $abc$, nennt man ferner $r$ den Abstand eines beliebigen Poles $xyz$ von $abc$, und $\varrho$ den Abstand des Anfangspunktes von $abc$, so daß

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ist, so wird

$$\psi = \sum \frac{m}{r} = \frac{1}{\varrho} \Sigma m + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_{r=\varrho} \Sigma m x + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)_{r=\varrho} \Sigma m y + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)_{r=\varrho} \Sigma m z \quad .$$

Da $\Sigma m = 0$ ist und

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_{r=\varrho} = -\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial a}$$

ist, so ist

$$\psi = -\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial a} \Sigma m x + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial b} \Sigma m y + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial c} \Sigma m z\right) \quad .$$

Die drei Summen, über die Pole des Moleküls erstreckt, haben die Bedeutung der Komponenten des magnetischen Moments $\hat{M}'$ des Moleküls. Es ist also

$$\Sigma m x = \alpha' = \hat{M}' \cos(\hat{M}' x) \quad ,$$

$$\Sigma m y = \beta' = \hat{M}' \cos(\hat{M}' y) \quad ,$$

$$\Sigma m z = \gamma' = \hat{M}' \cos(\hat{M}' z) \quad .$$

Nehmen wir das Molekül jetzt als Teil eines ausgedehnten Magneten an, schreiben ihm das Volumen $d\tau$ bei und setzen

$$\alpha' = \alpha\, d\tau\,, \quad \beta' = \beta\, d\tau\,, \quad \gamma' = \gamma\, d\tau \quad ,$$

wo also $\alpha, \beta, \gamma$ die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente des Magneten sind, schreiben ferner dem Molekül jetzt die Koordinaten $x, y, z$, dem Punkt, für den das Potential berechnet werden soll, noch immer die Koordinaten $a, b, c$ zu, und bezeichnen mit $r$ dieselbe Größe, die vorher mit $\varrho$ bezeichnet wurde, so ist das Potential des vollständigen Magneten

$$\psi = -\int d\tau \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right)$$

$$= +\int d\tau \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) \quad .$$

**51.** Der allgemeine Ausdruck für $\psi$ läßt sich auf verschiedene Weise interpretieren. Für einen gleichmäßig magnetisierten Körper sollen $\alpha\,\beta\,\gamma$ konstant sein. Ist dann $V$ das gewöhnliche mechanische Potential des mit der Dichtigkeit 1 erfüllt gedachten Raumes des magnetischen Körpers, also $V = \int \frac{d\tau}{r}$, so ist

$$\psi = -\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial a} + \beta \frac{\partial V}{\partial b} + \gamma \frac{\partial V}{\partial c}\right) \quad .$$

Besteht z. B. der Körper aus einer gleichmäßig magnetisierten Kugel vom Radius $R$, so ist für einen äußeren Punkt $a\,b\,c$

$$V = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{\varrho} \quad ,$$

wenn $\varrho$ der Abstand vom Mittelpunkte der Kugel ist, also

$$\psi = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{\varrho^3} (\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c) \quad .$$

**52.** Falls homogene Körper in einem magnetischen Felde sich befinden, so muß an der Grenzfläche freier Magnetismus auftreten (magnetische Induktion). Denn es ist die Normalkomponente der magnetischen Verschiebungen in beiden Medien an der Grenzfläche einander gleich, also

$$\Sigma_2 = \Sigma_1$$

und daher

$$\mu_2\, \sigma_2 = \mu_1\, \sigma_1 \quad ,$$

wenn $\sigma_1$ und $\sigma_2$ die Normalkomponenten der magnetischen Kräfte in beiden Medien sind (die Normale von 1 nach 2 genommen).

Also ist

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_2 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \sigma_2$$

oder

$$4\pi\, \mu_f = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_2 \quad ,$$

wenn $\psi$ das Gesamtpotential ist.

Das Potential der gegebenen äußeren magnetisierenden Kräfte sei $U$, das Potential des magnetisch induzierten Körpers $K$ sei $V$, dann ist

$$\psi = U + V \quad ,$$

$$V = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \int\limits_O \frac{d\psi}{\partial n} \frac{1}{r} d\omega \quad ,$$

worin $O$ die Oberfläche von $K$ bedeutet.

Ist das äußere Medium Luft, also $\mu_1 = 1$, so ist

$$V = \frac{(\mu_2 - 1)}{4\pi} \int \frac{d\psi}{\partial n} \frac{1}{r} d\omega$$

und man sieht, daß $V$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat, je nachdem $\mu_2 > 1$ (paramagnetische Körper) oder $\mu_2 < 1$ (diamagnetische Körper) ist. Allgemein wenn $\mu_2 > \mu_1$ ist, so verhält sich der induzierte Körper wie ein paramagnetischer, wenn $\mu_2 < \mu_1$ ist wie ein diamagnetischer.

Nach dem GREENschen Gesetz (Bd. 4, 18) kann man, indem man dort $P = \frac{1}{r}$, $Q = \psi$ setzt, an Stelle von $V$ schreiben

$$V = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \left[ \int\limits_K \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau - \int\limits_K \frac{d\tau}{r} \Delta\psi \right] \quad .$$

Da nun $\Delta\psi$ überall $= 0$ ist, so ist

$$V = -\frac{(\mu_2 - \mu_1)}{4\pi\mu_1} \int\limits_K \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau \quad .$$

Der induzierte Körper verhält sich also wie ein in seinem Innern magnetisierter Körper, dessen magnetische Momente pro Volumeneinheit sind

$$\alpha = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad ,$$

$$\beta = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ,$$

$$\gamma = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad .$$

Aus dem gegebenen $U$ und der Form des induzierten Körpers ist $\psi$ zu berechnen nach den Formeln

$$\psi = U + V \quad ,$$

$$V = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \int\limits_O \frac{\partial\psi}{\partial n_2} \frac{1}{r} d\omega \quad .$$

Die letztere Formel kann man auch wegen der Eigenschaften des Oberflächenpotentials schreiben

$$\frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_1} = -\frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1} \frac{\partial\psi}{\partial n_2} \quad .$$

Setzt man für den Fall, daß der Körper 1 die Luft ist, und $\mu_1 = 1$ angenommen wird,

$$\frac{\mu_2 - 1}{4\pi} = \varkappa \quad ,$$

so nennt man $\varkappa$ die Magnetisierungskonstante des Körpers ($\mu_2 = 1 + 4\pi\varkappa$) und es ist auch

$$\frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_1} = -4\pi\varkappa\frac{\partial \psi}{\partial n_2} = -4\pi\varkappa\left(\frac{\partial V}{\partial n_2} + \frac{\partial U}{\partial n_2}\right)$$

oder

$$(1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_1} = -4\pi\varkappa\frac{\partial U}{\partial n_2}$$

die charakteristische Gleichung für das Potential $V$ eines magnetisch induzierten Körpers.

**53.** Die mechanischen Kräfte zwischen magnetisierten Körpern ergeben sich, wie in der Elektrostatik, aus dem Energieprinzip. An einem Körper, an dessen einzelnen Volumelementen die magnetischen Kräfte $L$, $M$, $N$ angreifen und der dort die Polstärken $m$ besitzt, so daß $\Sigma m = 0$ ist, wirken die translatorischen Kräfte

$$F = \Sigma m L = \int L m_f d\tau \quad ,$$
$$G = \Sigma m M = \int M m_f d\tau \quad ,$$
$$H = \Sigma m N = \int N m_f d\tau$$

und die Drehungsmomente

$$D_x = \Sigma m(yN - zM) = \int m_f(yN - zM)\,d\tau \quad ,$$
$$D_y = \Sigma m(zL - xN) = \int m_f(zL - xN)\,d\tau \quad ,$$
$$D_z = \Sigma m(xM - yL) = \int m_f(xM - yL)\,d\tau \quad .$$

Sind $L$, $M$, $N$ in dem Körper konstant, befindet sich also der Körper in einem gleichmäßigen homogenen Felde, so ist

$$F = 0\,, \quad G = 0\,, \quad H = 0 \quad ,$$

$$D_x = \int(\beta N - \gamma M)\,d\tau\,, \quad D_y = \int(\gamma L - \alpha N)\,d\tau\,, \quad D_z = \int(\alpha M - \beta L)\,d\tau \quad ,$$

wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die magnetischen Momente pro Volumeneinheit des Körpers sind.

Die Anwendung dieser Gleichungen auf die Bewegung von paramagnetischen und diamagnetischen Körpern in einem Magnetfelde gibt folgendes:

Bringt man einen schwach magnetischen (paramagnetischen oder diamagnetischen) Körper in ein homogenes, mit Luft erfülltes Feld, so sind die mechanischen Kräfte, die auf ihn wirken, von der Ordnung $(\mu - 1)^2$, oder, wenn statt der Luft eine andere Substanz von der Permeabilität $\mu_0$ den Körper umgibt, von der Ordnung $\left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right)^2$. Diese Kräfte sind also außerordentlich klein und in unseren stärksten Feldern nicht zu beobachten. Die wirklichen Bewegungen und Einstellungen solcher Körper rühren immer her von der Inhomogenität der Felder. In solchen ist nämlich die mechanische Kraft, die in der Richtung der $x$-Achse wirkt,

$$F = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\frac{dL^2}{dx} \quad .$$

In solchen inhomogenen Feldern stellen sich diamagnetische Stäbchen transversal zu den Kraftlinien, paramagnetische parallel zu denselben.

**54.** Die Theorie des magnetischen Potentials gibt eine exakte Darstellung der FARADAYschen Konzeption der Anzahl der Kraftlinien. Wenn man nämlich die Flächen gleichen Potentials sich gezogen denkt, die zu irgend einem magnetischen System gehören, so werden diese Flächen alle senkrecht geschnitten durch eine Schar von Kurven, die man zunächst als Kraftlinien bezeichnet. Schneidet man auf einer dieser Flächen gleichen Potentials ein kleines Flächenelement $q$ ab und zieht von allen Punkten des Umfanges dieses Elementes aus Linien in der Richtung der Kraft, so erhält man eine Kraftröhre. Aus der Gleichung $\Delta\psi = 0$, die für den ganzen Raum gilt, erhält man, indem man die Kraftröhre durch zwei Querschnitte $q_1$ und $q_2$ begrenzt und den Satz (Bd. 4, 18, Formel 1)

$$\int \Delta\psi \, d\tau = -\int \frac{\partial\psi}{\partial n} d\omega$$

auf diesen Teil der Röhre anwendet,

$$\sigma_1 q_1 = \sigma_2 q_2 \quad ,$$

wo $\sigma_1$ und $\sigma_2$ die magnetischen Kräfte sind, die an den beiden unendlich kleinen Querschnitten vorhanden sind. Es ist also in der ganzen Kraftröhre

$$\sigma q = \text{konst.}$$

Beim Übergang aus einem Medium in ein anderes macht die magnetische Kraft $\sigma$ einen Sprung, da dort freier Magnetismus auftritt. Verfolgen wir also eine Kraftröhre durch zwei verschiedene Medien hindurch, so macht der Querschnitt an der Grenzfläche einen Sprung. Die magnetische Verschiebung $\Sigma$ (senkrecht zur Grenzfläche) macht aber keinen Sprung. Die Größe $q\Sigma$ bleibt daher beim Durchgang durch eine Grenzfläche ebenfalls ungeändert und auch der Querschnitt einer solchen Röhre ändert sich nirgends sprungweise, sondern nur stetig. Eine solche Röhre nennt man zweckmäßig eine Induktionsröhre, gewöhnlich aber wird auch für sie der Name Kraftröhre beibehalten. Teilt man nun ein endliches Stück einer Fläche gleichen Potentials in lauter solche Elemente ein, daß für jedes Element

$$q\Sigma = 1$$

ist, so ist also, da

$$\Sigma = -\mu \frac{\partial\psi}{\partial n} = +\mu\,[L\cos(nx) + M\cos(ny) + N\cos(nz)]$$

$$= \mathfrak{L}\cos(nx) + \mathfrak{M}\cos(ny) + \mathfrak{N}\cos(nz) \quad ,$$

ist

$$q\Sigma = d\omega\,[\mathfrak{L}\cos(nx) + \mathfrak{M}\cos(ny) + \mathfrak{N}\cos(nz)] = 1$$

und daher ist das über das Stück der Niveaufläche ausgedehnte Integral über diesen Differentialausdruck gleich der Zahl der Induktionsröhren $\Xi$, welche die Niveaufläche durchsetzen. Für irgend eine andere Fläche $O$, die beliebig die Induktionsröhren schneidet, hat immer noch $q\Sigma$ den Wert 1 und es ist daher auch für diese

$$\int_O [\mathfrak{L}\cos(nx) + \mathfrak{M}\cos(ny) + \mathfrak{N}\cos(nz)]\,d\omega = \Xi \quad .$$

Man bezeichnet $\Xi$, welches eigentlich die Zahl der Induktionsröhren bedeutet, die die Fläche schneiden, kurz als die Zahl der Kraftlinien, die die Fläche $O$ schneiden, indem man sich in der Achse jeder Induktionsröhre eine Kraftlinie gezeichnet denkt. Für irgend einen endlichen Querschnitt $Q$, an welchem $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, also auch $\Sigma$, an allen Punkten denselben Wert haben, ist

$$\Sigma \cdot Q = \Xi$$

oder

$$\Sigma = \frac{\Xi}{Q} \quad .$$

Da die Permeabilität $\mu$ überall, außer im Eisen, nahezu den Wert 1 hat, so kann man dies so interpretieren, indem man statt $\Sigma$ vielmehr $\sigma$ einführt:

Die magnetische Kraft $\sigma$ an irgend einer Stelle ist gleich der Zahl der Kraftlinien, welche eine an diese Stelle gelegte Flächeneinheit senkrecht schneiden, oder kurz gleich der Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit.

## § 15. Stationäre Ströme. Stromverteilung.

**55.** Bei stationären Zuständen gehen die MAXWELLschen Gleichungen über in folgende:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 4\pi A u = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} , \\ 4\pi A v = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} , \\ 4\pi A w = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} . \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = 0 , \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 0 , \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = 0 . \end{cases}$$

$$u = \lambda X, \quad v = \lambda Y, \quad w = \lambda Z .$$

Aus den Gleichungen (II) folgt, daß $XYZ$ noch immer ein Potential $\varphi$ besitzen. Die Gleichungen (I) geben durch Differentiation nach $xyz$ und Addition

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

für das Innere jedes Volumenelements.

Diese Gleichung geht vermöge der Werte von $uvw$ für das Innere jedes Volumenelements über in

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 .$$

Für das Innere eines homogenen Leiters reduziert sich diese Gleichung auf

$$\Delta \varphi = 0 .$$

An der Grenzfläche zweier verschiedener Medien entspricht diese Gleichung der folgenden

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 - \lambda_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = 0 .$$

Für die Grenzfläche eines Leiters und eines Isolators (für welchen $\lambda = 0$ ist) geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 .$$

An der Grenzfläche zweier verschiedener Leiter tritt erfahrungsgemäß noch eine besondere Bedingung auf, nämlich die, daß der Sprung des Potentials an einer Grenzfläche einen nur von der Natur der beiden aneinandergrenzenden Leiter abhängigen Wert hat:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{12} .$$

Diese Gleichungen sind die Grundgleichungen der Theorie der Stromverteilung. Nehmen wir zunächst einen unendlich dünnen Leiter, einen linearen Leiter, der etwa in der Richtung der $z$-Achse ausgespannt und der von einem Isolator umgeben sei und in dem ein stationärer Strom fließt, so muß erstens, da $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sein muß, an jeder Stelle der Querschnitt aber als unendlich dünn angenommen wird, $\varphi$ in jedem Querschnitt konstant sein. Es kann daher $\varphi$ nur abhängen von $z$ und die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ geht über in

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \quad ,$$

deren Lösung, $\varphi = a + bz$, angewendet auf zwei Querschnitte mit den Koordinaten $z_0$ und $z'$, ergibt $\varphi' - \varphi_0 = b(z' - z_0)$. Da $z' - z_0$ die Länge $L$ des Drahtes zwischen den beiden Querschnitten ist, so ist $\varphi' - \varphi_0 = bL$.

Ferner sind für unseren Fall

$$u = \lambda X = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 , \qquad v = \lambda Y = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad ,$$

$$w = \lambda Z = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\lambda b \quad .$$

Es ist also die Stromdichtigkeit $w$ im ganzen Draht konstant und daher auch die Stromstärke $i = qw$, wo $q$ der Querschnitt des Drahtes ist. Es ist also

$$b = -\frac{i}{q\lambda}$$

und daher

$$\varphi_0 - \varphi' = i\frac{L}{q\lambda} \quad .$$

Die Größe $\frac{L}{\lambda q}$ ist der Widerstand $W$ des Drahtes von der Länge $L$, Querschnitt $q$, Leitungsfähigkeit $\lambda$, und daher ist die Potentialabnahme oder der Spannungsverlust eines stationären Stromes auf die Länge $L$

$$\varphi_0 - \varphi' = iW \quad .$$

Der Spannungsunterschied auf eine Länge $L$ eines Leiters ist auch, anders ausgedrückt,

$$\varphi_0 - \varphi' = iW = \frac{iL}{q\lambda} = \int_0^L \frac{\sigma}{\lambda}\, dl = \int_0^L (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \quad ,$$

also gleich dem über die Länge des Leiters erstreckten Integral über die Arbeit der elektrischen Kräfte.

In einem geschlossenen Kreis aus linearen Leitern ist daher, wenn $W$ der Gesamtwiderstand ist

$$iW = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \cdots \varphi_{n1} \quad .$$

In Leitern erster Klasse ist

$$\varphi_{12} + \varphi_{23} + \cdots \varphi_{n1} = 0 \quad ,$$

ein Strom entsteht daher durch die Potentialsprünge an den Grenzen nicht. In Leitern zweiter Klasse ist $\varphi_{12} + \varphi_{23} + \cdots \varphi_{n1} = E$ von Null verschieden. $E$ wird die elektromotorische Kraft des Kreises genannt und das OHMsche Gesetz

$$i = \frac{E}{W}$$

ist eine Folge unserer Gleichungen.

**56.** Für verzweigte Ströme folgen in gleicher Weise die KIRCHHOFFschen Gesetze, für flächenhaft oder körperlich ausgedehnte Leiter geben unsere Gleichungen, passend auf die einzelnen Fälle angewendet, die Potentialverteilung. Senkrecht zu den Flächen gleichen Potentials sind die Stromlinien. Die Grenze eines Leiters, an der er an einen vollkommenen Isolator grenzt, ist immer aus Stromlinien gebildet.

Aus der Verteilung des Potentials folgen für jede Stelle des Leiters die Stromdichtigkeiten aus

$$u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad ,$$

ferner die ganze Stromdichtigkeit

$$\sigma = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \quad .$$

## § 16. Elektromagnetische Wirkungen stationärer Ströme.

**57.** Ist die Verteilung der Ströme in einem gegebenen System von Leitern bekannt, sind also die $u\,v\,w$ gegebene Funktionen von $x\,y\,z$, so bestimmen sich die magnetischen Kräfte an jeder Stelle des Raumes durch die Gleichungen

$$4\pi A u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad ,$$

$$4\pi A v = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \quad ,$$

$$4\pi A w = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \quad .$$

Dabei ist in jedem Raumelement

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad .$$

Außerhalb der Leiter, also wo $u\,v\,w$ gleich Null sind, müssen die magnetischen Kräfte auch hier ein Potential besitzen. Innerhalb der Leiter aber nicht.

Um die Gleichungen zu integrieren, setzt man

$$L = A\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

$$M = A\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ,$$

$$N = A\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad .$$

Die Glieder mit $\psi$ stellen nach dem Obigen die magnetischen Kräfte dar, welche von ruhenden Magnetismen herrühren und die sich den magnetischen Kräften überlagern, die von den Strömen herrühren. Indem wir sie außer acht lassen, haben wir

$$L = A\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right), \quad M = A\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad N = A\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) \quad .$$

Durch Eintragen ergibt sich

$$4\pi u = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad .$$

Setzt man
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \chi \quad ,$$
so wird
$$4\pi u = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \Delta U \quad ,$$
$$4\pi v = \frac{\partial \chi}{\partial y} - \Delta V \quad ,$$
$$4\pi w = \frac{\partial \chi}{\partial z} - \Delta W \quad .$$

Die Gleichung
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ,$$
die für stationäre Ströme überall gelten muß, ist erfüllt.

Führen wir für den Moment statt $UVW$ drei andere Größen ein $U'V'W'$, die definiert sind durch
$$4\pi u = -\Delta U', \quad 4\pi v = -\Delta V', \quad 4\pi w = -\Delta W' \quad ,$$
so wird
$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \Delta(U - U'), \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \Delta(V - V'), \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = \Delta(W - W') \quad .$$
also
$$U - U' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \chi}{\partial x}\,\frac{1}{r}\,d\tau \quad ,$$
$$V - V' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \chi}{\partial y}\,\frac{1}{r}\,d\tau \quad ,$$
$$W - W' = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \chi}{\partial z}\,\frac{1}{r}\,d\tau \quad .$$
$U$ unterscheidet sich also von $U'$ nur durch Größen, die von $\chi$ abhängen. In den Ausdrücken für $LMN$ kommt aber das $\chi$ überhaupt nicht vor. Wir können deshalb $\chi$ dauernd gleich 0 setzen und daher $UVW$ bestimmen durch
$$\Delta U = -4\pi u\,, \quad \Delta V = -4\pi v\,, \quad W = -4\pi w \quad .$$
Aus diesen Gleichungen folgt
$$U = \int \frac{u\,d\tau}{r}, \quad V = \int \frac{v\,d\tau}{r}, \quad W = \int \frac{w\,d\tau}{r} \quad .$$
Die Integrale sind über den ganzen Raum ausgedehnt, der von stromführenden leitenden Körpern eingenommen wird. Man bezeichnet $UVW$ als die Komponenten des Vektorpotentials.

**58.** Für den Fall, der praktisch der wichtigste ist, daß die Ströme in linearen Leitern fließen, ist, wenn der Querschnitt des Drahtes mit $q$, ein Längenelement mit $dl'$ bezeichnet wird,
$$u\,d\tau = u\,q\,dl' = i'\cos(i', x)\,dl' = i'\cos(l', x)\,dl' = i'\,dx' \quad .$$
und es wird
$$U = i'\int \frac{dx'}{r}, \quad V = i'\int \frac{dy'}{r}, \quad W = i'\int \frac{dz'}{r} \quad ,$$
wenn mit $dx'\,dy'\,dz'$ die Komponenten von $dl'$ und mit $i'$ die Stromstärke in dem Kreis bezeichnet werden.

Daher ist

$$L = A i' \int \left( \frac{\partial y'}{\partial l'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z'}{\partial l'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dl' ,$$

$$M = A i' \int \left( \frac{\partial z'}{\partial l'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial x'}{\partial l'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dl' ,$$

$$N = A i' \int \left( \frac{\partial x'}{\partial l'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial l'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) dl' .$$

Aus diesen Werten für die magnetische Kraftkomponenten kann man — nicht notwendig, aber zulässig — entnehmen, daß ein einzelnes Element $dl'$ eines geschlossenen (weil stationären) Stromes zu der ganzen Kraft den Anteil beiträgt, der durch das Argument des Integrales angegeben ist. Diese Behauptung ist aber nur zulässig für Elemente von geschlossenen Strömen, ihre Ausdehnung auf ungeschlossene Ströme ist hypothetisch. Jedoch liegt gerade diese Ausdehnung dem ganzen MAXWELL-HERTZschen Gleichungssystem zugrunde. Die magnetische Kraft $Q'$ eines Stromelementes hat dann, wie man leicht sieht, eine Richtung, die senkrecht steht auf der Richtung von $dl'$ und senkrecht steht auf $r$ und die der AMPÈREschen Schwimmerregel entspricht. Ihre Größe entspricht dem BIOT-SAVARTschen Gesetz

$$Q' = \frac{A i' \, dl' \sin(r, dl')}{r^2} .$$

**59.** Durch Anwendung des STOKESschen Satzes kann man für die Kraftkomponenten eines geschlossenen Stromes einen andern Ausdruck bilden. Der STOKESsche Satz lautet, wenn $PQR$ irgendwelche Funktionen sind, die auf einer ungeschlossenen Fläche $O$ mit der Randkurve $C$ beliebige Werte haben:

$$\iint_O d\omega \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n x) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n y) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n z) \right]$$

$$= \int_C dl \left( P \frac{\partial x}{\partial l} + Q \frac{\partial y}{\partial l} + R \frac{\partial z}{\partial l} \right) .$$

Indem man für $P$, $Q$, $R$ die passenden Werte einsetzt, ergibt sich, daß die Werte von $LMN$ sich folgendermaßen darstellen:

$$L = A i' \frac{\partial}{\partial x} \int_O d\omega' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} ,$$

$$M = A i' \frac{\partial}{\partial y} \int_O d\omega' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} ,$$

$$N = A i' \frac{\partial}{\partial z} \int_O d\omega' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} ,$$

daß also die magnetischen Kräfte an jeder Stelle außerhalb der Strombahn ein Potential besitzen

$$\psi = -Ai\int\limits_O d\omega' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} + C \quad ,$$

in welchem $O$ eine beliebige Fläche bedeutet, die durch die Stromkurve begrenzt ist. Beim Durchgang durch die Fläche macht $\psi$ jedesmal einen Sprung im Betrage von $4\pi Ai$, es ist also eine mehrdeutige Funktion. Das Potential $\psi$ ist dasselbe, wie dasjenige, welches eine magnetische Fläche $O$ ausüben würde, die auf der einen Seite nordmagnetisch, auf der andern Seite südmagnetisch ist und die pro Flächeneinheit das Moment besitzt $Ai$. Es läßt sich also jeder geschlossene Strom in seinen magnetischen Wirkungen nach außen ersetzen durch einen kleinen Magneten von dem Moment $Ai\Omega$, wenn $\Omega$ die Größe der vom Strom umschlossenen Fläche ist. Umgekehrt können wir mit AMPÈRE jedes Molekül eines Magneten durch einen solchen Kreisstrom ersetzen.

Durch einfache Umformung erhält man weiter

$$\psi = -Ai\int d\omega' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} = +Ai\int \frac{1}{r^2}\cos(rn')\,d\omega'$$

$$= \pm Ai\int \frac{1}{r^2}\,df = \pm Ai\int dF = \pm Ai\,F \quad ,$$

wenn

$$dF = \frac{df}{r^2}\,, \qquad df = \pm d\omega' \cos(rn')$$

ist.

Es bedeutet darin $F$ den körperlichen Winkel, unter dem die Strombahn von dem betrachteten Punkte aus gesehen wird, und es ist das $\pm$ Zeichen zu nehmen, je nachdem die Richtung von $r$ mit der Richtung von $n$ einen spitzen oder einen stumpfen Winkel macht.

**60.** Die Gleichungen und Ausdrücke für die magnetischen Kräfte eines Stromes gestatten nun vielfache Anwendungen.

Die Magnetisierung eines Eisenkörpers durch stationäre Ströme läßt sich ohne weiteres behandeln durch die oben S. 847 angegebenen Formeln. Es war dort

$$\psi = U + V \quad ,$$

wenn $U$ das gegebene magnetische Potential, also hier das eben mit $\psi$ bezeichnete Potential der Ströme, und $V$ das Potential des magnetisch gewordenen Eisens ist. Ferner war, wenn der Eisenkörper von der Permeabilität $\mu$ sich in Luft befand,

$$V = \frac{(\mu - 1)}{4\pi}\int \frac{\partial \psi}{\partial n_i}\frac{1}{r}\,d\omega \quad ,$$

oder an der Oberfläche des Eisenkörpers

$$\mu\frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_1} = -(\mu - 1)\frac{\partial U}{\partial n_2} \quad .$$

Die magnetischen Momente (pro Volumeneinheit) an einem Punkt $xyz$ des Eisenkörpers waren dann

$$\alpha = -\frac{(\mu - 1)}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\,, \quad \beta = -\frac{(\mu - 1)}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \quad \gamma = -\frac{(\mu - 1)}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad .$$

Für den Fall, daß die magnetischen Kräfte $LMN$ kein Potential haben, ist

$$\alpha = -\frac{(\mu-1)}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - L\right) \quad ,$$

$$\beta = -\frac{(\mu-1)}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - M\right) \quad ,$$

$$\gamma = -\frac{(\mu-1)}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - N\right) \quad .$$

Ferner

$$\mu\frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_1} = (\mu - 1) S_2 \quad ,$$

wo $S_2$ die Komponente der äußeren magnetischen Kräfte an der Oberfläche des Eisenkörpers im Innern ist.

**61.** Als Beispiel für die Berechnung kann ein GRAMMEscher Ring dienen, der ganz mit Draht umwickelt ist[1]. Es steht dann die magnetische Kraft, die von jeder Windung eines Kreisstromes ausgeübt wird, im Ring an allen Stellen senkrecht auf der Ebene der Kreiswindungen. Es ist daher die Kraft $S_2$, die oben vorkommt, und welche die Richtung der Normale an einen Punkt der Oberfläche des Rings haben soll, Null. Mithin wird aus der Oberflächenbedingung

$$\mu\frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_1} = 0 \quad ,$$

und da dies für jedes $\mu$ gelten soll, so muß $V = \text{const.}$ sein. Der Eisenring übt überhaupt keine Kraft nach außen aus. Es ist also, wenn die äußeren Kräfte ein Potential $U$ haben,

$$\alpha = -\frac{(\mu-1)}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{(\mu-1)}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{(\mu-1)}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial z}$$

oder, wenn sie es nicht haben,

$$\alpha = +\frac{\mu-1}{4\pi}L, \qquad \beta = \frac{\mu-1}{4\pi}M, \qquad \gamma = \frac{\mu-1}{4\pi}N \quad .$$

Also hat das magnetische Hauptmoment $\hat{M}$ die Richtung der magnetischen Kraft $Q$ und ist dieser proportional

$$\hat{M} = \frac{\mu-1}{4\pi}Q \quad .$$

Die Größe der magnetischen Kraft an einer Stelle, die den Abstand $\varrho$ von der Rotationsachse des Ringes hat, ist, wenn $n$ die Anzahl der Drahtwindungen auf dem Ring bedeutet,

$$Q = \frac{2Ain}{\varrho} \quad .$$

Ist der Ring nicht zu eng gebogen, so ist $\varrho$ für die einzelnen Punkte eines Querschnittes nicht zu sehr verschieden. Bezeichnen wir daher mit $l$ die Länge der kreisförmigen Mittellinie des Ringes, so ist streng für Punkte auf dieser, aber angenähert für alle andern Punkte

$$Q = \frac{4\pi Ain}{l} \quad .$$

[1] G. KIRCHHOFF, Ges. Abh. 217. — H. E. J. G. DU BOIS, Wied. Ann. **46**. 491. 1892; Magnetische Kreise, München 1894.

Die Zahl der Kraftlinien (Induktionslinien), welche durch einen Querschnitt des Ringes hindurchgehen, ist

$$\Xi = \mu \int Q \, d\omega \quad ,$$

also

$$\Xi = \frac{4 \pi \mu A i n q}{l} \quad ,$$

wenn unter $q$ der Querschnitt des Ringes verstanden wird.

Die Größe $\frac{l}{\mu q} = w$ bezeichnet man als den magnetischen Widerstand des Ringes. Führt man ferner statt der elektrostatischen Einheiten für die Stromstärke $i$ vielmehr die elektromagnetischen Einheiten ein, so ist

$$A i = i_m \quad ,$$

und wenn man noch als Einheit das Ampere nimmt und die Stromstärken, in Ampere gemessen, mit $J$ bezeichnet, so ist

$$i_m = \frac{J}{10}$$

und es wird

$$\Xi = \frac{4 \pi}{10} \frac{J n}{w} \quad .$$

Die Größe $\frac{4\pi}{10} J n$ bezeichnet man als die magnetomotorische Kraft $M$ und der Ausdruck

$$\Xi = \frac{M}{w}$$

entspricht formell ganz dem OHMschen Gesetz. Diese Formel, das OHMsche Gesetz für den Magnetismus, ist die Grundlage für die Berechnung der Dynamomaschinen, wie sie zuerst von HOPKINSON gelehrt wurde[1].

Andere Beispiele für die durch Ströme erzeugte induzierte Magnetisierung sind noch mehrfach berechnet worden[2].

**62.** Den Ausdruck für das Potential der magnetischen Kräfte, herrührend von einem linearen Stromkreis

$$\psi = -A i' \int_O d\omega' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} \quad ,$$

kann man noch in anderer Weise interpretieren.

Es ist

$$\psi = -A i' \int_O d\omega' \left[ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos(n' x') + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \cos(n' y') + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \cos(n' z') \right] \quad .$$

Darin bedeuten $x' y' z'$ die Koordinaten eines Punktes der Fläche, $x y z$ die Koordinaten desjenigen Punktes, auf welchen sich das Potential bezieht.

Denkt man sich nun im Punkte $x y z$ einen magnetischen Einheitspotential, so ist dessen Potential am Punkte $x' y' z'$ gleich $\frac{1}{r}$ und die magnetischen Kräfte,

---

[1] Siehe W. SIEMENS, Wied. Ann. **24**. 93. 1885. — [2] G. KIRCHHOFF, Ges. Abh. l. c. — H. E. J. G. DUBOIS, Magnetische Kreise, München 1894. — E. MASCART, C. R. **102**. 992. 1886. — P. JANET, C. R. **110**. 453. 1890.

die er am Punkte $x' y' z'$ erzeugt, sind

$$L' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}, \quad M' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}, \quad N' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \quad .$$

Daher ist auch

$$\psi = A i' \int_O [L' \cos(n' x) + M' \cos(n' y) + N' \cos(n' z)] \, d\omega \quad .$$

Das letzte Integral ist aber gleich der Zahl der Kraftlinien $\Xi$, welche von dem Einheitspol $(x y z)$ durch die Fläche $O$ hindurchgesendet werden. Also ist

$$\psi = A i' \Xi \quad .$$

Dieselbe Betrachtung gilt auch für den Fall, daß man nicht einen Einheitspol in $x y z$, sondern einen wirklichen Magneten hat. Dann geht das magnetische Potential $\psi$ über in das (mechanische) Potential $\Psi$ der mechanischen Kräfte zwischen dem Magneten und dem Strom.

**63.** Die mechanischen Kräfte, die der ganze Strom $i'$ auf einen Magnetpol von der Stärke $m$ ausübt, lassen sich durch Integration über die einzelnen Elemente des Stromkreises erhalten. Wir können daher rechnerisch richtig als mechanische Elementarkräfte $f$, $g$, $h$ von einem Stromelement $(x' y' z')$ auf einen Pol von der Stärke $m (x y z)$ folgende Ausdrücke hinstellen

$$f = A i' m \left( dy' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - dz' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) \quad ,$$

$$g = A i' m \left( dz' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - dx' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) \quad ,$$

$$h = A i' m \left( dx' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - dy' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right) \quad .$$

Die Kräfte $f'$, $g'$, $h'$, die der Pol auf das Stromelement ausübt, kann man, indem man das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung auf diesen Fall anwendet, den $f g h$ entgegengesetzt gleich setzen, sie werden also aus den obigen Ausdrücken erhalten, indem man für $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}$ schreibt $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$.

Soweit nun der Stromleiter ein starrer Körper ist, so setzen sich die Einzelkräfte, die von dem Pol $m$ auf die Elemente ausgeübt werden, zusammen zu einer Translationskraft

$$F' = \Sigma f' , \quad G' = \Sigma g' , \quad H = \Sigma h'$$

und zu Drehungsmomenten um die drei Achsen

$$D'_x = \Sigma (z' g' - y' h') , \quad D'_y = \Sigma (x' h' - z' f') , \quad D'_z = \Sigma (y' f' - x' g') \quad .$$

Rechnet man die Drehungsmomente für den ganzen geschlossenen Stromkreis aus, so findet man

$$D'_x = -A i' m \int \left( z' dz' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - z' dx' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - y' dx' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + y' dy' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right)$$

$$= -A i' m \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} (y' dy' + z' dz') - dx' \left( z' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} + y' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right)$$

oder, indem man $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} x' dx'$ additiv und subtraktiv hinzufügt,

$$= -A i' m \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} (x' dx' + y dy' + z' dz') - dx' \left( x' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + y' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + z' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right)$$

$$= + A i' m \int \left( \frac{x' dr}{r^2} - \frac{dx'}{r} \right)$$

$$= -A i' m \int d \left( \frac{x'}{r} \right) \quad .$$

Für einen geschlossenen Strom sind also

$$D'_x = 0 \,, \quad D'_y = 0 \,, \quad D'_z = 0 \quad .$$

Ein ganzer geschlossener Stromkreis kann also unter dem Einfluß eines Magnetpols (oder auch eines Magneten als eines Systems von Polen) nie in Drehung versetzt werden.

**64.** Wohl aber kann ein Teil des Stromkreises, wenn er für sich drehbar ist, in Rotation versetzt werden und das Drehungsmoment berechnet sich dann durch

$$D'_x = -A i' m \int d \left( \frac{x'}{r} \right) = -A i' m \int d [\cos(r x)] \quad ,$$

$$D'_y = -A i' m \int d [\cos(r y)] \quad ,$$

$$D'_z = -A i' m \int d [\cos(r z)] \quad .$$

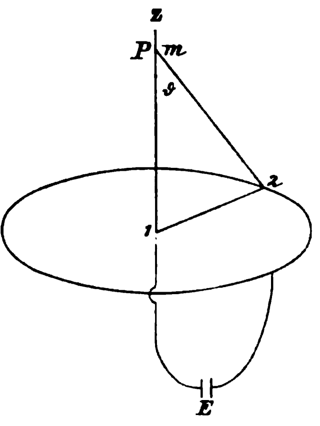


Fig. 401.

Ein Beispiel[1] dafür bietet (Figur 401) eine kreisförmige Quecksilberrinne, auf der ein leitender Radius 1, 2 sich drehen kann. Der Drehpunkt des Radius, sowie die Quecksilberrinne sind mit einem Element $E$ verbunden, ein Magnetpol befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises im Abstand $z$. Das Drehungsmoment um die $z$-Achse wird

$$D'_z = -A i' m \int_1^2 d [\cos(r z)] \quad .$$

Da $\cos(r z)$ für den Punkt 2 gleich $\cos\vartheta$, für den Punkt 1 gleich 1 ist, so ist

$$D'_z = A i' m (1 - \cos\vartheta) \quad .$$

**65.** Man kann die Arbeit, die bei der Bewegung eines Stromelements unter dem Einfluß eines Pols geleistet wird, auf einen einfachen Ausdruck bringen.

[1] Andere Beispiele: E. COHN, Elektromagnetisches Feld 267 ff.

Das Stromelement werde um $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ verschoben, dann ist die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte

$$\delta W = f'\delta x' + g'\delta y' + h'\delta z' \quad .$$

Hat speziell das Stromelement die Richtung der $y$-Achse, so daß $dx' = 0$, $dz' = 0$. und wird es verschoben in der Richtung der $z$-Achse, also $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, so ist

$$h' = A i m\, dy' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}$$

und

$$\delta W = h'\delta z' = A i' m\, dy' \delta z' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \quad .$$

Nun ist $y'\delta z'$ gleich der Fläche $\lambda'$, welche das Element $dy'$ bei der Verschiebung beschreibt, und es ist

$$\delta W = \pm \frac{A i' m}{r^2} \lambda' \cos(r x) \quad .$$

Die $x$-Achse ist die Normale von $\lambda'$, also ist $\lambda' \cos(r x)$ die Projektion von $\lambda'$ auf $r$, welche gleich $\sigma'$ sei und $\frac{\sigma'}{r^2}$ ist gleich $F'$, gleich dem körperlichen Winkel, den $\lambda'$, vom Pole aus gesehen, bildet, also ist

$$\delta W = \pm A i' m F' \quad .$$

Das gilt für beliebige Stromelemente bei beliebiger Verschiebung, also auch für endliche Stromteile.

Aus dieser Darstellung in Verbindung mit 62 folgt, daß die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um einen konstanten Strom in einem magnetischen Felde zu verschieben, gleich $Ai$ multipliziert mit der Zahl der Kraftlinien ist, welche bei der Verschiebung von der Strombahn geschnitten werden.

**66.** Daraus ergibt sich ein leichter Übergang zu der mathematischen Darstellung der elektrodynamischen Erscheinungen: So wie die magnetische Kraft ein Potential $\psi$ besitzt, so besitzen auch die mechanischen Kräfte zwischen einem Strom und einem Magnetsystem ein Potential $Q$, und zwar ist $Q = A i \Xi$, wo $\Xi$ die Anzahl der Kraftlinien ist, die durch die Fläche des Stromes hindurchgehen. Es ist also

$$\Xi = \int_O [L \cos(n x) + M \cos(n y) + N \cos(n z)]\, d\omega \quad .$$

Ist nun das Magnetsystem dasjenige, welches von einem zweiten Strom mit der Stärke $i'$ herrührt, welcher eine Fläche $O'$ umschließt, so sind die Kräfte $L$, $M$, $N$, welche dieser an einem Punkte von $O$ erzeugt, abgeleitet von einem Potential $\psi'$, nämlich

$$\psi' = -A i' \int_{O'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\omega' \quad .$$

Und es ist also

$$\Xi = -\int_O \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\omega = -\int_O \frac{\partial \psi'}{\partial n}\, d\omega \quad ,$$

also

$$Q = +A^2 i i' \iint\limits_{\sigma\ \sigma'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n\, \partial n'}\, d\omega\, d\omega' \quad .$$

Dies ist das elektrodynamische Potential zweier Stromkreise aufeinander[1].

**67.** Wir erhalten einen anderen Ausdruck für $Q$, indem wir in der Gleichung

$$\Xi = \int\limits_{\sigma} [L \cos(n x) + M \cos(n y) + N \cos(n z)]\, d\omega$$

für die Kräfte $L, M, N$, die von dem Strom $i'$ herrühren, die Ausdrücke als Differentialquotienten der Komponenten des Vektorpotentials $U' V' W'$ einsetzen. Es ist dann

$$\Xi = A \int\limits_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial y} \right) \cos(n x) + \left( \frac{\partial W'}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial z} \right) \cos(n y) + \left( \frac{\partial U'}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial x} \right) \cos(n z) \right] d\omega$$

oder nach dem STOKESschen Satz

$$\Xi = -A \int\limits_{C} dl [U' \cos(x l) + V' \cos(y l) + W' \cos(z l)]$$

und daher

$$Q = -A^2 i \int\limits_{C} dl \left( U' \frac{\partial x}{\partial l} + V' \frac{\partial y}{\partial l} + W' \frac{\partial z}{\partial l} \right) \quad .$$

Nun ist aber

$$U' = i' \int\limits_{C'} dl' \frac{\partial x'}{\partial l'} \frac{1}{r} \quad ,$$

$$V' = i' \int\limits_{C'} dl' \frac{\partial y'}{\partial l'} \frac{1}{r} \quad ,$$

$$W' = i' \int\limits_{C'} dl' \frac{\partial z'}{\partial l'} \frac{1}{r} \quad ,$$

also wird

$$Q = -A^2 i i' \iint\limits_{C\ C'} \frac{dl\, dl' \cos(dl, dl')}{r} \quad .$$

Das Integral über die beiden Stromkurven ausgedehnt

$$\Omega = \iint\limits_{C\ C'} \frac{dl\, dl' \cos(dl, dl')}{r}$$

nennt man das F. NEUMANNsche Potential[2].

[1] Allgemeine und spezielle Probleme über elektromagnetische und elektrodynamische Kraftwirkungen behandeln: F. KOLACZEK, Prag. Ber. **18**. 1894. 6 pp.; Fortsch. d. Phys. 1894. 735. — W. WIEN, Wied. Ann. **59**. 523. 1896 (HELMHOLTZ-sches Elektrodynamometer). — H. DIESSELHORST, Berl. Dissert. 31 pp. 1896; Beibl. **21**. 50. 1897 (dasselbe). — O. COLARD, L'éclairage él. **3**. 62. 102. 162. 1895 (fadenförmiger Leiter im magnetischen Feld). — G. M. MINCHIN, The Electrician **903**. 603; **906**. 706. 1895; Beibl. **20**. 148. 1896 (rechteckiger Stromleiter). — E. CARVALLO, C. R. **133**. 1195. 1901. — E. SORRON, C. R. **133**. 401. 1901. — V. A. JULIUS, Arch. néerl. (2) **5**. 17. 1900. — H. WEBER, Dedekind-Festschrift, Braunschweig 1901. 89. — J. A. VOLLGRAFF, Diss. Leiden 1903. 171 pp. S. dagegen Arch. néerl. (2) **9**. 340. 1904. — H. A. LORENTZ, ibid. 380b. 1904. — E. DORN, Drudes Ann. **11**. 589. 1903. — [2] Eine Umformung des NEUMANNschen Potentials gibt E. MALTBY, Journ. de phys. (3) **10**. 33. 1901.

**68.** Dieser Ausdruck gilt nur für zwei geschlossene stationäre Ströme, dann aber streng. Man kann für solche Ströme aus ihm beliebig viele Elementargesetze ableiten, welche alle die Eigenschaft haben, für geschlossene Ströme richtige Ausdrücke für die Kräfte zu geben.

Da

$$r = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

ist, ist

$$r \frac{\partial r}{\partial l'} = (x' - x) \frac{\partial x'}{\partial l'} + (y' - y) \frac{\partial y'}{\partial l'} + (z' - z) \frac{\partial z'}{\partial l'}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(r \frac{\partial r}{\partial l'}\right) = -\left(\frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial x'}{\partial l'} + \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial y'}{\partial l'} + \frac{\partial z}{\partial l} \frac{\partial z'}{\partial l'}\right) = -\cos(dl, dl') \quad ,$$

also

$$\cos(dl, dl') = -r \frac{\partial^2 r}{\partial l \partial l'} - \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'}$$

und da

$$\int\limits_C \int\limits_{C'} dl\, dl' \frac{\partial^2 r}{\partial l \partial l'} = 0 \quad ,$$

ist

$$Q = A^2 i i' \int\limits_C \int\limits_{C'} \frac{dl\, dl'}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \quad .$$

Um die aus dem Potential $Q$ sich ergebenden Kräfte zu ermitteln, die eine Änderung der Lagen und Formen des Stromkreises hervorbringen, variieren wir alle Lagen so, daß $r$ sich um $\delta r$ ändert. Dann ändert sich auch

$$\frac{\partial r}{\partial l} \text{ um } \frac{\delta \partial r}{\partial l} = \frac{\partial \delta r}{\partial l} \quad \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial l'} \text{ um } \frac{\delta \partial r}{\partial l'} = \frac{\partial \delta r}{\partial l'} \quad .$$

Es wird daher der Reihe nach

$$\delta Q = A^2 i i' \int\limits_C \int\limits_{C'} dl\, dl' \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta r \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l'} \frac{\partial \delta r}{\partial l} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial \delta r}{\partial l'} \right\}$$

$$= A^2 i i' \int\limits_C \int\limits_{C'} dl\, dl' \left\{ -\frac{1}{r^2} \delta r \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} - \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l'}\right) \delta r - \frac{\partial}{\partial l'}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial l}\right) \delta r \right\}$$

$$= +A^2 i i' \int\int dl\, dl' \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial l \partial l'} \right\} \delta r$$

$$= +A^2 i i' \int\int \frac{dl\, dl'}{r^2} \left\{ 2 \cos(dl, dl') + 3 \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right\} \delta r \quad .$$

Bezeichnen wir den Winkel $dl$, $dl'$ mit $\varepsilon$ und die Winkel, welche $dl$ resp. $dl'$ mit $r$ bildet, mit $\vartheta$ resp. $\vartheta'$, so wird

$$\delta Q = A^2 i i' \int\limits_C \int\limits_{C'} \frac{dl\, dl'}{r^2} \{2 \cos\varepsilon - 3 \cos\vartheta \cos\vartheta'\} \delta r \quad .$$

Die Zerlegung dieses Ausdrucks in der Art, daß jedem Element ein Beitrag zugeschrieben wird, der durch das Argument des Integrals dargestellt wird, ist willkürlich. Diese Zerlegung gibt natürlich wieder richtige Resultate, wenn man

sie auch bloß wieder auf geschlossene stationäre Ströme anwendet. Aber sie ist nicht die einzige. Vielmehr kann man dem Argument des Integrals noch die Größe

$$dl\,dl'\frac{\partial^2 F}{\partial l\,\partial l'}\delta r$$

hinzufügen, wo $F$ eine beliebige Funktion von $r$, $l$, $l'$ ist, ohne das Integral zu ändern[1]. Die einfachste vorzunehmende Zerlegung des Integrals ist also nur eine von unendlich vielen möglichen. Sie sagt aus, daß, wenn der Abstand zweier Stromelemente um $\delta r$ geändert wird, daß dann das Potential zunimmt um

$$\delta Q = \frac{2A^2 i\,i'\,dl\,dl'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\,\delta r \quad .$$

Die Kraft $R$, welche zwischen den beiden Elementen in der Richtung von $r$ wirkt, und zwar so, daß $r$ vergrößert wird, ist dann

$$R = -\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{2A^2 i\,i'\,dl\,dl'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta') \quad .$$

$R$ ist eine abstoßende Kraft, wenn es positiv ist.

Das ist das AMPÈREsche Elementargesetz.

Ist $\vartheta = \vartheta' = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, haben wir also zwei gleichgerichtete parallele Ströme, so ist $R = -\frac{2A^2 i\,i'\,dl\,dl'}{r^2}$, die Kraft ist anziehend.

Ist $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta' = 0$, haben wir also zwei senkrecht aufeinander stehende Ströme, so ist $R = 0$.

Ist $\varepsilon = 0$, $\vartheta = 0$, $\vartheta' = 0$, zwei in derselben Geraden liegende Stromelemente, so ist $R = +\frac{A^2 i\,i'\,dl\,dl'}{r^2}$, die Kraft ist abstoßend.

Das sind die von AMPÈRE ermittelten Gesetze[2].

## § 17. Die elektromagnetische Energie und die Arbeit elektromagnetischer Kräfte.

**69.** Die magnetischen Kräfte, die ein linearer Stromkreis $C'$ mit der Stromstärke $i'$ an einem Punkte $xyz$ erzeugt, sind

$$L = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad ,$$

$$\psi = -Ai'\int_{O'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}d\omega' = Ai'\,\Xi \quad ,$$

wo $\Xi$ die Zahl der Kraftlinien ist, die $O'$ durchschneiden, ausgehend von einem Einheitspol in $xyz$.

Ist an der Stelle $xyz$ ein Magnetpol von der Stärke $m$ vorhanden, so ist das mechanische Potential $Q = m\psi = Ai'\,\Xi$ (wo $\Xi$ jetzt die Kraftlinienzahl, herrührend von $m$ ist) und die mechanischen Kräfte sind

$$a = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad b = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad c = -\frac{\partial Q}{\partial z} \quad .$$

---

[1] Das ist von HELMHOLTZ für verschiedene Fälle gemacht worden. Ges. Abh. 1. 545. 1870. — [2] S. die Zitate von S. 821.

Bewegt sich unter dem Einfluß dieser Kräfte der Pol um $dx\,dy\,dz$, so leisten dabei die mechanischen Kräfte die Arbeit

$$dW = a\,dx + b\,dy + c\,dz = -dQ = -Ai'\,d\Xi \quad .$$

Sind eine Anzahl von Magnetpolen vorhanden, die einen vollständigen Magneten bilden, so ist immer noch

$$dW = -Ai'\,d\Xi \quad .$$

Ist speziell das Magnetsystem ein anderer Stromkreis $C$ mit der Stromstärke $i$, so ist

$$\Xi = -Ai\Omega \quad ,$$

wo $\Omega$ das NEUMANNsche Potential $\int\int \frac{dl\,dl'\cos\varepsilon}{r}$ ist; also ist die nach außen geleistete Arbeit bei einer Verschiebung von $C$

$$dW = +A^2 i i'\,d\Omega \quad .$$

Wir wollen anderseits die Energie eines abgeschlossenen Systems berechnen, in welchem freie Magnetismen und stationäre Ströme vorhanden sind, in welchem also die magnetischen Kräfte von der Form sind

$$L = L_1 + L_2 \quad ,$$

wobei

$$L_1 = -\frac{\partial \chi}{\partial x}$$

ist, herrührend vom freien Magnetismus mit dem Potential $\chi$, während

$$L_2 = A\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

ist, herrührend von Strömen.

Die magnetische Energie des Raumes ist dann, wenn die Permeabilität $\mu = 1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
S_m &= \frac{1}{8\pi}\int d\tau (L^2 + M^2 + N^2) \quad , \\
&= \frac{A}{8\pi}\int d\tau \left[L\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) + N\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{8\pi}\int d\tau \left(L\frac{\partial \chi}{\partial x} + M\frac{\partial \chi}{\partial y} + N\frac{\partial \chi}{\partial z}\right) \\
&= \frac{A}{8\pi}\int d\tau \left[U\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + V\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + W\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{8\pi}\int d\tau\, \chi \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) \\
&= \frac{A^2}{2}\int d\tau\,(Uu + Vv + Ww) + \frac{1}{2}\int \chi m\,d\tau \quad .
\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man, daß in der Energie kein Ausdruck vorkommt, der eine Wechselwirkung zwischen den freien Magnetismen und den Strömen anzeigt. Die Arbeit eines Stromes bei der Bewegung eines Magnetpoles ist also nicht aus der Energie des Feldes entnommen.

Sind speziell nur lineare Ströme vorhanden, so ist

$$d\tau\, u = i\, dl \cos(lx) \quad ,$$

$$U = \sum \int \frac{i'\, dl' \cos(l' x)}{r} \quad ,$$

wo die Summe sich über alle Ströme erstreckt, also

$$S_m = \frac{A^2}{2}(P_{11}\, i_1^2 + 2 P_{12}\, i_1\, i_2 + P_{22}\, i_2^2 + 2 P_{13}\, i_1\, i_3 + \ldots)$$
$$+ \frac{1}{2}\int \chi\, m\, d\tau \quad ,$$

oder

$$S_m = \frac{A^2}{2} \sum_\varrho \sum_\sigma P_{\varrho\sigma}\, i_\varrho\, i_\sigma + \frac{1}{2}\int \chi\, m\, d\tau \quad ,$$

wo

$$P_{\varrho\sigma} = \int\limits_\varrho \int\limits_\sigma \frac{dl\, dl' \cos(dl\, dl')}{r} \quad .$$

Die Größen $P_{\varrho\varrho}$ und $P_{\sigma\sigma}$ heißen die Selbstpotentiale oder Selbstinduktionskoeffizienten der Stromkreise $\varrho$ oder $\sigma$, die Größe $P_{\varrho\sigma}$ die gegenseitigen Induktionskoeffizienten der Stromkreise $\varrho$ und $\sigma$. Wenn zwei stationäre Ströme allein vorhanden sind, so ist

$$S_m = \frac{A^2}{2}(P_{11}\, i_1^2 + 2 P_{12}\, i_1\, i_2 + P_{22}\, i_2^2) \quad ,$$

wo $P_{12} = \Omega$ gleich dem NEUMANNschen Potential ist.

Ändert sich also die gegenseitige Lage der beiden Stromkreise (während sie stationär bleiben), so ist

$$d S_m = + A^2\, i\, i'\, d\Omega \quad .$$

Genau so groß war aber die Arbeit der Kräfte bei der Bewegung. Also folgt:

Die mechanische Arbeit, welche die elektrodynamischen Kräfte bei der Bewegung eines beweglichen Stromkreises leiten, ist nicht gleich der Abnahme der magnetischen Energie des Raumes, sondern gleich der Zunahme desselben. Es muß also dabei von außen Energie in solchem Betrage zugeführt werden, daß sowohl jene Arbeit wie diese Zunahme der Energie dadurch gedeckt werden.[1]

## § 18. Veränderliche Zustände. Induktionserscheinungen.

**70.** Für diejenigen Zustände, in welchen die elektrischen und magnetischen Verschiebungen von der Zeit abhängig sind, kommen die vollständigen Systeme der Gleichungen (I) und (II) (S. 836) in Anwendung. Diese Zustände aber unterscheiden sich noch in ihren beobachtbaren Wirkungen, je nachdem die zeitlichen Veränderungen von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ resp. $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ verhältnismäßig langsam, rasch, oder äußerst rasch vor sich gehen. Die Erscheinungen der ersten Klasse sind die Induktionserscheinungen in geschlossenen Leitern und auch die elektrischen Vorgänge in ungeschlossenen Systemen von hoher Kapazität und großer Selbstinduktion. Zu der zweiten Klasse gehören die HERTZschen Schwingungen, zu der dritten die optischen Erscheinungen.

[1] Weitere Literatur darüber: H. PELLAT, Séanc. de la soc. franç. de Phys. 1894. 93 u. 100; Beibl. **19**. 518. 1895. — A. PEROT, L'éclairage él. **22**. 5. 1900. — A. POTIER, ibid. **22**. 81. 1900. — E. CARVALLO, C. R. **133**. 1195. 1901. — G. S. BAKKER, Arch. neérl. (2) **5**. 312. 1900. — E. SARRAU, C. R. **133**. 401. 1901.

Um die Induktionserscheinungen zu behandeln, gehen wir von dem System II aus:

$$A\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad ,$$

$$A\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ,$$

$$A\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \quad .$$

Nehmen wir in einem Raume veränderliche Werte von $\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$ an und befindet sich in diesem Raume ein geschlossener Leiter $C$, der eine Fläche $O$ umschließt, so bilden wir den Ausdruck

$$A\int_O d\omega\left[\frac{d\mathfrak{L}}{dt}\cos(nx) + \frac{d\mathfrak{M}}{dt}\cos(ny) + \frac{d\mathfrak{N}}{dt}\cos(nz)\right] \quad ,$$

welcher

$$= \int_O d\omega\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(nz)$$

ist.

Durch Anwendung des STOKESschen Satzes wird die linke Seite

$$= \int_C (X dx + Y dy + Z dz)$$

und dieses ist nach unserer früheren Bezeichnung (S. 851) gleich der elektromotorischen Kraft $E$, die in dem geschlossenen Leiter existiert. Wir bezeichnen sie als die elektromotorische Kraft des Induktionsstromes und es ist

$$E = A\frac{d}{dt}\int_O [(\mathfrak{L}\cos(nx) + \mathfrak{M}\cos(ny) + \mathfrak{N}\cos(nz)]\,d\omega$$

$$= A\frac{d\Xi}{dt} \quad ,$$

wenn $\Xi$ wieder die Zahl der Kraftlinien bedeutet, welche die Fläche $O$ schneiden.

Die in einem geschlossenen Kreise induzierte elektromotorische Kraft ist gleich der Zunahme der die Fläche des Stromkreises durchschneidenden Kraftlinienzahl pro Zeiteinheit, multipliziert mit $A$[1].

**71.** Wenn die Induktion von einem veränderlichen Strom $i'$ herrührt, so ist

$$\Xi = -A\,i'\,\Omega$$

und es wird

$$E = -A^2\frac{d}{dt}(i'\,\Omega) \quad ,$$

worin $\Omega$ das NEUMANNsche Potential

$$\Omega = \int_C\int_{C'}\frac{dl\,dl'\cos(dl\,dl')}{r}$$

[1] Ob diese Fassung der Induktionsgesetze allgemein gültig ist, darüber ist mehrfach diskutiert worden. Bei richtiger Anwendung zeigt sich die allgemeine Richtigkeit der Fassung. S. die Diskussion zwischen M. BRESLAUER und anderen in Elektrot. Zeitschr. **19**. 498. 558. 569. 605. 652. 654. 1899. Über eine Ableitung des Induktionsgesetzes aus energetischen Betrachtungen s. H. EBERT, Zeitschr. f. phys. Chem. **18**. 321. 1895. Die Frage, ob die beliebige Fläche $O$ auch durch Eisen gehen darf, behandelt C. NEUMANN, Ber. d. sächs. Akad. **27**. 753. 1902.

ist. Der veränderliche Strom $i'$ aber induziert auch in seinem eigenen Kreise einen Induktionsstrom, dessen elektromotorische Kraft sich ergibt zu

$$E' = -A^2 \frac{d}{dt}(i' P) \quad ,$$

wenn

$$P = \int\limits_{C'}\int\limits_{C'} \frac{dl\, dl' \cos(dl\, dl')}{r} \quad .$$

Es ist $P$ das Selbstpotential des Stromkreises $C'$, während $\Omega$ der gegenseitige Induktionskoeffizient von $C$ und $C'$ ist.

Haben die beiden Stromkreise unveränderliche Lagen (und dieser Fall ist eigentlich hier allein zu behandeln, da es sich um ruhende Körper handelt) sind ihre Widerstände $w$ und $w'$ und wirken außerdem noch in beiden Stromkreisen äußere elektromotorische Kräfte $\mathsf{E}$ und $\mathsf{E}'$, so sind die Gleichungen für die beiden Ströme

$$i w = \mathsf{E} - A^2 P \frac{di}{dt} - A^2 \Omega \frac{di'}{dt} \quad ,$$

$$i' w' = \mathsf{E}' - A^2 P' \frac{di'}{dt} - A^2 \Omega \frac{di}{dt} \quad .$$

Die Induktion durch Bewegung läßt sich aber auch durch die obigen Formeln behandeln. Es ist nämlich die durch Bewegung eines konstanten Stromes $i'$ gegen einen Kreis $C$ induzierte elektromotorische Kraft

$$E = -A^2 i' \frac{d\Omega}{dt} \quad .$$

Alle Erscheinungen der Induktion sind in diesen Gleichungen enthalten.

**72.** Wenn ein Strom von der Stärke $i'$ und der elektromotorischen Kraft $\mathsf{E}'$ und ein Magnetsystem vorhanden sind und wenn sich durch die elektromagnetischen Kräfte das Magnetsystem bewegt, so leistet der Strom dabei eine Arbeit (S. 864)

$$dW = -A i' d\Xi \quad .$$

Zugleich wird aber dann in dem Stromkreise eine elektromotorische Kraft $E' = A \frac{d\Xi}{dt}$ erzeugt. Nimmt $\Xi$ ab um $d\mathfrak{Z}$, ist also $d\Xi = -d\mathfrak{Z}$, so ist die geleistete Arbeit

$$dW = +A i' d\mathfrak{Z}$$

und die erzeugte elektromotorische Kraft

$$E' = -A \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} \quad .$$

Es ist daher

$$i'^2 w\, dt = (\mathsf{E}' + E') i' dt$$

oder

$$i'^2 w\, dt = \mathsf{E}' i' dt - A i' d\mathfrak{Z}$$

oder

$$\mathsf{E}' i' dt = i'^2 w\, dt + A i' d\mathfrak{Z} = dJ + dW \quad ,$$

wenn $dJ$ die in der Zeiteinheit erzeugte JOULEsche Wärme ist. Infolge des beweglichen Magnetsystems muß die elektromotorische Kraft jetzt nicht nur JOULEsche Wärme, sondern auch Arbeit leisten.

Haben wir es mit zwei sich gegenseitig induzierenden Stromkreisen mit den elektromotorischen Kräften $\mathsf{E}$ und $\mathsf{E}'$ und den Stromstärken $i$ und $i'$ zu tun, so ist

$$dW = +A^2 i i' d\Omega = dS_m$$

und es wird
$$\mathsf{E}\, i\, dt = dJ + dW \quad ,$$
$$\mathsf{E}'\, i'\, dt = dJ' + dS_m \quad .$$

Damit die Ströme in den beiden Leitern dieselben bleiben $i$ und $i'$ wie ohne Induktion, muß der Widerstand und damit die JOULEsche Wärme verringert werden, letztere um den Betrag $dW$ resp. $dS_m$.

Läßt man dagegen, wie gewöhnlich, $w$ und $w'$ ungeändert, so ändern sich die Stromstärken.

Ohne Induktion sind die Stromstärken
$$i_0 = \frac{\mathsf{E}}{w}\,, \quad i_0' = \frac{\mathsf{E}'}{w'} \quad .$$

Die JOULEsche Wärme ist
$$dJ_0 = i_0^2\, w\, dt = \mathsf{E}\, i_0\, dt \quad ,$$
$$dJ_0' = i_0'^2\, w'\, dt = \mathsf{E}'\, i_0'\, dt \quad .$$

Während der Induktion fließt ein entgegengesetzt gerichteter Strom durch die Leitungen und es ist
$$i = \frac{\mathsf{E} + E}{w} = \frac{\mathsf{E} - A^2 i' \dfrac{d\Omega}{dt}}{w} \quad ,$$
$$i' = \frac{\mathsf{E}' + E'}{w'} = \frac{\mathsf{E}' - A^2 i \dfrac{d\Omega}{dt}}{w'} \quad .$$

Die JOULEsche Wärme wird
$$dJ = i^2\, w\, dt = \mathsf{E}\, i\, dt - A^2 i\, i'\, d\Omega \quad ,$$
$$dJ' = i'^2\, w'\, dt = \mathsf{E}'\, i'\, dt - A^2 i\, i'\, d\Omega \quad ,$$
also ist wieder
$$\mathsf{E}\, i\, dt = dJ + A^2 i\, i'\, d\Omega = dJ + dW \quad ,$$
$$\mathsf{E}'\, i'\, dt = dJ' + A^2 i\, i'\, d\Omega = dJ' + dS_m \quad .$$

**73.** Die Gleichung für den veränderlichen Strom in einem einzigen Stromkreis ist (wenn alle Größen elektromagnetisch gemessen werden)
$$i\, w = \mathsf{E} - P \frac{di}{dt}$$
oder anders geschrieben $w\left(i - \frac{\mathsf{E}}{w}\right) = -P \frac{d}{dt}\left(i - \frac{\mathsf{E}}{w}\right)$, aus welcher folgt
$$i - \frac{\mathsf{E}}{w} = A\, e^{-\frac{w}{P} t} \quad .$$

Die Formel läßt sich anwenden auf das Ansteigen eines Stromes in einem Stromkreise, in den zur Zeit $t = 0$ die elektromotorische Kraft $\mathsf{E}$ eingeschaltet wird. Dann wird nämlich[1]
$$i = \frac{\mathsf{E}}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{P} t}\right) \quad .$$

**74.** Für eine periodisch variable elektromotorische Kraft
$$\mathsf{E} = \mathsf{E}_m \cos \frac{\pi t}{T} \quad ,$$

[1] Siehe auch HJ. TALLQVIST, Drudes Ann. **14**. 102. 1904.

welche mit der Periode $T$ zwischen den Maximalwerten $\pm \mathsf{E}_m$ schwankt, ergibt dieselbe Gleichung integriert

$$i = \frac{\mathsf{E}_m}{\sqrt{w^2 + \frac{P^2 \pi^2}{T^2}}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \varepsilon\right) \quad ,$$

welche zeigt, daß der Strom gegen die elektromotorische Kraft eine Phasendifferenz $\varepsilon$ besitzt, die sich bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \varepsilon = -\frac{P}{w}$$

und daß für die Stärke des Stromes die Größe $\sqrt{w^2 + \frac{P^2 \pi^2}{T^2}}$ bestimmend ist, welche man die Impedanz nennt. Sie wächst mit wachsendem Selbstpotential und wachsender Periodenzahl $n \left(= \frac{1}{T}\right)$, so daß für große $n$ häufig $w$ gegen das zweite, induktive Glied zu vernachlässigen ist, und der Strom in einem Leiter wesentlich von seinem Selbstpotential, nicht von seinem Widerstand abhängt.

Die Anwendungen des Induktionsgesetzes auf andere Fälle können hier nur durch Literaturangaben behandelt werden[1].

**75.** Das Selbstpotential $P$ eines Stromkreises und die gegenseitige Induktion $M$ zweier Stromkreise bestimmen sich durch

$$P = \int\limits_C \int\limits_C \frac{dl\, dl' \cos \varepsilon}{r} \quad ,$$

$$M = \int\limits_C \int\limits_{C'} \frac{dl\, dl' \cos \varepsilon}{r} \quad .$$

Für eine Reihe einfacher Fälle lassen sich diese Koeffizienten berechnen[2]. Es ist aber zu bemerken, daß diese Formeln nur gelten, wenn die elektrischen

[1] Über die theoretische Behandlung des Funkeninduktors und der Vorgänge in ihm s. die Arbeiten: R. COLLEY, Wied. Ann. **44**. 109. 1891. — A. OBERBECK, Wied. Ann. **55**. 623. 1895; **62**. 109. 1897; **64**. 193. 1898; **67**. 592. 1899. — B. WALTER, Wied. Ann. **62**. 300. 1897; **66**. 623 u. 636. 1899. — T. MOLL, Bih. till. K. Sved. Het. Akad. Förhandl. **12**. 1886. — K. R. JOHNSON, Drudes Ann. **3**. 438. 744. 1900; **4**. 137. 1900. — Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (6) **2**. 581. 1901. — Die Schirmwirkung behandelt: L. ARONS, Wied. Ann. **65**. 590. 1898. — G. H. BRYAN, Phil. Mag. (5) **38**. 198. 1894; **45**. 381. 1898 wendet zur Behandlung elektromagnetische Bilder an. — C. S. WHITEHEAD, Phil. Mag. (5) **48**. 165. 1899. — T. LEVI-CIVITÀ, Rend. Lincei (5) **11**. [1 Sem.] 163, 191, 228. 1902; [2 Sem.] 75. 1902; Nuov. Cim. (5) **3**. 442. 1902; Ann. de Toulouse (2) **4**. 5. 1902. — G. PICCIATI, Rend. Lincei (5) **11**. [2 Sem.] 221. 1902. — Über die Induktion in ruhenden und bewegten Körpern: H. LORBERG, Crelles Journ. **71**. 53. 1862. — E. JOCHMANN, Pogg. Ann. **122**. 214. 1864; Crelles Journ. **73**. 158, 329. 1864. — CL. MAXWELL, Treatise. **2**. 310. — A. OBERBECK, Grunerts Archiv. **56**. 394. 1872. — H. HERTZ, Wied. Ann. **13**. 266. 1881; Ges. Abhandl. **1**. 135. 1895. — A. TAUBER, Beibl. **23**. 1041. 1899. — R. GANS, Diss. Straßburg 1902; Zeitschr. f. Math. u. Phys. **48**. 1. 1902. — Über unipolare Induktion siehe die Arbeiten von: E. LECHER, Wied. Ann. **54**. 276. 1895; **69**. 181. 1899. — C. RAVEAU, Journ. de phys. (3) **9**. 150. 1900. — V. CREMIEU, Soc. franç. de phys. Nr. 146. 1. 1900. — A. BLONDEL, ibid. Nr. 146. 2. 1900. — H. POINCARÉ, L'éclair. él. **23**. 41. 1900. — W. KÖNIG, Drudes Ann. **2**. 854. 1900. — E. LECHER, Drudes Ann. **3**. 513. 1900. — H. LORBERG, Drudes Ann. **3**. 522. 1900. — E. LECHER, Phys. Zeitschr. **2**. 12. 1900. — E. HAGENBACH, Drudes Ann. **4**. 233. 1900. — J. KÖNIGSBERGER, Phys. Zeitschr. **2**. 475. 1901. — O. GROTRIAN, Drudes Ann. **6**. 794. 1901. — G. R. OLSHAUSEN, Drudes Ann. **6**. 681. 1901. — E. HOPPE, Drudes Ann. **8**. 663. 1902. — E. LECHER, Drudes Ann. **9**. 248. 1902. — J. A. VOLLGRAFF, Diss. Leiden 1903; s. dagegen Arch. néerl. (2) **9**. 340. 1904. — H. A. LORENTZ, ibid. 380b. 1904. — [2] Literatur über die Berechnung von Selbstpotentialen und gegenseitigen Induktionskoeffizienten: CL. MAXWELL, Treatise II (deutsche Ausgabe): Solenoide 374—377; Rollen 378—381; Ringförmige Rollen 381—384; Parallele zylindrische Leiter 388; Kurze weite Rolle 405; Kreisförmige Drähte 413. — LORD RAYGLEIGH, Phil. Mag. (5) **21**. 381.

Ströme als stationär oder quasistationär angesehen werden, d. h. wenn die Stromstärke in einem Querschnitt des Drahtes überall denselben Wert hat. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn man es mit sehr raschen Schwingungen zu tun hat, bei denen im Gegenteil dann der Strom sich im wesentlichen auf die peripherischen Teile des Querschnitts reduziert, während das Zentrum ziemlich stromfrei ist. Die gewöhnlichen Werte des Selbstpotentials haben dann keine Gültigkeit mehr. Die Berechnung des Widerstandes und des Selbstpotentials in diesem Fall haben RAYLEIGH und STEFAN gelehrt[1].

**76.** Die Betrachtungen, welche sich auf die Induktion in geschlossenen Strombahnen beziehen, lassen sich auch noch dann anwenden, wenn man es zwar mit ungeschlossenen Systemen zu tun hat, wenn aber deren Kapazität und Selbstinduktion so groß ist, daß die in ihnen auftretenden Bewegungen noch verhältnismäßig langsam sind, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, mit der die Bewegungen sich fortpflanzen. Man kann dann die Erscheinungen noch als quasistationäre betrachten, weil der Querschnitt von Drähten, die Strom führen, dabei noch wesentlich gleichmäßig stromerfüllt ist. Bei einer durch einen Draht geschlossenen Leidener Flasche, deren Belegungen die Potentiale $V_i$ und $V_a$ in einem Moment haben, ist die auf der Flasche vorhandene Ladung $e = \varkappa(V_i - V_a)$, wenn $\varkappa$ die Kapazität ist. Die elektromotorische Kraft ist $V_i - V_a$ und es ist

$$i w = V_i - V_a - P \frac{di}{dt}$$

oder, da $i = -\frac{de}{dt}$ ist,

$$-w \frac{de}{dt} = \frac{e}{\varkappa} + P \frac{d^2 e}{dt^2}$$

oder auch durch nochmalige Differentiation nach $t$

$$w \frac{di}{dt} = -\frac{i}{\varkappa} - P \frac{d^2 i}{dt^2} \quad \text{oder} \quad P \frac{d^2 i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + \frac{i}{\varkappa} = 0 \quad .$$

Diese Gleichung führt auf aperiodische Bewegungen oder auf Schwingungen. Im letzteren Falle ist ihr Integral

$$i = F e^{-kt} \cos(\alpha t - \gamma) \quad .$$

1886. — A. GRAY, Absolute Measurements in Electricity and Magnetism **2**. 1893. — C. T. HUTCHINSON, Electrician **25**. 746. 1898. — J. STEFAN, Wied. Ann. **22**. 112. 1884; **41**. 400. 1890. — G. KIRCHHOFF, Pogg. Ann. Erg. **5**. 1. 1871; Pogg. Ann. **121**. 559. 1864. — L. LORENZ, Wied Ann. **7**. 192. 1879. — B. WEINSTEIN, Wied. Ann. **21**. 329. 1884. — M. BRILLOUIN, Ann. de l'école normale **11**. 361. 1862. — MAC DONALD, Trans. Cambr. Phil. Soc. 1. Ser. **3**. 303. 1892. — H. HERTZ, Wied. Ann. **10**. 429. 1880. — A. POTIER, C. R. **118**. 166. 1894. — ANDERSON, Phil. Mag. (5) **33**. 352. 1892. — CH. A. GUYE, C. R. **118**. 1329. 1894; **119**. 219. 1894; Arch. sc. phys. (3) **29**. 427. 1893; **30**. 360. 1894; **32**. 480. 574. 1894. — M. WIEN, Wied. Ann. **53**. 929. 1894. — O. T. BLATHY, Elektrotechn. Zeitschr. **11**. 311. 1891; Beibl. **14**. 653. — J. J. THOMSON, Phil. Mag. **23**. 384. 1886. — P. M. MINCHIN, Phil. Mag. (5) **37**. 300. 1894. — E. MASCART, C. R. **118**. 277. 1894. — J. PERRY, Phil. Mag. (5) **30**. 223. 1890. — A. BLONDEL, Lum. él. **49**. 373. 1893. — W. M. HICKS, Phil. Mag. (5) **38**. 456. 1894. — Über Induktionskoeffizienten: P. SINGER, Wien. Ber. **105**. 165. 1896; Beibl. **21**. 434. 1896. — F. KOLACZEK, Ber. böhm. Ges. **14**. 1. 1896; Beibl. **21**. 1005. 1896. — V. JONES, Abstract. Proc. Roy. Soc. **62**. 247; **63**. 692. 1898; Fortschr. d. Phys. 1898. 889. — J. SCHÜRR, Journ. de phys. (3) **6**. 588. 1897. — R. BLONDLOT. Wied. Ann. **64**. 811. 1898. — G. W. PATTERSON, Wied. Ann. **69**. 34. 1899. — A. GARBASSO. N. Cim. (5) **2**. 97. 1901. — G. F. C. SEARLE, Proc. Cambr. Soc. **11**. 398. 1902. — J. E. IVES, Phys. Rev. **16**. 112. 1903. — M. WIEN, Drudes Ann. **14**. 1. 1904.

[1] LORD RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **21**. 381. 1886. — J. STEFAN, Wied. Ann. **41**. 405. 1890. — M. WIEN, Drudes Ann. **14**. 1. 1904. — S. auch V. BJERKNES, Wied. Ann. **55**. 159. 1895. — A. SOMMERFELD, Drudes Ann. **15**. 673. 1904. — A. BATELLI und L. MAGRI, Phil. Mag. (6) **5**. 1. 1903.

Diese Lösung gilt, wenn $\frac{w^2}{4P^2} < \frac{1}{\varkappa P}$ ist. In diesem Fall erhält man also Schwingungen mit der Periode

$$T = \frac{\pi\sqrt{\varkappa P}}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa w^2}{4P}}}$$

und eine Dämpfung, deren Konstante $h = \frac{w}{2P}$ ist. In erster Annäherung, bei kleinem $\varkappa$ und $w$ und großem $P$ ist die Schwingungsdauer

$$T = \pi\sqrt{\varkappa P} \quad .$$

STEFAN[1] hat die Theorie der oszillierenden Entladung von der Annahme frei gemacht, die bei THOMSON und KIRCHHOFF vorausgesetzt wird, daß der Strom den Querschnitt der Drähte gleichmäßig erfüllt. Bei raschen Schwingungen ist das, wie man weiß, nicht der Fall, vielmehr beschränkt sich dann der Strom nahezu auf die Oberfläche des Drahtes.

Die Formel für die Schwingungsdauer

$$T = \pi\sqrt{\varkappa P}$$

wird nicht geändert, aber $P$ ist nicht das Selbstpotential des Drahtes, sondern es ist der Induktionskoeffizient für einen Faden an der Oberfläche des Drahtes. Dieses $P$ ist insbesondere unabhängig von dem magnetischen Zustand des Drahtes, also für Eisendrähte dasselbe wie für Kupferdrähte. Die oszillatorische Entladung ist aus zwei Bewegungen zusammengesetzt, von denen jedoch die eine rasch erlischt, während die andere nach gewisser Zeit den Charakter der Pendelbewegung mit obiger Periode annimmt[2].

**77.** Hat man es mit zwei aufeinander induzierenden derartigen Stromkreisen zu tun, von denen jeder Widerstand $w_1$ und $w_2$, Kapazität $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, Selbstpotential $P_1$ und $P_2$ und welche die gegenseitige Induktion $P_{12}$ besitzen, so werden die Gleichungen für die Stromstärken, wenn alle Größen elektromagnetisch gemessen werden,

$$\frac{i_1}{\varkappa_1 P_1} + \frac{w_1}{P_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{P_{12}}{P_1}\frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{i_2}{\varkappa_2 P_2} + \frac{w_2}{P_2}\frac{di_2}{dt} + \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{P_{12}}{P_2}\frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0 \quad .$$

Die Größen $\frac{P_{12}}{P_1} = \tau_1$ und $\frac{P_{12}}{P_2} = \tau_2$ nennt man die Koppelungskoeffizienten der beiden Stromkreise für die Stromstärke.

Die Gleichungen für die Potentialdifferenz der Belegungen $\varphi$ in jedem Stromkreis sind, da $\varphi = \frac{e}{\varkappa}$ ist, folgende:

$$\frac{\varphi_1}{\varkappa_1 P_1} + \frac{w_1}{P_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\frac{P_{12}}{P_1}\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\varphi_2}{\varkappa_2 P_2} + \frac{w_2}{P_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\frac{P_{12}}{P_2}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = 0 \quad .$$

[1] J. STEFAN, Wied. Ann. **41**. 421. 1890; Wien. Sitzb. **99**. (IIa) 1898. — [2] Über die oszillierende Entladung von Kondensatoren s. die Arbeiten: W. ROBL, Phil. Mag. (5) **34**. 389. 1892. — H. TALLQUIST, Wied. Ann. **60**. 248. 1897. — T. H. BLAKESLEY, Phil. Mag. (5) **35**. 419. 1893. — J. LARMOR, Proc. Lond. Math. Soc. Nr. 504. 119. 1895. — M. PLANCK, Wied. Ann. **63**. 419. 1897. — U. SEILER, Wied. Ann. **61**. 30. 1897. — A. SUNDELL u. H. TALLQUIST, Drudes Ann. **4**. 72. 1901. — L. MANDELSTAMM, Drudes Ann. **8**. 323. 1902. — A. EKSTRÖM, Bih. Svensk. Akad. Handl. **28**. [1] Nr. 7. 1903.

Die Koppelungskoeffizienten für das Potential sind also

$$\tau_1' = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\frac{P_{12}}{P_1} \quad \text{und} \quad \tau_2' = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\frac{P_{12}}{P_2} \quad .$$

Jedes der Systeme hat für sich, ohne Beeinflussung des andern, die Periode

$$T_1 = \pi\sqrt{\varkappa_1 P_1}\,, \quad T_2 = \pi\sqrt{\varkappa_2 P_2} \quad .$$

Sind die Systeme vorher genau gleich gestimmt, so ist

$$T_1 = T_2\,, \quad \text{also} \quad \varkappa_1 P_1 = \varkappa_2 P_2\,, \quad \text{also} \quad \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{P_2}{P_1} \quad ,$$

und es ist dann $\tau_1' = \tau_2\,,\ \tau_2' = \tau_1\,.$

Wenn nun die beiden Systeme sich gegenseitig beeinflussen, so entstehen in jedem zwei voneinander unabhängige Schwingungen mit verschiedenen Schwingungszahlen und verschiedenen Dämpfungen. Es wird nämlich

$$\varphi_1 = A_1 e^{-\delta_1 t}\sin(\nu_1 t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2 t}\sin(\nu_2 t + \psi_1) \quad ,$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{-\delta_1 t}\sin(\nu_1 t + \varphi_2) + B_2 e^{-\delta_2 t}\sin(\nu_2 t + \psi_2) \quad .$$

Die beiden Schwingungszahlen (für $2\pi$ Sekunden) sind $\nu_1$ und $\nu_2$, die beiden Dämpfungskoeffizienten $\delta_1$ und $\delta_2$.

Es kommt bei der Berechnung der $\nu$ und $\delta$ nun auf das Produkt der Koppelungskoeffizienten

$$\tau_1\tau_2 = \tau^2 = \frac{P_{12}^2}{P_1 P_2}$$

an, welches für die Stromstärke und das Potential dasselbe ist.

Ist die Koppelung vorherrschend, so daß, wenn $h_1$ und $h_2$ die Dämpfungen der Einzelkreise sind,

$$\frac{\tau}{T} > h_1 - h_2$$

ist, so haben die beiden Kreise nachher gleiche Dämpfung und verschiedene Schwingungszahlen.

Ist dagegen die Dämpfung vorherrschend, so erhält man gleiche Schwingungszahlen, aber verschiedene Dämpfung.

Diese Betrachtungen haben wesentliche Bedeutung für die drahtlose Telegraphie. Bei loser Koppelung läßt sich gute Resonanz zweier Schwingungen hervorbringen, bei enger Koppelung nicht, dagegen ist im zweiten Falle die auf das gekoppelte System übertragene Energie groß. Auch für die Konstruktion von Teslatransformatoren kommen diese Entwicklungen in Betracht[1].

## § 19. Veränderliche Zustände. Elektrische Schwingungen in Isolatoren und Halbleitern.

**78.** Wenn die Bewegungen nicht mehr so langsam sind, daß man sie als quasistationär ansehen kann, so beschränken sich die Vorgänge nicht mehr im wesentlichen auf die Leiter, sondern es kommen die elektrischen und magnetischen Kräfte an jedem Punkt des Raumes in Betracht.

[1] Siehe M. WIEN, Drudes Ann. **8.** 686. 1902 (vorher J. v. GEITLER, Wien. Ber. Febr. u. Okt. 1895. — B. GALITZIN, Petersb. Ber. Mai u. Juni 1895). — A. OBERBECK, Wied. Ann. **55.** 623. 1895. — R. DOMALIP und F. KOLACZEK, Wied. Ann. **57.** 731. 1896. — M. WIEN, Wied. Ann. **61.** 151. 1897. — V. BJERKNES, Wied. Ann. **55.** 120. 1895. — P. DRUDE, Drudes Ann. **11.** 957. 1903; **13.** 512. 1904. — M. WIEN, Drudes Ann. **14.** 626. 1904. — M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **5.** 174. 1904. — Diskussion zwischen J. ZENNECK und P. DRUDE, Phys. Zeitschr. **5.** 586, 745. 1905; **6.** 107, 196, 502. 1905. — W. SEIBT, ibid. **6.** 142. 1905. — Siehe ferner das Buch von J. ZENNECK, Elektromagnetische Schwingungen, Stuttgart 1905. — Die in einem Teslatransformator auftretenden Induktionen sind behandelt von A. OBERBECK, Wied. Ann. **55.** 623. 1895. — A. BLÜMCKE, Wied. Ann. **58.** 405. 1896. — K. DOMALIP und F. KOLACZEK, Wied. Ann. **57.** 731. 1896. — P. DRUDE, Drudes Ann. **9.** 293, 590. 1902; **13.** 512. 1904.

Wenn wir die beiden MAXWELLschen Gleichungssysteme auf einen homogenen, isotropen Isolator anwenden, für welchen also $\lambda$ und daher auch $u v w$ gleich Null sind, und wenn wir wahre Ladungen ausschließen, so werden die Gleichungen

$$A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad ,$$

$$A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \qquad A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ,$$

$$A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \quad ,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad .$$

Indem man die erste dieser Gleichungen mit $A\mu$ multipliziert und nach $t$ differenziert und rechts die Werte aus dem zweiten System einträgt, erhält man

$$A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 Y}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \varDelta X \quad .$$

Dieselbe Gleichungsform ergibt sich auch für die übrigen Kraftkomponenten. Es wird also

$$A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2X}{dt^2} = \varDelta X, \qquad A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2L}{dt^2} = \varDelta L \quad ,$$

$$A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2Y}{dt^2} = \varDelta Y, \qquad A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2M}{dt^2} = \varDelta M \quad ,$$

$$A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2Z}{dt^2} = \varDelta Z, \qquad A^2 \varepsilon\mu \frac{d^2N}{dt^2} = \varDelta N \quad .$$

Diese Gleichungen haben alle die bekannte Form der Wellengleichungen. Setzen wir $a^2 = \frac{1}{A^2 \varepsilon\mu}$ und bezeichnen eine von den sechs Kraftkomponenten mit $\varphi$, so wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \varDelta\varphi \quad .$$

Für den speziellen Fall, daß $\varphi$ außer von $t$ nur von einer Koordinate, etwa $z$, abhängig ist, ergibt sich

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} \quad ,$$

deren Lösung bekanntlich aussagt, daß sich die Größe $\varphi$ längs der positiven und negativen $z$-Achse mit der Geschwindigkeit $a$ fortpflanzt. Da alle Größen nur von $z$ abhängen sollen, so liefern die beiden letzten MAXWELLschen Gleichungen

$$\frac{dZ}{dt} = 0, \qquad \frac{dN}{dt} = 0 \quad ,$$

ferner ist

$$\frac{dZ}{dz} = 0, \qquad \frac{dN}{dz} = 0 \quad .$$

Die Größen $Z$ und $N$ haben also überall und zu allen Zeiten denselben Wert. Sie kommen für die Fortpflanzung der Bewegungen nicht in Betracht.

Daraus folgt, daß die Verschiebungen, die sich fortpflanzen, rein transversale sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$a = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad .$$

Im freien Äther, für welchen $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ ist, ist $a = a_0$,

$$a_0 = \frac{1}{A} \quad ,$$

und da $A$ aus dem Verhältnis der Einheiten experimentell gleich der reziproken Lichtgeschwindigkeit gefunden ist, so geschieht die Fortpflanzung mit Lichtgeschwindigkeit.

Das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Luft $a_0$ zu der in einem andern Medium $a$, welches Verhältnis in der Optik der Brechungsindex genannt wird, ist

$$\frac{a_0}{a} = n = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad .$$

Diese Beziehung wurde von MAXWELL aufgestellt. Sie gilt für durchsichtige Medien, ihre angenäherte Gültigkeit ist aber beschränkt auf diejenigen Substanzen, welche keine anomale Dispersion im Ultrarot besitzen. Da $\mu$ für alle durchsichtigen Substanzen sehr nahe $= 1$ ist, ist ebenso genau

$$n^2 = \varepsilon \quad .$$

**79.** Wenn wir zweitens eine Substanz annehmen, welche eine angebbare Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ und zugleich Leitungsfähigkeit $\lambda$ besitzt, also einen Halbleiter, so werden die Gleichungen der beiden Systeme:

$$A\varepsilon\frac{dX}{dt} + 4\pi A\lambda X = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad A\mu\frac{dL}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad ,$$

$$A\varepsilon\frac{dY}{dt} + 4\pi A\lambda Y = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \qquad A\mu\frac{dM}{dt} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ,$$

$$A\varepsilon\frac{dZ}{dt} + 4\pi A\lambda Z = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad A\mu\frac{dN}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \quad .$$

Differenzieren wir die erste der drei Gleichungen nach $x$, die zweite nach $y$, die dritte nach $z$ und beachten wir, daß $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho$ ist, so erhalten wir

$$\varepsilon\frac{d\varrho}{dt} + 4\pi\lambda\varrho = 0 \quad .$$

Diese Gleichung gibt integriert

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}t} \quad .$$

Setzen wir $\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = \tau$, so ist

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Die Größe $\frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = \tau$ nennt man die Relaxationszeit. Mit wachsender Zeit nähert sich $\varrho$ überall der Null, um so rascher, je kleiner $\tau$ ist. Wir können daher nach einiger Zeit überall $\varrho = 0$ annehmen.

Wenn wir dann die ersten Gleichungen, wie in der vorigen Nummer, behandeln, so folgt

$$A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 X}{dt^2} + 4 \pi \lambda \mu A^2 \frac{dX}{dt} = \Delta X$$

und ebenso

$$A^2 \varepsilon \mu \frac{d^2 L}{dt^2} + 4 \pi \lambda \mu A^2 \frac{dL}{dt} = \Delta L \quad .$$

Dieselben Gleichungen gelten für die andern Komponenten. Alle sechs Kraftkomponenten erfüllen also, wenn wieder

$$\frac{1}{A^2 \varepsilon \mu} = a^2$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{4 \pi \lambda}{\varepsilon} \frac{d\varphi}{dt} = a^2 \Delta \varphi \quad .$$

Wenn wieder speziell $\varphi$ nur von $t$ und einer Koordinate, etwa $z$, abhängig genommen wird, und wenn wieder

$$\frac{\varepsilon}{4 \pi \lambda} = \tau$$

gesetzt wird, so wird

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\varphi}{dt} = a^2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \quad .$$

Diese Gleichung bezeichnet man zuweilen als die „Telegraphengleichung“. Auch hier sind die Bewegungen, die sich in der Richtung der $z$-Achse fortpflanzen, transversale, weil aus den Gleichungen

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{1}{\tau} Z = 0 \, , \qquad \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau} N = 0$$

das rasche Erlöschen etwa vorhandener Werte von $Z$ und $N$ folgt.

Die Lösung obiger Gleichung ergibt bekanntlich Fortschreiten der Bewegung in der Richtung der $z$-Achse, verbunden mit Dämpfung. Man kann sie auf die Form bringen

$$\varphi = b e^{-\frac{\nu \varkappa}{a} z} e^{i \nu \left(t - \frac{n}{a} z\right)} \quad ,$$

worin $\nu$ eine willkürliche Konstante (Schwingungszahl) ist und $n$ und $\varkappa$ mit $\nu$ und $\tau$ so zusammenhängen, daß

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 \quad ,$$

$$2 n \varkappa = \frac{1}{\nu \tau}$$

ist.

Eine Anwendung dieser Gleichungen für Metalle, wenn $\nu$ einen genügend kleinen Wert hat (ultrarote Strahlen), ergeben die Versuche von HAGEN und RUBENS, welche in Bd. 3, S. 287 u. 421 besprochen sind.

**80.** Die allgemeine Lösung der MAXWELL-HERTZschen Gleichungen für ein Medium, welches Dielektrizitätskonstante und Leitungsfähigkeit besitzt, gab BIRKELAND[1]. Die Lösung stellt den zeitlichen Verlauf und die räumliche Verteilung der Kräfte $XYZ$ und $LMN$ in jedem Punkte eines unendlich ausgedehnten Mediums dar, und zwar durch mehrfache Integrale. Speziell zeigt sich, daß eine

[1] KR. BIRKELAND, C. R. **120**. 1046. 1895; Arch. sc. phys. nat. (3) **33**. 5. 1895; **34**. 5. 1895.

in diesem Medium fortschreitende Störung sich so verhält, daß vor der Welle das Medium in absoluter Ruhe, während hinter der Welle noch ein Residuum bleibt, welches mit der Zeit erst allmählich abklingt.

Den Durchgang einer oszillatorischen Bewegung durch eine Platte eines Dielektrikums hat YULE theoretisch und experimentell[1] verfolgt.

## § 20. Elektrische Schwingungen eines Dipols (HERTZsche Versuche). Oszillatoren.

**81.** Das allgemeine Problem der variablen Zustände trat zum erstenmal bei den HERTZschen Versuchen auf und HERTZ selbst gab auch sofort die theoretische Behandlung für seine Versuche[2]. Ein primärer geradliniger offener Leiter sei gegeben. Wir betrachten eine von den Ebenen, welche diesen Leiter enthält und legen die $z$-Achse in den Leiter. Dann ist die elektrische Kraft, wenn in dem primären Leiter die Schwingung hin und her geht, jedenfalls in dieser Meridianebene gelegen und ihr Wert ist also nur abhängig von der $z$-Koordinate eines Punktes und von seinem Abstand $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der $z$-Achse. Die magnetische Kraft aber hat infolgedessen wenigstens eine Komponente senkrecht zur Meridianebene.

Die elektrische Kraft an einem Punkte hat also die zwei Komponenten $Z$ parallel zu $z$, und $R$ parallel zu $\varrho$, wobei $R = X\frac{x}{\varrho} + Y\frac{y}{\varrho}$ ist. Die magnetische Kraft hat eine Komponente $P$ senkrecht zur Meridianebene $P = L\frac{y}{\varrho} - M\frac{x}{\varrho}$ und eventuell eine Komponente $N$ parallel zu $z$.

Es ist dann also

$$X = R\cos(\varrho, x) = R\frac{\partial\varrho}{\partial x} \quad ,$$

$$Y = R\cos(\varrho, y) = R\frac{\partial\varrho}{\partial y} \quad ,$$

$$R = X\frac{\partial\varrho}{\partial x} + Y\frac{\partial\varrho}{\partial y} \quad ,$$

$$L = P\frac{\partial\varrho}{\partial y} \quad ,$$

$$M = -P\frac{\partial\varrho}{\partial x} \quad ,$$

$$P = L\frac{\partial\varrho}{\partial y} - M\frac{\partial\varrho}{\partial x} \quad .$$

Das zweite System der MAXWELLschen Gleichungen wird daher, wenn in dem umgebenden Isolator $\varepsilon = \mu = 1$ gesetzt wird,

$$A\frac{dL}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial\varrho}{\partial y} \quad ,$$

$$A\frac{dM}{dt} = \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial\varrho}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} \quad ,$$

$$A\frac{dN}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{\partial\varrho}{\partial x} - \frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right) = 0 \quad .$$

---

[1] G. U. YULE, Phil. Mag. (5) **39**. 309. 1895; Wied. Ann. **50**. 742. 1893. — S. auch O. LODGE, Phil. Mag. (5) **47**. 385. 1899. — [2] H. HERTZ, Wied. Ann. **36**. 1. 1888; Ausbreitg. der el. Kraft 147.

Aus der letzten Gleichung entnehmen wir $N = 0$. Die ersten beiden geben durch Multiplikation mit $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$ resp. $-\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ und Addition

$$A\frac{dF}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial \varrho} - \frac{\partial R}{\partial z} \quad .$$

Das erste System der MAXWELLschen Gleichungen wird

$$A\frac{dX}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial x} \quad ,$$

$$A\frac{dY}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial y} \quad ,$$

$$A\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \varrho} + \frac{P}{\varrho} \quad .$$

Durch Multiplikation der ersten beiden Gleichungen mit $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ resp. $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$ und Addition wird

$$A\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad ,$$

während die letzte Gleichung sich schreiben läßt

$$A\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho P) \quad \text{oder} \quad A\frac{d}{dt}(\varrho Z) = \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho P) \quad .$$

Daraus ergibt sich, daß die hier in Betracht kommenden Komponenten $R, Z, P$ und $N$ folgende Gleichungen zu erfüllen haben:

$$(1) \qquad A\frac{d}{dt}(\varrho R) = -\frac{\partial}{\partial z}(\varrho P) \quad ,$$

$$(2) \qquad A\frac{d}{dt}(\varrho Z) = \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho P) \quad .$$

$$(3) \qquad A\frac{d}{dt}(\varrho P) = \varrho\frac{dZ}{d\varrho} - \frac{\partial}{\partial z}(\varrho R) \quad ,$$

$$(4) \qquad A\frac{dN}{dt} = 0 \quad .$$

Indem wir die Gleichung (1) nach $\varrho$, die Gleichung (2) nach $z$ differenzieren und addieren, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{d}{dt}(\varrho R)\right] = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d}{dt}(\varrho Z)\right] \quad .$$

Darauf folgt, daß wir setzen können

$$\frac{d}{dt}(\varrho R) = -\frac{\partial S}{\partial z} \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}(\varrho Z) = \frac{\partial S}{\partial \varrho} \quad ,$$

wo $S$ eine zu bestimmende Funktion ist. Setzen wir noch $S = \frac{dQ}{dt}$, so wird

$$\varrho R = -\frac{\partial Q}{\partial z} \quad ,$$

$$\varrho Z = \frac{\partial Q}{\partial \varrho} \quad .$$

Die ersten beiden Gleichungen geben dann

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varrho P) = A\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho P) = A\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{dQ}{dt}\right) \quad ,$$

woraus folgt

$$\varrho P = A\frac{dQ}{dt} \quad .$$

Die Gleichung (3) gibt nun

$$A^2\frac{d^2Q}{dt^2} = \varrho\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial Q}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \quad .$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung auf eine bekannte Form zu bringen, setzen wir

$$Q = \varrho\frac{d\Pi}{d\varrho} \quad ,$$

woraus folgt

$$A^2\frac{d^2\Pi}{dt^2} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho\frac{d\Pi}{d\varrho}\right) + \frac{d^2\Pi}{dz^2} = \Delta\Pi \quad .$$

Durch Einführung der Größe $\Pi$ werden

$$X = -\frac{d^2\Pi}{dx\,dz}, \qquad L = A\frac{d^2\Pi}{dt\,dy} \quad ,$$

$$Y = -\frac{d^2\Pi}{dy\,dz}, \qquad M = -A\frac{d^2\Pi}{dt\,dx} \quad ,$$

$$Z = \frac{d^2\Pi}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{dy^2}, \qquad N = 0 \quad .$$

Eine Lösung der Differentialgleichung für $\Pi$, welche von der Funkenstrecke aus sich fortpflanzende Kugelwellen ergibt, ist, wenn unter $r$ der Abstand eines Punktes vom Anfangspunkt des Koordinatensystems, in dem sich die Funkenstrecke befinden soll, verstanden wird.

$$\Pi = \frac{B}{r}\sin\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi \quad ,$$

worin $\frac{T}{\lambda} = A$ ist. Dieser Ausdruck stellt folgende Eigenschaften der Schwingung dar:

Im Nullpunkt, dem Schwingungszentrum, wird $\Pi$ unendlich. In der Nähe des Zentrums, wo $r$ gegen $\lambda$ verschwindet, haben die elektrischen Kräfte ein Potential

$$\varphi = -B\sin 2\pi\frac{t}{T}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right) \quad .$$

Setzt man $B = El$, so entspricht dies einem Potential, das von einem elektrischen Doppelpunkt mit dem Maximalmoment $B = El$ herrührt. Darin ist $E$ die Ladung des positiven Punktes, $l$ dessen Abstand von dem anderen Punkte. Das Moment schwankt mit der Periode $T$ zwischen $+El$ und $-El$ hin und

her. Die magnetische Kraft $P$ steht senkrecht auf der Schwingung und hat die Größe

$$P = A \frac{E l 2 \pi}{T r^2} \cos \frac{t}{T} 2 \pi \sin \vartheta \quad ,$$

worin $\vartheta$ der Winkel ist zwischen $r$ und $l$.

Diese Kraft entspricht dem BIOT-SAVARTschen Gesetze. Für größere Entfernungen ergibt der Ausdruck für $\Pi$ und für die Kräfte folgendes:

In der Richtung der Schwingung, also für die $z$-Achse ($\varrho = 0$) ist

$$R = 0 \,, \quad P = 0 \quad ,$$

$$Z = -\frac{4 \pi E l}{\lambda r^2} \left\{ \cos 2 \pi \left( \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) 2 \pi - \frac{\lambda}{2 \pi r} \sin 2 \pi \left( \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right\} \quad .$$

Die elektrische Kraft fällt in die Richtung der Schwingung, sie nimmt in kleinen Entfernungen wie die umgekehrte dritte Potenz, in größeren Entfernungen wie das umgekehrte Quadrat der Entfernung von der Funkenstrecke ab.

In der $xy$-Ebene, also in der durch die Funkenstrecke senkrecht zum primären Leiter gelegten Ebene ist die elektrische Kraft parallel der Schwingung. Sie nimmt anfangs rasch, später nur sehr langsam ab.

In großen Entfernungen von der Funkenstrecke ist die Welle eine reine Transversalwelle. Die elektrische und die magnetische Kraft stehen senkrecht zu $r$.

Eine weitere Diskussion der erhaltenen Werte der elektrischen und magnetischen Kräfte ist von HERTZ (l. c.) durch graphische Darstellung ausgeführt worden.

**82.** Während HERTZ, um die MAXWELLsche Theorie auf seine Versuche anzuwenden, als Erreger einen elektrischen Dipol annahm, der mit gegebener Periode Schwingungen ausführt, ist es die Aufgabe weiter eindringender Analyse, nun gerade die Schwingungszahlen und -Formen verschiedener Oszillatoren zu bestimmen und zugleich die Dämpfung der Schwingungen in dem Oszillator durch Ausstrahlung selbst zu berechnen. Die letztere Aufgabe ist von PLANCK[1] für den elektrischen Dipol in bezug auf die Grundschwingung gelöst worden. J. J. THOMSON[2] hat das Problem für eine leitende Kugel als Oszillator gelöst. M. ABRAHAM[3] untersuchte den Fall der elektromagnetischen Schwingungen, die ein stabförmiger Oszillator aussendet. Es ergibt sich aus dieser Untersuchung unter anderem, daß, wenn das Verhältnis $\varepsilon$ der Dicke des Stabes zu seiner Länge klein ist, so daß die Quadrate von $\varepsilon$ zu vernachlässigen sind, daß dann die Wellenlänge der Grundschwingung gleich der doppelten Stablänge ist. Die Oberschwingungen sind harmonisch. Die Dämpfung durch Strahlung wird um so kleiner, je geringer die Dicke des Stabes ist[4]. Zugleich findet ABRAHAM[5], daß die Phase elektrischer Schwingungen von der Oberfläche eines leitenden Körpers mit veränderlicher Geschwindigkeit hinausschreitet, einer Geschwindigkeit, die mit unendlich großen Werten anfängt und in großen Entfernungen gleich der Lichtgeschwindigkeit wird.[6]

---

[1] M. PLANCK, Wied. Ann. **60**. 577; **63**. 419. 1897. — [2] J. J. THOMSON, Recent researches in electricity and magnetism. 361. 1890. — [3] M. ABRAHAM, Wied. Ann. **66**. 435. 1898; s. auch F. KOLACZEK, Wied. Ann. **43**. 371. 1890. — [4] Weitere Literatur über diese Fragen: O. HEAVISIDE, Electromagnetic Theorie, Nr. 39—48. 1893. — C. BARUS, Sill. J. (4) **5**. 343. 1898. — H. LAMB, Proc. Math. Soc. **29**. 523. 1898. — L. SILBERSTEIN, Abh. Krak. Ak. 1899. 206. — A. TURPAIN, C. R. **129**. 178. 1899. — [5] M. ABRAHAM, Wied. Ann. **67**. 804. 1899. — F. HACK, Drudes Ann. **14**. 539. 1904; **18**. 634. 1905. — F. KIEBITZ, Drudes Ann. **5**. 872. 1901. — M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **2**. 329. 1901. — F. EHRENHAFT, Wien. Ber. **113**. [2a] 273. 1904. — F. FUCHS, Dissertation München 1906. — [6] Andere Probleme, Schwingungen in Röhren: J. LARMOR, Proc. Lond. Math. Soc. **26**. 119. 1894. — J. J. THOMSON, Recent researches 1893. Art. 300—307. — R. H. WEBER, Drudes Ann. **8**. 721. 1902. — A. KAHLÄNE, Drudes Ann. **18**. 92. 1905. — Schwingungen zwischen konfokalen Ellipsoiden: J. W. NICHOLSON, Phil. Mag. (6) **10**. 225. 1905.

**83.** Eine ausführliche Theorie des HERTZschen Resonators hat POINCARÉ[1] gegeben und im Anschluß an ihn ist DRUDE[2] zu ähnlichen Resultaten gekommen. Aus den Ergebnissen sei hervorgehoben:

Der Resonator reagiert vorzugsweise auf die elektrische Kraft in der Mitte seiner Leitung, dagegen gar nicht auf die elektrische Kraft an seiner Unterbrechungsstelle[3].

## § 21. Fortpflanzung der Elektrizität in Drähten.

**84.** Die Bewegung der Elektrizität in Drähten, speziell in unterseeischen oder unterirdischen Kabeln ist zuerst 1855 von Lord KELVIN (Sir W. THOMSON)[4] behandelt worden. In dieser Theorie wird der Ladung des Drahtes durch die Polarisierung des umgebenden Mediums Rechnung getragen, dagegen wird der Einfluß der Induktion vernachlässigt. KIRCHHOFF[5] hat die Theorie unter derselben Annahme entwickelt. Die elektrischen Kräfte im Draht und im umgebenden Medium leiten sich dann von einem Potential $\varphi$ ab, welches die Bedingung erfüllt

$$\Delta\varphi = 0$$

sowohl im Innern des Leiters als im Innern des Dielektrikums. An der Grenze eines Leiters und eines Dielektrikums aber bestehen die Gleichungen

$$\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right) - \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1}\right) + 4\pi\lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} - 4\pi\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = 0 \quad ,$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \quad .$$

Der Leiter sei ein unendlich langer Draht in der $z$-Achse. Der Abstand eines Punktes $P$ von dem Draht sei $\varrho$. Dann ist $\varphi$ nur eine Funktion von $z$, $\varrho$ und $t$. Nimmt man die Abhängigkeit des $\varphi$ von der Zeit $t$ von vornherein derart an, daß es den Faktor $e^{\nu t}$ enthält, wo $\nu$ im allgemeinen komplex sein kann, so wird die Grenzbedingung

$$(\varepsilon_2 \nu + 4\pi\lambda_2)\frac{\partial \varphi}{\partial n_2} - (\varepsilon_1 \nu + 4\pi\lambda_1)\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = 0$$

und die Differentialgleichung für $\varphi$ wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = 0 \quad .$$

Die Grenzbedingungen sagen aus, daß $\varphi$ und $(\varepsilon\nu + 4\pi\lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ an der Grenze stetig bleiben.

Die Bedingungen lassen sich erfüllen, wenn gesetzt wird

$$\varphi = e^{\pm i m z}\Phi \quad ,$$

worin

$$\frac{d^2\Phi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\Phi}{d\varrho} - m^2\Phi = 0 \quad .$$

Setzt man $m\varrho = \sigma$, so wird

$$\frac{d^2\Phi}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{d\Phi}{d\sigma} - \Phi = 0 \quad .$$

---

[1] H. POINCARÉ, Les oscillations électriques, Paris 1894. 220ff. — Siehe K. R. JOHNSON, Journ. de phys. (3) **10**. 365. 756. 1901; dagegen H. POINCARÉ, L'éclairage électrique **29**. 305. 1901. — [2] P. DRUDE, Wied. Ann. **53**. 721. 1894. — [3] Weitere Literatur: W. BJERNACKY, J. russ. phys.-chem. Ges. (2) **25**. 159. 1893; Fortschr. d. Phys. 1893. 461. — G. F. FITZGERALD, Rep. Brit. Ass. Nottingham. **63**. 698. 1893. — H. C. POCKLINGTON, Proc. Cambr. Soc. **9**. 324. 1897. — L. RELLSTAB, Dissert. Kiel 1898. — K. PEARSON u. ALICE LEA, Proc. Roy. Soc. **64**. 246. 1899. — M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **2**. 329. 1901. — A. TURPAIN, Arch. néerl. (2) **5**. 152. 1900. — H. SEIBT, Elektrotechn. Zeitschr. **22**. 580. 646. 688. 1901. — F. HASENÖHRL, Phys. Ges. Berlin **3**. 450. 1905; Phys. Zeitschr. **7**. 37. 1906. — [4] Lord KELVIN, Phil. Mag. (4) **2**. 157. 1855. — [5] G. KIRCHHOFF, Ges. Abh. 131, 154. 1857; 182. 1877.

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\Phi = AP(\sigma) + B \cdot Q(\sigma) \quad ,$$

worin

$$P(\sigma) = 1 + \frac{\sigma^2}{2^2} + \frac{\sigma^4}{(2 \cdot 4)^2} + \cdots \quad ,$$

$$Q(\sigma) = -P(\sigma)\left(\log\frac{\sigma}{2} + 0{,}577\right) + \frac{\sigma^2}{2^2} + \frac{\sigma^4(1 + \frac{1}{2})}{(2 \cdot 4)^2} + \cdots \quad ,$$

also BESSELsche Funktionen sind.

Für das Innere des Drahtes selbst, nämlich für $\varrho = 0$, wird $Q$ unendlich, es muß also $B = 0$ sein, und die Lösung ist

$$\Phi = AP(\sigma) \quad ,$$

$$\varphi = A e^{\nu t \pm i m z} P(m\varrho) \quad .$$

Da nun für kleine Werte von $\varrho$ und $m\varrho$ $P(\sigma) = 1$ ist, so ist für den Draht selbst

$$\varphi = A e^{\nu t \pm i m z}$$

oder

$$\varphi = e^{\beta z}[C\cos(nt + az)] + C'\sin(nt + az)$$
$$+ e^{-\beta z}[D\cos(nt - az] + D'\sin(nt - az) \quad .$$

Es ergibt sich also eine örtliche Dämpfung beim Fortschreiten der Wellen.

**85.** Die Aufgabe, die Bewegung der Elektrizität in einem Draht und dem umgebenden Dielektrikum zu finden, enthält als spezielle Fälle mehrere Teilprobleme, nämlich

1. der Draht wird als unendlich lang, mit kreisförmigem Querschnitt von beliebigem Radius angenommen, und das Dielektrikum erstreckt sich bis ins Unendliche;
2. der Draht des Problems 1 ist umgeben von einem konzentrischen Leiter mit gegebenem kleinen Radius $R$, so daß die Verschiebungsströme ‖ Leiter zu vernachlässigen sind.
3. der Draht ist nicht unbegrenzt, sondern hat endliche Länge.

Das Problem 1 ist zunächst von HERTZ[1] in Angriff genommen worden, unter der Annahme, daß der Radius $\varrho$ des Drahtes unendlich dünn ist. POINCARÉ[2] hat die Theorie erweitert, indem er auch die Drahtdicke einführte, behielt aber die Voraussetzung bei, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit sei, welches erst zu erweisen ist.

Die Fortpflanzung elektrischer Wellen in Drähten geschieht nach POINCARÉ[3] nach der Formel

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} \quad ,$$

wenn $\varphi$ das Potential ist und die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 gesetzt wird, $z$ ist die Achse des Drahtes. Setzt man

$$\varphi = Ue^{-t} \quad ,$$

so wird

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{d^2U}{dz^2} = U \quad .$$

---

[1] H. HERTZ, Ausbreitung d. elektr. Kraft 165 ff. 1888. — [2] H. POINCARÉ, C. R. **120**. 1046 u. 1229. 1892. — M. BRILLOUIN, C. R. **136**. 667, 746. 1903. — [3] H. POINCARÉ, C. R. **117**. 1027. 1893.

Diese Gleichung läßt sich nach PICARD[1] leicht auf andere Form bringen, indem man statt der Variabeln $z$ und $t$ zwei andere, $u$ und $v$, einführt, durch

$$2u = z + t \quad ,$$
$$2v = z - t \quad .$$

Dann wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + U = 0 \quad .$$

Ist $U(u_0 v) = 1$ und $U(u v_0) = 1$ und setzt man

$$y = (u - u_0)(v - v_0) \quad ,$$

so ist $U = \psi(y)$, wo $\psi$ der Gleichung genügt

$$y \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d\psi}{dy} + \psi = 0 \quad .$$

$U$ ist also eine BESSELsche Funktion.

J. J. THOMSON[2] hat das Problem 2 direkt angefaßt, die Differentialgleichungen aufgestellt und entwickelt, und zwar für beliebige Radien. In der Diskussion muß er dann Vernachlässigungen eintreten lassen.

A. SOMMERFELD[3] hat das Problem 1 direkt behandelt, bei beliebiger Annahme über den Drahtradius.

Den allgemeinen Fall von zylindrischen Drähten mit beliebigem Querschnitt hat Lord RAYLEIGH[4] untersucht.

Den Fall eines frei endenden Drahtes untersuchte ABRAHAM[5]. Er bespricht auch die Frage nach der Energie elektrischer Drahtwellen[6].

**86.** Von besonderem praktischen Interesse ist das Problem der LECHERschen Drähte, insbesondere bei stehenden Drahtwellen die Frage nach den Abständen der Knoten voneinander und von dem Anfangs- und Endkondensator. Dieses Problem wurde im Anschluß an HERTZ zunächst von COHN und HEERWAGEN[7] behandelt. Auch SALVIONI[8] hat die Erscheinungen genauer theoretisch verfolgt. Seine Formel weicht von der von COHN und HEERWAGEN etwas ab. Ist die Länge des primären Drahtes von der Funkenstrecke bis zum primären Kondensator gleich $x$, bedeuten ferner $\varkappa$ und $\varkappa'$ die Kapazitäten des primären und des Endkondensators, ist $l$ die Länge jedes sekundären Drahtes vom primären bis zum Endkondensator, $a$ sein Radius, $b$ der Abstand der beiden Drähte, ist $z$ der Abstand des ersten Knoten vom primären Kondensator, $z'$ der des letzten Knotens vom Endkondensator, $n$ die Anzahl der Knoten und $\lambda$ die Wellenlänge, so ist

$$l = n\frac{\lambda}{2} + z + z' \quad ,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\pi z z'}{\lambda} = \frac{\lambda}{8\pi\varkappa'\log\frac{b}{a}} \quad ,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\pi(z + x)}{\lambda} = \lambda\frac{1 - \operatorname{tang}^2(z - x)\frac{\pi}{\lambda}}{8\pi\varkappa\log\frac{b}{a}} \quad .$$

[1] E. PICARD, C. R. **118**. 16. 1893. — [2] J. J. THOMSON, Notes on recent researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893. — [3] A. SOMMERFELD, Wied. Ann. **67**. 232. 1898. — [4] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **44**. 199. 1897. — [5] M. ABRAHAM, Drudes Ann. **2**. 32. 1900. — A. ECKSTRÖM, Ofvers. Svensk. Vet. Ak. Förh. 1896. S. 377; Fortschr. d. Phys. 1896. (2). 401. — [6] M. ABRAHAM, Drudes Ann. **6**. 217. 1901. — Andere hierher gehörige Probleme siehe W. SEITZ, Drudes Ann. **16**. 746. 1901. — W. v. IGNATOWSKI, Drudes Ann. **18**. 495, 1078. 1901. — A. W. CONWAY, Trans. Dublin Soc. (2) **8**. 95. 1904. — [7] COHN und HEERWAGEN, Wied. Ann. **43**. 355. 1891. — Siehe auch D. MAZOTTO, N. Cim. (4) **6**. 172. 1897. — [8] E. SALVIONI, Perugia 1893. 36 S.; Fortschr. d. Phys. 1893. S. 484.

Falls die primären Drähte nicht kurz genug sind, können sich in diesen auch Knoten bilden.

Eine angenäherte Behandlung des Problems zweier unendlich langer Drähte ist von COHN[1] geliefert worden, und auch DRUDE[2] hat das Problem stehender Drahtwellen nicht mit den Formeln der MAXWELLschen Theorie, sondern auf Grund der älteren Induktionsformeln behandelt und insbesondere auf das LECHERsche Drahtsystem angewendet.

G. MIE[3] hat dann das Problem zweier unendlich langer Paralleldrähte sehr ausführlich und streng behandelt, während W. B. MORTON[4], ähnlich wie MIE, die Fortpflanzung von Wellen längs Drähten für folgende Spezialfälle ausführt:

1. Zwei Drähte von wenig verschiedenen Radien,
   a) mit ungleichartiger,
   b) mit gleichartiger Ladung;
2. drei Drähte in Form eines gleichschenkligen Dreiecks, die Schenkel mit entgegengesetzter Ladung;
3. vier Drähte in rechtwinkliger Gruppierung;
4. $2n$ Drähte in regulärem Polygon mit abwechselnden Ladungen;
5. $n$ Drähte in einem Polygon mit gleichen Ladungen.

Es wird in allen Fällen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Dämpfung der Wellen durch Annäherung berechnet. In einer folgenden Arbeit[5] wird der Fall 4 noch erweitert[6].

## D) Die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen für bewegte Körper und das System von COHN.

### § 22. Die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen.

**87.** In der bisher dargestellten Theorie war stets die Annahme festgehalten, daß die materiellen Körper, in denen die elektrischen Bewegungen vor sich gehen, ruhen. Wenn aber diese Körper selbst in Bewegung sind, so daß jedes Teilchen von ihnen eine Geschwindigkeit $\alpha\,\beta\,\gamma$ besitzt, wie werden die elektromagnetischen Vorgänge dadurch beeinflußt? Da diese Vorgänge nur zum Teil in der körperlichen Substanz ihren Sitz haben, zum Teil aber in einem Medium, dem Äther, das die Körper durchdringt, so muß man, um die Theorie zu erweitern, sich zunächst klar machen, wie sich der Ätherinhalt eines Körpers verhält, wenn dieser Körper sich bewegt. Und hier kann man sofort zwei entgegengesetzte Annahmen machen.

1. Der Ätherinhalt eines Körpers bleibt in Ruhe, während der Körper sich bewegt, d. h. der Körper ist bei seiner Bewegung nicht immer von demselben Äther erfüllt, sondern immer von neuem, er durchdringt den ruhenden Äther und wird von diesem, der selbst ruht, erfüllt.

---

[1] E. COHN, Das elektromagnetische Feld. 471—487. 1900. — [2] P. DRUDE, Wied. Ann. **60**. 1. 1897. — [3] G. MIE, Drudes Ann. **2**. 201. 1900. — S. auch W. B. MORTON, Phil. Mag. (6) **4**. 302. 1902. — [4] W. B. MORTON, Phil. Mag. (5) **50**. 605. 1900. — [5] W. B. MORTON, Phil. Mag. (6) **1**. 563. 1901. — [6] Weitere Literatur: O. HEAVISIDE, Beibl. **17**. 974. 1893; **18**. 387. 1894; **20**. 156. 1896; **25**. 823. 1901. — J. D. VAN DER WAALS, Versl. K. Ak. van Vet. Proc. 1900. S. 534. — E. H. BARTON, Phil. Mag. (5) **46**. 296. 1898. — W. B. MORTON, Phil. Mag. (5) **47**. 296. 1899. — A. ELSAS, Wied. Ann. **49**. 487. 1893. — KR. BIRKELAND, C. R. **116**. 499. 625. 1893. — J. BLONDIN, Lum. él. **51**. 401. 1894. — A. POTIER, Journ. de phys. (3) **3**. 107. 1894; C. R. **118**. 227. 1894. — VASCHY, C. R. **119**. 1198. 1894. — H. POINCARÉ, Les oscillations électriques. Paris 1894. — H. W. MACDONALD, Electric wares Cambridge 1902. Doch siehe dazu die Kritik von M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **4**. 422. 1903 und Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (6) **8**. 105. 1904. — H. W. MACDONALD, ibid. (6) **8**. 276. 1904.

2. Der Ätherinhalt eines Körpers bewegt sich mit dem Körper selbst, ein bewegter Körper hat immer dieselben Ätherteilchen in sich.

Während im ersten Fall dem Äther dauernde Ruhe zugeschrieben wird, wird ihm im zweiten Fall Beweglichkeit zugeschrieben. Nach der ersten Annahme können sich zwar materielle Körper relativ gegen den Äther bewegen, nicht aber Äther gegen Äther, nach der zweiten Annahme kann sich auch Äther gegen Äther relativ bewegen. Daher folgt aus der zweiten Annahme auch, daß der Äther, da er beweglich ist, in Räumen, in denen keine körperliche Materie vorhanden ist, an der er befestigt ist, sich im ganzen bewegen können wird.

Die zweite Hypothese ist nun diejenige, die Hertz seiner Erweiterung der Maxwellschen Gleichungen zugrunde legt. Man kann den dieser Erweiterung zugrunde liegenden Gedanken kurz so aussprechen: Die magnetischen und die elektrischen Kraftlinien sind an die materiellen Punkte der Körper gebunden und werden bei der Bewegung der Körper mit diesen durch den Raum geführt. Abgesehen davon ändern sich die elektrischen und magnetischen Kräfte an jeder Raumstelle so, wie es durch die Ruhegleichungen angegeben ist[1].

Nach dieser Annahme besteht die ganze Änderung der Gleichungen im folgenden. In der Gleichung

$$A\frac{d\mathfrak{L}}{dt}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}$$

bedeutet $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$ die an einem ruhenden materiellen Punkte, also an auch einer bestimmten Raumstelle stattfindende Änderung von $\mathfrak{L}$ mit der Zeit. Wir bezeichnen diese Änderung von jetzt an mit $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}$. Ruht aber der Punkt nicht, sondern ist er ein Punkt eines beweglichen Körpers und hat er die Geschwindigkeiten $\alpha\,\beta\,\gamma$ in bezug auf ein ruhendes oder bewegtes Koordinatensystem, so sei die Änderung von $\mathfrak{L}$, die an diesem materiellen Punkt dadurch entsteht, daß er nicht an seiner Stelle bleibt, sondern sich fortbewegt und daher zu andere Raumstellen kommt, durch $\frac{D\mathfrak{L}}{dt}$ ausgedrückt.

Dann ist[2]

$$\frac{D\mathfrak{L}}{dt}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\beta\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}$$
$$+\mathfrak{L}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)-\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\mathfrak{M}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\mathfrak{N}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)$$

und die Gleichungen für bewegte Körper entstehen aus denen für ruhende Körper, indem man statt $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}$ einsetzt $\frac{D\mathfrak{L}}{dt}$.

**88.** Durch additive und subtraktive Zufügung einiger Glieder zu $\frac{D\mathfrak{L}}{dt}$ und den anderen Differentialquotienten werden daher die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper folgende:

---

[1] Eine Darstellung der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern unter der Annahme einer selbständigen Bewegung der magnetischen Kraftlinien hat W. Wien (Wied. Ann. **47**. 327. 1892) gegeben. S. auch R. H. Weber, Verh. Naturf.-Verein Heidelberg (N. F.) **7**. 623. 1903. — [2] Wegen der Ableitung s. H. Hertz, Ges. Abh. **2**. 260. — H. v. Helmholtz, Ges. Abh. **1**. 744. — C. Neumann, Über die Maxwell-Hertzsche Theorie I. 230. 1901. — H. Poincaré, Eléctricité et optique 2. Aufl. 372 f.

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})-\frac{\partial}{\partial z}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})+\alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\quad,$$

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})-\frac{\partial}{\partial x}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})+\beta\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\quad,$$

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})-\frac{\partial}{\partial y}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})+\gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\quad,$$

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})-\frac{\partial}{\partial z}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})+\alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+4\pi A u=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\quad,$$

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})-\frac{\partial}{\partial x}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})+\beta\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+4\pi A v=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\quad,$$

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})-\frac{\partial}{\partial y}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})+\gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+4\pi A w=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\quad.$$

Diese Gleichungen gehen natürlich für ruhende Körper ($\alpha, \beta, \gamma$ gleich Null) in die früheren über[1].

---

[1] Eine Umformung dieser Gleichungen, bei denen sie auch formell denen für die Ruhe analog werden, gibt V. VOLTERRA, Nuov. Cim. (3) **29**. 53 und 147. Die Unterschiede sind dieselben wie bei der EULERschen und LAGRANGEschen Form der hydrodynamischen Gleichungen.
In der Schreibweise der Vektorentheorie nach LORENTZ sind diese Gleichungen folgende:

$$\mathrm{Rot}\,\mathfrak{H}=-A(4\pi\mathfrak{J}+\underline{\dot{\mathfrak{D}}})\quad,$$
$$\mathrm{Rot}\,\mathfrak{E}=A\underline{\dot{\mathfrak{B}}}\quad.$$

Darin sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische und magnetische Kraft, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ die elektrische und magnetische Verschiebung (Erregung), $\mathfrak{J}$ der Leitungsstrom, und die Größen $\underline{\dot{\mathfrak{D}}}$ und $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ haben folgende Bedeutung, wenn $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist:

$$\underline{\dot{\mathfrak{D}}}=\dot{\mathfrak{D}}+\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{w}+\mathrm{Rot}[\mathfrak{D}\mathfrak{w}]\quad,$$
$$\underline{\dot{\mathfrak{B}}}=\dot{\mathfrak{B}}+\mathrm{div}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}+\mathrm{Rot}[\mathfrak{B}\mathfrak{w}]\quad.$$

$[\mathfrak{D}\mathfrak{w}]$ resp. $[\mathfrak{B}\mathfrak{w}]$ bedeuten das Vektorprodukt aus $\mathfrak{D}$ resp. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{w}$.

Die von MAXWELL selbst abgeleiteten Gleichungen für bewegte Körper[1] weichen unbedeutend von den angegebenen HERTZschen Gleichungen ab. Die Abweichungen führen zu Unterschieden nur für permanente Magnete[2].

Das HERTZsche Gleichungssystem ist, was einen wesentlichen Unterschied gegen die Gleichungen der Mechanik bedingt, nicht bezogen auf ein im Raume ruhendes Koordinatensystem. Es gilt auch, wenn unter $xyz$ die Koordinaten eines Punktes, bezogen auf ein bewegtes Achsensystem, verstanden werden[3]. Daraus folgt, daß die absolute Bewegung eines Körpers keinen Einfluß auf die elektrodynamischen Bewegungen in seinem Innern hat, sondern nur die inneren elastischen Deformationen. Nur durch die an der Oberfläche des Körpers auftretenden Deformationen der Umgebung, die bei der Bewegung eines starren Körpers auftreten, entstehen elektrische Bewegungen, welche sich dann in das Innere des bewegten Körpers fortpflanzen.

## § 23. Folgerungen aus dem HERTZschen Gleichungssystem.

**89.** Am einfachsten übersieht man die durch diese Gleichungen dargestellten Erscheinungen, wenn man die Kräfte $XYZ$ und $LMN$ in einzelne Teile zerlegt, nämlich

$$X = X_1 + X_2 \quad \text{u. s. w.} \quad L = L_1 + L_2 \quad ,$$

worin

$$\begin{aligned} X_1 &= A(\gamma\,\mathfrak{M} - \beta\,\mathfrak{N}) \quad , \\ Y_1 &= A(\alpha\,\mathfrak{N} - \gamma\,\mathfrak{L}) \quad , \\ Z_1 &= A(\beta\,\mathfrak{L} - \alpha\,\mathfrak{M}) \quad , \\ L_1 &= A(\beta\,\mathfrak{Z} - \gamma\,\mathfrak{Y}) \quad , \\ M_1 &= A(\gamma\,\mathfrak{X} - \alpha\,\mathfrak{Z}) \quad , \\ N_1 &= A(\alpha\,\mathfrak{Y} - \beta\,\mathfrak{X}) \end{aligned}$$

sein soll, während $X_2 Y_2 Z_2$ den Rest von $XYZ$ bedeutet, und $L_2 M_2 N_2$ den Rest von $LMN$.

Die elektrische Kraft $X_1\,Y_1\,Z_1$ steht dann senkrecht auf der Richtung der Geschwindigkeit und senkrecht auf der Richtung der magnetischen Verschiebung. Angewendet auf einen geschlossenen Leiter $C$ gibt das Integral

$$\int\limits_C X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz$$

die durch die Bewegung stattfindende Zunahme der Kraftlinien pro Zeiteinheit, welche die Stromfläche von $C$ scheiden. Es ist also $X_1 Y_1 Z_1$ die durch Bewegung des Körpers induzierte elektrische Kraft in diesem Punkt. Auch hier wird die in einem linearen Stromkreis induzierte elektromotorische Kraft vollständig ausgedrückt durch die mit $A$ multiplizierte Änderungsgeschwindigkeit der Zahl der Kraftlinien, welche eine anfänglich durch die Kurve des Stromkreises begrenzte Fläche, die der Bewegung der Kurve folgt, durchsetzen. In dieser Aussage sind alle Induktionserscheinungen durch relative Bewegung enthalten[4].

---

[1] CL. MAXWELL, On Physical Lines of force. Phil Mag. April 1861. — [2] H. POINCARÉ, Électricité et optique. 2. Aufl. 375 f. — [3] C. NEUMANN, BOLTZMANN-Festschrift 258. 1904, hat daraus geschlossen, daß sich die Mechanik nicht aus den MAXWELLschen Gleichungen ableiten läßt (wohl aber aus den LORENTZschen). — [4] Auch die Erscheinungen der unipolaren Induktion. S. die Behandlung derselben in M. ABRAHAMS Theorie der Elektrizität 1. 405. 1904. Über die vielfach aufgestellte Frage, ob die Kraftlinien eines Magneten sich mit ihm bewegen, welche grade bei der Theorie der unipolaren Induktion vielfach behandelt wurde,

Die entsprechende magnetische Kraft $L_1 M_1 N_1$ entsteht in einem Körper, wenn er durch die Kraftlinien eines elektrischen Feldes bewegt würde. Sie tritt auf in dem Versuch von RÖNTGEN[1], bei dem eine nichtleitende Scheibe zwischen den Platten eines Kondensators rotiert. Die genauen Versuche von EICHENWALD[2] haben diese Wirkung quantitativ meßbar gemacht. Er hat zugleich das Dielektrikum mit den Kondensatorplatten zusammen in Rotation versetzt, und auch in diesem Falle traten magnetische Kräfte auf. Nach LORENTZ[3] beweist dieses, daß diese magnetischen Kräfte nicht durch die obigen Formeln richtig ausgedrückt sind. Vielmehr kommen statt der Verschiebungen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ (wahren Elektrizitäten) die in der Elektronentheorie auftretenden Polarisationen $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ (freien Elektrizitäten) in Betracht.

Indem wir die Kräfte $X_1 Y_1 Z_1$ und $L_1 M_1 N_1$ jetzt aus unseren Gleichungen absondern, erhalten wir für die übrigbleibenden Größen, die wir nun wieder ohne Index schreiben, folgende Gleichungen:

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right)\right\} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

und

$$A\left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\right\} + 4\pi A u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad .$$

In diesen Gleichungen sind die elektrostatischen und magnetostatischen Erscheinungen enthalten, ferner sind im zweiten Ausdruck die magnetischen Kräfte enthalten, welche durch Leitungsströme $u\,v\,w$ und durch Verschiebungsströme $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ erzeugt sind. Abgesehen von diesen aber gibt der zweite Ausdruck, wenn $u\,v\,w$ gleich Null und $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ gleich Null sind, noch

$$A\alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

oder, da $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 4\pi\varrho$ ist, wo $\varrho$ die Dichtigkeit der wahren Elektrizität in einem Volumenelement ist:

$$4\pi A\alpha\varrho = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad ,$$

$$4\pi A\beta\varrho = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \quad ,$$

$$4\pi A\gamma\varrho = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \quad .$$

In der Nähe einer sich mit der Geschwindigkeit $\alpha\,\beta\,\gamma$ fortbewegenden wahren Elektrizitätsmenge sind also magnetische Kräfte vorhanden, welche gleich den

siehe die Arbeiten von E. LECHER, Wied. Ann. **54**. 276. 1895; **69**. 781. 1899. — C. RAVEAU, Journ. de phys. (3) **9**. 150. 1906. — V. CRÉMIEU, Soc. franc. de phys. **146**. 1. 1900. — A. BLONDEL, ibid. 2. 1900. — H. POINCARÉ, L'éclairage électr. **23**. 41. 1900. — W. KÖNIG, Drudes Ann. **2**. 854. 1900. — E. LECHER, ibid. **3**. 513. 1900. — H. LORBERG, ibid. **3**. 522. 1900. — E. HAGENBACH, ibid. **4**. 233. 1900. — O. GROTRIAN, ibid. **6**. 794. 1901. — G. R. OLSHAUSEN, ibid. **6**. 681. 1901. — E. HOPPE, ibid. **8**. 663. 1902. — E. LECHER, ibid. **9**. 248. 1901. — E. LECHER, Phys. Zeitschr. **2**. 62. 1900. — J. KÖNIGSBERGER, ibid. **2**. 475. 1901.

[1] W. C. RÖNTGEN, Wied. Ann. **35**. 264. 1888; **40**. 93. 1890. — [2] A. EICHENWALD, Drudes Ann. **11**. 1. 421. 1903; **13**. 919. 1904. — [3] H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V. 98, 210. 1904. — M. ABRAHAM, Theorie d. El. **1**. 426. — S. auch H. A. WILSON, Phil. Trans. (A) **204**. 121. 1904.

von stationären Strömen herrührenden sind, wenn deren Stromdichtigkeit $u\,v\,w$ gesetzt wird

$$u = \alpha\varrho\,, \quad v = \beta\varrho\,, \quad w = \gamma\varrho\quad.$$

Die konvektive Fortführung wahrer Elektrizität liefert also magnetische Kräfte, die denen eines Leitungsstromes gleich sind. Das ist der Inhalt des ROWLANDschen Versuches[1].

Man kann also die linke Seite der drei elektrischen Gleichungen (S. 885) so auffassen, daß auf ihr die Komponenten der vier Ströme vorhanden sind, nämlich: 1. des Leitungsstromes $u, v, w$; 2. des Verschiebungsstromes $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$; 3. des Konvektionsstromes $\alpha\varrho, \beta\varrho, \gamma\varrho$; 4. des sogenannten Röntgenstromes $\frac{\partial}{\partial y}(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X})$ und den entsprechenden beiden andern Komponenten.

## § 24. Die ponderomotorischen Kräfte und die Druckkomponenten.

**90.** Bei jeder Veränderung in dem elektromagnetischen Zustande eines ruhenden oder bewegten Systems wird im allgemeinen die elektromagnetische Energie zunehmen oder abnehmen. Soweit es sich dabei um ruhende Körper handelt, verwandelt sich die Energie dabei zum Teil in Wärme oder in chemische Energie, und das ist bloß in den Leitern und an der Grenzfläche verschiedener Leiter der Fall. Falls aber das System beweglich ist und bewegt wird, verwandelt sie sich außerdem noch in mechanische Arbeit. Es entspringen daher aus den Bewegungen der Körper, welche die Kraftlinien mit sich führen, mechanische ponderomotorische Kräfte, deren positive oder negative Arbeitsleistung gleich der Abnahme oder Zunahme der elektromagnetischen Energie ist, soweit sie eben infolge der bloßen Bewegung zunimmt oder abnimmt. Diese ponderomotorischen Kräfte aber, die zwischen zwei beliebigen Teilen des Systems stattfinden, müssen notwendig Druckkräfte sein, welche an der Grenzfläche zweier Elemente auftreten. Man kann daher die Druckkräfte ableiten, wenn man die ponderomotorischen Kräfte zwischen zwei Elementen aus dem Energieprinzip ableitet und sie in die aus der Elastizitätstheorie bekannten Formen für die Drucke eines deformierten Körpers bringt[2].

HERTZ nimmt nun bei der Berechnung dieser Druckkräfte erstens an, daß während ein materielles Element sich fortbewegt und dabei Verzerrungen erleidet, daß dabei auch die magnetischen (und elektrischen) Konstanten des Mediums sich ändern. Zweitens nimmt er an, da der Äther mit jedem Volumenelement der Materie fest verbunden sein soll, daß bloße Rotationen dieses Volumenelements im ganzen, also ohne innere Verzerrungen, eine Änderung der elektromagnetischen Energie nicht hervorbringen. Aus dem ersten Grunde muß er eine Anzahl Konstanten einführen, 36 an der Zahl, welche die Änderungen des reziproken Wertes der magnetischen Permeabilität (wenn die Bewegungen der

---

[1] H. A. ROWLAND, Berl. Ber. 1876. 211. — H. A. ROWLAND und C. T. HUTCHINSON, Phil. Mag. **17**. 445. 1889. In bezug auf die neueren experimentellen Prüfungen desselben s. V. CRÉMIEU, C. R. **130**. 1544; **131**. 575. 797. 1900; **132**. 327. 1108. 1901; Ann. chim. phys. (7) **24**. 85. 145. 299. 1901. — H. PENDER, Phil. Mag. (6) **2**. 179. 1901. — E. P. ADAMS, ibid. (6) **2**. 285. 1901. — H. PENDER, Phil. Mag. (6) **5**. 34. 1903. — H. PENDER u. V. CRÉMIEU, C. R. **136**. 549. 955. 1903; Journ. de phys. (4) **2**. 641. 1903; Phil. Mag. (6) **6**. 442. 1903. (Siehe dazu W. SUTHERLAND, Phil. Mag. (6) **7**. 405. 1904.) — F. HIMSTEDT, Drudes Ann. **13**. 100. 1904. — N. VASILESCO-KARPEN, C. R. **136**. 609, 998. 1903; Journ. de phys. (4) **2**. 667. 1903; Ann. chim. phys. (8) **2**. 465. 1904. — A. EICHENWALD, Drudes Ann. **11**. 1, 421. 1903; **13**. 919. 1904. — S. auch das Werk von A. EICHENWALD (russisch): Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrischen Feld 142 pp., Moskau 1904. — [2] S. auch N. SCHILLER, Wied. Ann. **53**. 432. 1894.

magnetischen Kraftlinien verfolgt werden) darstellen, wenn das System sich verzerrt. Es kommen nämlich die je sechs Differentialquotienten dieser im verzerrten System vorhandenen sechs reziproken Permeabilitäten (sechs, weil der Körper nicht mehr isotrop ist) in Betracht, im ganzen also 36 Konstanten. Diese mögen bezeichnet werden mit $\mu_{11}$ bis $\mu_{66}$, wobei im allgemeinen $\mu_{ik}$ nicht gleich $\mu_{ki}$ ist. Aus dem zweiten Grunde wird die mechanische Arbeit, die bei einer Verzerrung des Elements auftritt, eine lineare Funktion der sechs Geschwindigkeitskomponenten der Verzerrung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

sein. Setzen wir daher diese Arbeit $\delta W$

$$\delta W = X_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \gamma}{\partial z} + X_y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + Y_z \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) + Z_x \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) \quad ,$$

so sind die $X_x$ bis $Z_x$ die sechs gesuchten Druckkomponenten. Diese Arbeit läßt sich aber aus dem Ausdruck für die magnetische Energie berechnen und auf diese Weise findet HERTZ für die gesuchten Druckkomponenten folgende Werte:

$$-X_x = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L - \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu_{11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) \quad ,$$

$$-Y_y = \frac{1}{8\pi}(-\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu_{21}\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{22}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) \quad ,$$

$$-Z_z = \frac{1}{8\pi}(-\mathfrak{L}L - \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N + \mu_{31}\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{32}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) \quad ,$$

$$-Y_z = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{N}M + \mathfrak{M}N + \mu_{41}\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{42}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) \quad ,$$

$$-Z_x = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}N + \mathfrak{N}L + \mu_{51}\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{52}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) \quad ,$$

$$-X_y = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{M}L + \mathfrak{L}M + \mu_{61}\mathfrak{L}^2 + 2\mu_{62}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) \quad .$$

Diese Ausdrücke weichen ab von denen, die MAXWELL[1] selbst für den allgemeinen Fall gegeben hat, hauptsächlich dadurch, daß bei MAXWELL nicht $X_y = Y_x$ usw. ist wie hier, sondern daß vielmehr diese tangentialen Komponenten verschieden sind. Es folgt daraus, daß durch diese Drucke bei MAXWELL ein Teilchen eines Körpers als Ganzes eine Rotation ausführen kann, also wie ein starrer Körper sich bewegen kann. Damit das der Fall sei, müssen die Kräfte, die diese Drehung hervorbringen und die an dem materiellen System angreifen, ihren Stützpunkt im Äther innerhalb des Körpers haben. Solche Kräfte können also nur dann auftreten, wenn der Ätherinhalt eines Körpers eine relative Beweglichkeit gegen den Körper selbst besitzt. Nach der Grundannahme von HERTZ sind solche relative Bewegungen zwischen Äther und Materie ausgeschlossen. Ferner sind bei MAXWELL die Verzerrungen des Volumenelements nicht in Rechnung gezogen.

[1] CL. MAXWELL, Treatise 2. Kap. 11. § 641.



Die MAXWELLschen Drucke für den allgemeinen Fall sind folgende:

$$X_x = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{L}L - \frac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2)\right] ,$$

$$Y_y = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{M}M - \frac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2)\right] ,$$

$$Z_z = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{N}N - \frac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2)\right] ,$$

$$Y_z = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{M}N, \qquad Z_y = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{N}M ,$$

$$Z_x = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{N}L, \qquad X_z = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{L}N ,$$

$$X_y = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{L}M, \qquad Y_x = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{M}L .$$

Das System dieses Druckes läßt sich zerlegen in:

1. einem Druck, der nach allen Richtungen mit derselben Stärke wirkt, nämlich

$$p = \frac{1}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2) = \frac{1}{8\pi}H^2 ;$$

2. einer Spannung, deren Richtung in jedem Punkte des Körpers den Winkel $2\varepsilon$ zwischen der dort vorhandenen magnetischen Kraft $H$ und der dort vorhandenen magnetischen Verschiebung $\mathfrak{B}$ halbiert, und welche Spannung die Größe hat

$$T = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}H\cos^2\varepsilon ,$$

3. einem Druck, senkrecht zu der eben in 2. bestimmten Richtung von der Größe

$$p_1 = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}H\sin^2\varepsilon ,$$

4. einem Kräftepaar, das jedes Element des Körpers von der Richtung der magnetischen Kraft in die Richtung der magnetischen Verschiebung (in der Ebene beider) zu drehen sucht und das Moment hat

$$D = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}H\sin(\mathfrak{B}, H) .$$

Die Differenzen zwischen HERTZ und MAXWELL, die im allgemeinsten Falle vorhanden sind, kommen übrigens nur bei permanent magnetisierbaren Körpern zum vollen Ausdruck. Sie verschwinden vollständig in allen Fällen, welche bisher der Untersuchung zugänglich sind (nämlich für alle schwach magnetischen oder diamagnetischen Körper).

Die obigen allgemeinen Ausdrücke von HERTZ vereinfachen sich nämlich erstens für Flüssigkeiten, welche bei jeder Deformation isotrop bleiben. Dann reduzieren sich die sechs reziproken Permeabilitäten auf die eine $\frac{1}{\mu}$ und es tritt statt der 36 Größen die eine auf $-\frac{\partial \frac{1}{\mu}}{\partial \log\sigma}$, wenn $\sigma$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit

ist. Die Druckkomponenten werden dann:

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) - \frac{1}{8\pi}\frac{d\mu}{d\log\sigma}(L^2 + M^2 + N^2) \quad ,$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 + N^2) \quad - \frac{1}{8\pi}\frac{d\mu}{d\log\sigma}(L^2 + M^2 + N^2) \quad ,$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 - N^2) \quad - \frac{1}{8\pi}\frac{d\mu}{d\log\sigma}(L^2 + M^2 + N^2) \quad ,$$

$$X_y = Y_x = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \quad Y_z = Z_y = -\frac{\mu}{4\pi}MN, \quad Z_x = X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL \quad .$$

Diese Ausdrücke sind schon von HELMHOLTZ abgeleitet worden[1]. Wenn wir bei festen Körpern von der Magnetostriktion (resp. bei dem entsprechenden System der elektrischen Druckkräfte von der Elektrostriktion) absehen, so können wir diese vereinfachten Formen auch für feste Körper anwenden. Wir können diese sogar vereinfachen, indem wir die Glieder, die mit $\frac{d\mu}{d\log\sigma}$ behaftet sind, fortlassen, weil diese auch nur Magnetostriktion und Elektrostriktion hervorbringen. Die ponderomotorischen Kräfte in allen Körpern werden daher, soweit sie durch magnetische Kräfte hervorgebracht werden, in allen Körpern, abgesehen von der Magnetostriktion, dargestellt sein durch die Drucke:

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) \quad ,$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 - M^2 + N^2) \quad ,$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 - N^2) \quad ,$$

$$X_y = Y_x = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \quad Y_z = Z_y = -\frac{\mu}{4\pi}MN, \quad Z_x = X_z = -\frac{\mu}{4\pi}NL \quad ,$$

Bis auf den Faktor $\mu$, der aber in den betrachteten Fällen immer nahezu 1 ist, und bis auf das Vorzeichen, das bei MAXWELL entgegengesetzt gewählt ist, stimmen diese Ausdrücke mit den in gleicher Weise vereinfachten MAXWELLschen überein.

Entsprechend werden die durch die elektrischen Kräfte hervorgerufenen Drucke nach HERTZ sein

$$X_x' = \frac{\varepsilon}{8\pi}(-X^2 + Y^2 + Z^2) \quad ,$$

$$Y_y' = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 - Y^2 + Z^2) \quad ,$$

$$Z_z' = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 - Z^2) \quad ,$$

$$X_y' = Y_x' = -\frac{\varepsilon}{4\pi}XY, \quad Y_z' = Z_y' = -\frac{\varepsilon}{4\pi}YZ, \quad Z_x' = X_z' = -\frac{\varepsilon}{4\pi}ZX \quad .$$

[1] H. v. HELMHOLTZ, Wied. Ann. 13. 400. 1881.

Diese HERTZschen Drucke bestehen

1. in einer Spannung von der Größe $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ $\left(\text{resp. für das elektrische System } \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\right)$ längs der Kraftlinien, wenn $H$ und $E$ die ganze magnetische und elektrische Kraft bedeuten;

2. einem Druck von derselben Größe in allen zu diesen Kraftlinien senkrechten Richtungen,

3. Kräftepaare sind nicht vorhanden.

Die beobachteten ponderomotorischen Kräfte zwischen Magneten, stationären Strömen und elektrischen Körpern entsprechen diesem System der Drucke[1].

**91.** HERTZ[2] hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß dieses System der Drucke den freien Äther selbst, der ja als beweglich in dieser Theorie angenommen wird, in Bewegung setzen muß. Es müssen auf jedes Ätherelement ponderomotorische Kräfte wirken, welche bei zunächst ruhendem Äther von Null verschiedene Resultanten immer dann haben, wenn es sich nicht um statische oder stationäre, sondern um variable Bewegungen handelt. Durch diese ponderomotorischen Kräfte muß also der Äther in Bewegung geraten.

HELMHOLTZ[3] hat zuerst genauer die Bewegungen des Äthers durch diese Kräfte untersucht, wobei er den Äther als eine inkompressible Flüssigkeit annahm, welche einen Druck $p$ besitzt. Es hängt dann die Bewegung des Äthers nur ab von dem POYNTINGschen Strahlvektor (oben S. 842)

$$\mathfrak{S}_x = \frac{1}{4\pi A}(MZ - NY) \quad ,$$

$$\mathfrak{S}_y = \frac{1}{4\pi A}(NX - LZ) \quad ,$$

$$\mathfrak{S}_z = \frac{1}{4\pi A}(LY - MX)$$

in der Weise, daß wenn $\varrho$ die Dichtigkeit des Äthers $\alpha, \beta, \gamma$ die Geschwindigkeit an einer Stelle des Äthers ist, die Gleichungen bestehen

$$\varrho\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} + 4\pi A^2\left[\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} + \beta\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x}\right) - \gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z}\right)\right] \quad ,$$

$$\varrho\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial p}{\partial y} + 4\pi A^2\left[\frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial t} + \gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial y}\right) - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x}\right)\right] \quad ,$$

$$\varrho\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial p}{\partial z} + 4\pi A^2\left[\frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z}\right) - \beta\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial y}\right)\right] \quad .$$

Das Zeichen $\frac{d}{dt}$ bezieht sich dabei auf ein individuelles Ätherteilchen, und es ist in bekannter Weise

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} \quad .$$

Nur solange der POYNTINGsche Energiestrom steigt oder fällt, sind ponderomotorische Kräfte im ruhenden Äther vorhanden, die durch die Inkompressibilität desselben nicht aufgehoben werden.

---

[1] S. auch O. HEAVISIDE, Phil. Trans. **183**. 423. 1893. — P. DUHEM, Am. Journ. of Math. **17**. 117. 1894; Beibl. **19**. 573. 1895. — L. GIUGIANINO, N. Cim. (5) **2**. 30. 1901. —
[2] H. HERTZ, Ges. Abh. **2**, 284. — [3] H. v. HELMHOLTZ, Wied. Ann. **53**. 135. 1894.

Derartige Bewegungen des als eine Flüssigkeit betrachteten Äthers sind auf Grund des HELMHOLTZschen Ansatzes weiter untersucht worden von W. WIEN[1] und G. MIE[2].

## § 25. Strahlungsdruck.

**92.** Wenn auf eine ebene Grenzfläche eine ebene elektromagnetische Strahlung senkrecht auffällt, so sind in dieser die elektrische Kraft $\mathsf{E}$ und die magnetische Kraft $H$ parallel der Grenzfläche. Da der Druck $P_n$ auf eine Fläche mit der Normale $n$ die Komponenten hat:

$$X_n = X_x \cos(n\,x) + X_y \cos(n\,y) + X_z \cos(n\,z) \quad ,$$
$$Y_n = Y_x \cos(n\,x) + Y_y \cos(n\,y) + Y_z \cos(n\,z) \quad ,$$
$$Z_n = Z_x \cos(n\,x) + Z_y \cos(n\,y) + Z_z \cos(n\,z)$$

und selbst den Wert hat

$$P_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \quad ,$$

so wirkt in unserm Falle senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien ein Druck

$$p_e = \frac{\varepsilon \mathsf{E}^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) \quad ,$$

senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien ein Druck

$$p_m = \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2) \quad .$$

Der Gesamtdruck, der senkrecht auf die Fläche (pro Flächeneinheit) wirkt, ist also

$$p = p_e + p_m = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2) \quad .$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber die in der Volumeneinheit des durchstrahlten Mediums vorhandene Energie, also folgt, daß der elektromagnetische Druck auf die Flächeneinheit gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen elektromagnetischen Energie ist[3].

Wenn auf der Rückseite der Fläche ein anderer Druck wirkt als auf der Vorderseite, so muß die Fläche unter dem Einfluß dieses Druckes sich bewegen. Das ist der Fall, wenn die Strahlung auf eine absorbierende oder reflektierende Fläche auffällt. Bei dem absorbierenden Körper ist vor der Fläche die einfallende Strahlung mit bestimmter elektromagnetischer Energie vorhanden, hinter der Fläche ist die ganze elektromagnetische Energie Null, da sie durch Absorption in Wärme verwandelt ist. Der Druck ist also gleich der elektromagnetischen Energie der einfallenden Strahlung der Volumeneinheit. Bei einem vollkommen reflektierenden Körper ist ebenfalls hinter der Fläche keine elektromagnetische Energie vorhanden, vor der Fläche aber ist die Energie der einfallenden und die der reflektierten Strahlung vorhanden, welch letztere an Größe der ersteren gleich ist, so daß der Druck der doppelte von dem im ersten Fall ist.

---

[1] W. WIEN, Referat für die Naturforscherversammlung in Braunschweig, enthalten in Wied. Ann. **65**. Heft 6. 1898. — [2] G. MIE, Wied. Ann. **68**. 129. 1899; Naturw. Rundschau **15**. 553. 1899. — Siehe W. WIEN, Phys. Zeitschr. **2**. 148. 1900. — G. MIE, ibid. **2**. 181. 319. 1900; **6**. 787. 1906. — Siehe ferner H. A. LORENTZ, Proc. Roy. Soc. Amsterdam **1**. 443. 1895; Naturforscherges. 1898. 56. — [3] Über die Berechnung: J. J. THOMSON, Elements of Electricity and Magnetism. Cambridge 1895. 241. — S. Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **45**. 522. 1898. — J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5). **46**. 154. 1898.

Versuche, diesen Strahlungsdruck experimentell nachzuweisen, sind von LEBEDEW[1] und NICHOLS und HULL[2] angestellt worden.

**93.** Aus der obigen Ableitung geht hervor, daß der Strahlungsdruck nur dann gleich der elektromagnetischen Energie der Volumeneinheit ist, wenn die gedrückte Fläche senkrecht steht zu den elektrischen und den magnetischen Kraftlinien. Das ist nicht mehr ohne weiteres der Fall, wenn man es mit kleinen Körpern zu tun hat, bei denen Beugungserscheinungen stattfinden.

SCHWARZSCHILD[3] hat den elektrischen Druck auf kleine Kugeln direkt aus der Beugungstheorie berechnet und findet für das Verhältnis dieses Druckes $p$ zur elektromagnetischen Energie $S$ der Volumeneinheit, bei Kugeln von dem Radius $a$:

1. wenn $a$ sehr groß gegen die Wellenlänge $\lambda$ ist,

$$\frac{p}{S} = a^2 \pi \quad ,$$

2. wenn $a$ sehr klein gegen $\lambda$ ist,

$$\frac{p}{S} = \frac{14}{3}\left(\frac{2\,a\,\pi}{\lambda}\right)^4 \cdot a^2 \pi \quad ,$$

3. für zwischenliegende Werte wird bei

$$\frac{2\,a\,\pi}{\lambda} = \frac{1}{4} \;\cdot\; \frac{1}{2} \;\cdot\; \sqrt{\frac{1}{2}} \;\cdot\; 1 \;\cdot\; \sqrt{2} \;\cdot\; 2 \;\cdot\; 4 \;\ldots \infty \;,$$

$$\frac{p}{S \cdot a^2 \pi} = 0{,}018 \quad 0{,}35 \quad 1{,}07 \quad 2{,}42 \quad 2{,}16 \quad 1{,}31 \quad 1{,}22 \ldots 1 \quad .$$

Das Maximum von $\frac{p}{S \cdot a^2 \pi}$ liegt bei $a = \frac{1}{3}\lambda$ und ist $= 2{,}5$. Sobald $2a = 2{,}5\,\lambda = 1{,}5\,\mu$ wird, ist der Lichtdruck gleich der Schwerkraft. Bei kleineren Kugeln wird der Lichtdruck größer als die Schwerkraft und ist bei $2a = 0{,}3\,\lambda = 0{,}19\,\mu$ 18mal so groß wie die Schwerkraft. Bei noch kleineren Kugeln nimmt er rasch ab. Davon ergibt sich eine leichte Anwendung auf die ARRHENIUSsche[4] Kometentheorie[5].

**94.** Über die Größe des Strahlungsdruckes im Sonnenlicht gibt folgende Berechnung einen Anhalt. Die Sonne strahlt etwa 3 cal pro Minute jedem $\text{cm}^2$ zu (Solarkonstante, ohne Absorption). Infolge der Absorption kommen etwa $2\,\frac{\text{cal}}{\text{min}}$ auf jedes $\text{cm}^2$ in der Nähe der Erdoberfläche.

Da 1 cal = 4,186 Erg ist (Bd. **3**, S. 561), so sind

$$2\,\frac{\text{cal}}{\text{min}} = 1{,}395 \cdot 10^6\,\frac{\text{Erg}}{\text{sec}} \quad .$$

Die Energie von $1{,}395 \cdot 10^6$ Erg ist enthalten in dem Zylinder vom Querschnitt 1 $\text{cm}^2$, der von den Strahlen in 1 sec durchlaufen wird, das ist von der Länge $l = 3 \cdot 10^{10}$ cm. Also ist die Energie der Sonnenstrahlung pro Volumeneinheit $\frac{1{,}395 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}} = 4{,}65 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Erg}}{\text{cm}^3}$. Ebenso groß ist also der Strahlungsdruck

$$p = 4{,}65 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Dynen}}{\text{cm}^2} \quad ,$$

er entspricht also etwa $5 \cdot 10^{-5}$ mg/cm$^2$.

---

[1] P. LEBEDEW, Drudes Ann. **6**. 433. 1901; siehe auch P. LEBEDEW, Congrès de phys. **2**. 133. 1900. — D. GOLDHAMMER, Arch. néerl. (2). **5** 467. 1900. — C. A. MEBIUS, Wied. Ann. **61**. 638. 1897. — [2] E. F. NICHOLS und G. F. HULL, Drudes Ann. **12**. 225. 1903. — [3] K. SCHWARZSCHILD, Münch. Ber. 1901. 293. — [4] Sv. ARRHENIUS, Phys. Zeitschr. **2**. 81. 97. 1900. — [5] Andere Berechnungen: A. SADOWSKY, Fortschr. d. Phys. 1899. 837.

Aus der Existenz des Strahlungsdruckes ist von BOLTZMANN das STEFANsche Gesetz der Wärmestrahlung aus der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet worden (s. dieses Handbuch Bd. 3, S. 373).

Die Berechnung des Strahlungsdruckes für bewegte Flächen hat ABRAHAM[1] ausgeführt und aus ihr Beziehungen zur Thermodynamik abgeleitet.

## § 26. Unzulänglichkeit der HERTZschen Gleichungen für bewegte Körper. Das System von COHN.

**95.** Die auseinandergesetzten Gleichungen von HERTZ für bewegte Körper beruhten auf der Annahme, daß der Ätherinhalt eines Körpers sich mit dem Körper selbst bewegt, daß also keine relative Verschiebung zwischen Körper und Äther existiert. Im Gebiet der rein elektrischen und magnetischen Erscheinungen reicht diese Annahme aus, es ist keine Tatsache bekannt, welche auf einer Verschiebung zwischen Äther und Materie beruht, es läßt sich aus keiner rein elektrischen oder magnetischen Tatsache ein Anhalt über die Größe einer derartigen gegenseitigen Verschiebung gewinnen[2]. Wenn man aber das Licht mit zu den elektromagnetischen Erscheinungen rechnet, so ist, wie schon HERTZ selbst ausführte, die angenommene Vorstellung unzureichend. Bei dem Licht kennen wir tatsächlich Erscheinungen, welche (nach der gewöhnlichen Auffassung) eine relative Verschiebung des Äthers gegen die Materie anzeigen. Diese können also durch die obigen HERTZschen Gleichungen nicht dargestellt werden. Es sind das hauptsächlich die Aberration des Lichtes und der FIZEAUsche Mitführungskoeffizient[3]. Sobald man diese Erscheinungen mit von der Theorie umfassen will, ist das HERTZsche System nicht ausreichend.

**96.** Versuche, die Gleichungen für diesen Fall geeignet zu machen, sind verschiedenfach angestellt worden[4]. Die wichtigsten Theorien, die dieses leisten, sind die LORENTZsche Elektronentheorie und die Theorie von COHN. Von der ersten wird im folgenden ausführlich die Rede sein. Aber auch die einfache phänomenologische MAXWELLsche Theorie, bei der nichts über die Existenz von diskreten Elektronen und keine spezielle Vorstellung über das Wesen des elektrischen Stromes, der Dielektrika usw. angenommen wird, läßt sich derart erweitern, daß sie diese optischen Erscheinungen mit umfaßt und in bezug auf die rein elektromagnetischen Erscheinungen dasselbe leistet, wie die HERTZsche Theorie. Dieses ist E. COHN[5] durch das von ihm aufgestellte Gleichungssystem gelungen.

In dieser Theorie wird der Äther als durchaus und immer ruhend angenommen, die bewegten Körper haben also eine relative Bewegung gegen den Äther.

Bezeichnen $\alpha\beta\gamma$ die Geschwindigkeiten eines Punktes gegen den ruhenden Äther und setzen wir

$$X' = X + A[\beta N - \gamma M] \quad ,$$
$$Y' = Y + A[\gamma L - \alpha N] \quad ,$$
$$Z' = Z + A[\alpha M - \beta L] \quad .$$

Ebenso

$$L' = L - A[\beta Z - \gamma Y] \quad ,$$
$$M' = M - A[\gamma X - \alpha Z] \quad ,$$
$$N' = N - A[\alpha Y - \beta X] \quad ,$$

[1] M. ABRAHAM, Drudes Ann. 14. 236. 1904; Boltzmann-Festschrift 1904. 85. — [2] Einige Versuche von EICHENWALD (s. oben Nr. 89), sowie die Versuche von H. A. WILSON (Phil. Trans. 204. A 121. 1904) lassen sich übrigens nicht durch das HERTZsche Gleichungssystem darstellen (aber nicht wegen des im Text angegebenen Grundes). Auch die Versuche von R. BLONDLOT, Journ. de phys. (4) 1. 8. 1902, sprechen gegen die vollkommene Brauchbarkeit des angeführten Gleichungssystems, s. H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 102. 1904, s. auch J. KÖNIGSBERGER, Ber. Naturf.-Ges. Freiburg i. B. 13. 95. 1903. — [3] S. darüber das Referat von W. WIEN, abgedruckt in Wied. Ann. 65, Heft 6. 1898. — [4] G. T. WALKER, Aberration and the electromagnetic field. Cambridge 1900. — O. HEAVISIDE, Electrician 45. 636. 881. 1900. — Über die Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern von G. JAUMANN s. Wien. Ber. 114. [2a] 1635. 1905; Drudes Ann. 19. 881. 1906. — [5] E. COHN, Drudes Ann. 7. 29. 1902; Gött. Nachr. Heft 1. 1901. — Etwas verändert E. COHN, Berl. Ber. 46. 1404. 1904.

so wird, bezogen auf ein ruhendes Koordinatensystem:

$$\frac{\partial M'}{\partial z} - \frac{\partial N'}{\partial y} = A\left[4\pi u + \frac{D\mathfrak{X}}{dt}\right] ,$$

$$\frac{\partial N'}{\partial x} - \frac{\partial L'}{\partial z} = A\left[4\pi v + \frac{D\mathfrak{Y}}{dt}\right] ,$$

$$\frac{\partial L'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial x} = A\left[4\pi w + \frac{D\mathfrak{Z}}{dt}\right] ,$$

ebenso

$$\frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z} = A\frac{D\mathfrak{L}}{dt} ,$$

$$\frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial L'}{\partial x} = A\frac{D\mathfrak{M}}{dt} ,$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y} = A\frac{D\mathfrak{N}}{dt} .$$

Hierin bedeutet

$$\frac{D\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X})$$

und entsprechend die anderen Differentialquotienten.

Der Zusammenhang aber zwischen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und $XYZ$, ebenso zwischen $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ und $LMN$ ist nicht, wie bei ruhenden Körpern einfach der, daß $\mathfrak{X} = \varepsilon X$ und $\mathfrak{L} = \mu L$ ist, sondern ein komplizierterer. Es ist nämlich

$$\mathfrak{X} = \varepsilon X' - A(\beta N' - \gamma M') ,$$

$$\mathfrak{Y} = \varepsilon Y' - A(\gamma L' - \alpha N') ,$$

$$\mathfrak{Z} = \varepsilon Z' - A(\alpha M' - \beta L')$$

und entsprechend

$$\mathfrak{L} = \mu L' + A(\beta Z' - \gamma Y') ,$$

$$\mathfrak{M} = \mu M' + A(\gamma X' - \alpha Z') ,$$

$$\mathfrak{N} = \mu N' + A(\alpha Y' - \beta X') .$$

Der Zusammenhang zwischen $u, v, w$ und $XYZ$ in einem beliebig bewegten inhomogenen Leiter ist folgender:

$$u = \lambda(X' + X^i), \quad v = \lambda(Y' + Y), \quad w = \lambda(Z' + Z^i) ,$$

wo $X^i Y^i Z^i$ innere elektromotorische Kräfte bedeuten.

COHN leitet aus diesen Gleichungen ab 1. das DOPPLERsche Prinzip, 2. die Aberration des Lichts, 3. die Erdbewegung bringt in keinem Interferenzbild eine Veränderung hervor (Versuch von MICHELSON und MORLEY, auch mit den Gliedern zweiter Ordnung), 4. den FRESNELschen Mitführungskoeffizienten.

Einwände gegen die COHNschen Gleichungen sind erhoben worden von W. WIEN[1] und H. A. LORENTZ[2], sie sind zum Teil von COHN[3] widerlegt worden[4].

Die COHNschen Gleichungen sind mit sämtlichen beobachteten elektromagnetischen und optischen Erscheinungen in Einklang, und es ist sehr bemerkenswert, daß die Elektronentheorie, nachdem sie von LORENTZ modifiziert worden ist, um die tatsächliche Unabhängigkeit der Erscheinungen von der Erdbewegung mit zu umfassen, mit den letzten Ansätzen der COHNschen Theorie übereinstimmt[5].

[1] W. WIEN, Drudes Ann. **13**. 641; **14**. 632. 1904. — [2] H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 274. 1904. — [3] E. COHN, Drudes Ann. **14**, 208. 1904. — [4] Eine Erweiterung der COHNschen Theorie und Berechnung verschiedener Fälle aus ihr gibt R. GANS, Drudes Ann. **16**. 516. 1905; **18**. 172. 1905. — S. auch R. H. WEBER, Naturf.-Ges. Heidelberg **8**. 201. 1904. — [5] E. COHN, Berl. Ber. **46**. 1294, 1404. 1904.

## E) Die Elektronentheorie.

### § 27. Die Grundlagen und einfache Folgerungen.

**97.** Die MAXWELLsche Theorie ist besonders ausgebildet und ausgezeichnet in der Darstellung des Zusammenhangs zwischen elektrischen und magnetischen Kräften, also in der Darstellung der elektromagnetischen, Induktions- und optischen Erscheinungen. Sie gibt zwar auch die rein statischen Phänomene, aber die dabei erfahrungsgemäß am einfachsten auftretenden Größen, die Elektrizitätsmenge und die magnetische Polstärke, erscheinen bei ihr als Integrationskonstanten, welche also unabhängig von den Differentialgleichungen durch den Anfangszustand gegeben sein müssen. Des weiteren erscheinen die Dielektrizitätskonstante (und die Permeabilität) als reine Konstanten, während die Erfahrung zeigt, daß sie von der Wellenlänge abhängige Größen sind, oder mit anderen Worten, die Dispersion ist in den MAXWELLschen Gleichungen nicht enthalten. Der elektrische Strom in Leitern wird ferner nur als ein regelmäßiges, durch reibungsähnliche Kräfte hervorgebrachtes Zerstören der immer wieder von neuem auftretenden elektrischen Kräfte aufgefaßt. Eine mechanische Darstellung des Stromes selbst ist ebensowenig wie die der Elektrizitätsmenge durch sie gegeben. Einzelne dieser Mängel sind nur scheinbar solche, indem eben die MAXWELLsche Theorie eine rein phänomenologische ist, andere, wie die Nichtdarstellung der Dispersion, die Veränderlichkeit der Dielektrizitätskonstante, sind wirkliche Mängel derselben.

Die vollkommenste Fortbildung hat nun die MAXWELLsche Theorie in der Elektronentheorie gefunden, welche von H. A. LORENTZ und in weniger ausgeführter Form von WIECHERT aufgestellt wurde[1]. In dieser werden zur Darstellung der sämtlichen elektrischen Erscheinungen gebraucht:

---

[1] Die LORENTZsche Elektronentheorie ist zusammenfassend aber ziemlich kurz behandelt von H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 145. 1904. — Ausführlich in vorzüglicher Weise von M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität **2**. 1905. Die Theorie selbst wurde von LORENTZ 1904 (Proc. Akad. Amsterdam 1904, 809) für Systeme, die eine Translationsbewegung haben, durch Einführung einer Formänderung der Elektronen und einer Änderung der quasielastischen Kräfte durch die Translationsbewegung erweitert, wodurch sie imstande ist, manche Schwierigkeiten zu überwinden. Von diesem erweiterten System hat E. COHN nachgewiesen (Berl. Ber. **46**. 1294. 1904), daß es formell mit seinem Gleichungssystem identisch ist. Die Literatur über die Elektronentheorie ist außerordentlich groß. Sie sei hier im wesentlichen zusammengestellt. Nach früheren Andeutungen (W. GIESE, Wied. Ann. **17**. 537. 1882; **37**. 576. 1889. — A. SCHUSTER, Proc. Roy. Soc. London **37**. 317. 1889. — Sv. ARRHENIUS, Wied. Ann. **32**. 545. 1887; **33**. 638. 1888. — J. ELSTER u. H. GEITEL, Wien. Ber. **97**. IIa. 1255. 1888. — F. RICHARZ, Wied. Ann. **52**. 385. 1894) wurde die Theorie von J. J. THOMSON zuerst aufgegriffen: J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **40**. 510. 1895. — Von STONEY rührt der Name Elektronen her (G. JOHNSTON STONEY, Phil. Mag. (5) **38**. 418. 1894). Die weitere Literatur ist: H. A. LORENTZ, Versuch einer Theorie der optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895. — J. LARMOR, Phil. Trans. **186**. (2) 195. 1896; **190**. 205. 1897. — H. REIFF, Theorie molekular elektrischer Vorgänge, Freiburg u. Leipzig 1896. — J. H. POYNTING, The Electrician, 44S. 1895. — E. WIECHERT, Wied. Ann. **59**. 283. 1896. — Naturw. Rundsch. **11**. 597. 1896. — Lord KELVIN, Nature **56**. 84. 1897. — H. POINCARÉ, Eclair. él. **11**. 481. 1891. — F. RICHARZ, Elektrotechn. Zeitschr. **18**. 285. 1897. — H. A. LORENTZ, Wied. Ann. **63**. 271. 1897. — Versl. Ak. Wet. Amsterdam 1898/99. 509. 555. — E. WIECHERT, Gött. Nachr. 1898. 87. — Festschrift zur Enthüllung des GAUSS-WEBER-Denkmals, Leipzig 1899. — J. J. THOMSON, Proc. Cambr. Soc. **10**. 49. 1899; Phil. Mag. (5) **47**. 253. 1899. — H. A. LORENTZ, Proc. Acad. Amsterdam **1**. 427. 1899. — H. POINCARÉ, C. R. **128**. 339. 1899. — A. LIÉNARD, L'eclair él. **14**. 417. 456. 1898. — W. KAUFMANN, Phys. Zeitschr. **2**. 283. 1901. — W. MC. F. ORR, Phil. Mag. (5) **50**. 269. 1900. — R. v. LIEBEN, Phys. Zeitschr. **1**. 237. 1900. — H. POINCARÉ, Arch. néerl. (2) **5**. 252. 1900. — H. A. LORENTZ, Ges. d. Naturf., Aachen 1900; Phys. Zeitschr. **2**. 78. 1900. — M. PLANCK, Arch. néerl. (2) **5**. 164. 1900. — A. SCHUSTER, Phil. Mag. (6) **1**. 227. 1901. — J. H. JEANS, Phil. Mag. (5) **49**. 245. 1900. — GEORGE W. WALKER, Phil. Mag. (5) **49**. 529. 1900. — TH. DES COUDRES, Arch. néerl. (2) **5**. 652. 1900. — V. A. JULIUS, Arch. néerl. (2) **5**. 17. 1900. — A. RIGHI, Arch. néerl. (2) **5**. 348. 1900. — J. LARMOR, Trans. Cambr. Phil. Soc. **18**. 380. 1900. — W. VOIGT, Drudes Ann. **6**. 459. 1901. — Lord KELVIN, Phil. Mag. (6) **3**. 257. 1902. — A. SCHUSTER, Phil. Mag. (6) **1**. 227. 314. 1901. — E. RIECKE, Drudes Ann. **4**. 378. 1901. — W. KAUFMANN, Phys.

1. der Äther, welcher, den MAXWELLschen Gleichungen gehorchend, sowohl elektrische wie magnetische Verschiebungen ausführen kann und welcher die Fernwirkungen vermittelt. Der Äther wird als absolut ruhend angesehen[1]. Alle Körper, die sich bewegen, bewegen sich relativ zum Äther;

2. die Elektronen, kleine Volumenelemente von besonderem Zustand, welche wir als elektrische Ladung bezeichnen, die überall in den Körpern vorhanden sind und sich teils mit den Körpern, teils unabhängig von diesen in den Körpern bewegen;

3. eine Verknüpfung zwischen den Elektronen und dem Äther, durch welche die Elektronen in der Ruhe und in der Bewegung Verschiebungen im Äther hervorbringen und umgekehrt Verschiebungen im Äther Kräfte auf die Elektronen hervorbringen.

Die Ladung der Körper wird direkt durch ihren Gehalt an Elektronen hervorgebracht, von denen zweierlei Arten, positive und negative, existieren.

Der elektrische Strom in Leitern ist ein Strom der Elektronen (Leitungselektronen), jedoch so, daß wie in der Gastheorie, jedes Elektron nur eine kleine Weglänge besitzt.

Die dielektrischen Erscheinungen der Körper werden durch ihren Gehalt an Elektronenpaaren (Polarisationselektronen) hervorgebracht, die magnetischen Erscheinungen durch zyklisch bewegte Elektronen (Magnetisierungselektronen).

Die Dispersionserscheinungen beruhen auf dem Mitschwingen von Elektronenpaaren, die noch reibenden Einflüssen unterworfen sind.

Eine große Reihe von elektrischen Eigenschaften der Metalle lassen sich durch die Elektronentheorie erklären, wenn man die Elektronen in einem Metall wie die Moleküle in einem Gas als frei beweglich betrachtet.

Die Eigenschaften der Kathodenstrahlen, Becquerel-Strahlen, lassen sich durch fortschreitende, das ZEEMANsche Phänomen durch schwingende Bewegung der Elektronen verfolgen.

Eine besondere Wichtigkeit hat die Frage nach der Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluß der von ihm selbst im Äther erzeugten Verschiebungen, also die Frage nach der Mechanik der Elektronen. Sie ist zum Teil für die Erklärung der Beobachtungen an Kathodenstrahlen und Becquerel-Strahlen wichtig, zum Teil kann sie eine elektromagnetische Darstellung der Mechanik geben.

Zeitschr. **3**. 9. 1901. — W. VOIGT, Gött. Nachr. 169. 1901. — E. v. EVERDINGEN jr., Arch. néerl. (2) **6**. 294. 1901. — J. J. THOMSON, Phil. Mag. (6) **3**. 353. 1902. — W. KAUFMANN, Arch. néerl. (2) **5**. 148. 1900. — O. LODGE, Proc. Phys. Soc. **17**. 369. 1901. — E. RIECKE, Drudes Ann. **7**. 401. 1902. — A. BUCHERER, Drudes Ann. **8**. 326; **9**. 496. 1902. — M. ABRAHAM, Gött. Nachr. 1902. 20. — W. VOIGT, Drudes Ann. **9**. 115. 1901; Gött. Nachr. 1901. 1. — F. LENGFELD, Zeitschr. f. phys. Chemie **5**. 639. 1901. — M. ABRAHAM, Drudes Ann. **10**. 105. 1903. — K. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr. 1903. 126, 132, 245; Phys. Zeitschr. **4**. 431. 1903. — G. HERGLOTZ, Gött. Nachr. 1903. 357; 1904. 549. — M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **5**. 576. 1904. — E. KOHL, Boltzmann Festschr. 1904. 678; Drudes Ann. **12**. 849. 1903; **13**. 770. 1904; **15**. 531. 1904. — W. WIEN, Drudes Ann. **13**. 641, 663. 1904; Phys. Zeitschr. **5**. 393. 1904. — E. COHN, Berl. Ber. 1904. 1294, 1404. — W. WIEN, Drudes Ann. **14**. 632. 1904. — A. SOMMERFELD, Gött. Nachr. 1904. 99, 363; 1905. 201; Proc. Amsterdam **7**. 346. 1904. — P. HERTZ, Phys. Zeitschr. **4**. 848. 1903; **5**. 109. 1904. — H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 145. 1904; Proc. Amsterdam **6**. 409. 1904; Boltzmann Festschr. 1904. 726. — F. HASENÖHRL, Wien. Ber. 113. [2a] 469. 1904. — E. WIECHERT, Gött. Nachr. 1905. 1. — A. H. BUCHERER, Phys. Zeitschr. **6**. 225, 269, 833. 1905; **7**. 32. 1906. — A. EINSTEIN, Drudes Ann. **17**. 891; **18**. 639. 1905. — H. A. LORENTZ, Vortrag Berlin. Springer, 2. Aufl., 1906. — W. WIEN, Vortrag, Leipzig, Teubner 1905; Arch. néerl. (2) **11**. 1. 1906. — W. KAUFMANN, Drudes Ann. **19**. 487; **20**. 639. 1906. — A. EINSTEIN, Drudes Ann. **21**. 583. 1906. — E. KOHL, Drudes Ann. **19**. 587. 1906; **20**. 641. 1906. — O. HEAVISIDE, Nat. **72**. 429. 1905. — M. BRILLOUIN, C. R. **141**. 942. 1905. — A. H. BUCHERER, Phys. Zeitschr. **6**. 833. 1905. — J. J. THOMSON, Cambr. Proc. **13**. 39. 1904. — J. GEEST, Phys. Zeitschr. **7**. 160. 1906. — H. POINCARÉ, C. R. **140**. 1504. 1905. — F. LINDEMANN, Abh. Münch. Akad. 1907. 235, 340.

[1] Über die Frage, ob sich der Äther mit der Erde bewegt, s. W. WIEN, Phys. Zeitschr. **5**. 585. 1904. — A. SCHWEITZER, ibid. 809. 1904. — A. A. MICHELSON, Phil. Mag. (6) **8**. 716. 1904. — E. COHN, Berl. Ber. **46**. 1404. 1904. — M. BRILLOUIN, C. R. **140**. 1674. 1905.

Die Elektronentheorie ist im Gegensatz zur MAXWELLschen eine atomistische und hat mit den Schwierigkeiten einer solchen — der Bildung von Mittelwerten, um aus den molekularen die beobachteten Erscheinungen zu ermitteln — zu kämpfen.

**98.** Was den Äther betrifft, so nehmen wir an, daß im ganzen Weltraum der Äther vorhanden ist, der überall ein und dieselbe Beschaffenheit besitzt und der als Ganzes dauernd ruht, so daß niemals irgend ein abgegrenztes Volumen dieses Äthers sich durch den übrigen Äther hindurchbewegen kann. Wohl aber nehmen wir an, daß im Äther an jeder Stelle kontinuierliche Verschiebungen stattfinden können wie in einem ruhenden elastischen Körper. Der Äther soll nicht nur an den Stellen vorhanden sein, wo wir keine gewöhnliche Materie antreffen, sondern er soll auch überall die materiellen Körper (also auch deren Elektronen) durchdringen.

**99.** I. Wir lassen an jeder Stelle des Äthers zweierlei Verschiebungen zu mit den Komponenten $XYZ$ und $LMN$. Diese Verschiebungen hängen im freien Äther, d. h. in demjenigen Äther, der nicht im Innern eines Elektrons sich befindet, in der Weise zusammen, daß an jeder Stelle

$$A\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$A\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \qquad A\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$A\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad A\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

ist. Ferner soll überall im Äther, sowohl im freien wie in dem an Ionen gebundenen

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

sein. Und endlich soll, aber nur im freien Äther, überall

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

sein. Das Koordinatensystem der $xyz$ ist hierbei als im Äther fest, also mit dem Äther dauernd ruhend angenommen.

II. Wir nehmen an, daß außer dem Äther noch eine andere Substanz existiert, die Elektrizität, die wir als in diskrete Teile geteilt voraussetzen. Ein jedes solches Teilchen nennen wir ein Elektron. Diese Elektronen können und sollen in den materiellen Körpern vorhanden sein, wobei wir unentschieden lassen, ob die Körper nur aus Elektronen bestehen, oder ob sie noch davon unabhängige Materie besitzen. Für unsere Betrachtungen ist jeder Körper, in dem keine Elektronen vorhanden sind. als freier Äther anzusehen. Jedes Elektron soll einen gewissen kleinen Raum $v$ einnehmen, und es soll eine gewisse Eigenschaft besitzen, die wir seine Ladung $e$ nennen. Diese Eigenschaft könnte Masse, Pulsation, Schwingung oder dgl. sein, wir machen darüber keine Voraussetzung. Das Verhältnis der Ladung $e$ zu dem Volumen $v$ des Elektrons bezeichnen wir als die Dichtigkeit $\varrho$ der Ladung. Es braucht $\varrho$, wenn das Elektron ein noch so kleines Volumen einnimmt, doch nicht im ganzen Elektron denselben Wert zu haben, sondern kann noch im Innern desselben variieren. Unser $\varrho$ ist dann die mittlere Dichtigkeit der Ladung.

III. Ein jedes Elektron wirkt nun auf den in ihm befindlichen Äther derartig, daß dort die Verschiebungen $XYZ$ nicht mehr der Bedingung ge-

nügen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad ,$$

sondern vielmehr der Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho \quad ,$$

und das gilt sowohl wenn das Elektron in Ruhe ist, als wenn es sich bewegt.

IV. Wenn die Größen $XYZ$ an einer Stelle im freien Äther sich mit der Zeit ändern, wie es die Gleichungen I voraussetzen, so nennen wir die Größen

$$\frac{\partial X}{\partial t}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t}$$

die Komponenten des Verschiebungsstroms an dieser Stelle. Auch im Innern eines Elektrons können $XYZ$ sich mit der Zeit ändern, jedoch so, daß, solange das Elektron ruht, immer

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) = 0$$

ist. Es kann also ein Verschiebungsstrom auch im Innern eines ruhenden Elektrons vorhanden sein.

V. Ferner können die Elektronen sich durch den Äther verschieben. Der Körper, in dem die Elektronen sich befinden, kann im ganzen, also mit allen seinen Elektronen, eine gemeinsame Bewegung machen. Oder es können in dem Körper selbst von Punkt zu Punkt wechselnde Bewegungen stattfinden, oder endlich es kann sich ein einzelnes Ion bewegen. Wir verstehen unter $\alpha\beta\gamma$ die Geschwindigkeit, bezogen auf das ruhende Koordinatensystem, die in einem bestimmten Moment an der Stelle $xyz$ herrscht, wo gerade sich bewegende Materie befindet. Speziell wenn ein Elektron sich bewegt und eine Stelle $xyz$ gerade mit der Geschwindigkeit $\alpha\beta\gamma$ passiert, so bezeichnen wir $\alpha\beta\gamma$ als die an dieser Stelle vorhandene Geschwindigkeit. Die Größen

$$\varrho\alpha, \quad \varrho\beta, \quad \varrho\gamma$$

sollen dann die Komponenten des Konvektionsstroms an der Stelle genannt werden, an der gerade $\alpha\beta\gamma$ herrschen. Dieser Konvektionsstrom zusammen mit dem an derselben Stelle stattfindenden Verschiebungsstrom soll nun die Verschiebungen $L$, $M$, $N$ an dieser Stelle, an der also gerade immer das Elektron sich befindet, so beeinflussen, daß an dieser Stelle

$$A\left(\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\varrho\alpha\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad ,$$

$$A\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi\varrho\beta\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \quad ,$$

$$A\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\varrho\gamma\right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}$$

ist. Die Größen

$$\mathfrak{C}_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\varrho\alpha, \quad \mathfrak{C}_y = \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi\varrho\beta, \quad \mathfrak{C}_z = \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\varrho\gamma$$

bezeichnen wir als die Komponenten des Gesamtstroms an dieser Stelle. Das zweite System der Gleichungen I bleibt an einer solchen Stelle dasselbe

wie im freien Äther, also

$$A\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z} \quad .$$

VI. Wenn ein Elektron sich bewegt, so soll unter

$$\frac{d}{dt}$$

die Änderung einer Größe mit der Zeit verstanden werden, welche sich immer auf dasselbe Elektron bezieht, also mit diesem seinen Platz ändert, während

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

wie bisher die Änderung einer Größe mit der Zeit an einer ruhenden Stelle im Raume ist.

Es ist daher immer

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z} \quad .$$

Die Ladung eines Elektrons soll nun während seiner Bewegung konstant bleiben, also ist

$$\frac{de}{dt}=0 \quad .$$

Bezeichnet $v$ das Volumen, in welchem die Ladung $e$ vorhanden ist, so ist

$$\frac{d}{dt}(\varrho v)=0 \quad .$$

Da nun

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}$$

ist, so ist

$$\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)=0 \quad ,$$

also

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\varrho\alpha)+\frac{\partial}{\partial y}(\varrho\beta)+\frac{\partial}{\partial z}(\varrho\gamma)=0 \quad ,$$

oder noch anders geschrieben, indem

$$4\pi\varrho=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

eingesetzt wird,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial t}+4\pi\varrho\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial t}+4\pi\varrho\beta\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+4\pi\varrho\gamma\right)=0$$

oder

$$\frac{\partial\mathfrak{C}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{C}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{C}_z}{\partial z}=0 \quad .$$

Dieser Bedingung haben die Komponenten des Gesamtstromes immer zu genügen, was auch durch Differentiation der Gleichungen in V sich ergibt. Diese drückt aus, daß in einen Raum durch Bewegung von Elektronen ebensoviel Gesamtstrom eintreten wie austreten muß.

**100.** VII. Während die bisher aufgestellten Gleichungen die Verschiebungen des Äthers (sowohl des freien wie des in den Elektronen befindlichen) bestimmten, bei gegebener Bewegung der Elektronen, haben wir nun noch die Gleichungen aufzustellen, welche die Bewegung der Elektronen unter dem Einfluß der Verschiebungen des Äthers bestimmen. Dazu dient folgende Festsetzung. An jeder Stelle, an der ein ruhendes oder sich bewegendes (punktförmig gedachtes) Elektron mit der Ladung $e$ sich befindet, wird auf dasselbe von dem Äther eine mechanische Kraft ausgeübt mit den Komponenten

$$F_1 = Xe\,, \quad G_1 = Ye\,, \quad H_1 = Ze\,,$$

und an jeder Stelle, an der ein sich bewegendes Elektron mit der Geschwindigkeit $\alpha\beta\gamma$ vorhanden ist, wird auf dasselbe eine mechanische Kraft mit den Komponenten

$$F_2 = A(\gamma M - \beta N)e\,,$$
$$G_2 = A(\alpha N - \gamma L)e\,,$$
$$H_2 = A(\beta L - \alpha M)e$$

ausgeübt. Die ganze mechanische Kraft, die auf das Elektron ausgeübt wird, ist daher

$$F = F_1 + F_2\,,$$
$$G = G_1 + G_2\,,$$
$$H = H_1 + H_2\,.$$

Wir benutzen von dieser mechanischen Kraft immer die auf die Einheit der Ladung wirkende Kraft und nennen sie die vom Äther auf die Ladung ausgeübte elektrische Kraft. Diese hat die Komponenten

$$f = X + A(\gamma M - \beta N)\,,$$
$$g = Y + A(\alpha N - \gamma L)\,,$$
$$h = Z + A(\beta L - \alpha M)\,.$$

Durch Integration über das Volumen eines Elektrons erhalten wir dann die auf dasselbe wirkenden Kräfte und Drehungsmomente.

**101.** In den Nummern I—VII sind die allgemeinen Gleichungen für die Verschiebungen des Äthers bei gegebener Elektronenbewegung und für die Bewegungen der Elektronen bei gegebener Ätherverschiebung enthalten.

Aus den angeführten Gleichungen ergeben sich sofort die nachstehenden Folgerungen.

a) Sind die Bewegungen der Elektronen ($\alpha\beta\gamma$) gegeben und kennt man $XYZ$, $LMN$ in einem Moment $t = 0$, so kennt man sie zu allen Zeiten. Denn aus V folgen aus diesen die Werte $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$ zur Zeit $t = 0$ und ebenso die Werte $\frac{\partial L}{\partial t}$, $\frac{\partial M}{\partial t}$, $\frac{\partial N}{\partial t}$ zur Zeit $t = 0$, also die Werte von $XYZ$, $LMN$ im folgenden Moment. Man muß nur noch festsetzen, daß im Unendlichen $XYZ$ und $LMN$ dauernd verschwinden, dann gibt es keine zwei Lösungen unserer Gleichungen.

b) Im freien Äther ist $\varrho = 0$, die Gleichungen I sagen dann aus, daß $XYZ$, $LMN$ sich mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{A}$ fortpflanzen.

c) Wenn die Elektronen in Ruhe sind, also $\alpha\beta\gamma$ verschwinden, so ist $\mathfrak{C}_x = \frac{\partial X}{\partial t}$, $\mathfrak{C}_y = \frac{\partial Y}{\partial t}$, $\mathfrak{C}_z = \frac{\partial Z}{\partial t}$, der Strom ist nur Verschiebungsstrom.

d) Die Größen $XYZ$, $LMN$ seien unabhängig von der Zeit (statische und stationäre Zustände).

Dann gelten für die magnetischen Verschiebungen die Gleichungen

(1) $$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad ,$$

ferner überall

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad ,$$

und in der Unendlichkeit

(3) $$L = 0\,, \quad M = 0\,, \quad N = 0 \quad .$$

Daraus folgt zunächst

$$L = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\,, \quad M = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \quad N = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad ,$$

$$\Delta \psi \text{ überall } = 0\,,$$

und aus dem GREENschen Satz

$$\int d\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = -\int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dn - \int \psi \, \Delta \psi \, d\tau \quad ,$$

daß überall

$$L = 0\,, \quad M = 0\,, \quad N = 0$$

ist.

Es gibt also keine magnetischen Kräfte, wo nicht bewegte Elektronen vorhanden sind.

Die elektrischen Verschiebungen besitzen bei statischen Zuständen ein Potential $\varphi$, sowohl im freien Äther, wie innerhalb der Elektronen,

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad .$$

Im freien Äther ist überall

$$\Delta \varphi = 0 \quad ,$$

in den Elektronen nach III

$$\Delta \varphi = -4 \pi \varrho \quad .$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich bei gegebener Lage der ruhenden Elektronen der Wert von $\varphi$, nämlich

$$\varphi = \int \frac{\varrho \, d\tau}{r} \quad .$$

Auf jedes Elektron übt der Äther eine mechanische Kraft aus

$$F = X e = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} e\,, \quad G = Y e = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} e\,, \quad H = Z e = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} e \quad .$$

Sind nur zwei Elektronen im Felde vorhanden mit den Ladungen $e_1$ und $e_2$, so ist

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} \quad .$$

An der Stelle des Elektrons 1 mit den Koordinaten $x_1, y_1, z_1$ sind die elektrischen Verschiebungen vorhanden

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}\right) = +\left(\frac{e_1}{r_1^2}\right)\cos(r_1 x) + \frac{e_2}{r_2^2}\cos(r_2 x) \quad .$$

Nun ist $\frac{e_1}{r_1^2} = \frac{\varrho_1 \, d\tau}{r_1^2}$ für $r_1 = 0$ selbst $= 0$, also

$$X_1 = \frac{e_2}{r_2^2}\cos(r_2 x)$$

und daher wirkt an dem Elektron 1 die mechanische Kraft mit den Komponenten

$$F = \frac{e_1 e_2}{r_2^2} \cos(r_2 x) , \quad G = \frac{e_1 e_2}{r_2^2} \cos(r_2 y) , \quad H = \frac{e_1 e_2}{r_2^2} \cos(r_2 z) \quad .$$

Die Kraft hat also die Größe $K = \frac{e_1 e_2}{r^2}$ und wirkt in der Richtung der Verbindungslinie von $e_1$ und $e_2$. Mithin gilt das COULOMBsche Gesetz für je zwei ruhende Elektronen.

**102.** Für die Berechnungen der Größen $XYZ$, $LMN$ bei gegebenen Elektronen mit gegebener Bewegung ist es vorteilhaft, das skalare Potential $\varphi$ und die Vektorpotentiale $U$, $V$, $W$ einzuführen durch die Gleichungen

$$L = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \quad ,$$

$$M = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \quad ,$$

$$N = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \quad ,$$

aus denen sich ergibt

$$X = -A \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ,$$

$$Y = -A \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad ,$$

$$Z = -A \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad .$$

Bei gewissen berechtigten Annahmen erhält man für die Größen $U V W \varphi$ die Differentialgleichungen

$$-A^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Delta \varphi = -4 \pi \varrho \quad ,$$

$$-A^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \Delta U = -4 \pi A \varrho \alpha \quad ,$$

$$-A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \Delta V = -4 \pi A \varrho \beta \quad ,$$

$$-A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \Delta W = -4 \pi A \varrho \gamma \quad .$$

Diese Differentialgleichungen sind die Gleichungen des sogenannten retardierten Potentials. Unter der Annahme, daß in unendlicher Entfernung die bei Anwendung des GREENschen Satzes auftretenden Oberflächenintegrale verschwinden, hat die Differentialgleichung

$$\Delta \psi - A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4 \pi \omega \quad ,$$

die Lösung

$$\psi = \int \frac{d\tau'}{r} [\omega] \quad ,$$

worin das Integral über den unendlichen Raum erstreckt ist, $d\tau'$ ein Element des Raumes ist, $r$ seine Entfernung von Punkt $xyz$, für welchen $\psi$ berechnet werden soll (Aufpunkt) und $[\omega]$ der Wert von $\omega$ im Element $d\tau'$ ist, aber nicht in dem Moment $t$, für welchen das $\psi$ an $xyz$ berechnet wird, sondern

in einem früheren Moment $\sigma = t - Ar$. Es ist am Punkt $x'y'z'$ allgemein $\omega = f(x'y'z't)$ und es ist also $[\omega] = f(x'y'z'\sigma) = f(x'y'z', t - Ar)$. Dadurch ist $[\omega]$ nicht bloß von $x'y'z't$, sondern auch von $xyz$ abhängig, da diese in $r$ vorkommen.

**103.** Da das skalare Potential $\varphi$ und die Vektorpotentiale $U, V, W$ sich als retardierte Potentiale darstellen, so kann man den Anteil, den jedes Volumenelement des Raumes an einem Aufpunkt zu einer Zeit $t$ hervorbringt, angeben. Er hängt nämlich von den Werten von $\varrho$, $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$ ab, die an dem Volumenelement zu einer früheren Zeit $\sigma$ geherrscht haben. Aus den Potentialen leiten sich die elektrischen und magnetischen Verschiebungen ab und aus diesen die Kräfte $F, G, H$, die an einem Elektron angreifen, wobei man aber auf die Ausdehnung der Elektronen Rücksicht zu nehmen hat. Auf diese Weise gelangt man, wie zuerst WIECHERT[1] zeigte, dann SCHWARZSCHILD[2] und H. A. LORENTZ[3] weiter ausführten, zu einem Ausdruck für das elektrodynamische Elementargesetz, das eine gewisse entfernte Ähnlichkeit mit dem CLAUSIUSschen Gesetz (oben S. 828) zeigt[4].

## § 28. Die Elektronen in Körpern.

**104.** Die Größen $\alpha\beta\gamma$ sind die wirklichen absoluten Geschwindigkeiten der Elektronen. Diese können sich aus mehreren Geschwindigkeiten zusammensetzen. Es können nämlich die Elektronen in einem Körper vorhanden sein und der ganze Körper kann sich mit einer Geschwindigkeit, deren Komponenten $w_x$, $w_y$, $w_z$ sind, fortbewegen. Außerdem aber können die Elektronen auch noch relativ zu dem Körper Bewegungen ausführen, deren Komponenten $u_x u_y u_z$ sind. Dann ist

$$\alpha = w_x + u_x \quad ,$$
$$\beta = w_y + u_y \quad ,$$
$$\gamma = w_z + u_z \quad .$$

Wenn $w_x, w_y, w_z = 0$ sind, so beziehen sich unsere Gleichungen auf ein r u h e n d e s System. Wir wollen solche zuerst ins Auge fassen und die Geschwindigkeiten der Elektronen in einem ruhenden System jetzt mit $u_x u_y u_z$ bezeichnen.

Es möge zunächst angenommen werden, daß eine große Anzahl Elektronen in einem sehr kleinen Raume vorhanden seien, den wir ein M o l e k ü l nennen. Die Elektronen sollen sich in diesem Raume bewegen, jedoch sollen sie die Grenze des Raumes dabei nicht überschreiten. Außerhalb des Moleküls soll keine Ladung vorhanden sein.

Da das Molekül im Äther festliegt, so können wir einen Punkt desselben $O$ als Anfangspunkt unseres Koordinatensystemes nehmen. Irgend ein anderer Punkt $Q$ des Moleküls möge dann die (sehr kleinen) Koordinaten $\xi\eta\zeta$ haben, ein Punkt $P$ außerhalb die Koordinaten $xyz$. Die Entfernung $OP$ sei mit $E$ bezeichnet.

Dann läßt sich[5] für ein solches Molekül jede der obigen Funktionen $\psi$ nämlich

$$\psi = \int \frac{d\tau'}{r} [\omega]$$

darstellen durch

$$\psi = \frac{N}{E} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{[a]}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{[b]}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{[c]}{E}\right) \quad ,$$

worin $N = \int d\tau\, \omega$, $[a] = \int d\tau\, \xi\, \omega$, $b = \int d\tau\, \eta\, \omega$, $c = \int d\tau\, \zeta\, \omega$ ist.

**105.** Wenn alle Elektronen in dem Molekül ruhen, so daß $u_x$, $u_y$, $u_z$ gleich Null sind, und wenn zweitens ebensoviel positive wie negative Elektronen in dem

[1] E. WIECHERT, Drudes Ann. **4**. 667. 1901. — [2] K. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr., Math.-phys. Klasse 1903. 126, 132; Phys. Zeitschr. **4**. 431. 1903. — [3] H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 199. 1904. — [4] S. auch A. W. CONWAY, Trans. Dubl. Soc. (2) **8**. 53. 1903. — E. T. WHITTAKER, Proc. Math. Soc. (2) **1**. 367. 1904. — [5] Siehe H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 177. 1904.

Molekül vorhanden sind, dann sind nur

$$\int \varrho \xi \, d\tau \,, \quad \int \varrho \eta \, d\tau \,, \quad \int \varrho \zeta \, d\tau$$

eventuell von Null verschieden. Ist das der Fall, so nennen wir das Molekül elektrisch polarisiert und

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{x}} = \int \varrho \xi \, d\tau \,, \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{y}} = \int \varrho \eta \, d\tau \,, \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{z}} = \int \varrho \zeta \, d\tau$$

sind die Komponenten des elektrischen Momentes.

Ein solches Molekül bringt nur elektrische Verschiebungen, keine magnetischen hervor. Die elektrischen leiten sich von einem Potential

$$\varphi = -\left[\mathfrak{p}_{\mathfrak{x}} \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} + \mathfrak{p}_{\mathfrak{y}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{E}\right) + \mathfrak{p}_{\mathfrak{z}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{E}\right)\right]$$

ab, so daß $X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ist.

Sind die elektrischen Momente mit der Zeit veränderlich, so entstehen natürlich magnetische Kräfte. Die Komponenten des Vektorpotentials werden nämlich

$$U = \frac{A}{E} \frac{d[\mathfrak{p}_{\mathfrak{x}}]}{dt} \,, \quad V = \frac{A}{E} \frac{d[\mathfrak{p}_{\mathfrak{y}}]}{dt} \,, \quad W = \frac{A}{E} \frac{d[\mathfrak{p}_{\mathfrak{z}}]}{dt} \quad .$$

Wenn speziell die Größen $\mathfrak{p}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{y}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{z}}$ sich einfach periodisch ändern, so kann man das Molekül als eine einfache Lichtquelle ansehen. Ist etwa

$$\mathfrak{p} = B \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \varepsilon\right), \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{y}} = 0 \,, \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{z}} = 0 \quad ,$$

so wird $[\mathfrak{p}_{\mathfrak{x}}] = B \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{E}{\lambda} + \varepsilon\right)$, wenn $\frac{A}{T} = \frac{1}{\lambda}$ gesetzt wird.

Man erhält auf diese Weise die Formeln von HERTZ (oben S. 878 f.) für die elektrischen und magnetischen Kräfte eines linearen unendlich kleinen Oszillators.

**106.** Wenn in dem Molekül die Elektronen symmetrisch um den Mittelpunkt verteilt sind und auch bei der Bewegung derselben diese Symmetrie erhalten bleibt, so ist

$$\int \varrho \xi \, d\tau = 0 \,, \quad \int \varrho \eta \, d\tau = 0 \,, \quad \int \varrho \zeta \, d\tau = 0 \quad ,$$

$$\int \varrho u_x \, d\tau = 0 \,, \quad \int \varrho u_y \, d\tau = 0 \,, \quad \int \varrho u_z \, d\tau = 0 \quad .$$

Die Trägheitsmomente und Deviationsmomente des Moleküls um die drei Koordinatenachsen sollen nun bei der Bewegung der Elektronen unverändert bleiben. Das ist z. B. der Fall, wenn die Elektronen in zyklischer Bewegung begriffen sind. In diesem Fall läßt sich das Molekül als ein magnetisches ansehen. Die magnetischen Momente in bezug auf die drei Achsen sind dann

$$m_x = A \int \varrho u_z \eta \, d\tau \,, \quad m_y = A \int \varrho u_x \zeta \, d\tau \,, \quad m_z = A \int \varrho u_y \xi \, d\tau \quad .$$

Die gesamte Ladung des Moleküls soll dabei Null sein, also $\int \varrho \, d\tau = 0$.

Das skalare Potential $\varphi$ und die Vektorpotentiale $U V W$ eines solchen Moleküls haben die Werte

$$\varphi = 0 \quad .$$

$$U = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{[m_z]}{E} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{[m_y]}{E}\right) \quad ,$$

$$V = \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{[m_x]}{E} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{[m_z]}{E}\right) \quad ,$$

$$W = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{[m_y]}{E} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{[m_x]}{E}\right) \quad .$$

**107.** Die dielektrischen Eigenschaften einer Substanz werden durch die Annahme einer großen Zahl von polarisierten Molekülen erklärt. Sind $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$ die elektrischen Momente eines Moleküls und sind $N$ Moleküle in der Volumeneinheit enthalten, so setzen wir

$$\mathfrak{P}_x = N\mathfrak{p}_x\,, \quad \mathfrak{P}_y = N\mathfrak{p}_y\,, \quad \mathfrak{P}_z = N\mathfrak{p}_z$$

und bezeichnen $\mathfrak{P}_x \mathfrak{P}_y \mathfrak{P}_z$ als die elektrischen Momente der Volumeneinheit. Die Dichtigkeit der von den Polarisationselektronen herrührenden Elektrizität ist dann

$$4\pi\varrho_p = -\left(\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{P}_z}{\partial z}\right) \quad .$$

Sind in einem Körper frei bewegliche Leitungselektronen mit der Dichtigkeit $\varrho$ und Polarisationselektronen vorhanden, so ist die Dichte der Elektrizität im Körper

$$\varrho' = \varrho + \varrho_p \quad .$$

Die Größe $\varrho'$ ist diejenige, die HERTZ als Dichtigkeit der freien Elektrizität, die Größe $\varrho$ diejenige, die er als Dichtigkeit der wahren Elektrizität bezeichnet (s. Bd. 4, S. 85 f.). Die elektrischen Verschiebungen in einem Körper sind

$$\mathfrak{X} = X + \mathfrak{P}_x \quad ,$$
$$\mathfrak{Y} = Y + \mathfrak{P}_y \quad ,$$
$$\mathfrak{Z} = Z + \mathfrak{P}_z \quad .$$

Um diese Gleichungen auf die MAXWELLsche Form zu bringen, hätten wir zu setzen

$$\mathfrak{X} = \varepsilon X\,, \quad \text{also} \quad \mathfrak{P}_x = (\varepsilon - 1)X \quad .$$

Die Polarisationsmomente sind also der elektrischen Kraft proportional. Es läßt sich das erklären, wenn man annimmt, daß die Elektronen eines Moleküls durch eine Art elastischer Kräfte zusammengehalten werden, ihre Verschiebung ist dann der elektrischen Kraft proportional. Aus der näheren Betrachtung solcher Kräfte ergibt sich, daß bei ruhenden Molekülen (statischen Zuständen) die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ den Wert hat

$$\varepsilon = \frac{1 + Np(\frac{2}{3} \mp s)}{1 - Np(\frac{1}{3} + s)} \quad .$$

Darin bedeutet $N$ die Zahl der polarisierten Moleküle pro Volumeneinheit und $p$ und $s$ sind Konstanten, die von der Verteilung und Lagerung derselben abhängen. Für den Fall, daß die auftretenden elektrischen Kräfte nicht konstant, sondern mit der Zeit (periodisch) veränderlich sind, werden die Beziehungen, indem man die träge Masse der Moleküle berücksichtigt, zwischen Kraft und Verschiebung komplizierter, es tritt in den Ausdruck für $\varepsilon$ die Periode ein, wie bei den Darstellungen der optischen Absorption und Dispersion gezeigt wird. (S. darüber Bd. 6, S. 1319 ff.)

**108.** Die Leitungsfähigkeit von Metallen und Flüssigkeiten läßt sich in folgender Weise einführen. Wenn in der Volumeneinheit eine Anzahl $N$ von gleichen Leitungselektronen vorhanden sind, jede mit der Ladung $e$, die sich mit der Geschwindigkeit $u$ bewegen, so ist die mechanische Kraft, die auf sie wirkt, wenn wir zunächst von dem magnetischen Teil derselben absehen

$$F = NeX\,, \quad G = NeY\,, \quad H = NeZ \quad .$$

Im Falle stationärer Strömung nehmen wir an, daß diese Kraft einem von den ungeladenen Teilen ausgehenden Widerstande gleich ist, der der Geschwindigkeit der Bewegung und der Zahl der bewegten Elektronen proportional ist. Sind $u_x, u_y, u_z$ die Komponenten der Geschwindigkeit und $k$ der Koeffizient der Reibung, so wird

$$NeX = kNu_x\,, \quad NeY = kNu_y\,, \quad NeZ = kNu_z \quad ,$$

also

$$ku_x = eX \quad .$$

Die Komponenten der Stromdichtigkeit setzen wir

$$\mathfrak{C}_x = \varrho u_x, \quad \mathfrak{C}_y = \varrho u_y, \quad \mathfrak{C}_z = \varrho u_z \quad ,$$

worin $\varrho = Ne$ ist, also wird

$$\mathfrak{C}_x = \frac{Ne^2}{k} X, \quad \mathfrak{C}_y = \frac{Ne^2}{k} Y, \quad \mathfrak{C}_z = \frac{Ne^2}{k} Z \quad .$$

Die Größe $\frac{Ne^2}{k}$ bezeichnen wir als die Leitungsfähigkeit $\lambda$. Sind mehrere Arten von Elektronen vorhanden mit den Ladungen $e_1 e_2 \ldots$, der Zahl pro Volumeneinheit $N_1 N_2 \ldots$ und den Widerstandskoeffizienten $k_1 k_2 \ldots$, so ist

$$\lambda = \frac{N_1 e_1^2}{k_1} + \frac{N_2 e_2^2}{k_2} + \ldots$$

und es wird

$$\mathfrak{C}_x = \lambda X, \quad \mathfrak{C}_y = \lambda Y, \quad \mathfrak{C}_z = \lambda Z \quad ,$$

woraus sich, wie in der MAXWELLschen Theorie, alle Eigenschaften der Leiter bei statischen, stationären und variablen Zuständen ergeben.

Diese Behandlung der Bewegung der Elektronen in einem Leiter ist eine mehr summarische. Die spezielle Behandlung, aus welcher sich eine Anzahl spezieller Beziehungen ergeben werden, wird weiter unten (S. 927 ff.) ausgeführt werden.

Dadurch, daß wir den Ansatz machten

$$F = NeX \quad ,$$

haben wir nur den ersten Teil der Kraft als auf die in einem Metall strömenden Elektronen wirksam angenommen.

Der von den magnetischen Verschiebungen abhängige Teil der Kraft

$$F_1 = A(\gamma M - \beta N)e$$

zerfällt, wenn der ganze Leiter die Translationsgeschwindigkeit $w_x$, $w_y$, $w_z$ hat und die Elektronen die relative Eigengeschwindigkeit dazu $u_x$, $u_y$, $u_z$ haben, in

$$F_1' = A(w_z M - w_y N)e \quad \text{und} \quad F_1'' = A(u_z M - u_y N)e \quad .$$

Der erste Teil enthält die durch magnetische Kräfte erzeugten Induktionsströme. Der zweite Teil gibt die mechanische Kraft, die auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld wirkt. Enthält der Leiter mehrere Elektronenarten mit verschiedenen Eigengeschwindigkeiten, so gibt der letzte Teil auch die Erklärung für das HALLsche Phänomen und die damit in Zusammenhang stehenden Erscheinungen[1] (s. unten Nr. 131 f.).

**109.** Die Elektronentheorie der Magnetisierung hat die paramagnetischen und diamagnetischen Eigenschaften der Körper auf Grundlage der Annahme von magnetisierten Teilchen, d. h. von in zyklischer Bewegung begriffenen Elektronen zu erklären. Die diamagnetischen Erscheinungen kommen in derselben Weise zustande, wie bei der W. WEBERschen Theorie, durch Induktionswirkungen. Die Erklärung der paramagnetischen Erscheinungen muß verschiedene andere Hypothesen benutzen[2]. Indem man die Elektronen in Bewegung annimmt, ergibt sich, daß in magnetischen Feldern Drehung der Polarisationsebene stattfinden muß[3].

**110.** Sind in einem Körper sowohl Leitungselektronen, wie Polarisationselektronen und Magnetisierungselektronen vorhanden und alle in Bewegung, so

[1] C. H. WIND, Arch. néerl. (2) **1**. 119. 1898. — E. RIECKE, Drudes Ann. **2**. 835. 1900. — P. DRUDE, ibid. **1**. 566. 1900; **3**. 369. 1900. — E. VAN EVERDINGEN, Arch. néerl. (2) **5**. 453. 1900; **6**. 294. 1901. — J. J. THOMSON, Rapport Congrès de phys. **3**. 138. 1900. — [2] W. VOIGT, Drudes Ann. **9**. 115. 1900. — S. auch J. J. THOMSON, Congrès de phys. **3**. 148. 1900; Phil. Mag. (6) **6**. 673. 1903. — H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 230 ff. 1904. — [3] Siehe W. VOIGT, Wied. Ann. **67**. 351. 1899. — L. H. SIERTSEMA, Akad. Amsterdam 1902. 499.

rührt der entstehende Strom nicht bloß von den Leitungselektronen her, sondern auch die andern Elektronen tragen zu dem Gesamtstrom gewisse Beträge bei.

Das Produkt aus der Dichte $\varrho$ und der Geschwindigkeit $u_x, u_y, u_z$ gibt nach der Grundannahme den Strom an einer Stelle. Handelt es sich um Mittelwerte aus vielen Elektronen, so ist der Mittelwert $\overline{\varrho u_x}$ für die Leitungselektronen in der Volumeneinheit die Stromdichtigkeit $u$ des Leitungsstroms. Der Mittelwert von $\overline{\varrho u_x}$ für die Polarisationselektronen hat die Komponenten

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial t},$$

und er addiert sich in einem polarisierbaren Körper zu dem Leitungsstrom.

Für einen bewegten Körper, der die Geschwindigkeit $w_x w_y w_z$ hat, tritt an Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial t}$ vielmehr $\frac{D \mathfrak{P}_x}{\partial t}$ auf, wobei

$$\frac{D \mathfrak{P}_x}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial t} + w_x \left( \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(w_y \mathfrak{P}_x - w_x \mathfrak{P}_y) - \frac{\partial}{\partial z}(w_x \mathfrak{P}_z - w_z \mathfrak{P}_x).$$

Die beiden letzten Glieder stellen denjenigen Strom dar, der durch die Bewegung eines polarisierten Dielektrikums entsteht, den sogenannten Röntgenstrom (wie ihn POINCARÉ genannt hat). Die Versuche von EICHENWALD[1] haben gezeigt, daß für diesen gerade die Polarisationen $\mathfrak{P}_x \mathfrak{P}_y \mathfrak{P}_z$, nicht wie in der HERTZschen Theorie die vollständigen Verschiebungen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ in Betracht kommen (s. oben S. 887). Ebenso ist von WILSON[2] die Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung und der elektrischen Kraft in einem im Magnetfeld bewegten Dielektrikums nach der Elektronentheorie bestätigt worden.

## § 29. Kathodenstrahlen.

**111.** Die Erklärung der Eigenschaften der Kathodenstrahlen durch bewegte Elektronen ist zuerst von J. J. THOMSON[3] gegeben worden und er hat auch zuerst die bei dieser Erklärung maßgebenden Größen, das Verhältnis $\frac{e}{m}$ der Ladung eines Teilchens zu seiner Masse und die Geschwindigkeit $v$ der Bewegung der Teilchen ermittelt. Seine Betrachtungen sind von verschiedener Art.

a) Ein schmales Bündel von elektrischen Teilchen, deren jedes die Masse $m$ und die Ladung $e$ hat, sei in Bewegung. Wenn $N$ solcher Teilchen durch einen Querschnitt hindurchgehen, so ist

$$E = Ne$$

die Elektrizitätsmenge, die sie durch den Querschnitt transportieren.

Ist $v$ die Geschwindigkeit dieser Teilchen, so ist ihre kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} N m v^2 \quad .$$

Es ist also

$$\frac{T}{E} = \frac{1}{2} \frac{m}{e} v^2 \quad .$$

Indem man die transportierte Ladung und die Energie (durch die Wärmewirkung) mißt, erhält man eine Kombination von $\frac{e}{m}$ und $v^2$.

b) Wenn diese Teilchen sich in einem magnetischen Felde bewegen, dessen Stärke $H$ ist und wenn sie zunächst eine Geschwindigkeit senkrecht zu den Kraftlinien haben, so erfahren sie eine Krümmung ihrer Bahn. Da $\varrho v q$ gleich der Stärke $i$ des Konvektionsstromes ist ($\varrho$ = Dichtigkeit, $q$ = Querschnitt) und da

[1] A. EICHENWALD, Drudes Ann. **11**. 1. 421. 1903; **13**. 919. 1904. — H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2. 210. 1904. — [2] H. A. WILSON, Phil. Trans. **204**. A 121. 1904. — [3] J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **44**. 293. 1897.

$\varrho q dl$ gleich der auf der Strecke $dl$ vorhandenen Ladung $e$ ist, so ist $\varrho v q dl = i dl = e v$. Die senkrecht ablenkende Kraft, die durch das Feld $H$ bewirkt wird, ist nun $C = H i dl = H e v$, sie hat die Richtung der Normale der Bahn und ist daher auch $= \frac{m v^2}{\varrho}$, wo $\varrho$ der Krümmungsradius der Bahn ist. Folglich ist

$$\frac{m v^2}{\varrho} = H e v \quad ,$$

also

$$\frac{m}{e} v = H \varrho \quad .$$

Aus a) und b) kann man also $\frac{e}{m}$ und $v$ bestimmen. Das war die erste Methode von THOMSON.

c) Eine weitere Beziehung erhält man, wenn man die Kathodenstrahlen durch die senkrecht zu ihrer Bewegung sich erstreckenden Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes ablenken läßt. Ist $F$ die Stärke des magnetischen Feldes und $\varrho_1$ der Krümmungshalbmesser der Bahn, so ist

$$\frac{m v^2}{\varrho_1} = F e \quad ,$$

also

$$\frac{m}{e} v^2 = F \varrho_1 \quad .$$

Eine Kombination der Fälle $b$ und $c$ hat KAUFMANN bei seinen Versuchen gleichzeitig benutzt[1].

d) Ist die Potentialdifferenz zwischen Kathode und Anode $(\varphi - \varphi_0) = V$, so ist die Arbeit der elektrischen Kräfte, wenn sich ein $-e$ Teilchen von der Kathode zur Anode bewegt, $eV$. Diese Arbeit muß gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

sein, also ist

$$\frac{m}{e} (v^2 - v_0^2) = 2 V \quad .$$

Allerdings kennt man $v_0$ nicht, aber man kann es als klein voraussetzen. Die Kombination von $d$ (bei $v_0 = 0$, $V = \varphi - \varphi_0$ gesetzt) mit $b$ ergibt

$$\frac{1}{\varrho} = H \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{1}{\varphi - \varphi_0}} \quad .$$

Die Krümmung des Kathodenstrahls in einem Magnetfeld ist umgekehrt proportional der Wurzel aus der durchlaufenen Spannungsdifferenz. Dies ist von KAUFMANN[2] bestätigt.

Diese Betrachtungen sind elementar, sie erfordern eine Vertiefung durch die genaue Untersuchung der Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluß äußerer Kräfte und der von ihm selbst ausgehenden Kräfte.

## § 30. Das ZEEMANsche Phänomen.

**112.** Eine Erscheinung, die sich durch die Elektronentheorie leicht in ihren Grundzügen erklären läßt und auf denselben Wert von $\frac{e}{m}$ führt, der bei Kathodenstrahlen gefunden wurde, ist das ZEEMANsche Phänomen. Auf ein elek-

[1] Allgemeinere Betrachtungen bei E. RIECKE, Drudes Ann. **4**. 378. 1901; **7**. 401. 1902. — J. J. THOMSON, Conduction of electricity through gazes. Cambridge 1903. 79 ff. — [2] W. KAUFMANN, Wied. Ann. **61**. 544. 1897.

trisches Teilchen von der Masse $m$, das sich bewegt und vermöge der materiellen Teile der Nachbarschaft nach dem Anfangspunkt mit einer dem Abstand proportionalen (quasielastischen) Kraft hingezogen wird, wirken noch die Kräfte

$$F = e[X + A(\gamma M - \beta N)] \quad \text{usw. (oben S. 902).}$$

ein. Es wird also

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + e\left[X + A\left(\frac{dz}{dt}M - \frac{dy}{dt}N\right)\right] \quad ,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y + e\left[Y + A\left(\frac{dx}{dt}N - \frac{dz}{dt}L\right)\right] \quad ,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2z + e\left[Z + A\left(\frac{dy}{dt}L - \frac{dx}{dt}M\right)\right] \quad .$$

In den Verschiebungen $XYZ$, $LMN$ stecken sowohl die durch äußere Ursachen hervorgebrachten, wie auch die durch die Bewegung des Elektrons selbst erzeugten. Vernachlässigen wir die letzteren und nehmen wir nur ein äußeres magnetisches Feld von der Stärke $H$ in der Richtung der $x$-Achse wirkend an, so wird

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x \quad ,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y - eA\frac{dz}{dt}H \quad ,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2z + eA\frac{dy}{dt}H \quad .$$

Betrachten wir die Strahlen, die sich in der Richtung der $z$-Achse fortpflanzen, also transversal zum Magnetfeld, so können für diese nur die Schwingungen in der Richtung der $x$- und $y$-Achse in Betracht kommen. Durch Auflösung dieser Gleichungen findet man, daß sich in der Richtung der $z$-Achse drei Schwingungen fortpflanzen mit den Gleichungen:

$$x = C\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad ,$$

$$y_1 = D_1\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T_1}\right) \quad ,$$

$$y_2 = D_2\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T_2}\right) \quad ,$$

worin

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^2}} \quad ,$$

$$\frac{2\pi}{T_1} = -\frac{eHA}{2m}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4mk^2}{e^2H^2A^2}}\right) \quad ,$$

$$\frac{2\pi}{T_2} = +\frac{eHA}{2m}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4mk^2}{e^2H^2A^2}}\right)$$

ist, also wird

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = \frac{eAH}{2\pi m} \quad ,$$

oder, da $T_1$ und $T_2$ wenig von $T$ verschieden sind,

$$\frac{T_1 - T_2}{T} = \frac{AT}{2\pi}\frac{e}{m}H = \frac{A^2}{2\pi}\frac{e}{m}H\lambda \quad .$$

Wir erhalten also einen Strahl ⊥ Kraftlinien polarisiert, zwei andere ∥ Kraftlinien, dem ZEEMANschen Triplet entsprechend.

In derselben Weise geben die obigen Gleichungen für das Licht, das sich in der Richtung der $x$-Achse fortpflanzt, zwei zirkularpolarisierte Strahlen, einen rechts- und einen linkspolarisierten, mit verschiedener Geschwindigkeit, wodurch sich das ZEEMANsche Doublet erklärt. Für die Größe $\frac{e}{m}$ ergab sich aus den ZEEMANschen Beobachtungen angenähert der aus den Kathodenstrahlen bekannte Wert. Auch zeigte der Sinn der Drehung, daß es sich um negative Elektronen handelt. Die Abweichungen von den einfachen hier besprochenen Verhältnissen suchte LORENTZ[1] durch seine Theorie komplexer Ionen zu erklären.

## § 31. Der Einfluß der Erdbewegung auf elektrische Vorgänge.

**113.** 1. Ein geladener Kondensator, der infolge der Translation der Erde mit dieser durch den ruhenden Äther sich bewegt, erzeugt einen Konvektionsstrom. Die Ladung und Entladung eines solchen Kondensators würde vermöge der mechanischen Kräfte des Äthers auf die Elektronen einen Stoß auf den Kondensator hervorbringen können. Die Versuche von TROUTON[2], einen solchen Stoß nachzuweisen, gaben negative Resultate, weil die Empfindlichkeit seiner Versuchsanordnung nicht groß genug war[3]. Aber auch eine viel empfindlichere Anordnung von TROUTON und NOBLE[4], die zum Nachweis des Stoßes ausgereicht hätte, gab ein negatives Resultat. Durch dieses negative Resultat, einen Einfluß der Erdbewegung auf elektrische Vorgänge zu konstatieren, sowie durch alle anderen in dieser Richtung sich ergebenden negativen Resultate wurde LORENTZ veranlaßt, eine Änderung der Dimensionen der Körper infolge der Erdbewegung anzunehmen und diese in die Theorie einzuführen[5].

2. Ein konstanter Strom müßte vermöge der Translation durch die Erde auf ruhende Elektronen außerhalb eine Kraft ausüben. Diese Kraft kommt aber nicht zustande, da sich auf der Oberfläche des Leiters durch dieselbe Kraft eine Kompensationsladung entwickelt, welche diese Wirkung nach außen aufhebt[6].

3. Auch auf die Stärke der Induktionswirkungen zwischen zwei Strömen übt die Erdbewegung keinen Einfluß[7].

4. Der Einfluß der Erdbewegung auf optische Erscheinungen ist in Bd. 6, S. 1364 ff. behandelt.

## § 32. Erhaltung der Energie.

**114.** Wir nehmen ein beliebiges System von sich bewegenden Elektronen an. Auf jede Ladung wirkt eine mechanische Kraft (S. 902)

$$F = e[X + A(\gamma M - \beta N)]\,, \quad G = e[Y + A(\alpha N - \beta L)]\,, \quad H = e[Z + A(\beta L - \alpha M)]\ .$$

Wenn das Elektron sich um

$$dx = \alpha\, dt\,, \quad dy = \beta\, dt\,, \quad dz = \gamma\, dt$$

bewegt, so ist die Arbeit, die diese Kräfte leisten (da die magnetische Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, trägt sie zu der Arbeit nichts bei),

$$\delta W = e\, dt (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\ .$$

[1] H. A. LORENTZ, Wied. Ann. **63**. 278. 1897. S. dagegen die Bemerkungen von H. POINCARÉ, Electricité et optique, 2. Aufl., 533 ff. 1901. — E. RIECKE, Phys. Zeitschr. **3**. 406. 1902. — [2] F. T. TROUTON, Dublin Roy. Soc. Trans. (2) **7**. 379. 1902. — [3] H. A. LORENTZ. Amsterdam Proceedings **12**. 830. 1904. — [4] F. T. TROUTON und H. R. NOBLE, Phil. Trans. London A **202**. 165. 1903. — [5] H. A. LORENTZ, Proc. Amsterdam **12**. 809. 1904. — [6] H. A. LORENTZ, Enzyklopädie S. 260. — J. KÖNIGSBERGER, Ber. Naturf.-Ges. Freiburg i. B. **13**. 95. 1903. — [7] TH. DES COUDRES, Wied. Ann. **38**. 71. 1889. — A. LIÉNARD, Eclair. électr. **16**. 320, 360. 1898.

Die Arbeit für alle Elektronen erhalten wir durch Summation über den Raum. Setzen wir sie $= \delta W$, so ist

$$\delta W = dt \int \varrho \, d\tau (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \quad .$$

Nun ist nach den Grundgleichungen (S. 900)

$$\varrho \alpha = \frac{1}{4\pi A}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} \quad .$$

also
$$\delta W = \frac{dt}{4\pi A}\int d\tau \left[X\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right]$$
$$- \frac{dt}{4\pi}\int d\tau \left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)$$

oder
$$\delta W = \frac{dt}{4\pi A}\int d\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}(YN - ZM) + \frac{\partial}{\partial y}(ZL - XN) + \frac{\partial}{\partial z}(XM - YL)\right]$$
$$- \frac{dt}{4\pi}\int d\tau \frac{\partial}{\partial t}[\tfrac{1}{2}(L^2 + M^2 + N^2)]$$
$$- \frac{dt}{4\pi}\int d\tau \frac{\partial}{\partial t}[\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)] \quad .$$

Setzen wir

$$\frac{1}{8\pi}\int d\tau (X^2 + Y^2 + Z^2) = S_e \qquad \text{(elektrische Energie),}$$

$$\frac{1}{8\pi}\int d\tau (L^2 + M^2 + N^2) = S_m \qquad \text{(magnetische Energie),}$$

so wird
$$\delta W + d(S_e + S_m) = \frac{dt}{4\pi A}\int d\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}(YN - ZM) + \frac{\partial}{\partial y}(ZL - XN) + \frac{\partial}{\partial z}(XM - YL)\right]$$
$$= -\frac{dt}{4\pi A}\int_O d\omega \, [(YN - ZM)\cos(nx) + (ZL - XN)\cos(ny) + (XM - YL)\cos(nz)] \quad ,$$

wobei $O$ die Oberfläche des Raumes und $n$ die nach innen gezogene Normale ist. Bezeichnen wir wie früher (S. 842) die Komponenten des Strahlvektors mit $\mathfrak{S}_x \mathfrak{S}_y \mathfrak{S}_z$ und die Komponente nach der Normale mit $\mathfrak{S}_n$, so ist

$$\mathfrak{S}_x = \frac{1}{4\pi A}(ZM - YN) \quad ,$$

$$\mathfrak{S}_y = \frac{1}{4\pi A}(XN - ZL) \quad ,$$

$$\mathfrak{S}_z = \frac{1}{4\pi A}(YL - XM) \quad ,$$

und die rechte Seite wird

$$dt \int_O d\omega \, \mathfrak{S}_n \quad ,$$

also wird

$$\delta W + dS = dt \int \mathfrak{S}_n \, d\omega \quad .$$

Die Zunahme der elektromagnetischen Energie des Raumes vermehrt um die von den Kräften geleistete Arbeit ist gleich der durch die Oberfläche eingestrahlten Energie.

## § 33. Ponderomotorische Kräfte und elektromagnetische Bewegungsgröße.

**115.** In einem Körper sei eine Anzahl von Elektronen vorhanden. Wir berechnen die Translationskräfte (der Kürze wegen nicht Drehungsmomente), die auf den Körper ausgeübt werden. Die $x$-Komponente dieser ponderomotorischen Kraft ist

$$\Xi = \Sigma F = \Sigma e X + A \Sigma e (\gamma M - \beta N)$$
$$= \int \varrho X d\tau + A \int \varrho (\gamma M - \beta N) d\tau \quad .$$

Wir setzen

$$A \varrho \alpha = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) - \frac{A}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$$

und

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \quad .$$

Dann ist

$$\Xi = \frac{1}{4\pi}\int d\tau\, X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}\int d\tau\, M\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) - N\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{A}{4\pi}\int d\tau\left(M\frac{\partial Z}{\partial t} - N\frac{\partial Y}{\partial t}\right) \quad .$$

Nun ist

$$\int d\tau\, X\frac{\partial Y}{\partial y} = \int d\tau \frac{\partial}{\partial y}(XY) - \int d\tau\, Y\frac{\partial X}{\partial y}$$

und da

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad ,$$

$$A\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ,$$

$$A\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

ist, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} - A\frac{\partial N}{\partial t} \quad ,$$

also

$$\int X\frac{\partial Y}{\partial y} d\tau = -\int_O XY\cos(n_i y)\, d\omega - \int Y\frac{\partial Y}{\partial x} d\tau + A\int Y\frac{\partial N}{\partial t} d\tau \quad .$$

Ebenso

$$\int X\frac{\partial Z}{\partial z} d\tau = -\int_O XZ\cos(n_i z)\, d\omega - \int Z\frac{\partial Z}{\partial x} d\tau - A\int Z\frac{\partial M}{\partial t} d\tau \quad ,$$

also

$$\Xi = -\frac{1}{4\pi}\int_O d\omega\, X[Y\cos(n_i y) + Z\cos(n_i z)]$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int d\tau \frac{\partial}{\partial x}(X^2 - Y^2 - Z^2)$$
$$- \frac{A}{4\pi}\int d\tau\left(M\frac{\partial Z}{\partial t} - N\frac{\partial Y}{\partial t} - Y\frac{\partial N}{\partial t} + Z\frac{\partial M}{\partial t}\right)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int d\tau\left(M\frac{\partial L}{\partial y} + N\frac{\partial L}{\partial z}\right) - \frac{1}{8\pi}\int d\tau \frac{\partial}{\partial x}(M^2 + N^2) \quad .$$

Durch weitere Umformung ergibt sich also

$$\begin{aligned}\Xi = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_O d\omega\, X[Y\cos(n_i y) + Z\cos(n_i z)] \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_O d\omega\, L[M\cos(n_i y) + N\cos(n_i z)] \\ &+\frac{1}{8\pi}\int d\tau\, \frac{\partial}{\partial x}(X^2 - Y^2 - Z^2) \\ &+\frac{1}{8\pi}\int d\tau\, \frac{\partial}{\partial x}(L^2 - M^2 - N^2) \\ &-\frac{A}{4\pi}\int d\tau \left(M\frac{\partial Z}{\partial t} + Z\frac{\partial M}{\partial t} - N\frac{\partial Y}{\partial t} - Y\frac{\partial N}{\partial t}\right) \quad .\end{aligned}$$

Setzen wir

$$X\cos(n_i x) + Y\cos(n_i y) + Z\cos(n_i z) = P_n \quad ,$$
$$L\cos(n_i x) + M\cos(n_i y) + N\cos(n_i z) = Q_n \quad ,$$

und bedenken wir, daß (S. 842)

$$\mathfrak{S}_x = \frac{1}{4\pi A}(ZM - YN)$$

war, so ist

$$\begin{aligned}\Xi = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_O d\omega\,[XP_n - X^2\cos(n_i x)] \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_O d\omega\,[LQ_n - L^2\cos(n_i x)] \\ &+\frac{1}{8\pi}\int d\tau\, \frac{\partial}{\partial x}(X^2 - Y^2 - Z^2) \\ &+\frac{1}{8\pi}\int d\tau\, \frac{\partial}{\partial x}(L^2 - M^2 - N^2) \\ &- A^2\frac{d}{dt}\int d\tau\, \mathfrak{S}_x \quad .\end{aligned}$$

Da auch das dritte und vierte Integral sich in Oberflächenintegrale verwandeln lassen, so wird

$$\begin{aligned}\Xi = &-\frac{1}{8\pi}\int\limits_O d\omega\,[2XP_n - (X^2 + Y^2 + Z^2)\cos(n_i x)] \\ &-\frac{1}{8\pi}\int\limits_O d\omega\,[2LQ_n - (L^2 + M^2 + N^2)\cos(n_i x)] \\ &- A^2\frac{d}{dt}\int\limits_R \mathfrak{S}_x\, d\tau \quad .\end{aligned}$$

Die Kraft wird also durch ein Oberflächenintegral und ein Raumintegral dargestellt. Bei allen statischen und stationären Enden ist das letzte Glied $= 0$.

Dabei wird also $\Xi$ bloß durch ein Oberflächenintegral dargestellt. Auch bei periodischen Zuständen während der Dauer einer Periode gilt dasselbe.

Setzen wir

$$-X_n = \frac{1}{4\pi}[XP_n - \tfrac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2)\cos(nx) + LQ_n - \tfrac{1}{2}(L^2+M^2+N^2)\cos(nx)]$$

und setzen wir andererseits

$$X_n = X_x\cos(nx) + Xy\cos(ny) + X_z\cos(nz) \quad ,$$

so wird

$$-X_x = \frac{1}{4\pi}[X^2 - \tfrac{1}{2}(X^2+Y^2+Z^2) + L^2 - \tfrac{1}{2}(L^2+M^2+N^2)]$$

$$= \frac{1}{8\pi}(X^2-Y^2-Z^2) + \frac{1}{8\pi}(L^2-M^2-N^2) \quad ,$$

$$-X_y = \frac{1}{4\pi}(XY+LM) \quad ,$$

$$-X_z = \frac{1}{4\pi}(XZ+LN) \quad ,$$

$$-Y_y = \frac{1}{8\pi}(Y^2-X^2-Z^2) + \frac{1}{8\pi}(M^2-L^2-N^2) \quad ,$$

$$-Z_z = \frac{1}{8\pi}(Z^2-X^2-Y^2) + \frac{1}{8\pi}(N^2-L^2-M^2) \quad ,$$

$$-Y_z = \frac{1}{4\pi}(ZY+NM) \quad .$$

Das sind dieselben Spannungen wie bei MAXWELL und HERTZ (s. oben S. 891). Indes sind diese Spannungen hier nur fiktiv, da der Äther als ruhend angenommen wird und die einzelnen Teile desselben nicht aufeinander wirken.

Dieses Oberflächenintegral ist aber nicht der vollständige Ausdruck für die Kraft; vielmehr ist

$$\Xi = \Xi_1 + \Xi_2 \quad ,$$

wobei $\Xi_1$ das Oberflächenintegral, also die fiktiven Spannungen darstellt. Zu ihnen kommt hier noch hinzu

$$\Xi_2 = -A^2\frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}_x\,d\tau \quad .$$

Haben wir einen von Materie (Elektronen) freien Raum, so muß $\Xi = 0$ sein, in der Tat ist dann

$$\Xi_2 = -\Xi_1 \quad .$$

Haben wir aber ein von Materie erfülltes System, das den Raum $R_1$ einnimmt, so können wir statt der Grenzfläche $O_1$ des Systems auch eine im freien Äther liegende Grenzfläche $O_2$ nehmen, die den Raum $R_2$ einschließt, und es wird, wenn vorübergehend das Argument des Oberflächenintegrals mit $D$, das des Raumintegrals mit $C$ bezeichnet wird,

$$\Xi = -\int_{O_1} D\,d\omega - \int_{R_1} C\,d\tau \quad .$$

Nun ist

$$\int_{O_1} D\,d\omega - \int_{O_2} D\,d\omega - \int_{R_2-R_1} C\,d\tau = 0 \quad ,$$

also

$$\int_{O_1} D\,d\omega = \int_{O_2} D\,d\omega + \int_{R_2-R_1} C\,d\tau \quad ,$$

also
$$\Xi = -\int_{O_2} D\,d\omega - \int_{R_2-R_1} C\,d\tau - \int_{R_1} C\,d\tau$$
$$= -\int_{O_2} D\,d\omega - \int_{R_2} C\,d\tau \quad .$$

Nun können wir die Fläche $O_2$ beliebig weit annehmen. Lassen wir die Fläche $O_2$ ins Unendliche reichen, und verschwinden dort $XYZ$, $LMN$, so bleibt

$$\Xi = -A^2 \frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}_x\,d\tau \quad ,$$

wobei das Integral über den ganzen Raum ausgedehnt ist. Es wird also ein Körper von einer Kraft $\Xi$ angegriffen und muß sich daher bewegen. Ist $MU$ sein Bewegungsmoment in der Richtung der $x$-Achse, so ist

$$\frac{d}{dt}(MU) = \Xi \quad .$$

Dieser Kraft entspricht keine Gegenkraft, das Prinzip der Aktion und Reaktion ist also nicht erfüllt.

Bei HERTZ und HELMHOLTZ tritt eine Gegenkraft $\Xi' = -\Xi$ ein, welche nun den beweglichen Äther in Bewegung setzen muß. In der Tat hat HELMHOLTZ die Bewegungen berechnet, welche in diesem Falle auftreten können. Sie treten nur auf, wenn der POYNTINGsche Vektor sich mit der Zeit ändert (s. o. S. 892). In der LORENTZschen Theorie ist keine solche Gegenkraft vorhanden.

**116.** Da aber

$$\frac{d}{dt}(MU) = -A^2 \frac{d}{dt}\int \mathfrak{S}_x\,d\tau \quad ,$$

so gilt immer

$$\frac{d}{dt}\left(MU + A^2\int \mathfrak{S}_x\,d\tau\right) = 0 \quad ,$$

oder

$$MU + A^2\int \mathfrak{S}_x\,d\tau = \mathrm{const} \quad .$$

Mit der Bewegung des Körpers ändert sich im entgegengesetzten Sinne stets eine von dem Zustand des Äthers abhängige Größe, ohne daß jedoch eine Fortbewegung stattfindet.

Wir können daher die Größe, deren Komponenten sind

$$A^2\int \mathfrak{S}_x\,d\tau\,, \quad A^2\int \mathfrak{S}_y\,d\tau\,, \quad A^2\int \mathfrak{S}_z\,d\tau \quad ,$$

als die Bewegungsgröße des Äthers $\mathfrak{G}_x$, $\mathfrak{G}_y$, $\mathfrak{G}_z$ bezeichnen. Sie ist einfach bis auf einen Faktor, der POYNTINGsche Vektor integriert über dem Raum. Man bezeichnet sie als die elektromagnetische Bewegungsgröße oder als den elektromagnetischen Impuls[1].

## § 34. Die durch die Bewegung eines Elektrons entstehenden Verschiebungen und Kräfte. Elektromagnetische Masse.

**117.** Die Bewegung eines Elektrons ist dadurch kompliziert, daß das Elektron bei seiner Bewegung selbst ein Feld hervorbringt, welches für sich eine Kraft auf das Elektron ausübt. Es muß daher zunächst das Feld eines sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Elektrons selbst ermittelt werden und die Kräfte, die infolge dieses Feldes der Äther auf das sich bewegende Elektron ausübt[2].

[1] M. ABRAHAM, Drudes Ann. **10**. 105. 1903. — [2] Über das Feld bewegter Ladungen s. die Arbeiten von J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **11**. 229. 1881; (5) **28**. 1. 1889; Recent researches S. 16. — O. HEAVISIDE, Electromagnetic Theorie **1**. 269. 1892; Phil. Mag. (5) **27**. 324. 1882. — W. B. MORTON, Phil. Mag. (5) **41**. 253, 488. 1896. — J. LARMOR, ibid. **42**. 201. 1896. — G. F. C. SEARLE, ibid. (5) **44**. 323. 1897. — A. SCHUSTER, ibid. **43**. 1. 1897. — J. LARMOR, Proc. Roy. Soc. **63**. 365. 1898. — C. H. WIND, Arch. néerl. (2) **5**. 609. 1900. — A. H. BUCHERER, Drudes Ann. **8**. 326; **9**. 496. 1902. — A. LIÉNARD, L'éclairage électrique **16**. 5, 53, 106. 1898. — TH. DES COUDRES, Arch. néerl. (2) **5**. 1900. — J. LEVI-CIVITÀ, Ann. de Toulouse (2) **4**. 1. 1902.

Wir nehmen zunächst einen Körper an, in welchem die Ionen relativ ruhen und der sich selbst mit der Geschwindigkeit $\alpha = p$ in der Richtung der $x$-Achse bewegt. Es seien $xyz$ die Koordinaten eines Punktes in bezug auf ein im Äther festes Achsensystem, $\xi\eta\zeta$ die desselben Punktes in bezug auf ein im Körper festes Achsensystem. Dann ist

$$x = pt + \xi\,, \quad y = \eta\,, \quad z = \zeta \quad ,$$

$\frac{\partial}{\partial \tau}$ bezeichne die Änderung einer Größe an einem materiellen Punkte mit der Zeit, $\frac{\partial}{\partial t}$ die an einer festen Stelle, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial \xi} \quad ,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - p\frac{\partial}{\partial \xi} \quad .$$

In bezug auf $\xi\eta\zeta\tau$ werden daher die Grundgleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = 4\pi\varrho \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} = 0 \quad .$$

Setzen wir ferner

$$L' = L \quad ,$$
$$M' = M - ApZ \quad ,$$
$$N' = N + ApY \quad ,$$

so wird

$$\frac{\partial M'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \eta} = A\frac{\partial X}{\partial \tau} \quad ,$$

$$\frac{\partial N'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \zeta} = A\frac{\partial Y}{\partial \tau} \quad ,$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \xi} = A\frac{\partial Z}{\partial \tau} \quad .$$

Die Kräfte auf die Einheit der Ladung werden

$$f = X \quad ,$$
$$g = Y + ApN \quad ,$$
$$h = Z - ApM \quad .$$

Die Differentialgleichungen für $XYZ$, $LMN$ werden

$$\varDelta X - A^2\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 4\pi\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} - 4\pi A^2 p^2\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \quad ,$$

$$\varDelta Y - A^2\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\pi\frac{\partial \varrho}{\partial \eta} \quad ,$$

$$\varDelta Z - A^2\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = 4\pi\frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} \quad ,$$

$$\varDelta L - A^2\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

$$\varDelta M - A^2\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 4\pi Ap\frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} \quad ,$$

$$\varDelta N - A^2\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = -4\pi Ap\frac{\partial \varrho}{\partial \eta} \quad .$$

Setzen wir
$$\Delta\omega - A^2\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = -4\pi\varrho \quad ,$$
so ist eine Lösung unserer Gleichungen
$$L = 0\,, \quad M = -Ap\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\,, \quad N = Ap\frac{\partial\omega}{\partial\eta} \quad ,$$
$$X = -\frac{\partial\omega}{\partial\xi}(1 - A^2p^2)\,, \quad Y = -\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\,, \quad Z = -\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} \quad .$$
Daraus ergibt sich
$$f = -\frac{\partial\omega}{\partial\xi}(1 - A^2p^2)\,, \quad g = -\frac{\partial\omega}{\partial\eta}(1 - A^2p^2)\,, \quad h = -\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}(1 - A^2p^2) \quad .$$
Die mechanischen Kräfte haben also ein Potential
$$\psi = (1 - A^2p^2)\,\omega = \left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right)\omega \quad ,$$
wenn $V$ die Lichtgeschwindigkeit ist. Man bezeichnet $\psi$ als das Konvektionspotential.

Die Gleichung für $\omega$, auf die alles ankommt, ist
$$\Delta\omega - A^2\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = -4\pi\varrho \quad ,$$
wobei bei stationärer Bewegung
$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -p\frac{\partial\omega}{\partial\xi}$$
ist. Also wird
$$\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta^2} = -4\pi\varrho \quad .$$
Die Größe $\omega$, die dieser Gleichung genügt, bestimmt das Konvektionspotential $\psi$.

**118.** Zur Behandlung dieser Gleichung vergleichen wir das bewegte System $S_1$ mit einem ruhenden System $S_2$. Auch $S_2$ soll Elektronen enthalten. Den Koordinaten eines Punktes $P_1$ $(\xi\eta\zeta)$ in $S_1$ entsprechen Koordinaten eines Punktes $P_2$ $(xyz)$. Der Anfangspunkt beider Koordinaten soll je ein entsprechender Punkt sein. Die Dimensionen von $S_2$ sollen in der $x$-Richtung $\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{V}\right)^2}}\right) = \alpha$ mal gegenüber denen von $S_1$ vergrößert sein. Also auch Elektronen, die in $S_1$ ein bestimmtes Volumen haben, haben in $S_2$ dann ein anderes Volumen, da die Dimensionen in der $x$-Richtung $\alpha$ mal vergrößert sind.

Irgend ein Punkt $P_1$, der in $S_1$ die Koordinaten $\xi\eta\zeta$ hat, hat einen entsprechenden Punkt $P_2$ in $S_2$, der die Koordinaten hat
$$x = \alpha\xi\,, \quad y = \eta\,, \quad z = \zeta \quad .$$
Dagegen sollen die Elektronen im System $S_2$ dieselbe ganze Ladung $e$ besitzen wie in $S_1$. Da nun das Volumen eines Elektrons in $S_2$ $\alpha$ mal so groß ist wie das Volumen eines Elektrons in $S_1$, so ist die Dichte im Medium $S_2$, wir wollen sie mit $\varrho'$ bezeichnen, $= \frac{\varrho}{\alpha}$,
$$\varrho' = \frac{\varrho}{\alpha} \quad .$$
Tragen wir in die Gleichung für $\omega$ statt $\xi\eta\zeta$ ein $xyz$, so ist
$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \alpha\frac{\partial\omega}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$$

und es wird (23)

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=-4\pi\varrho=-4\pi\varrho'\alpha \quad .$$

Ist also $\omega'$ eine Funktion, die im System $S_2$ der Gleichung genügt

$$\frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega'}{\partial z^2}=-4\pi\varrho' \quad ,$$

so ist im System $S_2$

$$\omega=\alpha\,\omega'=\frac{\omega'}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{V}\right)^2}} \quad .$$

Wir haben also ein vergrößertes System $S_2$ zu bilden, in dem die Dichtigkeit $\varrho'=\frac{\varrho}{\alpha}$ ist, die gewöhnliche Potentialfunktion $\omega'$ dieser Verteilung zu finden (die dann eine Funktion von $x y z$ ist) und dann zu bilden

$$\omega=\alpha\,\omega' \quad .$$

Es ist dann

$$\omega=\alpha f(x y z)=\alpha f(\alpha\,\xi\,,\,\eta\,,\,\zeta) \quad .$$

Nun war

$$f=-(1-A^2p^2)\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\,,\qquad g=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\,,\qquad h=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} \quad .$$

Da $\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x}$ und da $\omega=\alpha\,\omega'$ ist, so ist auch

$$f=-\frac{\partial\omega'}{\partial x} \quad .$$

Ferner ist

$$g=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial y}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\omega'}{\partial y}$$

und

$$h=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}=-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\omega}{\partial z}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\omega'}{\partial z} \quad .$$

Wenn man also im zweiten System drei Kräfte definiert durch

$$f'=-\frac{\partial\omega'}{\partial x}\,,\qquad g'=-\frac{\partial\omega'}{\partial y}\,,\qquad h'=-\frac{\partial\omega'}{\partial z} \quad ,$$

so wird

$$f=f'\,,\qquad g=\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,g'\,,\qquad h=\sqrt{1-\frac{p^2}{V^2}}\,h' \quad .$$

Das Konvektionspotential $\psi$ eines kugelförmigen Elektrons führt daher auf das Potential $\omega'$ eines verlängerten Rotationsellipsoids.

**119.** Um nun die Kräfte auf ein kugelförmiges Elektron zu berechnen, die aus seinem eigenen Feld entstehen, muß man die obigen Ausdrücke über das Volumen des Elektrons integrieren[1]. Einfacher ist es, wie ABRAHAM[2] gezeigt hat, auf die elektromagnetische Bewegungsgröße $\mathfrak{G}_x\,\mathfrak{G}_y\,\mathfrak{G}_z$ zurückzugehen. Die aus der Änderung des Bewegungsmomentes entstehenden inneren mechanischen Kräfte ergeben sich durch die Gleichungen

$$F=-\frac{d\mathfrak{G}_x}{dt}\,,\qquad G=-\frac{d\mathfrak{G}_y}{dt}\,,\qquad H=-\frac{d\mathfrak{G}_z}{dt} \quad .$$

[1] Wir lassen die von ABRAHAM ebenfalls behandelten Drehungsmomente außer Acht, wie wir überhaupt die Frage der Rotation des Elektrons in dieser Darlegung nicht berücksichtigt haben. — [2] M. ABRAHAM, Drudes Ann. 10. 105. 1903.

Dabei ist

$$\mathfrak{G}_x = \frac{A}{4\pi}\int (MZ - NY)\,d\tau\,, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{A}{4\pi}\int (NX - LZ)\,d\tau\,,$$

$$\mathfrak{G}_z = \frac{A}{4\pi}\int (LY - MX)\,d\tau$$

die Integrale ausgedehnt über den unendlichen Raum.

Wenn ein kugelförmiges Elektron mit konstanter Geschwindigkeit seit unendlich langer Zeit sich bewegt, so sind im unendlichen Raume überall dieselben Werte von $XYZ$, $LMN$ verteilt, ob das Elektron nun an einer Stelle $A$ oder an einer Stelle $B$ sich befindet, folglich ist dabei $\mathfrak{G}_x\,\mathfrak{G}_y\,\mathfrak{G}_z$ konstant und daher $F = G = H = 0$. Also das erste Newtonsche Gesetz gilt für ein solches Elektron: ein kugelförmiges Elektron kann sich ohne Kräfte gleichförmig geradlinig fortbewegen. Dagegen wenn ein Elektron beschleunigt oder verzögert wird, so treten Kräfte von dem Äther auf dasselbe auf. Um die Art dieser Kräfte, ihre Wirkungsweise, allgemein zu beurteilen, bedenken wir, daß ein bewegtes Elektron einen Konvektionsstrom repräsentiert. Ist es gleichmäßig bewegt, so entspricht das einem stationären Strom, nimmt seine Geschwindigkeit aber zu oder ab, so entspricht das einem Leitungsstrom, dessen Intensität wächst oder abnimmt. Nun sagt die Erfahrung, und die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen enthalten dies, daß in solchem Falle immer Extraströme auftreten. Sie kommen daher, daß die magnetischen Verschiebungen im Raume um den Strom sich ändern. Der Extrastrom bei Steigerung der Stromstärke (Schließungsstrom) wirkt in entgegengesetzter Richtung wie der Strom, sucht ihn also zu hemmen, der Extrastrom bei Schwächung der Stromstärke (Öffnungsstrom) wirkt in derselben Richtung wie der Strom, sucht ihn also noch zu verlängern. Dasselbe tritt bei einem Konvektionsstrom an unserem Elektron auf. Wirkt auf das Elektron eine beschleunigende Kraft von außen, so stemmen sich zunächst die Extraströme diesem entgegen, so wie sich die ponderable Masse eines Körpers vermöge der Trägheit der Beschleunigung entgegenstemmt. Wirkt auf das Elektron eine verzögernde Kraft, so folgt dasselbe nicht unmittelbar derselben, sondern vermöge des Extrastroms sucht es noch die vorhandene Geschwindigkeit beizubehalten, ganz wie eine ponderable Masse. Die Wirkungen der Extraströme haben also denselben Charakter wie die Trägheit, wie die Masse ponderabler Körper.

Dies läßt sich folgendermaßen einführen: Sind $F_a$, $G_a$, $H_a$ die äußeren auf ein Elektron von der Masse $m$ wirkenden Kräfte und $FGH$ die durch seine eigene Beschleunigung auftretenden inneren Kräfte, so ist

$$m\frac{du}{dt} = F_a + F\,, \quad m\frac{dv}{dt} = G_a + G\,, \quad m\frac{dw}{dt} = H_a + H\,.$$

Um die innere Kraft als eine Massenvermehrung darzustellen, schreiben wir dafür

$$(m + m_x)\frac{du}{dt} = F_a\,, \quad (m + m_y)\frac{dv}{dt} = G_a\,, \quad (m + m_z)\frac{dw}{dt} = H_a\,.$$

Es ist nicht notwendig, daß die so eingeführten Massen nach den drei Richtungen gleich sind, namentlich nicht, wenn das Elektron nicht kugelförmig ist.

Es folgt daraus:

$$m_x\frac{du}{dt} = -F\,, \quad m_y\frac{dv}{dt} = -G\,, \quad m_z\frac{dw}{dt} = -H\,.$$

Nun sind die inneren Kräfte bei einer beschleunigten Bewegung des Elektrons, wie oben, bestimmt durch

$$F = -\frac{d\mathfrak{G}_x}{dt}\,.$$

Aber der Wert von $\mathfrak{G}_x$ hängt selbst von der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Elektrons ab.

Indes können wir in erster Annäherung bei langsamen Änderungen der Geschwindigkeit $p$ auch $\mathfrak{G}_x$ aus den Werten der Verschiebung für konstante Geschwindigkeit berechnen und dann $p$ nach $t$ differenzieren, also nicht als ganz konstant voraussetzen (quasistationäre Bewegung[1]).

Die beiden in Betracht kommenden Fälle sind nun die, daß 1. die Richtung der Geschwindigkeit konstant bleibt, aber die Größe der Geschwindigkeit sich ändert $\frac{dp}{dt}$, 2. daß zwar die Größe der Geschwindigkeit konstant bleibt, aber die Richtung sich ändert.

Im ersteren Falle wollen wir von longitudinaler scheinbarer Masse $m_s$ sprechen, im zweiten von transversaler scheinbarer Masse $m_r$. Nun ist

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dp}\frac{dp}{dt}$$

und nach der Definition ist also

$$m_s \frac{dp}{dt} = -F = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dp}\frac{dp}{dt} \quad ,$$

also

$$m_s = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dp} \quad .$$

Die longitudinale Masse ergibt sich aber auch aus dem Energiesatz:

$$F p\, dt = -dU \quad ,$$

also

$$m_s p\, dp = dU_e + dU_m \quad ,$$

also

$$m_s = \frac{1}{p}\frac{dU_e}{dp} + \frac{1}{p}\frac{dU_m}{dp} \quad .$$

Wenn zweitens die Größe der Geschwindigkeit konstant bleibt, aber die Richtung sich verändert, es sich also um die transversale Masse handelt, so ist folgende Betrachtung anzustellen: $\mathfrak{G}_x$ sei das elektromagnetische Bewegungsmoment in der Richtung $x$, $p$ die Geschwindigkeit des Elektrons in derselben Richtung. Aus irgend einem Grunde wird das Elektron senkrecht dazu abgelegt mit gleicher Geschwindigkeit $p$. Die Änderung des Bewegungsmomentes ist dann, wenn $\varrho$ der Krümmungshalbmesser der Bahn ist, $C = \mathfrak{G}_x \frac{p}{\varrho}$ und dies ist gleich der Zentrifugalkraft, also

$$m_r \frac{p^2}{\varrho} = \mathfrak{G}_x \frac{p}{\varrho}, \quad \text{also} \quad m_r = \frac{\mathfrak{G}_x}{p} \quad .$$

**120.** Es kommt also allein auf die Berechnung von $\mathfrak{G}_x$ an, wenn wir die Richtung der Bewegung als $x$-Richtung nehmen. Es ist

$$\mathfrak{G}_x = A^2 \int \mathfrak{S}_x\, d\tau = \frac{A}{4\pi}\int (MZ - NY)\, d\tau$$

über den ganzen Raum integriert. Und nach dem Obigen (S. 919) haben die Verschiebungen elektrischer und magnetischer Art für ein gleichförmig bewegtes Elektron folgende Werte:

$$X = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi}(1 - \beta^2) \quad ,$$

$$Y = -\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \quad ,$$

$$Z = -\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \quad ,$$

[1] M. ABRAHAM hat l. c. die Bedingungen angegeben, unter denen die Bewegung als quasistationär betrachtet werden kann.

$$L = 0 \quad ,$$

$$M = -A p \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \quad ,$$

$$N = A p \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \quad ,$$

also wird

$$\mathfrak{G}_x = \frac{A^2}{4\pi} p \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)^2 d\tau \quad .$$

Dafür kann man auch schreiben

$$\mathfrak{G}_x = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{p} \int (L^2 + M^2 + N^2)\, a\tau \quad .$$

Da nun

$$\frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2)\, d\tau = U_m$$

die magnetische Energie war, so ist

$$\mathfrak{G}_x = \frac{2 U_m}{p} \quad .$$

Die Berechnung von $U_m$, also $\mathfrak{G}_x$, wird aber erleichtert durch eine Betrachtung anderer Art, eine Umformung, die von SEARLE[1] ausgeführt ist und welche die Differenz $U_e - U_m$ auszurechnen gestattet. Nach den obigen Formeln (S. 919) ist die auf die Ladungseinheit wirkende Kraft

$$f = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) = X \quad ,$$

$$g = -\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) = Y\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) \quad ,$$

$$h = -\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) = Z\left(1 - \frac{p^2}{V^2}\right) \quad .$$

Andererseits ist

$$L = 0 \,, \qquad M = -A p \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = \frac{p}{V} Z \,, \qquad N = A p \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = -\frac{p}{V} Y \quad ,$$

also

$$f X + g Y + h Z = X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{p^2}{V^2}(Y^2 + Z^2)$$

$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - (L^2 + M^2 + N^2) \quad ,$$

also

$$8\pi (U_e - U_m) = \int (f X + g Y + h Z)\, d\tau \quad .$$

Wenn wir andererseits wieder das Konvektionspotential mit $\psi$ bezeichnen, so ist

$$f = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\,, \qquad g = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\,, \qquad h = -\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\,, \qquad \psi = (1 - \beta^2)\,\omega \quad .$$

Dann ist

$$8\pi (U_e - U_m) = -\int \left(X \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + Y \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + Z \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right) d\tau = +\int \psi \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) d\tau \quad ,$$

---

[1] G. F. C. SEARLE, Phil. Trans. 187. A 675. 1896; Phil. Mag. 44. 329. 1897.

also wird

$$8\pi(U_e - U_m) = 4\pi \int \psi \varrho \, d\tau$$

oder

$$2(U_e - U_m) = \int \psi \varrho \, d\tau \quad .$$

Bezeichnen wir das Integral abkürzend mit $2E$, so ist

$$E = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\infty} \psi \varrho \, d\tau$$

und

$$U_e - U_m = E \quad .$$

Nun war einerseits

$$m_s = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dp} = 2 \frac{d}{dp}\left(\frac{U_m}{p}\right) = \frac{2}{p} \frac{dU_m}{dp} - \frac{2}{p^2} U_m \quad ,$$

andererseits (S. 922)

$$m_s = \frac{1}{p}\left(\frac{dU_e}{dp} + \frac{dU_m}{dp}\right) \quad ,$$

also ist

$$\frac{1}{p}\left(\frac{dU_e}{dp} - \frac{dU_m}{dp}\right) = -\frac{2}{p^2} U_m \quad ,$$

$$\frac{d}{dp}(U_e - U_m) = -\frac{2}{p} U_m = -\mathfrak{G}_x \quad .$$

Mithin wird

$$\mathfrak{G}_x = -\frac{dE}{dp}$$

und daher

$$m_s = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dp} = -\frac{d^2 E}{dp^2} \quad ,$$

$$m_r = \frac{\mathfrak{G}_x}{p} = -\frac{1}{p}\frac{dE}{dp} \quad .$$

Es kommt also nur auf die Größe an

$$E = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\infty} \psi \varrho \, d\tau \quad .$$

**121.** Nun war $\psi = (1 - \beta^2)\omega$ das Konvektionspotential des Elektrons also ist

$$E = \tfrac{1}{2}(1 - \beta^2) \int \omega \varrho \, d\tau \quad .$$

Das Potential $\omega$ unserer bewegten Kugel ist $\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$ mal so groß als das Potential $\omega'$ eines Ellipsoids, dessen Ladung dieselbe, dessen Dichtigkeit $\varrho' = \frac{\varrho}{\alpha}$ ist, dessen Halbachsen aber $\alpha a$, $a$, $a$ sind, wenn die Kugel den Radius $a$ hat. Es wird also

$$E = \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \int \omega' \varrho' \, d\tau' \quad .$$

Da $\tfrac{1}{2} \int \omega' \varrho' \, d\tau'$ gleich der elektrostatischen Energie eines solchen geladenen Ellipsoids ist, diese aber (bei einem leitenden Ellipsoid mit Oberflächenladung) $= \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varkappa}$ ist, wo $\varkappa$ die Kapazität, $e$ die Ladung des Ellipsoids ist, so wird

$$E = \tfrac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \, \frac{e^2}{\varkappa} \quad .$$

Für ein verlängertes Ellipsoid mit der langen Achse $b$, der kleinen Achse $a$ ist aber

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\log \operatorname{nat}\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad .$$

In unserem Falle ist

$$b = \alpha a = \frac{a}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ,$$

also

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{2 a \beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

und daher

$$E = + \frac{e^2}{2 a} \, \frac{1 - \beta^2}{2 \beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad ,$$

$$\beta = \frac{p}{V} \quad .$$

Aus

$$\mathfrak{G}_x = - \frac{dE}{dp} = - \frac{\partial E}{\partial \beta} \, \frac{\partial \beta}{\partial p} = - A \frac{\partial E}{\partial \beta}$$

ergibt sich

$$\mathfrak{G}_x = + \frac{A e^2}{2 a \beta} \left\{ \frac{1 + \beta^2}{2 \beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right\} \quad .$$

Und aus diesem Wert von $\mathfrak{G}$ oder aus dem Wert von $E$ folgt

$$m_s = \frac{A^2 e^2}{2 a \beta^2} \left\{ - \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) + \frac{2}{1 - \beta^2} \right\} \quad ,$$

$$m_r = \frac{A^2 e^2}{2 a \beta^2} \left\{ \left( \frac{1 + \beta^2}{2 \beta} \right) \log \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 1 \right\} \quad .$$

Falls die Geschwindigkeiten so klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, daß $\beta^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist, ergibt sich

$$m_s = m_r = \frac{2}{3} \, \frac{A^2 e^2}{a} = m_0 \quad .$$

Trägt man diesen Wert von $m_0$ ein, so wird

$$m_s = m_0 \Psi(\beta) \quad ,$$

$$m_r = m_0 \Phi(\beta) \quad ,$$

wo $\Psi(\beta)$ und $\Phi(\beta)$ folgende Werte haben:

$$\Psi(\beta) = \frac{3}{4} \, \frac{1}{\beta^2} \left\{ - \frac{1}{\beta} \log \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) + \frac{2}{1 - \beta^2} \right\} \quad ,$$

$$\Phi(\beta) = \frac{3}{4} \, \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{1 + \beta^2}{2 \beta} \log \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 1 \right\} \quad .$$

Durch Reihenentwicklung ergibt sich ferner

$$m_s = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{5} \beta^2 + \frac{9}{7} \beta^4 + \frac{12}{9} \beta^6 + \ldots \right\} \quad ,$$

$$m_r = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{3 \cdot 5} \beta^2 + \frac{9}{5 \cdot 7} \beta^4 + \frac{12}{7 \cdot 9} \beta^6 + \ldots \right\} \quad .$$

Die longitudinale und die transversale Masse wachsen also mit wachsender Geschwindigkeit des Elektrons, und zwar die longitudinale rascher als die transversale. Bei der magnetischen und elektrostatischen Ablenkung der Kathodenstrahlen und der $\beta$-Strahlen des Radiums kommt die transversale Masse in Betracht.

**122.** Die entwickelte Theorie, die von ABRAHAM herrührt, nimmt das Elektron als einen starren Körper an. Bei ihr ist also die transversale Masse von dem Verhältnis $\beta = \frac{p}{V}$ ($p$ = Translationsgeschwindigkeit, $V$ = Lichtgeschwindigkeit) in der Weise abhängig, daß

$$m_r = m_0 \Phi(\beta)$$

ist, wo

$$\Phi(\beta) = \frac{3}{4}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 1\right) .$$

Dagegen hat LORENTZ[1], der die Schwierigkeiten seiner Theorie für die Optik translatorisch bewegter Körper durch die Annahme beseitigt hatte, daß die Dimensionen eines Körpers sich durch die Bewegung in bestimmter Weise ändern, eine dementsprechende Annahme auch für die Elektronen gemacht. Danach ist ein Elektron kein starrer Körper, sondern bei der Bewegung desselben ändern sich seine Dimensionen derartig, daß in der Richtung der Bewegung sich die Abmessungen im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}$ verkürzen, dagegen die Dimensionen senkrecht zu der Bewegung unverändert bleiben. Aus der Kugel wird ein sogenanntes „Heaviside-Ellipsoid".

Dadurch wird auch die longitudinale Masse

$$m_s = \frac{m_0}{(\sqrt{1-\beta^2})^3}$$

und die transversale Masse wird

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

ABRAHAM[2] hat mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß damit in die Elektronentheorie noch fremde, nicht elektrodynamische Kräfte eingeführt werden, wodurch eine etwaige Zurückführung aller Mechanik auf Elektrodynamik unmöglich erscheint.

Auf ganz anderem Wege aber hat EINSTEIN[3] die Elektrodynamik und damit auch die Frage nach der elektromagnetischen Masse behandelt. Er stellte das „Prinzip der Relativität" für Translationsbewegungen als ein Postulat auf, aus welchem folgt, daß die der Beobachtung zugänglichen Dimensionen eines starren Körpers in der Weise, wie es die LORENTZsche Theorie tut, verändert erscheinen, ohne daß der Körper aufhört, ein starrer zu sein. Die Ausführungen dieser Theorie im allgemeinen können hier nicht erörtert werden. Es sei bloß angeführt, daß die EINSTEINsche Theorie auf denselben Wert der transversalen Masse wie die LORENTZsche führt (bei gleichen Annahmen).

Eine weitere Annahme hat BUCHERER[4] gemacht. Er nimmt an, daß das Elektron sich bei der Bewegung auch deformiert, aber so, daß sein Volumen konstant bleibe, und zwar werde aus dem kugelförmigen Elektron ein Heavisideellipsoid, bei welchem die Querachse zur Längsachse sich wie $\sqrt{1-\beta^2}$ zu 1 verhält. Aus dieser Theorie folgt, daß die Halbachse des Ellipsoids in der

[1] H. A. LORENTZ, Versl. Akad. Wet. Amsterdam **12.** 986. 1904. — [2] M. ABRAHAM, Phys. Zeitschr. **5.** 576. 1904; Theorie d. Elektrizität **2.** 201. 1906. — S. auch P. LANGÉVIN, C. R. **140.** 1171. 1905. — H. POINCARÉ, C. R. **140.** 1504. 1905. — [3] A. EINSTEIN, Drudes Ann. **17.** 891. 1905. — [4] A. BUCHERER, Math. Einführung in die Elektronentheorie 58. Leipzig 1904.

Richtung der Bewegung gleich dem ursprünglichen Kugelradius dividiert durch $\sqrt[3]{1-\beta^2}$ ist. Dadurch erhält sowohl die longitudinale Masse wie die transversale Masse einen anderen Wert als bei ABRAHAM. Letztere wird[1]

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt[3]{1-\beta^2}} \quad .$$

Messungen der magnetischen und elektrischen Ablenkbarkeit von $\beta$-Strahlen des Radiums hatten KAUFMANN[2] zunächst zu einer Bestätigung der ABRAHAMschen Formel gebracht, aus welcher Bestätigung er und ABRAHAM den Schluß zogen, daß die Masse eines Elektrons nur elektromagnetischer Natur ist und daß das Elektron als ein starrer Körper anzusehen ist.

Zur Entscheidung aber zwischen den verschiedenen Theorien reichten diese Beobachtungen nicht aus, und KAUFMANN[3] hat daher weitere derartige Messungen mit der größten Sorgfalt ausgeführt. Er zog aus ihnen den Schluß, daß die Theorie von LORENTZ-EINSTEIN durch die Beobachtungen widerlegt wird, daß dagegen die Beobachtungen durch die ABRAHAMsche und die BUCHERERsche Theorie in gleich guter Weise dargestellt werden. Indes hat PLANCK[4] gezeigt, daß auch die ABRAHAMsche Formel wesentliche, über die Beobachtungsfehler hinausgehende Differenzen gegen die Beobachtungen zeigt, so daß diese Messungen eine Entscheidung zwischen den Theorien nicht herbeiführen[5].

**123.** Die oben skizzierte Theorie der auf ein Elektron wirkenden Kräfte ist eine nur angenäherte, da die Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung gemacht wurde und die für gleichförmige Bewegung gültigen Werte der Verschiebungen eingesetzt wurden. Das allgemeine Problem der Elektronenbewegung ist von SOMMERFELD[6] behandelt worden und hat ihn in dem speziellen Falle der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, zur Bestätigung der obigen Formeln geführt. Doch sind jüngst von LINDEMANN[7] Einwände gegen die mathematische Sicherheit dieser Betrachtungen erhoben worden.

## § 35. Elektronentheorie der Metalle.

**124.** Die Elektronentheorie als molekulare Theorie muß alle elektrischen Eigenschaften der Körper durch Anordnung und Bewegung von Elektronen erklären. Für die elektrischen Eigenschaften der Metalle, in denen die Elektronen im allgemeinen frei beweglich anzunehmen sind, haben RIECKE[8], DRUDE[9] und LORENTZ[10] eine Elektronentheorie aufgestellt, welche den Elektronen in den Metallen dieselbe freie Beweglichkeit, die nur durch die Zahl der Zusammenstöße beschränkt ist, zuschreibt, wie den Gasmolekülen eines Gases. Die Theorien haben zwar dieselben Ausgangspunkte, weichen aber in der Behandlung und in der Interpretation der Erscheinungen an vielen Punkten erheblich voneinander ab[11]. Die LORENTZsche Theorie nimmt nur die negativen Elektronen als beweglich an, die positiven haften fest an der Materie.

---

[1] A. H. BUCHERER, Phys. Zeitschr. **6**. 833. 1905; **7**. 32. 1906. — [2] W. KAUFMANN, Gött. Nachr. 1901, Heft 1; 1902, Heft 5; 1903, Heft 3; Phys. Zeitschr. **4**. 55. 1900. — [3] W. KAUFMANN, Berl. Ber. **45**. 949. 1905; Drudes Ann. **19**. 487. 1906. — [4] M. PLANCK, Phys. Zeitschr. **7**. 753. 1906. — [5] A. EINSTEIN (Drudes Ann. **21**. 583. 1906) hat eine Methode vorgeschlagen, um das Verhältnis der longitudinalen und transversalen Masse zu bestimmen. — [6] A. SOMMERFELD, Gött. Nachr. 1904. 99. 363; 1905. 201; Proc. Amsterdam **7**. 346. 1904. — Siehe P. HERTZ, Phys. Zeitschr. **4**. 848. 1903; **5**. 109. 1904; **7**. 347. 1906. — G. HERGLOTZ, Gött. Nachr. 1904. 549. — E. WIECHERT, ibid. 1905. 75. — [7] F. LINDEMANN, Abhandl. d. Münch. Akad. I. **23**. (2) 235. 1907; II. **23**. (2) 339. 1907. — Cf. A. SOMMERFELD, Münch. Ber. 1907. 155 und F. LINDEMANN, ibid. 177. — [8] E. RIECKE, Wied. Ann. **66**. 353, 545, 1199. 1898; Drudes Ann. **2**. 895. 1900; Phys. Zeitschr. **2**. 629. 1900. — [9] P. DRUDE, Drudes Ann. **1**. 566; **3**. 370. 1900; **7**. 687. 1902; Phys. Zeitschr. **1**. 161. 1900. — S. auch A. SCHUSTER, Phil. Mag. (6) **7**. 151. 1904. — [10] H. A. LORENTZ, Proc. Amsterdam **7**. 438, 585, 684. 1905. — Siehe R. GANS, Drudes Ann. **20**. 293. 1906. — [11] S. die Vergleichung bei E. RIECKE, Phys. Zeitschr. **6**. 754. 1905.

Es sollen, um dem allgemeinen Inhalt dieser Theorien zu zeigen, hier nur die DRUDEschen Erörterungen ausführlicher dargestellt werden. DRUDE nimmt eine Anzahl von beliebig vielen Gattungen von Elektronen an, welche verschiedene Ladungen $e_1 e_2 \dots$ (positive und negative Elektronen, eventuell auch doppelte und mehrfache Elektronen) besitzen. Sie mögen Massen $m_1 m_2 \dots$ besitzen, die eventuell auch scheinbare sein können. Ihre Zahl pro Volumeneinheit sei $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots$ Nach der kinetischen Gastheorie muß, wenn $u_1 u_2 \dots$ ihre Geschwindigkeiten sind, im Falle der Temperaturgleichheit

$$\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = \dots = \alpha T$$

sein, wo $\alpha$ eine universelle Konstante ist, die sich aus der LOSCHMIDTschen Zahl zu etwa $5{,}6 \cdot 10^{-17}$ $(G \cdot C \cdot S)$ berechnet[1].

Die Zahlen $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \dots$ können bei verschiedenen Temperaturen verschieden sein. Wir werden die Formeln nur unter der Annahme zweier Elektronengattungen $e_1 e_2$ (positive und negative, $e_2 = -e_1$) hinschreiben. Außer den freibeweglichen Elektronen, die allein betrachtet werden, sind eventuell auch noch feste, unbewegliche Elektronen anzunehmen (insbesondere für die optischen Eigenschaften der Metalle).

### a) Wärmeleitung.

**125.** Die Wärmeleitung der Metalle beruht nur auf der Übertragung der Energie durch Stöße der Elektronen, nicht der ponderablen Moleküle, welche letztere nur um Gleichgewichtslagen oszillieren und sich nicht stoßen. Die mittlere Weglänge der Elektronen sei $l_1$ und $l_2$.

Da jedes Elektron die Energie $\alpha T$ mit sich führt, so ist die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchgehende Wärmemenge bei Temperaturunterschieden:

$$W = \frac{\alpha}{3}(u_1 l_1 \mathfrak{N}_1 + u_2 l_2 \mathfrak{N}_2)\frac{\partial T}{\partial x} \quad .$$

Der Koeffizient der Wärmeleitung ist (mechanisch gemessen)

$$\lambda = \tfrac{1}{3}\alpha(u_1 l_1 \mathfrak{N}_1 + u_2 l_2 \mathfrak{N}_2) \quad .$$

Wenn die Anzahl der Elektronen jeder Art von der Temperatur unabhängig ist, so entsteht dadurch auch kein Potentialgefälle.

### b) Elektrische Leitungsfähigkeit.

**126.** Wenn elektrische Kräfte auf die Elektronen wirken wie im Falle eines durchströmten Leiters, so tritt zu der unregelmäßigen Bewegung noch eine regelmäßig fortschreitende. Ist $X$ die Kraft, die in der Richtung der $x$-Achse wirkt, so ist die dadurch erzeugte Geschwindigkeit für die erste Gattung Elektronen

$$u_x = e_1 X v_1 \quad ,$$

worin

$$v_1 = \frac{l_1 u_1}{4 \alpha T} \quad .$$

Infolgedessen treten in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt $u_x \mathfrak{N}_1$ Kerne der Gattung 1 hindurch. Die dadurch transportierte Ladung ist

$$e_1 u_x \mathfrak{N}_1 = e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 X \quad .$$

Bei zwei Elektronenarten wird daher die Stromdichte

$$\sigma = (e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2) X$$

[1] S. auch M. PLANCK, Drudes Ann. 4. 566. 1901.

und daher die elektrische Leitfähigkeit $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{(e_1^2 \mathfrak{N}_1 l_1 u_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 l_2 u_2)}{4 \alpha T} .$$

Bei den meisten Metallen ist $\varkappa$ nahezu umgekehrt proportional $T$, also der Faktor von $\frac{1}{4 \alpha T}$ nahezu unabhängig von der Temperatur.

c) Das WIEDEMANN-FRANZsche und LORENTZsche Gesetz.

**127.** Das Verhältnis $\frac{\lambda}{\varkappa}$ wird, wenn nur Kerne von den Ladungen $e_1 = e$ und $e_2 = -e$ vorhanden sind,

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T ,$$

wodurch das WIEDEMANN-FRANZsche und das LORENTZsche Gesetz ausgedrückt ist. Aus den Beobachtungen über $\frac{\lambda}{\varkappa}$ berechnet sich[1]

$$\frac{\alpha}{e} = 4{,}42 \cdot 10^{-7} .$$

Die Abweichungen von dem WIEDEMANN-FRANZschen Gesetz und andere Erscheinungen lassen sich durch eine Verallgemeinerung der Theorie erklären, in welcher angenommen wird, daß die Elektronenzahlen $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \ldots$ von der Temperatur abhängig sind. Wächst die Temperatur mit wachsendem $x$ in einem Metall und ist $\mathfrak{N}_1$ von der Temperatur, also von $x$ abhängig, so gehen in jeder Zeiteinheit eine Anzahl Elektronen aus diesem Grunde in der Richtung der negativen $x$-Achse, und es entsteht dadurch gleichzeitig eine elektrische Kraft, welche die Elektronen nach der positiven Achse treibt. Unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse wird bei zwei Elektronenarten $e_1 = e$, $e_2 = -e$, die Wärmeleitungsfähigkeit

$$\lambda = \tfrac{1}{3} \alpha T^2 \left\{ \frac{v_1 \mathfrak{N}_1 + v_2 \mathfrak{N}_2}{T} + \frac{2 v_1 v_2}{v_1 \mathfrak{N}_1 + v_2 \mathfrak{N}_2} \frac{\partial}{\partial T} (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2) \right\}$$

und die Größe

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T \left\{ 1 + \frac{2 v_1 v_2 T}{(\mathfrak{N}_1 v_1 + \mathfrak{N}_2 v_2)} \frac{\partial}{\partial T} (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2) \right\} .$$

Die Größen $e^2 v_1 \mathfrak{N}_1$ und $e^2 v_2 \mathfrak{N}_2$ sind die Leitungsfähigkeiten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ des Metalls für die beiden Elektronenarten.

d) Der Thomsoneffekt.

**128.** Bei verschiedener Temperatur der verschiedenen Stellen eines Metalls muß eine elektrische Kraft auftreten (die in c) erwähnte), welche der Diffusion der Elektronen entgegenwirkt. Fließt in dem Metall noch ein Strom, so muß er diese elektrische Kraft überwinden und dadurch entsteht der Thomsoneffekt. Die Thomsonwärme wird bei einem Strom von der Stärke $i$ in einem Stück, bei dem das Temperaturgefälle $dT$ ist[2]:

$$Q = \frac{\alpha}{e} i dT \left\{ -\tfrac{1}{3} T \frac{\varkappa_1 \frac{\partial}{\partial T}(\log \mathfrak{N}_1) - \varkappa_2 \frac{\partial}{\partial T}(\log \mathfrak{N}_2)}{\varkappa_1 + \varkappa_2} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} T\right) \right\} .$$

[1] Nach einer anderen Berechnung von REINGANUM ergibt sich $\frac{\alpha}{e} = 4{,}27 \cdot 10^{-7}$ (M. REINGANUM, Drudes Ann. **2**. 398. 1900). — [2] S. die Berichtigung von P. DRUDE, Drudes Ann. **7**. 688. 1902.

Wenn die Leitfähigkeit der einen Elektronengattung groß gegenüber der anderen ist, fällt das letzte Glied fort und es wird

$$Q = \frac{\alpha}{e} i\, dT \left\{ -\tfrac{4}{3} T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial T} + 1 \right\} \quad .$$

Die Größenordnung von $Q$ ist $\frac{i\alpha\, dT}{e}$. Mit Benutzung des Wertes von $\frac{\alpha}{e}$ ergibt sich (für $dT = 1^0$) $Q = 3 \cdot 10^{-4}$ kleinen Kalorien, eine Zahl, die von derselben Größenordnung, aber doch zehnmal so groß ist, als sie für Wismut beobachtet ist.

### e) Kontaktpotentialdifferenz.

**129.** Wenn bei der Temperatur $T$ zwei Metalle $a$ und $b$ sich direkt berühren und die Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit im ersten $\mathfrak{N}_1^a$, $\mathfrak{N}_2^a \ldots$, im zweiten $\mathfrak{N}_1^b$, $\mathfrak{N}_2^b$ ist, so wird ein Gleichgewichtszustand dadurch erreicht werden, daß dem Diffusionsbestreben der Elektronen jeder Art durch eine elektrische Kraft gerade entgegengewirkt ist. Aus dieser elektrischen Kraft ergibt sich die gesuchte Potentialdifferenz. Diese Bedingung ist ausgedrückt, wenn die $x$-Achse die Normale von $a$ nach $b$ ist, durch die auf eine Elektronenart bezügliche Gleichung

$$-\tfrac{1}{3} u_1 l_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X = 0 \quad ,$$

wo $X$ die gesuchte elektrische Kraft ist. Es wird

$$X = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e_1} T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial x} \quad ,$$

woraus sich die Potentialdifferenz ergibt zu

$$V_a - V_b = \frac{4}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \log \frac{\mathfrak{N}_1^b}{\mathfrak{N}_1^a} \quad .$$

In dieser Gleichung ist das VOLTAsche Spannungsgesetz enthalten. Die Größenordnung von $V_a - V_b$ ist bestimmt durch $\frac{4}{3} \frac{\alpha}{e_1} T$. Sie ist von der Ordnung 0,05 Volt.

### f) Thermoelektrizität.

**130.** Aus der eben berechneten elektrischen Kraft zwischen zwei verschiedenen Metallen gleicher Temperatur und aus der beim Thomsoneffekt berechneten elektrischen Kraft bei zwei Stücken desselben Metalls von verschiedener Temperatur ergibt sich in erster Annäherung die elektromotorische Kraft an den Enden einer Kette, deren Lötstellen die Temperaturen $T$ und $T'$ haben:

$$E = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e} (T' - T) \left[ \log \frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} + (a\, b) \right] \quad ,$$

wo $(a\, b)$ eine kleine Größe ist.

Es ist also $E$ in erster Annäherung der Temperaturdifferenz proportional. Genauer wird, bei kleiner Temperaturdifferenz $\vartheta$:

$$E = \vartheta m + \tfrac{1}{2} \vartheta^2 n \quad ,$$

wo

$$m = \frac{4}{3} \frac{b}{e} \left[ \log \frac{\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{N}_b} + \varphi(a\, b) \right] \quad ,$$

$$n = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e} \frac{\partial}{\partial T} \log \frac{\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{N}_b}$$

ist.

Die PELTIERsche Wärme folgt aus diesen Formeln in bekannter Weise. Die Anwendung derselben Formeln auf Elektrolyte, bei denen die Elektronen an die Atome gebunden sind und sich mit diesen frei bewegen, gibt die NERNSTschen Formeln für Konzentrationsketten und für elektrolytische Thermoketten.

### g) Galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte.

**131.** Wird eine dünne Metallplatte in ein magnetisches Feld gebracht, so daß die Kraftlinien sie normal durchschneiden, und wird durch sie ein elektrischer Strom $J$ oder ein Wärmestrom $W$ geleitet, dann sind in der Platte longitudinale und transversale Effekte zu beobachten. Die transversalen Effekte, d. h. senkrecht zum Strom und zu den Kraftlinien, sind folgende:

I. Es geht ein elektrischer Strom $J$ durch die Platte, dann beobachtet man transversal
   1. einen elektrischen Effekt, nämlich den Hall-Effekt,
   2. einen thermischen Effekt, nämlich die galvanomagnetische Temperaturdifferenz.

II. Geht ein Wärmestrom $W$ durch die Platte, dann beobachtet man transversal
   3. einen elektrischen Effekt, nämlich eine thermomagnetische elektromotorische Kraft,
   4. einen thermischen Effekt, nämlich das thermische Analogon des Hall-Effekts.

Beim Wismut sind alle vier Effekte beobachtet worden, bei den anderen Metallen nur 1 und 3.

Nach MOREAU[1] ist der Effekt 3 ein Hall-Effekt in bezug auf die THOMSONschen inneren thermoelektrischen Kräfte.

**132.** Um diese vier Effekte aus den allgemeinen Vorstellungen zu entwickeln, denken wir uns durch eine Platte in der Richtung $x$ einen elektrischen Strom geschickt und senkrecht dazu in der Richtung $z$ ein Magnetfeld von der Stärke $\mathfrak{H}$. Es werden dann die positiven Ionen nach der negativen $y$-Achse abgelenkt. Wird kein Transversalstrom abgeleitet, so entsteht eine transversale elektrische Kraft $Y$, die auf ein Elektron mit der Ladung $e_1$ die mechanische Kraft $e_1 Y$ ausübt. Durch das Magnetfeld entsteht eine mechanische Kraft nach der $-y$-Richtung von der Größe

$$K' = -\frac{e_1}{c}\mathfrak{H}\frac{d\xi_1}{dt} \quad ,$$

worin $c$ die Lichtgeschwindigkeit, $\frac{d\xi_1}{dt}$ die Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen ist. Aus beiden Ursachen zusammen entsteht die transversale Kraft

$$K = e_1\left(Y - \frac{\mathfrak{H}}{c}\frac{d\xi_1}{dt}\right) \quad .$$

Infolge dieser Kraft fließen in der Zeiteinheit durch den Querschnitt

$$Q = K v_1 \mathfrak{N}_1$$

Elektronen. Zugleich aber bildet sich ein Diffusionsstrom, der

$$Q_1 = \tfrac{2}{3}\alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y}$$

[1] G. MOREAU, Journ. de phys. (3) **9.** 497. 1900; C. R. **130.** 122. 1900. — S. weiter E. v. EVERDINGEN jr., Arch. néerl. (2) **5.** 453. 1900. — J. J. THOMSON, Cambr. Proc. (2) **9.** 120. 1901. — E. YAMAGUCHI, Drudes Ann. **1.** 214. 1900.

nach der negativen $y$-Achse treibt, wenn $\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y}$ positiv ist. Im stationären Zustand muß daher

$$e_1\left(Y - \frac{\mathfrak{H}}{c}\frac{d\xi_1}{dt}\right) = \tfrac{1}{3}\alpha T \frac{\partial}{\partial y}(\log \mathfrak{N}_1)$$

sein.

In der Richtung der $x$-Achse wirke die elektrische Kraft $X$. Besteht in dieser Richtung auch ein Konzentrationsgefälle, so muß ebenso

$$\mathfrak{N}_1 \frac{d\xi_1}{dt} = e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X - \tfrac{1}{3}\alpha T v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x}$$

sein, also

$$\frac{d\xi_1}{dt} = v_1\left(e_1 X - \tfrac{1}{3}\alpha T \frac{\partial}{\partial x}\log \mathfrak{N}_1\right) \quad .$$

Setzt man nun $\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}$ und so weiter, so hat man für zwei Elektronenarten die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{3}\alpha T \frac{d}{dt}(\log \mathfrak{N}_1)\frac{dT}{\partial y} = e_1\left(Y - \frac{\mathfrak{H}}{c}\frac{d\xi_1}{dt}\right) \quad ,$$

$$\tfrac{1}{3}\alpha T \frac{d}{dt}(\log \mathfrak{N}_2)\frac{\partial T}{\partial y} = e_2\left(Y - \frac{\mathfrak{H}}{c}\frac{d\xi_2}{dt}\right) \quad ,$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = v_1\left(e_1 X - \tfrac{1}{3}\alpha T \frac{d\log \mathfrak{N}_1}{dT}\frac{dT}{\partial x}\right) \quad ,$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = v_2\left(e_2 X - \tfrac{1}{3}\alpha T \frac{d\log \mathfrak{N}_2}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad .$$

Die Stromdichte ist

$$\sigma = e_1 \mathfrak{N}_1 \frac{d\xi_1}{dt} + e_2 \mathfrak{N}_2 \frac{d\xi_2}{dt} \quad .$$

Wenn $\sigma$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$ gegeben sind, lassen sich

$$\frac{d\xi_1}{dt}, \quad \frac{d\xi_2}{dt}, \quad X, \quad Y, \quad \frac{\partial T}{\partial y}$$

berechnen. $X$ kann infolge eines etwaigen Longitudinaleffekts verschieden sein von der äußeren angelegten elektrischen Kraft.

I. Ist $\sigma$ gegeben und $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, so erhält man die galvanomagnetischen Transversaleffekte, nämlich

1. den Hall-Effekt, für welchen

$$Y = R\sigma\mathfrak{H}$$

wird, wobei $R$ der Rotationskoeffizient des Hall-Effekts ist.

Es wird

$$R = \frac{e}{\varkappa c}\,\frac{v_1 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_2}{\partial T} - v_2 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial T}}{\frac{d}{dT}(\log \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)} \quad ;$$

2. den transversalen Temperatureffekt (galvanomagnetische Temperaturdifferenz)

$$\frac{\partial T}{\partial y} = K\sigma\mathfrak{H} \quad ,$$

wobei

$$K = -\frac{3}{4}\frac{e^2}{\alpha T \varkappa c}\frac{v_1 + v_2}{\frac{\partial}{\partial T}(\log \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}$$

ist. Während $R$ für verschiedene Metalle verschiedene Vorzeichen hat, hat $K$ für alle dasselbe Vorzeichen.

II. Ist $\sigma = 0$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$ gegeben, so erhält man die thermomagnetischen Transversaleffekte, nämlich

3. die elektrische Kraft

$$Y = Q \mathfrak{H} \frac{\partial T}{\partial x} \quad ,$$

worin

$$Q = -\tfrac{4}{3}\alpha T \frac{e^2}{\varkappa} v_1 v_2 \left(\mathfrak{N}_1 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial T} + \mathfrak{N}_2 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_2}{\partial T}\right)$$

ist und

4. das Temperaturgefälle in der Richtung der $y$-Achse:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\mathfrak{H}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{e^2}{c\varkappa} v_1 v_2 (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2) \quad .$$

Die longitudinalen Effekte folgen sekundär aus dem Vorhandensein der Transversaleffekte. Da die Transversaleffekte mit $\mathfrak{H}$ proportional sind, müssen die Longitudinaleffekte mit $\mathfrak{H}^2$ proportional sein. Aus numerischen Berechnungen der auftretenden Konstanten vermittels der beobachteten Transversaleffekte und der Abweichungen der Metalle vom WIEDEMANN-FRANZschen Gesetz findet DRUDE, daß beim Wismut es die negativen Elektronen sind, welche den wesentlichen Anteil an der Leitfähigkeit desselben haben.

### h) Emission und Absorption von Strahlen großer Wellenlänge.

**133.** Während die bisher angeführten Ergebnisse der DRUDEschen Theorie auch von RIECKE und LORENTZ, wenn auch zum Teil in anderer Weise, abgeleitet wurden, hat LORENTZ[1] noch eine weitere Folgerung aus seiner Theorie gezogen, nämlich über die Emission und Absorption von Metallen für Strahlen großer Wellenlänge.

Die Absorption einer dünnen Metallplatte, d. h. der Koeffizient, mit welchem man die Energie senkrecht einfallender Strahlen multiplizieren muß, um die absorbierte Energie zu erhalten, ist, wenn $\Delta$ die Dicke der Platte ist,

$$A = \frac{\varkappa}{c}\Delta \quad ,$$

wo $c$ die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Nach DRUDE (oben Nr. 126) ist

$$\varkappa = \frac{1}{4\alpha T}(e_1^2 \mathfrak{N}_1 l_1 u_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 l_2 u_2 + \ldots) \quad .$$

Um die Emission der Platte zu berechnen, wird folgende Überlegung angestellt. Immer wenn ein Elektron seine Bewegung ändert, sei es an Größe oder an Richtung, erzeugt es eine elektromagnetische Strahlung im Äther. In den Augenblicken des Zusammenstoßes ist es also Strahlungszentrum. Die durch diese Ausstrahlung erzeugte elektrische und magnetische Verschiebung im Äther wird berechnet und daraus die ausgestrahlte Energie. Durch Entwicklung dieses

[1] H. A. LORENTZ, Proc. Amsterdam 7. 666. 1903.

Ausdrucks in eine FOURIERsche Reihe wird dann diejenige emittierte Energie berechnet, deren Schwingungszahl zwischen $n$ und $n + dn$ liegt. Diese ist proportional mit

$$\frac{n^2}{24\pi^3 c^3 r^2}(e_1^2 \mathfrak{R}_1 l_1 u_1 + e_2^2 \mathfrak{R}_2 l_2 u_2 + \ldots)\Delta\, dn \quad .$$

Durch Division mit dem Ausdruck für die Absorption ergibt sich die Emission eines schwarzen Körpers in den angegebenen Grenzen zu:

$$\frac{2\alpha n^2 T}{3\pi^2 c^3} dn \quad ,$$

ein Wert, welcher unabhängig von $e$, $\mathfrak{R}$, $l$ und $u$ ist.

Indem man $n = \frac{2\pi c}{\lambda}$ setzt, wird die Emission des schwarzen Körpers zwischen den Wellenlängen $\lambda$ und $\lambda + d\lambda$

$$\frac{16}{3}\,\frac{\pi\alpha T}{\lambda^4} d\lambda \quad .$$

Zunächst entspricht dieser Ausdruck dem WIENschen Verschiebungsgesetz, welches verlangt, daß die Emission des schwarzen Körpers sich darstellen lassen muß durch

$$\frac{1}{\lambda^5} f(\lambda T)\, d\lambda \quad .$$

Es wird in unserem Falle

$$f(\lambda T) = \tfrac{16}{3}\pi\alpha\lambda T \quad .$$

Nach der Formel von PLANCK (Handbuch Bd. 3, S. 388) wird die Emission für lange Wellen zwischen $\lambda$ und $\lambda + d\lambda$

$$\frac{8\pi k T}{\lambda^4} d\lambda \quad ,$$

welches nicht nur in der Form mit der obigen LORENTZschen Formel übereinstimmt, sondern auch in bezug auf die Konstante, da die PLANCKsche Konstante $k$ gleich $\frac{2}{3}\alpha$ ist.

## F) Darstellung der Gleichungen der Maxwellschen und Elektronentheorie durch die Prinzipien der Mechanik.

### § 36. Allgemeine dynamische Theorien.

**134.** Eine mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen verlangt, daß man einen Mechanismus zwischen den einzelnen Teilen eines elektrischen und magnetischen Systems so annimmt, daß durch bestimmte Bewegungen oder Zustände in einem Teile dieses Systems, welche man mit gewissen elektromagnetischen Erscheinungen identifiziert, vermöge dieses Mechanismus auch in den andern Teilen dieses Systems solche Veränderungen, seien es Bewegungen oder statische Zustände, erzeugt werden, daß diese mit den dort durch elektromagnetische Einwirkungen wirklich erzeugten identifiziert werden können. Die Vorfrage ist aber, ob das überhaupt möglich ist. Diese Vorfrage ist dann gelöst, wenn es gelingt, die elektrodynamischen Gleichungen auf die Form der allgemeinen Prinzipien der Mechanik zu bringen, in denen die Teile der Energie eines mechanischen Systems vorkommen. Denn, wenn das möglich ist, dann wird es sich nur darum handeln, die kinetische und potentielle Energie durch gewisse hypothetische Erklärungsversuche in der geforderten Weise darzustellen.

Es ist nun eine der bedeutendsten Leistungen MAXWELLs, daß er ganz allgemein zeigte, daß unabhängig von irgend einem speziell gewählten Mechanismus die elektromagnetischen Erscheinungen sich durch die Gleichungen der Mechanik darstellen lassen. Er macht nur die eine Voraussetzung, daß in einem galvanischen Strome tatsächlich irgend eine Bewegungserscheinung vorhanden ist.

Der Gedankengang bei MAXWELL ist dabei folgender[1]. In einem elektrischen Strome findet sicher irgend eine Bewegung statt, nicht ein bloßer Zustand. Die Wirkungen eines Stromes sind alle progressiver Art, wie namentlich die Elektrolyse beweist. Was ihn in Bewegung setzt, ist die elektromotorische Kraft. Die Arbeit, die eine elektromotorische Kraft leistet, wird zum Teil zur Überwindung des Widerstandes im Leiter verbraucht, zum Teil zur Hervorbringung der elektrodynamischen Erscheinungen, der Rest wird zur Vermehrung der kinetischen Energie des Stromes benutzt und zeigt sich in den Extraströmen.

Es sei nun ein System von Strombahnen gegeben, deren Gestalt und Lage durch die Variablen $x_1, x_2$ bestimmt seien. Die Geschwindigkeiten, mit der die materiellen Teile dieser Systeme sich ändern, sind dann durch $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ gegeben und die kinetische Energie dieser Bewegung der materiellen Teile des Systems hat den Ausdruck:

$$T_m = \tfrac{1}{2}\left[(x_1 x_1)\dot{x}_1^2 + (x_1 x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (x_1 x_3)\dot{x}_1\dot{x}_3 + \ldots\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[(x_1 x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (x_2 x_2)\dot{x}_2^2 + (x_2 x_3)\dot{x}_2\dot{x}_3 + \ldots\right] \quad ,$$

wo $(x_1 x_1)(x_1 x_2)$ usw. Größen bezeichnen, die wohl von den Variablen $x_1 x_2 \ldots$ (jede im allgemeinen von allen $x$), nicht aber von den Geschwindigkeiten $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ abhängen.

Außerdem aber sollen in den Strombahnen elektrische Ströme fließen; die Variablen, durch welche diese Bewegung bestimmt wird, seien $y_1 y_2 \ldots$, ihre Geschwindigkeiten $\dot{y}_1, \dot{y}_2 \ldots$ Dann ist die gesamte Energie des Systems aus drei Teilen zusammengesetzt:

$$T = T_m + T_e + T_{me} \quad ,$$

worin $T_m$ sich auf die materielle Bewegung allein bezieht, $T_e$ sich auf die elektrischen Bewegungen allein und $T_{me}$ sich auf den Zusammenhang beider bezieht. Es sind dabei in entsprechender Bezeichnung

$$T_e = \tfrac{1}{2}\left[(y_1 y_1)\dot{y}_1^2 + (y_1 y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2 + \ldots\right] \quad ,$$

$$T_{me} = (x_1 y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1 + (x_1 y_2)\dot{x}_1\dot{y}_2 + \ldots$$

Die Koeffizienten $(xx)$, $(yy)$, $(xy)$ könnten von allen $x$ und allen $y$ abhängen. Da aber, wenn die Leiter in Ruhe und die Ströme in ihnen konstant sind, sich der Zustand des Systems nicht mehr ändert, so können die $y$ im Ausdruck für $T$ nicht vorkommen. Unter $\dot{y}_k$ ist die Stärke des Stromes im $k$ten Leiter zu verstehen, wenn das System nur lineare Leiter enthält. Ähnliche Ausdrücke wie oben bekäme man für ein System von beweglichen Röhren, in denen Wasser fließt. Diese aber würden in $T_e$ nur die Quadrate der $\dot{y}$ enthalten und in $T_{me}$ nur die Produkte $\dot{x}_k\dot{y}_k$ mit gleichen Indizes, während in dem allgemeinen Problem auch Glieder von der Form vorkommen $(y_r y_s)\dot{y}_r\dot{y}_s$ und $(x_r y_s)\dot{x}_r\dot{y}_s$, welche zeigen, daß in dem Felde eine Bewegung stattfindet, die von den beiden Strömen $\dot{y}_r$ und $\dot{y}_s$ abhängt.

Wendet man auf dieses System die LAGRANGEschen Gleichungen an, so kann man aus dem Ausdruck für $T$ die Kräfte berechnen, die an den einzelnen Teilen

[1] CL. MAXWELL, Elektrizität und Magnetismus 2. Kap. 6 u. 7.





des Systems angreifen, und man erhält die Kraft $X'$, welche die Veränderung von $x$ bewirkt, zusammengesetzt aus drei Teilen:

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me} \quad ,$$

worin:

$$X'_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_m}{\partial x} \quad .$$

$$X'_e = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_e}{\partial x} \quad ,$$

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_{me}}{\partial x} \quad .$$

Darin ist $X'_m$ eine gewöhnliche mechanische Kraft, $X'_e$ wird, da $T_e$ von $\dot{x}$ unabhängig ist, $= -\frac{\partial T_e}{\partial x}$. Es ist $X_e = -X'_e$ die elektromagnetische Kraft, von der ein Leiter im Felde angegriffen wird. Endlich besteht die Kraft $X'_{me}$ aus zwei Komponenten. Die eine verschwindet, wenn die Leiter in Ruhe verharren, die andere, wenn die Ströme konstant in gleicher Stärke erhalten werden. Beide stellen eine Art Trägheitswirkung der Elektrizität dar. Da solche sich bisher nicht zu erkennen gaben, obwohl MAXWELL direkt daraufhin Versuche anstellte[1], so nimmt MAXWELL $X'_{me}$ im ganzen als Null an. In entsprechender Weise erhalten wir die Kräfte, welche auf die Elektrizität selbst wirken, also elektromotorische Kräfte und zwar, da $T$ von $y$ unabhängig ist,

$$Y' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) \quad .$$

Das ist diejenige elektromotorische Kraft, die die induzierte neutralisiert. Die elektromotorische Kraft der Induktion ist daher

$$Y = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)$$

und sie zerfällt wieder in drei Teile:

$$Y_m = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{y}}\right) \quad ,$$

$$Y_e = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{y}}\right) \quad ,$$

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{y}}\right) \quad .$$

Da $T_m$ von $\dot{y}$ unabhängig ist, ist $Y_m$ gleich Null. Dagegen stellt $Y_e$ die induzierte elektromotorische Kraft infolge von Stromschwankungen und relativen Lagenänderungen und $Y_{me}$ diejenige infolge von Bewegungsänderungen dar. Es müßte, wenn $Y_{me}$ existiert, möglich sein, in einem Leitersystem — auch wenn in keinem vorher ein Strom vorhanden wäre — durch Bewegung der Leiter allein induzierte Ströme zu erzeugen; es wäre also eine Abhängigkeit der elektrischen Erscheinungen von der absoluten Bewegung der Leiter vorhanden. Da eine solche bisher nicht beobachtet wurde, kann man $Y_{me}$ und damit überhaupt $T_{me}$ vernachlässigen[2].

Diese Betrachtungen zeigen allgemein, daß man sowohl die elektrodynamischen Kräfte, wie die Induktionskräfte, die in einem solchen System entstehen, auf

[1] CL. MAXWELL, Treatise 2. § 574. — R. COLLEY, Wied. Ann. 17. 55. 1882. —
[2] Über $T_{me}$ s. A. GARBASSO, N. Cim. (5) 1. 401; 2. 97. 1901. — Über $Y_{me}$ s. W. S. DAY. Phys. Rev. 15. 154. 1902.

mechanischem Wege durch irgend eine passende mechanische Anordnung des Systems erklären kann. MAXWELL leitet dann aus diesen Gleichungen, mit Zuhilfenahme nur qualitativer Erfahrungssätze, die allgemeinen Gleichungen des variablen, elektromagnetischen Feldes her[1].

**135.** In diesen allgemeinen Gleichungen wird $T$ unabhängig von $y$ angenommen. Eine solche Unabhängigkeit ist aber gerade diejenige, welche allgemein bei zyklischen Systemen im Sinne von HELMHOLTZ eintritt. Sind die $y$ zyklische Variable, so kommen sie in dem Ausdruck für die Energie nicht vor. Man kann daher die elektrischen Ströme in Stromleitern als zyklische Bewegungen auffassen. Dies ist der Ausgangspunkt für die Darstellung, die BOLTZMANN[2] von der MAXWELLschen Theorie gibt, dem sich dann andere angeschlossen haben[3].

**136.** In anderer Weise hat HELMHOLTZ gezeigt, daß die elektromagnetischen Systeme sich mechanisch darstellen lassen, indem er nämlich die elektromagnetischen Gleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ableitete, sie also in der Form dieses Prinzips darstellte[4]. Man kann nämlich die MAXWELL-HERTZschen Gleichungen (und zwar für ruhende und bewegte Körper) aus der Bedingung ableiten, daß

$$\delta \int_0^\tau \Phi \, dt = 0 \quad ,$$

wobei die Grenzen des Integrals feste Zeiten sind. Darin hat $\Phi$, das elektrokinetische Potential, einen komplizierten Wert.

Es ist

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q + R \quad .$$

$\Phi_e$ ist die elektrische Energie $\iiint \frac{d\tau}{8\pi\varepsilon}(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)$, $\Phi_m$ ist die magnetische Energie $\int \frac{d\tau}{8\pi\mu}(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)$, wobei aber die magnetischen Verschiebungen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ zusammen mit etwaigen permanenten magnetischen Momenten $l, m, n$ durch die Vektorpotentiale ausgedrückt werden, also

$$\mathfrak{L} + l = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \mathfrak{z}} \quad \text{usw.,}$$

so daß

$$\Phi_m = \int \frac{d\tau}{8\pi\mu}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \mathfrak{z}} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} + l\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} + m\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + n\right)^2\right]$$

ist.

Sind endlich $\alpha\beta\gamma$ die Komponenten der Geschwindigkeit an einer Stelle und ist $\sigma$ die Dichtigkeit der wahren Elektrizität, so ist

$$\Phi_q = \Phi_{q_1} + \Phi_{q_2} + \Phi_{q_3} \quad ,$$

$$\Phi_{q_1} = A\int d\tau\, \mathfrak{U} \left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha\sigma + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\beta - \mathfrak{Y}\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\gamma - \mathfrak{Z}\alpha)\right\} \quad ,$$

$$\Phi_{q_2} = A\int d\tau\, \mathfrak{V} \left\{\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta\sigma + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}\gamma - \mathfrak{Z}\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}\alpha - \mathfrak{X}\beta)\right\} \quad ,$$

$$\Phi_{q_3} = A\int d\tau\, \mathfrak{W} \left\{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma\sigma + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}\alpha - \mathfrak{X}\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}\beta - \mathfrak{Y}\gamma)\right\} \quad :$$

---

[1] S. auch H. VAN DER KAMP, Diss. Leiden 1897. — [2] H. BOLTZMANN, Vorlesungen über die MAXWELLsche Theorie **1** u. **2**. 1891 u. 1893. — [3] H. EBERT, Wied. Ann. **51**. 268. 1894; **52**. 417. 1894. — M. MÖLLER, Phys. Zeitschr. **3**. 216. 1902. — DE COLNET D'HUART, Beibl. **20**. 596. 1896. — [4] H. v. HELMHOLTZ, Wied. Ann. **47**. 1. 1892; Ges. Abh. **3**. 476. — S. dazu die Betrachtungen von H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. **5**. 2, 133. 1904; ferner L. KÖNIGSBERGER, Berl. Ber. 1906. 9.

Endlich ist

$$R = \int d\tau \left[ X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z} + A(u\mathfrak{U} + v\mathfrak{V} + w\mathfrak{W}) + \Xi\xi + \Upsilon\eta + Z\zeta \right] .$$

Darin sind $XYZ$ die elektrischen Kräfte, $uvw$ die Komponenten der Stromdichtigkeit. Die Größen $\xi\eta\zeta$ sind die (elastischen) Verschiebungen eines materiellen Punktes aus seiner Gleichgewichtslage, so daß $\frac{d\xi}{dt} = \alpha$ usw. ist und es sind $\Xi\Upsilon Z$ die bei diesen Verschiebungen auftretenden mechanischen (ponderomotorischen) Kräfte. Diese Kräfte stellen sich dar durch die MAXWELLschen Drucke in der bekannten Form. Über die Art der Variation werden zum Teil besondere Vorschriften gemacht[1].

In anderer Weise hat LORENTZ[2] die MAXWELLschen Gleichungen unter Zugrundelegung des D'ALEMBERTschen Prinzips dargestellt, wobei die elektromagnetischen Systeme als quasi-holonome Systeme betrachtet werden[3].

**137.** Auch die Gleichungen der Elektronentheorie sind von LORENTZ aus der Form des D'ALEMBERTschen Prinzips abgeleitet worden[4]. Für denselben Zweck hat LARMOR das Prinzip der kleinsten Wirkung[5], POINCARÉ die LAGRANGEschen Gleichungen[6] benutzt. Die Mechanik der Elektronen läßt sich, wie ABRAHAM[7] gezeigt hat, in die Form der mechanischen Prinzipien bringen. SCHWARZSCHILD[8] hat ebenfalls eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung für die Elektronentheorie angegeben.

## § 37. Modelle.

**138.** Man hat vielfach sich bemüht, die elektromagnetischen Zusammenhänge oder auch einzelne spezielle elektrische Erscheinungen (unvollkommene Leitungsfähigkeit der Dielektra, magnetische Körper usw.) durch mechanische Modelle zu veranschaulichen. Solche Modelle sind für verschiedene Erscheinungen von FITZGERALD[9], LODGE[10], Lord KELVIN[11], RAYLEIGH[12], auch von MAXWELL[13] selbst konstruiert worden.

BOLTZMANN[14] hat ebenfalls die Erscheinungen, welche zwei Stromkreise bieten (Induktionsströme, Extraströme aus verschiedenen Ursachen, elektrodynamische Anziehungen) durch ein instruktives Modell veranschaulicht. Dasselbe besteht im wesentlichen aus drei übereinander auf dieselbe Achse gesetzten Zentrifugalregulatoren mit Parallelogrammführung. Das oberste und unterste System tragen horizontale Zahnräder, in welche zwei vertikale Zahnräder, die mit dem mittleren System verbunden sind, durch konische Verzahnung eingreifen. Mit diesem Apparat kann man folgende Versuche machen.

1. Man bringt bloß das unterste System in Rotation. Solange dessen Geschwindigkeit wächst, dreht sich vermöge der Zahnräderübertragung das oberste

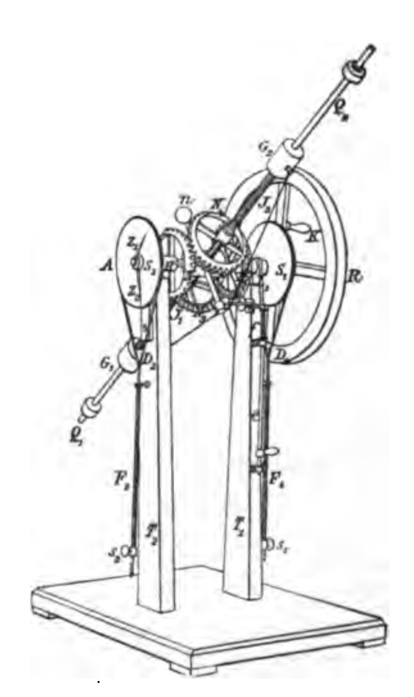
[1] Siehe H. A. LORENTZ, Enzykl. d. math. Wissensch. V. 2. 133. 1904. — [2] H. A. LORENTZ, La theorie electromagnétique de MAXWELL et son application aux corps mouvants. § 55—61. Leiden 1893. Auch Arch. néerl. **25**. 363. 1892. — [3] S. auch die Darstellung von H. A. LORENTZ in der Enzyklopädie l. c. 125 ff. — A. WASSMUTH, Wied. Ann. **54**. 164. 1895. — C. A. MEBIUS, Ofvers. Svensh. Vet. Förh. **55**. 477. 1898. — E. SARRAU, C. R. **133**. 421. 1901. — A. GARBASSO, N. Cim. (5) **1**. 401. 1901; **2**. 97. 1901. — A. BATSCHINSKI, Beibl. **25**. 133. 1900. — J. FARKAS, Arch. néerl. (2) **5**. 56. 1900. — M. LIÉNARD, C. R. **134**. 163. 1902. — E. CARVALLO, C. R. **133**. 924. 1901. — P. DUHEM, Journ. de phys. (4) **2**. 616. 1903. — [4] H. A. LORENTZ, Enzykl. V, 2. 164. 1904. — [5] J. LARMOR, Aether and matter Kap. VI. — [6] H. POINCARÉ. Electricité et optique 2. Aufl., S. 427 ff. — [7] M. ABRAHAM, Drudes Ann. **10**. 105. 1905. — [8] K. SCHWARZSCHILD, Gött. Nachr. 1903. 126, 132; Phys. Zeitschr. **4**. 431. 1903. — G. HERGLOTZ, Gött. Nachr. 1903. 357. — [9] G. F. FITZGERALD, Proc. Dublin. Soc. 407. 1875. — [10] O. LODGE, Modern views of electricity. London 1889. — Siehe J. H. POYNTING, Electrician **31**. 575. 1893. — [11] Lord KELVIN, Rep. Brit. Assoc. 567. 1888. — [12] Lord RAYLEIGH, Proc. Phys. Soc. London 1890. 484. — [13] CL. MAXWELL, Treatise, 3. Aufl., **2**, Kap. 7. — [14] L. BOLTZMANN, Vorlesungen über MAXWELLs Theorie 1.

im entgegengesetzten Sinne. Ist die Drehung konstant geworden, so bleibt das obere still. Nimmt die Drehung unten ab, so dreht sich das obere gleichsinnig. Diese Prozesse entsprechen also der Entstehung von Induktionsströmen.

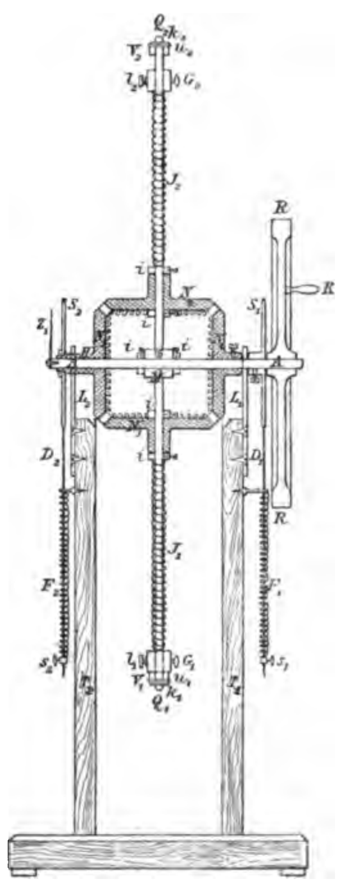
2. Wenn man das untere Rohr mit konstanter Geschwindigkeit dreht und plötzlich die mittlere Stange, die alle Zentrifugalapparate trägt, senkt, so entspricht das einer Vermehrung der Selbstinduktion. Man erhält oben eine entgegengesetzte Drehung. Umgekehrt, wenn man die Stange hebt.

3. Dreht man das oberste und unterste System in gleichem Sinne, so wird die Stange gesenkt, was einer Vermehrung der gegenseitigen Induktion, also elektrodynamischer Anziehung entspricht.

4. Dreht man das obere System in entgegengesetztem Sinne wie das untere, so wird die Stange gehoben, was also einer Abstoßung zweier entgegengesetzt fließender Ströme entspricht.



Figur 402.



Figur 403.

**139.** Ein ähnliches Modell wie das MAXWELLsche und BOLTZMANNsche, auf zyklischer Bewegung beruhend, ist von EBERT[1] konstruiert worden. Dasselbe ist in Figur 402 in perspektivischer Ansicht, in Figur 403 in einem vertikalen Durchschnitt gezeichnet. Es besteht aus zwei um dieselbe Achse unabhängig sich drehenden Systemen, welche durch einen Zwischenmechanismus verbunden sind. Das eine System besteht aus dem hinteren Rad $R$, der Scheibe $S$, einem Kegelrad $N_1$ und dem Zeiger $Z_1$. Das zweite System, durch eine Hülse $H$ auf die Achse geschoben, besteht aus dem Kegelrad $N_2$ und der Scheibe $S_2$, auf welcher ein fester Zeiger $Z_2$ angebracht ist. Der Zwischenmechanismus besteht aus den Kegelrädern $N_3$ und $N_4$, welche an $N_1$ und $N_2$ angreifen können.

[1] H. EBERT, Wied. Ann. **49**. 642. 1893.



$N_3$ und $N_4$ drehen sich frei um die Stangen $Q_1$ und $Q_2$, auf welchen Gewichte verschiebbar angebracht sind und befestigt werden können.

Ist die Drehungsgeschwindigkeit des ersten Systems $q_1$, die des zweiten $q_2$, so ist die des Zwischenmechanismus immer $\frac{q_1 + q_2}{2}$. Die lebendige Kraft des ganzen Systems ist

$$2\,T = M_1 q_1^2 + M_2 q_2^2 + 4\,N\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 \quad ,$$

wenn $M_1$, $M_2$ und $4\,N$ die Massen des ersten und zweiten Systems und des Zwischenmechanismus bedeuten. Letzterer besteht aus einem festen und einem durch Verstellen der Gewichte $G_1$ und $G_2$ veränderlichen Teil.

Nach den LAGRANGEschen Gleichungen ist die an dem zweiten System angreifende Kraft

$$P_2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) = -\frac{d}{dt}[(M_2 + N)\,q_2 + N q_1] \quad .$$

Im Moment, wo das zweite System sich zu bewegen beginnt, also $q_2 = 0$ ist, wird

$$P_2 = -\frac{d}{dt}(N q_1) \quad ,$$

und darin sind die Induktionsgesetze enthalten, wenn $q_1$ und $q_2$ die Stromstärken, $N$ das gegenseitige Potential der beiden Ströme (das NEUMANNsche Potential) bedeutet[1].

## G) Spezielle Theorien.

**140.** Um direkte mechanische Systeme zu konstruieren, welche dieselben Eigenschaften wie ein System von Strömen und Magneten besitzen, hat man zu verschiedenen Bewegungsarten seine Zuflucht genommen und diese Bewegungen mit verschiedenen elektrischen oder magnetischen Größen identifiziert. Die hauptsächlichsten derselben sind im folgenden klassifiziert.

### § 38. Hydrodynamische Theorien.

**141.** Manche Erscheinungen, die die Elektrizität und der Magnetismus bieten, lassen sich durch hydrodynamische Vorrichtungen nachmachen, und die letzteren sind daher geeignet, ein Bild und damit eventuell eine Erklärung der ersteren zu bieten[2]. Von besonderem Interesse sind die Analogien, die BJERKNES[3]

[1] Weitere Literatur über Modelle oder Betrachtungen darüber: A. W. S. FRANKLIN, Phys. Review **4**. 388. 1897. — C. HEINKE, Elektrotechn. Zeitschr. **18**. 57. 1897. — A. GARBASSO, N. Cim. (4) 260. 1897. — F. HASENÖHRL, Wien. Ber. **105**. 900. 1896. — C. L. WEYHER, Beibl. **23**. 569. 1898. — V. KARPEN, Soc. Franc. de Phys. 49. 1900. — ERICH MÜLLER, Zeitschr. f. Elektrochemie **6**. 588. 1900 (Modell der Ionenbewegung). — W. LASH MILLER und F. B. KENRICH, Zeitschr. f. phys. Chemie **35**. 440. 1900. — F. KOHLRAUSCH, ibid. **34**. 559. 1900 (auch Ionenbewegung). — A. GRAY, Nature **60**. 379. 404. 1899. — G. F. FITZGERALD, ibid. **59**. 509. — J. FLEMING und ASHTON, Phil. Mag. (6) **2**. 220. 1901. — J. BUCHANAN, ibid. **3**. 240. — F. MACCARONE, N. Cim. (5) **2**. 88. 1901. — H. E. J. G. DUBOIS, Arch. néerl. (2) **6**. 1902.

Über die Schulbehandlung einzelner Erscheinungen durch Modelle u. dgl. siehe GRIMSEHL, Progr. d. Realschule Cuxhaven 1893/94. — H. EVERS, Progr. d. Realgymn. Danzig 1892. — G. CLAUDE, Lum. él. **51**. 459. 513. 1894. — P. SZYMANSKI, Zeitschr. f. phys.-chem. Unterr. **7**. 10. 1893; **8**. 339. 1895. — K. E. F. SCHMIDT, Zeitschr. f. Naturw. **66**. 301. 1894. — B. SCHMIDT, Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. **5**. 106. 1899. — W. WEILER, Elektrotechn. Rundschau **18**. 4. 1900. — L. F. WÜLLENWEBER, Leipzig, Barth 1900. — V. BERGHOFF, Progr. Oberrealschule Düsseldorf 1901/02.

[2] Siehe C. NEUMANN, Beiträge zu einzelnen Teilen der math. Physik, speziell Kap. 8, S. 415. Leipzig 1893. — [3] C. A. BJERKNES, Nature **24**. 360. 1881; C. R. **73**. 303. 1881; Wied. Ann. **63**. 91. 1897. Eine zusammenfassende Übersicht und Ausarbeitung der BJERKNESschen Untersuchungen ist enthalten in V. BJERKNES' Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. BJERKNES' Theorie. Leipzig, Barth: 1. Bd. 1900, 2. Bd. 1902.

studiert und ausgearbeitet hat. Wird ein Metallring beiderseits mit Kautschuk bespannt und an einer Röhre befestigt unter Wasser getaucht, und bewirkt man durch rasch aufeinanderfolgendes Verdichten und Verdünnen der Luft zwischen den Kautschukmembranen, daß diese in eine pulsierende Bewegung kommen, so werden durch die entstehenden Strömungen in der Flüssigkeit auf einen anderen eingetauchten Körper Druckkräfte ausgeübt. Läßt man daher zwei solche Körper gleichzeitig in Wasser pulsieren, so entstehen Abstoßungs- resp. Anziehungserscheinungen. Zwei solche Körper verhalten sich wie zwei Magnetpole, nur daß, wenn sie in gleichsinniger Pulsation sich befinden, Anziehung, bei ungleichsinniger Abstoßung stattfindet, umgekehrt wie bei Magnetpolen. Die hübschen Versuche von BJERKNES sind durch von ihm konstruierte Apparate leicht zu wiederholen.

Eine Reihe von solchen Analogien zwischen elektrodynamischen und hydrodynamischen Theorien, welche jedenfalls die Möglichkeit zeigen, scheinbare Fernkräfte durch Bewegung eines Zwischenmediums zu erzeugen, sind von RIECKE[1] mathematisch durchgeführt worden.

**142.** An die Untersuchungen von C. A. BJERKNES schließen sich die Theorien der Gravitation, der elektrischen Erscheinungen und der molekularen Fernkräfte von A. KORN an[2]. Zwei solche mit gleicher Schwingungsdauer pulsierende (ihr Volumen periodisch ändernde) Kugeln ziehen sich mit einer dem Quadrat ihrer Zentraldistanz umgekehrt proportionalen Kraft an oder stoßen sich ab, je nachdem die Phasen der beiden Pulsationen gleich oder entgegengesetzt sind. Auf Grundlage dieser Tatsache suchte KORN in seinen ersten Arbeiten[3] die Erscheinung der Gravitation dadurch zu erklären, daß er einen periodischen Druck auf einen großen, das Sonnensystem einschließenden Raum voraussetzte und die ponderabeln Teilchen schwach kompressibel, in einem Meer inkompressibler Flüssigkeit schwimmend dachte. Später[4] ist er dazu übergegangen, die Pulsationsschwingungen der gravitierenden Teilchen als Eigenschwingungen des aus den schwach kompressibeln Teilchen und dem für rasche Schwingungen inkompressibeln Äther zusammengesetzten Systems aufzufassen (Theorie der universellen Schwingungen[5]), und zwar sollen jene die Gravitation bewirkenden Pulsationsschwingungen die Grundschwingung des Systems vorstellen.

Zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen wird angenommen, daß in jedem elektromagnetischen Felde mechanische Geschwindigkeiten von der folgenden analytischen Form vorhanden sind:

$$u = u_0 + u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi\,, \quad \ldots\,,$$

wo $u_0\, v_0\, w_0$ die sichtbaren Geschwindigkeiten vorstellen, $u_1\, v_1\, w_1$ den HERTZschen $XYZ$, $u_2\, v_2\, w_2$ den HERTZschen $LMN$ proportional sind. $T$ ist dieselbe Schwingungsdauer, wie bei den die Gravitation bewirkenden Pulsationsschwingungen und sehr klein gegen die Schwingungsdauer der Schwingungen des sichtbaren Lichts[6].

---

[1] E. RIECKE, Math. Ann. **30**. 309. 1887. — [2] Die folgende Darstellung ist von A. KORN freundlichst selbst gegeben worden. — [3] A. KORN, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik (Ferd. Dümmler, Berlin, 2. Aufl., 1896—1898); Ein Modell zur hydrodynamischen Theorie der Gravitation (Münch. Ber. **27**. 197). [4] A. KORN, Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen 43 ff. (Ferd. Dümmler, Berlin 1901). — [5] A. KORN, Sur les vibrations universelles de la matière (C. R. **134**. 31. 1902); Sur les fonctions universelles dans l'espace (C. R. **136**. 30. 1903); Les vibrations universelles de la matière (Ann. de l'Ec. Norm. **20**. 1903); Le problème mathématique des vibrations universelles, Commun. Kharkow 1903; Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes (Münch. Ber. **33**. 383. 1903). — [6] Anwendungen der Theorie zur Erklärung von Lichterscheinungen. A. KORN und K. STÖCKL, Studien zur Theorie der Lichterscheinungen: I. Das ZEEMANsche Phänomen (Drudes Ann. **8**. 312. 1902); II. Die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde (Drudes Ann. **9**. 1138. 1902); III. Das KERRsche Phänomen (Drudes Ann. **12**. 875. 1903). Anwendung der Theorie zur Erklärung des Erdmagnetismus: A. KORN, Über die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie (Münch. Ber. **28**. 129. 1898).

Der Äther ist für rasche Schwingungen inkompressibel, der den HERTZschen Gleichungen entsprechende Bewegungszustand (dielektrischer Zustand) erhält sich in einer Flüssigkeit ewig, wenn gewisse Bedingungen an der Grenze erfüllt bleiben[1].

Die Leiter sind mit Reibung begabte, unechte Kontinua[2].

Die Größe

$$\sqrt{\frac{\mu}{8\pi}}\int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)d\tau$$

stellt die statische Ladung eines leitenden Körpers dar, die Größen

$$U=\sqrt{\frac{\mu}{8\pi}}u_2\quad,$$

$$V=\sqrt{\frac{\mu}{8\pi}}v_2\quad,$$

$$W=\sqrt{\frac{\mu}{8\pi}}w_2$$

die Stromkomponenten, wenn $\mu$ die Dichte des Äthers bedeutet.

**143.** Auch sonst müssen viele mechanische Theorien dem Äther zum Teil Eigenschaften einer Flüssigkeit zuschreiben. Es scheint zuerst HELM[3] gewesen zu sein, der eine halb hydrodynamische Theorie der elektrischen Erscheinungen aufgestellt hat. Nach seiner Hypothese ist jeder Körper ein Aggregat von flüssigen Äthermolekülen, welche in festem elastischen Äther eingelagert sind, dessen Eigenschaften von jenen Molekülen mitbedingt werden. Sind verhältnismäßig wenig flüssige Moleküle vorhanden, so daß der Körper wesentlich festen elastischen Äther enthält, so ist der Körper ein Dielektrikum. Ist dagegen der Körper hauptsächlich flüssig, umschließt diese Flüssigkeit die festen Teile nur wie ein Meer eine Insel, so ist der Körper ein Leiter. Zwischen dem flüssigen Äther und dem festen findet Reibung statt. Aus dieser Auffassung ergeben sich eine ganze Reihe der elektrischen Erscheinungen. Ein elektrisch geladener Körper ist ein solcher, der das umgebende Medium in einen Zustand der Spannung versetzt. Positiv soll ein Körper sein, der das Medium verdünnt. Der Strom im Leiter ist einfach ein Strom des flüssigen Äthers. Vermöge der Reibung (die in anderer als der gewöhnlichen Form eingeführt wird) an den inneren Teilen des festen Äthers wird Wärme, an den äußeren Teilen elastische Verschiebung erzeugt, die dann auf weiter abliegende Leiter induzierend resp. elektrodynamisch wirkt. Die magnetischen Erscheinungen werden durch Wirbel in dem flüssigen, resp. durch Torsionsspannungen in dem festen Äther erzeugt (s. w. u. „Elastische Theorien").

Den Äther durchweg als eine Flüssigkeit anzunehmen, geht deswegen nicht an, weil die elektromagnetischen Kräfte ja den Äther selbst angreifen und in Bewegung setzen würden (sobald der POYNTINGsche Vektor nicht unabhängig von der Zeit ist). Es würden also neben den elektromagnetischen Erscheinungen noch Strömungen des Äthers von im allgemeinen komplizierter Form auftreten[4].

---

[1] A. KORN, Über die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer inkompressibeln Flüssigkeit (Münch. Ber. **28**. 135. 1898). — [2] A. KORN, Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen (s. o.) 231 ff. — [3] G. HELM, Wied. Ann. **14**. 149. 1881. — [4] H. v. HELMHOLTZ, Wied. Ann. **53**. 135. 1894. — W. WIEN, Wied. Ann. **65**. Heft 6. 1898; Phys. Zeitschr. **2**. 148. 1900. — G. MIE, Wied. Ann. **68**. 129. 1899; Phys. Zeitschr. **2**. 181, 319. 1901; **6**. 787. 1906.

## § 39. Wirbeltheorie von Maxwell.

**144.** Maxwell hat eine Theorie der elektrischen Erscheinungen 1861—1862 publizirt unter dem Titel „On physical lines of force“ [1]. Wegen der Wichtigkeit dieser Theorie geben wir eine etwas eingehendere Analyse derselben [2].

Der erste Teil ist betitelt: Theorie der Molekularwirbel angewendet auf magnetische Phänomene. Maxwell stellt sich darin zunächst nur die Aufgabe, die Beschaffenheit eines Mediums zu finden, welches imstande ist, die Anziehungserscheinungen von Magneten durch seinen Bewegungs- oder Spannungszustand zu erklären. Durch die von ihm aufgestellte Hypothese gelingt es ihm aber nicht bloß, dieses zu leisten, sondern auch die elektromagnetischen Eigenschaften und die Induktion zu erklären.

Die magnetische Kraft an irgend einem Punkt eines magnetischen Feldes hat Richtung und Größe und läßt sich darstellen durch eine mechanische Spannung, die in einer Richtung, der Achse, größer oder kleiner ist als in allen anderen, und durch Drucke, rechtwinklig zu dieser, die nach allen Richtungen gleich sind. Ein solcher Spannungszustand läßt sich immer zerlegen in 1. einen gewöhnlichen hydrostatischen Druck und 2. einen einfachen Druck oder Zug längs der Achse. Wenn der Druck in der Achse kleiner ist, als senkrecht dazu, so ist der zweite Teil in dieser Zerlegung ein Zug. Das ist der Fall im magnetischen Feld.

Ein solcher Zustand eines Mediums, welches in einer Richtung einen kleineren Druck hat als in jeder dazu senkrechten Richtung, leitet auf den Gedanken, daß der Überschuß des Druckes in der Äquatorialrichtung durch eine Zentrifugalkraft entsteht. Wenn man in dem Medium lauter Wirbel annimmt, deren Achsen den Kraftlinien parallel sind, so zeigt ein solches Medium größeren Druck senkrecht zu den Kraftlinien, als in ihnen.

Wenn ein Wirbel mit der Umfangsgeschwindigkeit $v$ rotiert und in seiner Achse der Druck $p_0$ herrscht, so herrscht an dem Umfang, wenn $\varrho$ die Dichtigkeit ist, der Druck

$$p_1 = p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 \quad .$$

Der mitttlere Druck der Wirbel parallel den Achsen ist also

$$p_2 = p_0 + \tfrac{1}{4}\varrho v^2 \quad .$$

Die Differenz der Drucke $p_1$ senkrecht zu den Achsen und $p_2$ parallel der Achsen bei einer Reihe kreisförmiger Wirbel ist also

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{4}\varrho v^2 \quad ,$$

bei anders gestalteten Wirbeln ist sie allgemein

$$p_1 - p_2 = C\varrho v^2 = \frac{1}{4\pi}\mu v^2 \quad ,$$

wo $\mu$ eine von der Dichtigkeit und Form abhängige Konstante ist.

Ein solches Medium, mit Wirbeln gefüllt, würde sich seitlich ausbreiten, wenn es nicht durch geeignete Drucke daran gehindert wird. Um diese zu finden, muß man untersuchen, wie groß die Drucke sind, die ein solches Wirbelsystem, dessen Achsen die Kosinus $l\,m\,n$ mit drei Achsen bilden, auf die drei Koordinaten-

[1] Cl. Maxwell, Abhandlungen I. und II. Phil. Mag. (4) **21**. 1861; III. Phil. Mag. (4) **23**. 1862. Wieder abgedruckt in Maxwell, Scientif. papers I. 421. — [2] Eine andere Wirbeltheorie ist von W. G. Hankel aufgestellt worden, die aber an vielen Unklarheiten leidet. W. G. Hankel, Pogg. Ann. **126**. 440. 1865; Ber. d. sächs. Ges. 1865, 30; 1866, 269; Pogg. Ann. **131**. 607. 1867; Wied. Ann. **36**. 92. 1899; **39**. 369. 1890. — Ähnliche Betrachtungen s. L. Lorenz, Pogg. Ann. **118**. 111. 1863; **131**. 243. 1867. — Andere ähnliche Theorien der Ätherbewegung rühren her von Reynard, Ann. de Chim. de Phys. (4) **19**. 272. 1870. — J. Moutier, Ann. chim. phys. (5) **4**. 267. 1875.

ebenen ausübt, sowohl in normaler wie in tangentialer Richtung. Diese erhält man, wenn man die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit eines Wirbels an seinem Umfang mit $LMN$ bezeichnet, also

$$L = vl\,, \quad M = vm\,, \quad N = vn$$

setzt[1], in der Form

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\mu L^2 - p_1\,, \qquad p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\mu MN\,,$$

$$p_{yy} = \frac{1}{4\pi}\mu M^2 - p_1\,, \qquad p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\mu NL\,,$$

$$p_{zz} = \frac{1}{4\pi}\mu N^2 - p_1\,, \qquad p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\mu LM\,.$$

Daraus findet man sofort die (pro Volumeneinheit berechneten) Kraftkomponenten, die auf ein Element im Innern des Mediums wirken, aus der Formel

$$\Xi = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

und den entsprechenden für $Y$ und $Z$.

Es wird so

$$\Xi = \frac{L}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu L) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu N)\right] + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{\partial}{\partial x}(L^2 + M^2 + N^2)$$
$$- \mu M\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \mu N\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) - \frac{\partial p_1}{\partial x}\,.$$

Um diese Gleichungen zu interpretieren, nimmt MAXWELL an, daß die **Drehungsgeschwindigkeit der Wirbel $LMN$ die Komponenten der magnetischen Kraft** darstellen.

Ferner soll $\mu$ die magnetische Permeabilität darstellen, dann sind $\mu L$, $\mu M$, $\mu N$ die Komponenten der magnetischen Verschiebung und

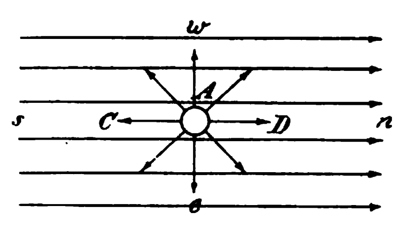
$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu L) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu N)$$

ist gleich $4\pi \times$ der Menge Magnetismus $m$ in dem betreffenden Element.

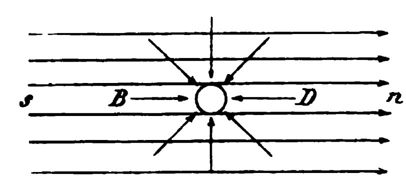
Der erste Teil von $\Xi$ ist daher

$$Lm$$

und zeigt an, daß aus den Wirbeln eine Kraft entsteht, welche einen Nordpol nach der $x$-Achse verschiebt.




Figur 404.

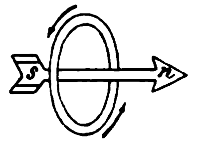



Figur 405.

Es seien in Figur 404 und 405 $sn$ die Richtungen der Wirbelachsen, die Wirbel selbst mögen in der durch Figur 406 gekennzeichneten Weite rotieren. Dann ent-

[1] Statt der MAXWELLschen Bezeichnung sind die Bezeichnungen der HERTZschen Theorie angewendet.

spricht die Richtung der Pfeile in den Linien $s\,n$ der Richtung, in die ein Nordpol sich einstellt. Nun möge ein Nordpol $A$ in dieses Feld gebracht werden. Von ihm gehen dann die Kraftlinien nach allen Richtungen so aus, wie es Figur 404 zeigt. Denn alle andern Nordpole würden sich in der Richtung dieser Pfeile bewegen. Man sieht, daß bei $D$ die Wirbel des Feldes und die des Magnetpols sich verstärken, bei $C$ schwächen. Es wird also ein stärkerer Zug in der Richtung der Achsen bei $D$, als bei $C$ stattfinden, d. h. $A$ wird sich in der Richtung nach $n$ bewegen. Das Umgekehrte findet für einen Südpol statt, wie man aus Figur 405 ebenso erkennt.




Figur 406.

Der zweite Teil von $\Xi$, nämlich

$$\frac{1}{8\pi}\mu\frac{\partial}{\partial x}(L^2 + M^2 + N^2)$$

zeigt, daß jeder Körper im Feld zu Stellen größerer magnetischer Intensität hingetrieben wird, wobei die diamagnetischen Erscheinungen aufzufassen sind als die Erscheinungen, welche ein schwächer magnetischer Körper in einer stärker magnetischen Umgebung zeigt[1].

Der dritte Term von $\Xi$

$$-\mu M\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

läßt sich folgendermaßen definieren. Die Größen

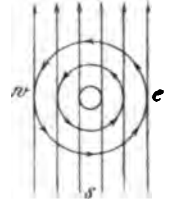
$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) = u\,, \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = v\,, \qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) = w$$

lassen sich auffassen als die Stromdichten eines elektrischen Stromes parallel den Achsen der $x\,y\,z$. Die Kraft

$$-\mu M\cdot w$$

zeigt dann an, daß, wenn die magnetische Verschiebung $\mu M$ nach $y$ gerichtet und der Strom nach $z$ gerichtet ist, daß dann der Strom nach $-x$ gedrängt wird, d. h. ein aufsteigender Strom in einem nach Norden gerichteten Felde erhält eine Bewegung nach Westen.

In Figur 407 ist ein magnetisches Feld $s\,n$ und der Durchschnitt $C$ eines stromführenden Drahtes gezeichnet. Um diesen herum bilden sich die kreisförmigen Kraftlinien in der Richtung, die dem Uhrzeiger entgegengeht. Die beiden Systeme von Wirbeln verstärken sich bei $e$, schwächen sich bei $w$, so daß die Wirbel bei $e$ sich mehr in äquatorialer Richtung ausbreiten als bei $w$ und daß daher der Strom nach $w$ gedrängt wird.




Figur 407.

Dasselbe gilt vom vierten Term

$$+\frac{\mu N}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = +\mu N v\quad.$$

Endlich der fünfte Term

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

zeigt an, daß das Element in der Richtung des abnehmenden hydrostatischen Drucks gedrängt wird.

[1] In betreff dieser Glieder s. L. BOLTZMANN, Wied. Ann. 48. 106. 1893.

Das so konstruierte System von Wirbeln erklärt also die mechanischen Kräfte eines Feldes 1. auf magnetische Pole, 2. auf magnetisch induzierbare Körper, 3. auf elektrische Ströme.

**145.** Die bisher angestellten Betrachtungen hängen im Grunde nur davon ab, daß angenommen wird, daß in Richtung der Kraftlinien ein geringerer Druck herrscht, als senkrecht dazu. Die Einführung der Wirbel dient nur zur Veranschaulichung eines solchen Zustandes. Nimmt man aber solche Wirbel an, so ist es schwer einzusehen, wie solche nebeneinander bestehen können, wenn sie sich um parallele Achsen drehen, und noch mehr, wie ein Wirbel etwa einen benachbarten erzeugen kann (zur Erklärung der Induktion), da sie sich an der Berührungsstelle ja im entgegengesetzten Sinne drehen.

Um dafür ein mechanisches Bild zu haben, nimmt Maxwell nun weiter an, daß zwischen je zwei Wirbeln kleine Partikeln vorhanden sind, die sich jedes um eine beliebige Achse drehen können und die durch die benachbarten Wirbel in umgekehrter Richtung, also wie Zahnräder, in Bewegung versetzt werden und so auch die Bewegung weiter übertragen.

In der Tat, wenn ein Wirbel die Drehungsgeschwindigkeitskomponenten $LMN$ an seinem Umfang hat und an einem seiner Umfangspunkte die Normale die Kosinus $lmn$ mit den Achsen bildet, so sind die Geschwindigkeitskomponenten an dieser Stelle nach den drei Achsen

$$nM - mN, \quad lN - nL, \quad mL - lM \quad .$$

Werden die entsprechenden Größen für einen zweiten benachbarten Wirbel durch $L'M'N'$ bezeichnet, so erhält ein dazwischen liegendes Friktionspartikelchen die Geschwindigkeit nach der $x$-Achse,

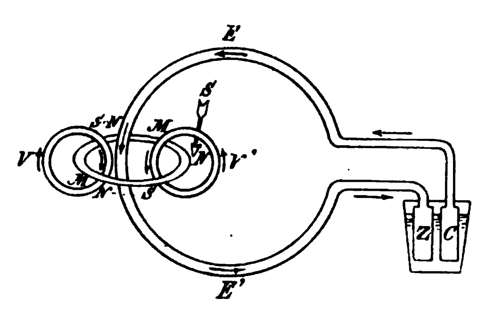
$$\alpha = \tfrac{1}{2}m(N' - N) - \tfrac{1}{2}n(M' - M) \quad .$$

Daraus folgt, daß die gesamte Zahl der Teilchen, welche in der Einheit der Zeit durch die Flächeneinheit hindurchgeht, in Richtung der $x$-Achse ist:

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \quad ,$$

daß also durch die Bewegung dieser Zwischenpartikel vollständig ein elektrischer Strom dargestellt wird (s. o.).

Wenn in Figur 408 der Kreis $EE'$ einen elektrischen Strom von $C$ nach $Z$ in der Richtung der Pfeile darstellt, und die Linie $MM'$ eine magnetische Kraftlinie darstellt, so stellen $V$ und $V'$ die Wirbel um diese Achse dar.



Figur 408.

Wenn $V$ und $V'$ benachbart sind, so treiben sie die Partikelchen, die zwischen ihnen liegen, nach unten, und wenn umgekehrt die Partikelchen durch eine äußere Kraft nach unten geschoben werden, so drehen sie die Wirbel in dem angegebenen Sinne.

Die Größe der Partikel kann sehr klein gegenüber der der Wirbel angenommen werden, und im allgemeinen können sich innerhalb eines Moleküls eine ganze Menge Wirbel befinden. Innerhalb eines Moleküls ist die Bewegung der Partikelchen widerstandslos. Wenn dagegen die Partikelchen von einem Molekül zum benachbarten übergehen, so sollen sie im allgemeinen einen Widerstand erfahren, und die elektrische Energie wird dadurch in Wärme umgewandelt.

Die gesamte Energie eines Mediums, welches Wirbel enthält, ist pro Volumeneinheit

$$\frac{1}{8\pi}\mu(L^2 + M^2 + N^2) \quad ,$$

wo $\mu$ die obige, von der Dichtigkeit des Mediums abhängige Konstante ist.

Wenn ein Wirbel von Partikelchen rings umgeben ist und wenn $XYZ$ die Kraftkomponenten sind, welche zwischen einem Partikel und dem Wirbel entstehen, und wenn $V$ das Volumen des Wirbels ist, so ist die in der Einheit der Zeit von den Partikeln auf den Wirbel übertragene Arbeit

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi}\left[L\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + N\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] V \quad .$$

Da aber die Änderung der gesamten Energie des Wirbels in der Zeiteinheit ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi}\mu V\left(L\frac{dL}{dt} + M\frac{dM}{dt} + N\frac{dN}{dt}\right) \quad ,$$

so folgt

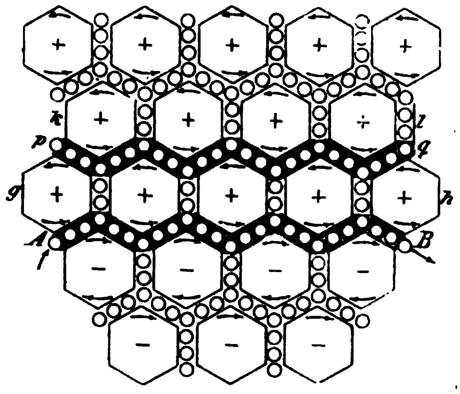
$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \mu\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \mu\frac{dM}{dt}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \mu\frac{dN}{dt} \quad .$$

Diese Gleichungen geben die Beziehungen zwischen den Änderungen des Zustandes des magnetischen Feldes und den dadurch hervorgebrachten (elektrischen) Kräften $(XYZ)$.

Der Vorgang, durch den ein induzierter Strom zustande kommt, wird danach durch Figur 409 erläutert. Darin bedeuten die großen Sechsecke oberhalb und unterhalb $AB$ die Wirbel, und die kleinen Kreise bedeuten die Partikelchen, das ist die Elektrizität selbst.



Figur 409.

Wenn nun ein Strom in $AB$ von links nach rechts anfängt, so werden die Wirbel in $gh$ umgekehrt wie ein Uhrzeiger in Rotation versetzt (+Richtung). Die Schicht $kl$ ist dann noch in Ruhe, und daher werden die Partikel $pq$ im entgegengesetzten Sinne in Bewegung kommen, es wird ein induzierter Strom entstehen. Zugleich werden durch diese Bewegung von $q$ nach $p$ die Wirbel in $kl$ in Bewegung gesetzt werden und immer rascher rotieren, bis sie dieselbe Geschwindigkeit haben wie die in $gh$. Dann wird der induzierte Strom aufhören. Das Umgekehrte findet statt, wenn der Strom in $AB$ plötzlich aufhört.

Wenn man den allgemeineren Fall betrachtet, daß die Centra der Wirbel nicht wie bisher in Ruhe bleiben, sondern sich auch bewegen können, so daß ein Punkt, der vorher die Koordinaten $xyz$ gehabt hat, nun Zuwächse $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$

bekommt, so entsteht dadurch eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Wirbel, welche sich ausdrücken läßt durch

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z \quad .$$

Die ganze Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Wirbel besteht daher aus zwei Teilen, 1. der durch die elektrische Kraft $XYZ$ erzeugten und 2. der eben besprochenen, so daß, wenn man beachtet, daß

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

ist,

$$\delta L = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\delta t + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y - \frac{\partial M}{\partial y}\delta x\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\delta z - \frac{\partial N}{\partial z}\delta x\right)$$

wird.

Dafür kann man schreiben, wenn man

$$L = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right), \qquad M = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right), \qquad N = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

setzt,

$$X = \mu N\frac{dy}{dt} - \mu M\frac{dz}{dt} + \frac{dU}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$Y = \mu L\frac{dz}{dt} - \mu N\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$Z = \mu M\frac{dx}{dt} - \mu L\frac{dy}{dt} + \frac{dW}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad .$$

Durch eine solche Veränderung der Form und Geschwindigkeit der Wirbel werden also ebenfalls elektrische Kräfte induziert, deren Gesetze sich aus den letzten Gleichungen ergeben. Die Größen $U$, $V$, $W$ sind die Komponenten desjenigen Zustandes, den FARADAY den elektrotonischen genannt hat. Nur seine Veränderung mit der Zeit kommt in den Gleichungen vor. Die Kräfte $XYZ$ sind tangentiale Kräfte zwischen Wirbeln und Zwischenpartikeln, die Größe $\psi$ entspricht dem Drucke oder der Spannung zwischen den einzelnen Zwischenpartikeln.

**146.** Während so alle Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes durch diesen Mechanismus dargestellt sind und die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes sich dadurch ergeben, gelingt es nicht ohne weiteres, die elektrostatischen Erscheinungen davon abzuleiten. Diese und die Einwirkung des Magnetismus auf das Licht sind Gegenstand der dritten Abhandlung von MAXWELL. In dieser stellt er zunächst fest, daß die Veränderung einer elektrischen Verschiebung in einem Dielektrikum ganz dasselbe ist wie ein elektrischer Strom, und es handelt sich also im wesentlichen darum, die Eigenschaften des Mediums herauszufinden, welche es in den Stand setzen, unter dem Einfluß elektrischer Kraft elektrische Verschiebung zu zeigen. Diese Eigenschaften findet MAXWELL dadurch, daß er den Zellen, in welchen die Wirbel stattfinden, auch Elastizität zuschreibt. Die elektrische Verschiebung $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ ist dann nichts anderes, als die elastische Verschiebung der Zellen. Wenn eine Schicht von Zwischenpartikeln verschoben wird, so tordieren sie vermöge ihrer Tangentialkräfte die elastische Substanz der Zellen und rufen eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete elastische Kraft hervor. Wenn die Kraft aufhört, so kommt die Zelle wieder in ihre ursprüngliche Form zurück. Die Beziehung zwischen der elektrischen Kraft $Z$ in Richtung der

$z$-Achse und der elastischen (elektrischen) Verschiebung $\mathfrak{Z}$ in derselben Richtung ist dann

$$Z = -4\pi E^2 \mathfrak{Z} \quad ,$$

wo $E^2$ eine Konstante ist, die von der Elastizität des Mediums abhängt. Sie liegt zwischen $E^2 = \pi m$ und $3\pi m$, wo $m$ der Elastizitätsmodul ist. Wenn daher die Zellen zugleich magnetisch in Rotation versetzt werden, so ist die Stärke des Stromes pro Flächeneinheit nicht mehr wie oben

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \quad ,$$

sondern jetzt

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{1}{E^2}\frac{dX}{dt}\right)$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{E^2}\frac{dY}{dt}\right)$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{1}{E^2}\frac{dZ}{dt}\right) \quad .$$

Ein elektrischer Leiter ist daher ein Körper, an welchem das angrenzende elastische Medium in einem Zustand des Druckes oder der Spannung ist. Die elektrische Dichtigkeit erscheint hierbei nur als Rechnungsgröße $-\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi$, wo $\varphi$ das Potential von $XYZ$ ist, welches im Ruhezustand existiert.

Eine transversale Wellenbewegung pflanzt sich in einem elastischen Medium mit dem Elastizitätsmodul $m$ fort mit der Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{m}{\varrho}} \quad ,$$

wo $\varrho$ die Dichtigkeit ist. Da für zylindrische Wirbel $\varrho = \frac{\mu}{\pi}$, und $E^2 = \pi m$ gesetzt wurden, so ist

$$V = \frac{E}{\sqrt{\mu}} \quad .$$

Da in Luft $\mu = 1$ ist und $V$ sich zugleich als Verhältnis der elektrostatischen zur elektromagnetischen Einheit definieren läßt, welche nach den Messungen gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, so folgt, daß das elastische, elektromagnetische Medium zugleich der Lichtäther ist und daß Lichtschwingungen elektromagnetische Schwingungen sind. Da $E^2$ umgekehrt wie die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ variiert, so folgt daraus

$$\varepsilon = \frac{i^2}{\mu} \quad ,$$

wo $i$ der Brechungsindex ist.

**147.** Aus derselben Hypothese der Molekularwirbel leitet Maxwell zum Schluß eine Erklärung und eine Formel für die Drehung der Polarisationsebene des Lichts im magnetischen Felde ab. In der Tat, wenn ein Lichtstrahl in der Richtung der Achse eines Wirbels hindurchgeht, so werden die Verschiebungen des Mediums auf ihm nicht bloß hervorgebracht von den gewöhnlichen Elastizitätskräften, sondern auch beeinflußt von den Drehungen durch die Wirbel, und man sieht ohne Rechnung ein, daß ein polarisierter Lichtstrahl so verändert werden muß, daß seine Schwingungsrichtung in der Richtung der Drehung der Wirbel verschoben

ist. Mathematisch stellt sich das so dar, daß die elastischen Beschleunigungen eines Teilchens, das von einer in Richtung der $z$-Achse fortschreitenden, transversalen, ebenen Welle in Bewegung gesetzt wird, nämlich $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}$, nicht bloß von den gewöhnlichen, elastischen Kräften, die proportional $\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}$ sind, herrühren, sondern auch von den durch die Wirbel entstehenden Kräften

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}\mu r\frac{dM}{dt}\right) \quad \text{und} \quad -\frac{d}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}\mu r\frac{dL}{dt}\right),$$

wo $r$ der Radius eines Wirbels ist. Die entsprechenden Gleichungen schreiben sich dann, wenn man unter $\gamma$ die Umfangsgeschwindigkeit der Wirbel versteht, und $\frac{1}{4\pi}\frac{\mu r}{\varrho}\gamma = c^2$ setzt:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + c^2\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2 dt}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} - c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2 dt}.$$

Es ergibt sich daraus, wenn man nach FRESNEL die Dichte des Äthers $\varrho$ in einem Körper $= si^2$ setzt, wo $s$ die Dichte des freien Weltäthers ist, und wenn man noch $\gamma$ durch die magnetische Kraft $N$ ausdrückt, der Winkel $\vartheta$, um den die Polarisationsebene sich dreht,

$$\vartheta = 90^0 \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{r}{s^{\frac{1}{2}}}\frac{\mu i N z}{\lambda^2 V},$$

wo $z$ die Dicke der durchstrahlten Substanz, $\mu$ die magnetische Permeabilität, $\lambda$ die Wellenlänge in Luft ist.

Später hat MAXWELL diese Formel noch für die Dispersion erweitert.[1]

**148.** Da in dieser Formel alle Größen meßbar sind, außer $r$ und $s$, so kann man, wie GRAETZ[2] gezeigt hat, daraus zunächst ein relatives Maß für die Größe der Wirbel in verschiedenen Substanzen finden. Es ergibt sich diese Größe für feste und flüssige Körper im allgemeinen nicht sehr verschieden, für gasförmige dagegen viel kleiner. Es wird z. B. der Radius der Molekularwirbel, wenn er für Wasser $= 1$ gesetzt wird, für

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schwefelkohlenstoff | 2,53, | Salpetersäure | 0,60, |
| FARADAYS Glas | 3,20, | Kreosot | 0,77. |

Dagegen für

Wasserstoff 0,00057, Sauerstoff 0,00047, Kohlenoxyd 0,00100.

Für Eisen dagegen wird $r = 3000$, für Nickel etwa 1500, für Kobalt 3400.

Diese Größe von $r$ für die stark magnetischen Substanzen legt die Annahme nahe, die schon MAXWELL ausgesprochen hat, daß im Eisen die Moleküle als Ganzes wirbeln. Dadurch erhält man absolute Werte von $r$. Es ist danach der Radius eines Molekularwirbels im Wasser

$$r \leq 3{,}1 \cdot 10^{-12}\ \text{cm}$$

und so entsprechend für die anderen Substanzen.

(Es ist nicht uninteressant, daß diese Größe nicht weit entfernt ist von derjenigen des Radius eines Elektrons, für welches $r$ von der Ordnung $10^{-13}$ cm gefunden wird[3].)

[1] CL. MAXWELL, Treatise **2**, § 829. — [2] L. GRAETZ, Wied. Ann. **25**. 165. 1885. — [3] S. z. B. M. ABRAHAM, Theorie der Elektrizität **2**. 193. 1905.

Ferner ergibt sich dann eine obere Grenze für die Dichtigkeit des freien Lichtäthers, nämlich

$$s < 9 \cdot 10^{-16} \quad .$$

Eine untere Grenze für $s$ ist nach einer Betrachtung von W. THOMSON

$$s > 10^{-18} \quad .$$

Wenn auch die Theorie von MAXWELL in bemerkenswerter Vollständigkeit die elektrischen Erscheinungen erklärt, so leidet sie doch an inneren Schwierigkeiten, von denen die hauptsächlichste die ist, daß die Wirbelsubstanz selbst als flüssig und doch als elastisch fest angenommen wird. Daß im Grunde außer dem Äther ein noch feinerer Stoff, der der Zwischenpartikeln, eingeführt wird, erscheint heute, wo die Elektronentheorie dasselbe tut, nicht mehr als eine solche Schwierigkeit wie früher[1].

### Molekulartheorie.

**149.** J. J. THOMSON[2] hat versucht, die Eigenschaften der Elektrizität und des Magnetismus durch eine eigentümliche Molekulartheorie verständlich zu machen. Er nimmt an, daß in einem elektrostatischen Feld die Röhren elektrostatischer Induktion reale Existenz haben, daß sie entweder in sich zurücklaufende Ringröhren sind, oder daß sie zwei Atome von Körpern oder eines einzigen Körpers miteinander verbinden. Ihre Form und Lage soll beliebig veränderlich sein. Die Atome eines Moleküls sind durch kurze Röhren miteinander verbunden. Freie Elektrizität zeigt immer freie Atome an. Es mögen $fgh$ die Anzahl von Einheitsröhren parallel drei Achsen sein, welche sich in einem Dielektrikum befinden, und es möge der Zustand des Dielektrikums sich irgendwie verändern. Dann werden die Röhren sich bewegen: $u$, $v$, $w$ seien ihre Geschwindigkeiten, außerdem werden sie sich aber auch deformieren. Die zeitliche Änderung von $f$ pro Volumeneinheit, die aus diesen beiden Ursachen folgt, ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dy}(gu - fv) - \frac{d}{dz}(fw - hu) - u\left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) \quad .$$

Das letzte Glied

$$\frac{df}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dh}{dz} = \varrho$$

stellt die Dichtigkeit der freien Elektrizität in dem betreffenden Volumenelement dar, und da $\frac{df}{dt} + u\varrho$ die Stromdichtigkeit (Verschiebungsstrom und Leitungsstrom) parallel $x$ ist, so folgt, da nach MAXWELL

$$4\pi\left(\frac{df}{dt} + u\varrho\right) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

ist, usw.

$$L = 4\pi(hv - gw) \quad ,$$

$$M = 4\pi(fw - hu) \quad ,$$

$$N = 4\pi(gu - fv) \quad .$$

[1] In betreff dieser Theorie s. noch R. T. GLAZEBROOK, Phil. Mag. (5) **11.** 397. 1881. — H. A. ROWLAND, Amer. Journ. of Math. **3.** 89. 1880. — J. J. THOMSON, Nat. **24.** 204. 1883. Ferner ähnliche Betrachtungen: N. K. GRÜNWALD, Beibl. **20.** 14. 1895. — J. PROCTOR HALL, Electr. World **30.** 10. 1897. — J. F. WEYDE, Elektrot. Zeitschr. **18.** 526. 538. 1897; **19.** 269, 363, 382. 1898. — R. A. FESSENDEN, Electr. World **29.** 9. 1897. — G. F. FITZGERALD, Dublin. Proc. **9.** 50. 1899. — G. MIE, Phys. Zeitschr. **2.** 19. 1901. — [2] J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) **31.** 149. 1891; Phys. Revue **1.** 316. 1892.

Die Größen $L$, $M$, $N$ stellen die magnetische Kraft dar, die durch die Bewegung der Röhren entsteht. Sie ist gleich $4\pi$ mal der Stärke der Röhren multipliziert mit der zu ihrer Achse senkrechten Geschwindigkeitskomponente.

Die elektrische Kraft, welche eine sich bewegende Röhre erzeugt, hat dann die Komponenten

$$X = wM - vN \quad ,$$

$$Y = uN - wL \quad ,$$

$$Z = vL - uM \quad .$$

Sie ist also gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit der Röhre und der durch dieselbe erzeugten magnetischen Kraft und steht senkrecht zur Bewegungsrichtung der Röhre und zur magnetischen Kraft.

Wenn die Röhren elektrostatischer Induktion in einen Leiter eindringen, so schrumpfen sie zu molekularen Dimensionen zusammen und das dem Leiter pro Zeiteinheit mitgeteilte Moment parallel der $x$-Achse ist

$$Np - Mr \quad ,$$

wenn $p\,q\,r$ die Anzahl der Röhren bedeuten, welche pro Zeiteinheit in den Leiter nach der $x, y, z$-Richtung eindringen.

Daher sind die Kräfte auf einen mit der Stromdichte $p\,q\,r$ fließenden Leiter im magnetischen Felde

$$Nq - Mr \quad ,$$

$$Lr - Np \quad ,$$

$$Mp - Lq \quad .$$

Man erhält also auf diese Weise ebenfalls die gewöhnlichen Gleichungen des magnetischen Feldes.

Die elektrischen und magnetischen Größen erscheinen dabei als direkt bedingt durch die Anzahl und Bewegung solcher reeller Röhren.

### Elastizitätstheorien.

**150.** Wenn man dem Äther durchweg die gewöhnlichen elastischen Eigenschaften eines Körpers zuschreiben will, so ist es unmöglich, die Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus durch dieselben zu erklären. Man muß vielmehr entweder dem Äther eine von den gewöhnlichen elastischen Körpern abweichende Elastizität zuschreiben oder anderweitige Annahmen machen.

BOLTZMANN[1] macht darauf aufmerksam, daß man, um die MAXWELLschen Gleichungen zu erhalten, für die potentielle Energie des elastischen Äthers einen Ausdruck finden muß, wenn man unter $FGH$ elastische Verschiebungskomponenten versteht

$$E = \frac{K}{2}\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right\} \quad , \tag{1}$$

während der Ausdruck für die elastische Energie des gewöhnlichen Äthers ist

$$\left\{\begin{aligned} E = K\Bigg[&\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \vartheta\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2\Bigg] \quad . \end{aligned}\right. \tag{2}$$

[1] L. BOLTZMANN, Wied. Ann. **48**. 84. 1893.

**151.** Nun kann man die Form 1 für die Energie bekommen, wenn man annimmt, daß der Äther ein elastischer Körper von einer besonderen Art ist, nämlich ein Körper, der nicht Formänderungen der Volumenelemente elastischen Widerstand entgegensetzt, sondern Drehungen der Volumenelemente, welche gerade in der gewöhnlichen Elastizitätstheorie nicht angenommen werden. Die bei der Drehung der Volumenelemente auftretende elastische Kraft soll der Größe der Drehung proportional sein. Eine solche Konstitution hatte schon MAC CULLAGH[1] dem Lichtäther zugeschrieben, um die Eigenschaft des Lichts in Kristallen zu erklären. Einen solchen Äther hat auch Sir W. THOMSON angenommen.

Er bezeichnet diese Eigenschaft als Quasirigidität und den Äther selbst als quasirigid. Jetzt bezeichnet man diese Konstitution des Äthers häufig als rotationell. Hat ein Ätherteilchen die Verschiebungen $F, G, H$, so sind die Drehungen, doppelt genommen:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} ,$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} ,$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} .$$

Durch die Quasirigidität wirken dann in der Volumeneinheit $d\tau$ die Drehungsmomente

$$L = \frac{a}{2\pi\mu} , \quad M = \frac{b}{2\pi\mu} , \quad N = \frac{c}{2\pi\mu} ,$$

wo $\mu$ eine Konstante ist.

Die Winkelgeschwindigkeit eines Volumenelements ist (doppelt genommen)

$$p = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dH}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dG}{dt}\right) ,$$

$$q = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dF}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dH}{\partial t}\right) ,$$

$$r = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dG}{dt}\right) - \frac{\partial}{dy}\left(\frac{dF}{dt}\right) .$$

Die kinetische Energie ist dann eine quadratische Funktion von $pqr$, während die potentielle Energie eine quadratische Funktion der $abc$, also grade von der Form 1 ist. Lord KELVIN[2] hat ein gyroskopisches Modell für einen solchen Äther konstruiert, bei welchem zyklische (verborgene) Bewegungen diese Eigenschaft hervorbringen. Ein solcher Äther ist also mechanisch denkbar.

**152.** Man kann für einen derart elastischen Körper folgende allgemeine Ansätze machen[3]:

Es möge in jedem Volumenelemente irgend eine, noch unbestimmte Bewegung möglich sein, deren Komponenten $F, G, H$ seien. Sie werde die tonische Bewegung genannt. Ihre Geschwindigkeiten seien:

$$P = \frac{dF}{dt} , \quad Q = \frac{dQ}{dt} , \quad R = \frac{dH}{dt} .$$

Die lebendige Kraft der tonischen Bewegung sei (pro Volumeneinheit)

$$T = \frac{K}{8\pi}(P^2 + Q^2 + R^2) .$$

---

[1] J. MAC CULLAGH, Irish Acad. Trans. **21.** 17. 1848. — [2] W. THOMSON, Math. and phys. Papers **3.** 442. 1890. — [3] L. BOLTZMANN, Vorl. über die MAXWELLsche Theorie, II. 1. Vorlesung.

Durch diese tonische Bewegung mögen aber innere (etwa elastische) Kräfte in dem Äther geweckt werden, deren Potential pro Volumeneinheit sei

$$E = \frac{1}{8\pi\mu}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]$$

oder

$$E = \frac{1}{8\pi\mu}(a^2 + b^2 + c^2) \quad .$$

$K$ und $\mu$ sind zwei Konstanten des Körpers.

Außerdem soll noch eine den Geschwindigkeiten proportionale Widerstandskraft in jedem Element herrschen, deren Komponenten pro Volumeneinheit sind

$$-CP, \quad -CQ, \quad -CR \quad ,$$

wo $C$ eine neue Konstante ist.

An manchen Stellen sollen außerdem noch besondere Kräfte herrschen (elektromotorische aller Art), deren Komponenten pro Volumeneinheit seien

$$-CX, \quad -CY, \quad CZ \quad .$$

Die bei einer Verschiebung $FGH$ im Zeitelement $dt$ durch die beiden letzteren Arten von Kräften entwickelte Energie ist

$$C(P^2 + Q^2 + R^2) - C(XP + YQ + ZR) \quad .$$

Bei irgend einer Verschiebung $FGH$ muß die Zunahme der lebendigen Kraft gleich der Abnahme der potentiellen Energie weniger der Arbeit der Widerstands- und sonstigen Kräfte sein. Daraus erhält man die Gleichungen

$$K\frac{dP}{dt} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] - 4\pi C(P + X)$$

$$K\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\right] - 4\pi C(R + Y)$$

$$K\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\right] - 4\pi C(R + Z) \quad .$$

**153.** Es kommt also hauptsächlich darauf an, wie die Verschiebungen $FGH$ angenommen werden müssen, und welche Eigenschaft der Äther haben muß, damit dann die potentielle Energie den obenstehenden Wert (I) bekommt.

THOMSON selbst[1] hat die Größen $a, b, c$ als die magnetischen Verschiebungen $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die dadurch entstehenden Drehungsmomente

$$L = \frac{1}{2\pi\mu}a, \quad M = \frac{1}{2\pi\mu}b, \quad N = \frac{1}{2\pi\mu}c$$

als die magnetischen Kräfte angesehen. Die Größen $PQR$ sind dann die Komponenten der elektrischen Kraft $XYZ$, und die Momente (pro Volumeneinheit) $\frac{K}{4\pi}P$, $\frac{K}{4\pi}Q$, $\frac{K}{4\pi}R$ sind die elektrischen Verschiebungen ($\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$). Die Gleichungen werden dann, wenn man von der Reibung und eingeprägten Kräften absieht:

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{usw.}$$

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad \text{usw.}$$

[1] W. THOMSON l. c. Art. 99.

In ähnlicher Weise hat BOLTZMANN[1] die Gleichungen interpretiert.

Dagegen hat umgekehrt SOMMERFELD[2], ebenfalls von dem THOMSONschen quasirigiden Körper ausgehend, die elektromagnetischen Erscheinungen dadurch abgeleitet, daß er die Verschiebungen $FGH$ der magnetischen Kraft proportional setzt. Außerdem aber braucht er noch die Annahme, daß der Äther sich bewegt wie eine inkompressible Flüssigkeit, welche Quasi-Viskosität besitzt; d. h. die gewöhnliche Strömung des Äthers findet ohne Reibung statt, dagegen setzt sich der Rotation eines Volumenelements eine reibende Kraft entgegen, welche der Drehungsgeschwindigkeit proportional ist.

In den Leitern bewegt sich danach der Äther wie eine quasiviskose Flüssigkeit, in den Nichtleitern wie ein quasirigider Körper. Die „elektrische Verschiebung" MAXWELLs entspricht bei dieser Theorie der Drehung eines Ätherteilchens, die Geschwindigkeit im Strom ist eine Winkelgeschwindigkeit. Auf gewisse Schwierigkeiten dieser Annahme hat BOLTZMANN aufmerksam gemacht[3]. Er zeigt nämlich, daß bei dieser Darstellung eine gleichmäßig elektrisierte Kugel unmöglich erscheine.

Auch LARMOR[4] hat in seiner sehr ausführlich durchgeführten Theorie ähnliche Gleichsetzungen vorgenommen.

VOIGT[5] hat für ein Medium ohne innere elastische Kräfte die allgemeinen Gleichungen aufgestellt, welche dieselbe Form haben wie die MAXWELLschen und welche in diese übergehen, wenn man die elektrische Kraft der Geschwindigkeit, die magnetische Kraft dem Drehungsmoment gleich setzt, also dieselbe Interpretation wie BOLTZMANN annimmt. In ähnlicher Weise stellt SAUTER[6] die MAXWELLschen Gleichungen dar.

**154.** Während diese Interpretationen auf der Annahme des rotationellen oder quasirigiden Äthers beruhen, kann man die obige Form (1) (S. 952) der potentiellen Energie des Äthers auch in anderer Weise für einen elastischen Körper erhalten.

Man erhält sie nämlich auch, wenn man $\vartheta = -1$ setzt. Nun kann aber für einen gewöhnlichen, elastischen Körper $\vartheta$ keinen negativen Wert haben. Der Wert $\vartheta = -1$ würde einem Äther entsprechen, den THOMSON als quasilabilen Äther bezeichnet hat, und der sehr eigentümliche Eigenschaften hätte[7].

Dabei ist aber andererseits vorausgesetzt, sowohl bei dem quasirigiden, wie bei dem quasililabilen Äther, daß er sich sonst wie eine inkompressible Flüssigkeit bewegen kann, wobei er durch Körpermoleküle oder sonst auf eine Weise einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erfährt.

Diese Annahmen einer von den bekannten Stoffen ganz abweichenden Konstitution des Äthers haben natürlich etwas sehr Mißliches. Der Äther ist und bleibt dann eben, trotz der formalen Übereinstimmung der Gleichungen, ein unbekannter Stoff.

**155.** Man kann aber versuchen, dem Äther nur die Eigenschaften eines gewöhnlichen elastischen festen Körpers zuzuschreiben. Nur zeigt eben ein solcher sowohl Transversalwellen, wie Longitudinalwellen. HELM[8] hat das in der Weise versucht, daß er in jedem Volumenelemente noch eine besondere Kraft wirken läßt und durch diese die MAXWELLschen Gleichungen erhielt. Indes sind die eingeführten Größen in ihrer Bedeutung nicht klargelegt.

---

[1] L. BOLTZMANN, Wied. Ann. **48**. 78. 1893. — [2] A. SOMMERFELD, Wied. Ann. **46**. 139. 1890; s. a. R. REIFF, Elektrizität und Elastizität, Freiburg 1893. — [3] L. BOLTZMANN, Wied. Ann. **48**. 95. 1893. — [4] F. LARMOR, Phil. Trans. (A) **185**. 1895; **186**. (2) 1896; **190**. 1897. Trans. Cambr. Phil. Soc. **18**. 1906. — S. die Referate in Fortschritte der Physik 1893. 408; 1895. 470; 1896. 377; 1897. 379; 1900. 710. — Siehe ferner das Werk von LARMOR, Aether and Matter, Cambridge 1900. — [5] W. VOIGT, Wied. Ann. **52**. 665. 1894. — [6] J. SAUTER, Drudes Ann. **6**. 331. 1901. — [7] J. LOSCHMIDT, Über die Natur des Äthers. Wien 1862; Fortschritte der Physik 1862. 68. — G. GREEN, Cambridge Trans. **6**. 403. 1838. — W. THOMSON, Phil. Mag. (5) **26**. 414. 500. 1888; s. BOLTZMANN, Vorlesungen II. — [8] G. HELM, Wied. Ann. **47**. 743. 1892.

Ein ausgeführterer Versuch in derselben Richtung ist von GRAETZ[1] gemacht worden. Bei diesem wird angenommen, daß im freien (interstellaren) Äther die gewöhnlichen Elastizitätsgleichungen eines festen Körpers gelten, es werden also ausdrücklich für den freien Äther die MAXWELLschen Gleichungen nicht vorausgesetzt, sondern der Äther ist nur befähigt, Transversalwellen (aber auch Longitudinalwellen) fortzupflanzen[2]. In den ponderablen Körpern aber (und zwar in allen, auch in sehr verdünnter Luft) soll von den ponderablen Molekülen ein Druck auf den in ihnen enthaltenen Äther ausgeübt werden,

$$p = 2K(1 + \vartheta)\sigma$$

wo $\sigma$ die Dilatation ist. Man erhält dadurch die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\varrho \frac{d^2\xi}{dt^2} = K\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\right] \quad .$$

Die magnetischen Kräfte werden nun den Drehungen proportional gesetzt

$$L = K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \quad ;$$

$$M = K\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) \quad ,$$

$$N = K\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \quad .$$

Man könnte nun einfach die elektrischen Kräfte den Geschwindigkeiten gleich setzen

$$X = \frac{d\xi}{dt}, \quad Y = \frac{d\eta}{dt}, \quad Z = \frac{d\zeta}{dt}$$

und erhielte so direkt die MAXWELLschen Gleichungen. Indes würde diese Annahme Schwierigkeiten mit sich bringen. Denn die Geschwindigkeiten in einem elastischen Körper können nur sehr gering sein und die kinetische Energie pro Volumeneinheit $\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$, wo $\varrho$ die Dichtigkeit des Äthers ist, könnte nie die großen Werte annehmen, die sie in Wirklichkeit annehmen kann. Deswegen werden die Größen $\frac{d\xi}{dt}$ usw. nur als ein Teil der elektrischen Kraft betrachtet. Ein anderer Teil entspringt aus der potentiellen Energie, die durch die Verschiebung des Äthers gegen den Kern entsteht. Die elektrische Energie ist also zusammengesetzt aus kinetischer Energie des Äthers und potentieller Energie der ponderablen Materie, die magnetische Energie ist potentielle Energie des Äthers[3].

[1] L. GRAETZ, Drudes Ann. **5**. 375. 1901. — [2] Die Einwände, die H. WITTE: Über den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen, Berlin 1906 gegen diese Festsetzung erhebt, sind nicht stichhaltig, da wir über den freien Äther (außerhalb der Körper) überhaupt nichts Tatsächliches aussagen können, als daß er Transversalwellen fortpflanzt. Alle anderen Aussagen sind hypothetisch. — [3] Weitere im obigen nicht besprochene Literatur über Elastizitätstheorien: O. HEAVISIDE, Electrician **29**. 30. 1893. — P. G. TAIT, Proc. Roy. Soc. Edinb. 1894. S. 213. — L. SILBERSTEIN, Anz. d. Akad. Krakau. 1893. 291. — H. POINCARÉ, Eclair. él. **3**. 289; **5**. 385. 1895. — A. H. LEAHY, Nature **53**. 364. 1896. — S. FRANKLIN, Phys. Rev. **4**. 388. 1897. — A. LIÉNARD, L'éclair él. **16**. 360. 1898. — Lord KELVIN, Phil. Mag. (5) **50**. 305. 1900. — R. A. FESSENDEN, Phys. Rev. **10**. 1, 83. 1900. — L. DONATI, Memorie Bologna (5) **7**. 223. 1897/99. Eine Zusammenstellung aller Theorien mit kontinuierlichem Äther und eine Kritik derselben hat WITTE gegeben: H. WITTE, Über den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen. Berlin, Ebering 1906. S. ferner eine Vibrationstheorie: L. LORENZ, Oeuvres **1**. 171. 1896. — R. MEWES, Elektrotechn. Zeitschr. **8**. 176. 1901. Ferner eine der Gastheorie entsprechende: A. V. BÄKLUND, Öfvers. Kon. Vet. Ak. Forhandl. **50**. 421. 1893; Fortschritte der Phys. 1893. 409.

**156.** Das Schlußresultat dieser Übersicht über die Erklärungsversuche der Elektrizität ist ein unbefriedigendes. Obwohl bewiesen ist, daß es eine ganze Anzahl von mechanischen Systemen gibt, welche dieselben Eigenschaften aufweisen, wie ein elektromagnetisches System, sind alle bisher aufgestellten Mechanismen doch mehr oder minder künstlich.

Die Frage ist vereinfacht durch die Elektronentheorie. Nimmt man diese an, so braucht eine mechanische Theorie nicht mehr die dielektrischen Eigenschaften und die magnetische Permeabilität zu erklären, sondern sie hat nur noch die Konstitution des überall gleichen Äthers, ferner das Wesen des Elektrons und endlich die mechanische Kraft des Äthers auf das Elektron zu erklären. Das ist immerhin noch genug, aber doch etwas weniger, als für die mechanische Deutung der MAXWELLschen Gleichungen verlangt wird.

## H) Beziehungen der Elektrizität zur Gravitation und Thermodynamik.

**157.** FARADAY[1] hat eine Reihe von Versuchen angestellt, um experimentelle Beziehungen zwischen der Gravitation und der Elektrizität zu finden, doch mit durchaus negativem Erfolg. In theoretischer Hinsicht ist zuweilen versucht worden, die allgemeine Attraktion auf elektrischer Grundlage abzuleiten. Ein neuerer Versuch dieser Art ist von LORENTZ[2] gemacht worden in der Annahme, daß die Anziehung zwischen zwei ungleichnamigen Elektronen die Abstoßung zwischen gleichnamigen überwiegt, eine Annahme, die ähnlich früher schon ZÖLLNER[3] für die Erklärung der Gravitation nach dem WEBERschen Gesetz gemacht hatte.

Es muß genügen, für diese und ähnliche Fragen die Literatur anzuführen, ebenso wie für die Versuche, eine thermodynamische Behandlung der allgemeinen Elektrizitätstheorie zu begründen.

O. HEAVISIDE, Electrician London **31**. 281, 359. 1893. — H. N. ALLEN, Phil. Mag (5) **39**. 357. 1895. — Lord KELVIN, Edinburg Roy. Soc. Dec. 3. 1900; Nature **63**. 206. 1901. — W. S. FRANKLIN, Science **12**. 887. 1901. — H. POINCARÉ, Arch. néerl. (2) **5**. 252. 1900. — W. WIEN, Drudes Ann. **5**. 501. 1901. — P. DUHEM, Acta fennica **18**. 1. 1891; Lecons sur l'Electricité et le Magnétisme. Paris 1891—92. 2 Bde.; Am. Journ. of Math. **12**. 117. 1895. — H. A. LORENTZ, Versl. Ak. Wet. Amsterdam 1900/01. 418. — TH. TOMMASINA, Arch. sc. phys. nat. (4) **15**. 451. 1903. — R. GANS, Phys. Zeitschr. **6**. 803. 1905. — H. REISSNER, Sitzb. Berl. Math. Ges. **4**. 23, 61. 1905. — W. SUTHERLAND, Phil. Mag. (6) **7**. 417; **8**. 685. 1904. — F. WACKER, Phys. Zeitschr. **7**. 300. 1906.

---

[1] M. FARADAY, Phil. Trans. **141**. 1. 1851; Experimental Researches 24. Reihe. Nr. 2702 ff. Deutsche Ausgabe von Kalischer, Bd. III, S. 146. — [2] H. A. LORENTZ, Versl. Kon. Ak. Wet. Amsterdam 31. März 1900. — [3] F. ZÖLLNER, Erklärung d. universellen Gravitation usw. Mit Beiträgen von W. WEBER. Leipzig, Staackmann 1881. 128 pp.

# Sachregister.[1]



[1] Die Zahlen geben die Seiten an.

E

## F



## G



## H



## T

## U



## V



## W

# Berichtigungen und Druckfehlerverzeichnis.

S. 265—267: Der größere Teil der von STEFAN MEYER herrührenden Zahlen bezieht sich, wie auch jedesmal deutlich angegeben, auf Pulver der betreffenden Substanz. Sie haben daher ohne Angabe der Verteilungsdichte des Pulvers keine präzise Bedeutung und dürfen jedenfalls nicht als Suszeptibilitäten der Stoffe aufgefaßt werden. Inzwischen war nun Herr STEFAN MEYER selbst so freundlich, die Umrechnung in die wahren Suszeptibilitäten der Substanzen, die in seinen Originalarbeiten fehlte, vorzunehmen und mir die Ergebnisse für diese Berichtigung zur Verfügung zu stellen; ich lasse die Zahlen hier folgen:

a) Elemente (S. 265)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Antimon | —3,6 | Phosphor (rot) | —0,5 |
| Beryll | 142 | Schwefel | —0,71 |
| Bor | 10,5 | Silicium | 0,50 |
| Cer | 1627 | Thorium | 757 |
| Didym | 715 | Titan | 70,6 |
| Erbium | 1260 | Vanadium | 18,3 |
| Lanthan | 580 | Wismut | —9,5 |
| Magnesium | 1,0 | Zirkon | —0,65 |
| Osmium | 8,7 | | |

b) (Tabelle S. 266)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cäsiumchlorid | —1,1 | Samariumoxyd | 482 |

d) (Tabelle S. 267)

Lithium-Verbindungen —0,43 bis —0,94
LiCl —0,94.
Boroxyd $B_2O_3$ —0,77.
Natrium-Verbindungen —0,47 bis —1,11
NaCl —0,89; NaBr —1,11; NaJ —1,10; $Na_2CO_3$ —0,47.
Magnesium-Verbindungen —0,60 bis —1,22
MgO —0,64; MgCl —1,0; $MgSO_4$ —0,95; $MgCO_3$ —1,22.
Aluminium-Verbindungen —0,64 bis —1,50
$Al_2O_3$ —1,50; $Al_2(SO_4)_3$ —1,03.
Kalium-Verbindungen —0,92 bis —0,95
KFl —0,92; KCl —0,94; KBr —0,95; KJ —0,95.
Calcium-Verbindungen —0,71 bis —1,13
CaO —0,86; CaFl —0,95; CaCl —0,88; $CaSO_4$ —1,13.
Chrom-Verbindungen +120 bis 126 (außer $Cr_4O_4H_2$)
$Cr_2O_3$ +120.
Kupfer-Verbindungen sehr verschieden, teils +, teils —
CuO +19,8; $CuSO_4$ +36; $CuCl_2$ +3,5; $Cu_2Br_2$ —0,76;
$Cu_2J_2$ —1,43.

Zink-Verbindungen —1,34 bis —1,47.
Selenige Säure —0,86.
Strontium-Verbindungen —0,66 bis —2,04.
Silber-Verbindungen —1,56 bis —1,64
AgCl —1,56; AgBr —1,64; AgJ —1,62.
Kadmium-Verbindungen —0,83 bis —1,96.
Zinn-Verbindungen sehr verschieden, teils +, teils —.
Barium-Verbindungen —0,5 bis —1,5 (außer $BaO_2$)
BaO —0,80; $BaCl_2$ —1,25: BaS —1,06.
Quecksilber-Verbindungen —0,81 bis —2,22
HgO —2,22; HgCl —1,28; $HgCl_2$ —0,81; HgS —1,36.
Platin-Chlorür —0,11.
Gold-Chlorid —1,3.
Blei-Verbindungen —1,0 bis —1,61 (außer $PbO_2$?)
PbO —1,1; $PbFl_2$ —1,56; $PbCl_2$ —1,45; $PbBr_2$ —1,45;
$PbJ_2$ —1,61.
Uran-Verbindungen sehr verschieden, teils +, teils —
$UO_2$ +9,0.

Damit werden zugleich die bezüglichen Bemerkungen bzw. Fußnoten auf S. 265, 266, 279 und 281 hinfällig; und die auf die seltenen Metalle bezügliche Bemerkung der S. 266 ist dahin abzuändern, daß deren Magnetisierarbeit nur etwa ein Hunderttausendstel von der des Eisens beträgt; übrigens waren die betreffenden Präparate sicherlich Gemische verschiedener seltener Erden, vgl. St. Meyer, Wien. Sitzber. **110**. 541. 1891; **111**. 38. 1902.

Ferner muß es auf S. 270 statt Manganchlorid heißen: Manganochlorid; Herr R. H. Weber in Heidelberg war so freundlich, das zu bemerken.

Schließlich sei bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, daß die auf S. 286/87 erwähnte, von Heinrich und Freitag aufgefundene Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und $km$ (Konstanz des Produktes) durch eine seit der Abfassung des Artikels erschienene Arbeit von St. Meyer (Wien. Sitzber. **113**. 1007. 1904) nicht bestätigt worden ist, indem vielmehr $km$ von $\mathfrak{H}$ unabhängig ist.

S. 426, Z. 16 u. 27 lies: Konvektion statt Konvention.

S. 438, Z. 4 von oben lies: W. König statt Drude.

S. 482: Die Tabellen sind noch bei der Korrektur auf Grund der von Adolf Schmidt in Potsdam in den Landolt-Börnsteinschen Tabellen mitgeteilten Zahlen umgeändert worden. In diese letzteren aber hat sich, wie mir Herr Schmidt schreibt, ein Versehen eingeschlichen, indem bei der Deklination statt der für 1905 die für 1901 gültigen Werte eingesetzt wurden. Um für 1905 richtig zu sein, müssen alle Zahlen algebraisch um 0,3 Grad vergrößert, ziffernmäßig also um ebensoviel verkleinert werden. Das Kärtchen für Mitteleuropa (Fig. 205 auf S. 481), das nicht mehr umgezeichnet werden konnte, ist dadurch von diesem Versehen verschont geblieben. Bei der Inklination und der Intensität sind auch die Zahlentabellen richtig.

S. 525, auf der rechten Seite von Formel (12a) ist der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen.

S. 530, Z. 13 von unten lies: $\omega$ statt $b$.

S. 538, Z. 2 von unten lies: Hohlzylinder statt Zylinder.

S. 551, Z. 7 von oben muß auf der linken Seite der Gleichung ein (rundes) $\mathfrak{E}$ statt $E$ stehen.

S. 555, Z. 1 von oben lies: und $A$ statt und $C$.

S. 575, Z. 10 von oben lies: $Iw$ statt $In$.

S. 577, Z. 11 von unten lies: $\frac{1}{c}$ statt $C$.

S. 581, Z. 5 und 6 von oben lies in den Formeln für $a_1$ und $a_2$: $L_1'^2$ statt $L_1^2$.

S. 581, Z. 20 von oben lies: $a_2 = -\frac{L_{12}}{L_2} a_1$ statt $a_2 = \frac{L_{12}}{L_1} a_1$.

S. 592, letzte Zeile lies auf der rechten Seite der Gleichung: $2\pi$ statt $\pi$.

S. 603, Z. 13 von unten lies: $\varkappa = 0{,}54\,\varrho$ statt $\varkappa = 0{,}54\,r$.

S. 605, Z. 6 von unten lies: $\frac{\iota\alpha r^2}{4}$ statt $\frac{\iota\alpha\varrho^2}{4}$.

S. 605, Z. 5 von unten lies auf der rechten Seite der Gleichung (14):

$$\frac{1}{2x}(1+\ldots) \text{ statt } \frac{1}{24}(1+\ldots).$$

S. 610, Z. 7 von oben, Gleichung (9) lies: $\frac{1}{CL}$ statt $\frac{1}{4CL}$.

S. 612 in den Anmerkungen, Z. 6 von unten lies: Phys. Zeitschr. **3**. 384. 1902 statt **2**. 384. 1900.

S. 619, der erste Posten der zweiten Gleichung (3) muß $\frac{d^2V_2}{dt^2}$ statt $\frac{d^1V_2}{dt^2}$ heißen.

S. 620, die zweite Gleichung (12) lies: $V_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\{A\cos(nt+\varphi) - A'\cos(n't+\varphi')\}$.

S. 621, Z. 6 von oben lies: $V_1 = V_0$ statt $V_1 = 0$.

S. 621, Gleichung (17) muß der Exponent $\frac{\delta_1}{\delta_2-\delta_1}$ statt $\frac{\delta_1}{\delta_1-\delta_2}$ heißen.

S. 625, Z. 8 von unten lies: Abschnitt 22 statt Abschnitt 21.

S. 633, Z. 21 von unten lies: abblenden statt ablenken.

S. 636, Gleichung (8), rechte Seite lies: $\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2}$ statt $\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x_2}$.

S. 638, Z. 13 von oben lies: (2b) statt (3b).

S. 639, Z. 3 von oben sind die Worte und Zeichen hinter „nehmen" zu streichen.

S. 640, Z. 2 von oben lies: $4\cdot 10^{-4}$ statt $4{,}8\cdot 10^{-4}$.

S. 642, Z. 8 von oben sind die Gleichungen als (30) zu numerieren.

S. 644, Z. 2 und 19 von oben lies: Figur 272 statt Figur 271 und Figur 273.

S. 644, Z. 25 von oben lies: der Gleichung für $\mathfrak{S}$ statt Gleichung (13).

S. 645, Z. 1 von oben ist hinter „Schwingung" einzuschalten: pro Zeiteinheit.

S. 646, Z. 17 von oben muß heißen: Vielfaches der Wellenlänge der Eigenschwingungen des Drahtes $EF$ sein.

S. 646, Z. 7 von unten lies im Nenner: $r_0$ statt 2.

S. 648, Z. 5 von unten lies: Aus (30) statt Aus 1.

S. 651, Z. 14 von oben lies: letzten Gleichung (44) statt ersten Gleichung (42).

S. 652, Formel (55) und S. 653 in den Formeln für $\frac{1}{C}$ und $L$ muß es heißen:

$$\log\left\{\frac{d+2\varrho+\sqrt{d^2-4\varrho^2}}{d+2\varrho-\sqrt{d^2-4\varrho^2}}\right\} \text{ statt } \log\left\{\frac{d+\sqrt{d^2-4\varrho^2}}{d-\sqrt{d^2-4\varrho^2}}\right\}.$$

S. 669, Z. 11 von unten lies: Eisenschraubenkohärer statt Nickelfeilichtkohärer.

S. 675, Z. 9 von oben lies: S. 664 statt S. 646.

S. 675, Z. 11 von unten lies: Leitfähigkeit[6] statt Leitfähigkeit[7].

S. 675, Z. 6 von unten lies: ändert[7] statt ändert[8].

S. 687, Z. 11 von oben muß es anormalen statt normalen heißen.

---

Bd. IV, S. 220, Z. 20 lies: unabhängig statt abhängig.

„ S. 276, Z. 6 von oben lies: $c/K = n^2$, $c_1/K = 2\varepsilon$.

„ S. 276, Z. 14 von oben lies: imaginär statt reell.

„ S. 309, Z. 13 von unten ist 1879 zu streichen.

